



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



## **Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne**

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

---

Dominik Kwietniak

# Jaki jest kolor mojej czapeczki?

Wykład

Kraków, 8 października 2011 r.



## Motto

*I nastąpi taki moment, gdy społeczeństwo samo upomni się, by je uczyć **matematycznego myślenia**, bo to jest opłacalne — tak stało się przecież, gdy ogromne pieniądze zostały przez ludzi włożone w naukę języka angielskiego i windowsów. I to będzie wielki sukces Gardnera, pierwszego, który odkrył tę sprawę. Pewnie to nie będzie zaraz. Ale będzie, czego jestem tak pewien, jak tego, że swego czasu Pitagoras zapoczątkował istnienie dewiantów, zwanych matematykami (choć też przy tym nie byłem).*

prof. Marek Kordos, Delta, styczeń 2011.

[http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2011/01/01/Dlaczego\\_Martin\\_Gardner/index.html](http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/2011/01/01/Dlaczego_Martin_Gardner/index.html)

## Puchary

### Zadanie

W jednym pucharze jest woda, w drugim wino. Zaczepnięto z drugiego pucharu kieliszek wina i wiano do pierwszego. Potem zaczepnięto ten sam kieliszek z pierwszego pucharu i wiano do drugiego. Czy na końcu więcej było wody w winie, czy wina w wodzie?

# Bajka o Trzech Misiach

Za górami, za rzekami, w małym domku w ciemnym lesie mieszkali sobie Trzy Misie.

Pewnego dnia przybył do nich Zły Wilk, który powiedział: „Jeżeli nie rozwiążecie mojej zagadki, to was zjem!”.

i zadał Trzem Misiom następującą zagadkę. . .

## Bajka o Trzech Misiach, c.d.

*„Za chwilę — rzekł wilk — włożę Wam na głowy kolorowe czapeczki, w ten sposób, że każdy z was będzie widział kolor czapeczek na głowach pozostałych misiów, ale nie będzie widział jaki kolor ma jego czapeczka.”*

*„Każda z czapeczek będzie w jednym z trzech możliwych kolorów: czerwonym, żółtym lub zielonym, . . .”*

*„. . . ale wcale nie jest powiedziane, że kolory czapeczek muszą być różne — jestem złośliwym Złym Wilkiem i mogę wam wszystkim włożyć na głowy czapeczki zielone.”*

## Bajka o Trzech Misiach, c.d.

„Następnie każda z was podejdzie do mnie i powie mi na ucho jaki jest kolor jej czapeczki.”

„Jeżeli któraś odgadnie dobrze, to pękne ze złości.”

„Jeżeli żadna z was nie zgadnie jaki kolor ma jej czapeczka, to was zjem!”

„Możecie teraz naradzić się jak postąpić, ale po włożeniu czapek nie wolno się już wam w żaden sposób porozumiewać, bo...”

„Nas zjesz!” — dokończyły przerażone misie.

## Kolorowe czapeczki — uogólnienie

- ▶ Misiów jest  $n$ , gdzie  $n = 2, 3, 4, \dots$
- ▶ W pewnej chwili Zła Czarownica wyczarowuje na głowie każdego misia czapczkę w jednym z  $n$  kolorów.
- ▶ Każdy miś widzi czapczki **wszystkich** swoich towarzyszy, ale nie widzi swojej.
- ▶ Każdy miś musi w myślach odpowiedzieć na pytanie: *Jakiego koloru czapczkę mam na głowie?*
- ▶ Jeżeli **choć jeden** miś odgadnie kolor swojego nakrycia głowy, to Zła Czarownica rozsypie się w proch. W przeciwnym razie marny będzie misiów los.
- ▶ Misie mogą naradzić się i ustalić strategię postępowania, ale po pojawieniu się czapek nie wolno im już w żaden sposób się porozumiewać między sobą, bo...

## Kolorowe czapeczki — urozmaicenie „*Wszyscy albo nikt*”

- ▶ Misiów jest  $n$ , gdzie  $n = 2, 3, 4, \dots$
- ▶ W pewnej chwili na głowie każdego misia pojawia się czapeczka **w jednym z dwóch kolorów**.
- ▶ Każdy miś widzi czapeczki **wszystkich** swoich towarzyszy, ale nie widzi swojej.
- ▶ Każdy miś musi w myślach odpowiedzieć na pytanie: *Jakiego koloru czapeczkę mam na głowie?*
- ▶ Misie wygrywają jeżeli **wszystkie odgadną** kolor swoich czapecek, lub **żaden** miś nie odgadnie koloru swojej czapeczki.
- ▶ Misie mogą naradzić się i ustalić strategię postępowania, ale po pojawieniu się czapecek nie wolno im już w żaden sposób porozumiewać się między sobą, bo...

## Kolorowe czapeczki — nieskończenie wiele wariantów

- ▶ Zadanie o czapeczkach można urozmaicać zmieniając liczbę misiów  $n$ , lub liczbę kolorów jakie widzą misie  $k$ .
- ▶ Ale jeden z warunków zadania opisuje, **które** czapeczki widzi każdy miś.
- ▶ Możemy więc skomplikować to zadanie zakładając, że każdy miś może widzieć czapeczki na głowach niektórych swoich towarzyszy, tzn. parametrem zadania jest graf **widzialności** misiów opisujący, które misie mogą się widzieć.
- ▶ Dla każdego grafu mamy w ten sposób nowe zadanie...

# Kolorowe czapeczki — jeszcze jedno urozmaicenie

- ▶ Misiów jest  $n$ , gdzie  $n = 2, 3, 4, \dots$ . Misie siedzą na wierzchołkach **grafu skierowanego**.
- ▶ W pewnej chwili na głowie każdego misia pojawia się czapeczka w jednym z  $k$  kolorów.
- ▶ Każdy miś widzi czapeczki misiów, które siedzą na tych wierzchołkach grafu do których prowadzą krawędzie z jego wierzchołka, ale nie widzi swojej.
- ▶ Każdy miś musi w myślach odpowiedzieć na pytanie: *Jakiego koloru czapeczkę mam na głowie?*
- ▶ Misie wygrywają jeżeli **choć jeden** z nich odgadnie kolor swojego nakrycia głowy,
- ▶ Misie mogą naradzić się i ustalić strategię postępowania, ale po pojawieniu się czapecek nie wolno im już w żaden sposób się porozumiewać między sobą, bo...

## Trochę twierdzeń

### Twierdzenie

*Jeżeli  $n = k$  (misiów jest tyle samo co kolorów), to misie wygrywają wtedy i tylko wtedy, gdy graf widzialności jest grafem pełnym.*

### Twierdzenie

*Jeżeli  $k = 2$  (są tylko dwa kolory), to misie wygrywają wtedy i tylko wtedy, gdy graf widzialności zawiera cykl.*

### Lemat

*Jeżeli jest  $n$  misiów i  $k$  kolorów oraz kolory są przydzielane w sposób losowy, to prawdopodobieństwo, że dany miś odgadnie poprawnie wynosi  $1/k$ .*

### Lemat

*Jeżeli jest  $n$  misiów i  $k$  kolorów oraz kolory są przydzielane w sposób losowy, to średnia liczba misiów, które przy danej strategii odgadną poprawnie wynosi  $n/k$ .*

## Kolorowe czapeczki — urozmaicenie „Dwa kolory w kółku”

- ▶ Misiów jest  $n$ , gdzie  $n = 2, 3, 4, \dots$
- ▶ W pewnej chwili na głowie każdego misia pojawia się czapeczka **w jednym z dwóch kolorów**.
- ▶ Misie siedzą na okręgu i każdy miś widzi czapeczkę **tylko misia który siedzi na prawo od niego**. Oczywiście nie widzi też swojej.
- ▶ Każdy miś musi w myślach odpowiedzieć na pytanie: *Jakiego koloru czapeczkę mam na głowie?*
- ▶ Jeżeli **choć jeden** miś odgadnie kolor swojego nakrycia głowy.
- ▶ Misie mogą naradzić się i ustalić strategię postępowania, ale po pojawieniu się czapecek nie wolno im już w żaden sposób porozumiewać się między sobą, bo...

## Kolorowe czapeczki — urozmaicenie „Dwa kolory w kółku”

- ▶ Misiów jest  $n$ , gdzie  $n = 2, 3, 4, \dots$
- ▶ W pewnej chwili na głowie każdego misia pojawia się czapeczka **w jednym z dwóch kolorów**.
- ▶ Misie siedzą na okręgu i każdy miś widzi czapeczkę **jednego lub obu sąsiadów**. Oczywiście nie widzi swojej.
- ▶ Każdy miś musi w myślach odpowiedzieć na pytanie: *Jakiego koloru czapeczkę mam na głowie?*
- ▶ Jeżeli **choć jeden** miś odgadnie kolor swojego nakrycia głowy.
- ▶ Misie mogą naradzić się i ustalić strategię postępowania, ale po pojawieniu się czapecek nie wolno im już w żaden sposób porozumiewać się między sobą, bo...
- ▶ Udowodnić, że misie mają strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy każdy każdy miś widzi dokładnie jednego ze swoich sąsiadów

## Kolorowe czapeczki a kody Hamminga

- ▶ W pewnej chwili Zła Czarownica wyczarowuje na głowie każdego z trzech misiów czapeczkę w jednym z **dwóch** kolorów (czerwonym i zielonym).
- ▶ Każdy miś widzi czapeczki **wszystkich** swoich towarzyszy, ale nie widzi swojej.
- ▶ Każdy miś musi w myślach odpowiedzieć na pytanie: *Jakiego koloru czapeczkę mam na głowie?* Ma do wyboru **trzy** odpowiedzi: **zielony**, **czerwony** lub **nie wiem**.
- ▶ Jeżeli **wszystkie** misie pomyślą *nie wiem* lub chociaż **jeden** pomyśli o **złym** kolorze, to marny będzie misiów los.
- ▶ Misie mogą naradzić się i ustalić strategię postępowania, ale po pojawieniu się czapek nie wolno im już w żaden sposób się porozumiewać między sobą, bo...