Matematyczne niespodzianki

Marcin Mazur

W niniejszym opracowaniu pokażę przykłady problemów praktycznych, których (dla większości zaskakujące) rozstrzygnięcie można otrzymać poprzez prostą analizę, wykorzystującą wyłącznie elementarne pojęcia i techniki z zakresu matematyki szkolnej. Naszą uwagę skupimy na następujących zagadnieniach: problem Monty'ego Halla, problem zbieżnych dat urodzin w określonej grupie osób, problem skuteczności testu medycznego na obecność bardzo rzadkiej choroby.

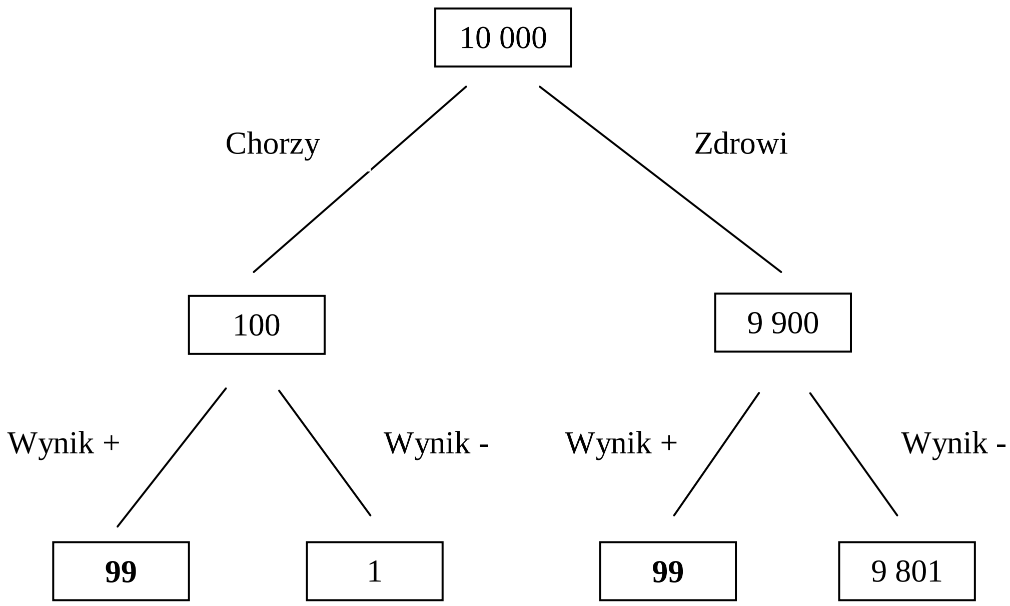
1. *Problem Monty'ego Halla*. Załóżmy, że uczestniczymy w grze, w której są trzy zasłonięte bramki. Za dwoma z nich są kozy, zaś za trzecią – samochód. Zostajemy poproszeni o wybranie jednej z bramek. Zanim wybrana przez nas bramka zostanie odsłonięta, osoba prowadząca grę (która wie, co jest schowane w każdej z bramek) otwiera jedną z pozostałych bramek odsłaniając kozę i pyta, czy chcemy zmienić swój wybór (tzn. wybrać drugą z nieodsłoniętych jeszcze bramek). Co powinniśmy zrobić, aby zmaksymalizować szansę wygranej? Okazuje się, iż zmieniając decyzję (czyli wybierając drugą nieodsłoniętą bramkę) zwiększamy dwukrotnie szansę wygranej, która początkowo była równa 1/3 (są 3 bramki, w jednej znajduje się samochód), Dzieje się tak dlatego, że jeżeli wcześniej wybraliśmy bramkę z kozą (czyli przegrywającą) – oczywiście z prawdopodobieństwem 2/3 – to zmieniając ją na inną z pewnością wskażemy bramkę z samochodem (ponieważ druga bramka z kozą zostanie wcześniej otwarta przez osobę prowadzącą grę).
2. *Problem zbieżnych dat (dzień, miesiąc) urodzin w określonej grupie osób*. Czy w 50-osobowej grupie losowo wybranych osób znajdą się co najmniej dwie, które obchodzą urodziny w tym samym dniu? Wydawać by się mogło, iż szansa na zajście takiego zdarzenia jest znikoma. Okazuje się jednak, że jest to zdarzenie prawie pewne, co można łatwo pokazać za pomocą wyliczeń bazujących na elementarnych pojęciach i technikach z zakresu „szkolnej" teorii prawdopodobieństwa. Wystarczy najpierw

obliczyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego, czyli zdarzenia głoszącego, iż każda z osób urodziła się w innym dniu roku – można dla uproszczenia założyć (nie zmieni to istotnie wyniku), że rok ma 365 dni – a potem otrzymany wynik odjąć od 1. Podsumowując, szukane prawdopodobieństwo wynosi:

$$1 - (365/365)\cdot(364/365)\cdot\ldots\cdot(316/365),$$

co jest liczbą bardzo bliską 1.

3. *Problem skuteczności testu medycznego na obecność rzadkiej choroby*. Załóżmy, że testujemy obecność pewnej rzadkiej choroby (1% populacji choruje) testem o wysokiej skuteczności (99%). Czy wynik pozytywny świadczy (z dużym prawdopodobieństwem) o tym, że osoba poddana testowi jest rzeczywiście chora na tę chorobę? Okazuje się, że nie – jest tylko 50% szansa na to, że taka osoba choruje. Można to łatwo wyliczyć poprzez rozrysowanie i analizę prostego drzewka, reprezentującego opisaną sytuację dla 10 000 osobowej populacji. Wygląda ono następująco:



Jak widać, wśród osób z wynikiem pozytywnym jest tyle samo zdrowych, co chorych, stąd szukane prawdopodobieństwo wynosi 1/2.