Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Liczby Bernoulliego

Piotr Niemiec

Kraków, 8 października 2011

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie

Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Znajdowanie wzoru na sumę potęg (o ustalonym naturalnym wykładniku) kolejnych liczb naturalnych to fascynujący problem, który interesował już XVII-wiecznych matematyków. Prosty dowód dobrze znanego wzoru

$$1 + 2 + 3 + ... + n = n(n+1)/2$$

przypisywany jest Gaussowi. Znacznie mniej znane są wzory na sumę wyższych potęg. Poniższe trzy częstokroć można znaleźć w tablicach matematycznych:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = [n(n+1)/2]^2$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = n^5/5 + n^4/2 + n^3/3 - n/30$$

Powyższe wzory nie są "przypadkowe". Okazuje się, że dla dowolnie obranej liczby naturalnej p istnieje wielomian S_p (jeden jedyny) taki, że

$$1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p = S_p(n)$$

dla każdej liczby naturalnej n. Rzadko kto jednak pamięta wzór na S_p dla p większych od 3. Jeszcze mniej osób jest świadomych tego, że każdy z tych wzorów można samodzielnie wyznaczyć, i to w miarę prosto. Odkrycia tego dokonał szwajcarski matematyk Jakub Bernoulli (1654-1705). Szukając metody wyznaczania wielomianów S_p i odkrył związki między ich współczynnikami przy zmieniającym się p. Na jego właśnie cześć pewne ważne w matematyce stałe nazwano *liczbami Bernoulliego*.

Precyzyjnie, n-ta liczba Bernoulliego, oznaczana przez B_n, to współczynnik przy potędze pierwszej w wielomianie S_n.

Przyglądnijmy się wzorom na sumy potęg raz jeszcze:

$1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 = 1 \cdot n$ $B_0 = 1$

$1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + n^1 = 1/2 \cdot n^2 + 1/2 \cdot n$ $B_1 = 1/2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/3 \cdot n^3 + 1/2 \cdot n^2 + 1/6 \cdot n$ $B_2 = 1/6$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = 1/4 \cdot n^4 + 1/2 \cdot n^3 + 1/4 \cdot n^2$ $B_3 = 0$

$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4 = 1/5 \cdot n^5 + 1/2 \cdot n^4 + 1/3 \cdot n^3 - 1/30 \cdot n$ $B_4 = -1/30$

$1^5 + 2^5 + 3^5 + ... + n^5 = 1/6 \cdot n^6 + 1/2 \cdot n^5 + 5/12 \cdot n^4 - 1/12 \cdot n^2$ $B_5 = 0$

$1^6 + 2^6 + 3^6 + ... + n^6 = 1/7 \cdot n^7 + 1/2 \cdot n^6 + 1/2 \cdot n^5 - 1/6 \cdot n^3 + 1/42 \cdot n$ $B_6 = 1/42$

$1^7 + 2^7 + 3^7 + ... + n^7 = 1/8 \cdot n^8 + 1/2 \cdot n^7 + 7/12 \cdot n^6 - 7/24 \cdot n^4 + 1/12 \cdot n^2$ $B_7 = 0$

$1^8 + 2^8 + 3^8 + ... + n^8 = 1/9 \cdot n^9 + 1/2 \cdot n^8 + 2/3 \cdot n^7 - 7/15 \cdot n^5 + 2/9 \cdot n^3 - 1/30 \cdot n$ $B_8 = -1/30$

$1^9 + 2^9 + 3^9 + ... + n^9 = 1/10 \cdot n^{10} + 1/2 \cdot n^9 + 3/4 \cdot n^8 - 7/10 \cdot n^6 + 1/2 \cdot n^4 - 3/20 \cdot n^2$

$B_9 = 0$

$1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + ... + n^{10} = 1/11 \cdot n^{11} + 1/2 \cdot n^{10} + 5/6 \cdot n^9 - n^7 + n^5 - 1/2 \cdot n^3 + 5/66 \cdot n$

$B_{10} = 5/66$

Na pierwszy rzut oka pojawiające się współczynniki są zupełnie przypadkowe. Można jednak zauważyć pewne reguły, które okazują się być zawsze prawdziwe:

- Liczby Bernoulliego o numerach parzystych dodatnich są na przemian dodatnie i ujemne.
- Liczby Bernoulliego o numerach nieparzystych większych od *1* są równe *0*.
- Wszystkie liczby Bernoulliego, z wyjątkiem tej o numerze *0*, są liczbami wymiernymi niecałkowitymi.
- Wielomian S_p jest stopnia dokładnie $p+1$ i współczynnik przy najwyższej potędze to $1/(p+1)$, a wyrazu wolnego brak. Przy potędze p-tej stoi zawsze $1/2$. Poza tą potęgą w wielomianie S_p występują jedynie potęgi dodatnie o innej parzystości niż p (i występują one wszystkie) i wszystkie współczynniki są wymierne.

Aby wyznaczyć wielomian S_p, przyjmujemy, że ma postać

$$S_p(x) = 1/(p+1) \cdot x^{p+1} + 1/2 \cdot x^p + a_{p-1} \cdot x^{p-1} + a_{p-3} \cdot x^{p-3} + a_{p-5} \cdot x^{p-5} + ...$$

a potem rozwiązujemy układ równań wynikający z tożsamości

$$S_p(x) - S_p(x-1) = x^p$$

(w którym niewiadomymi są brakujące współczynniki; należy tu skorzystać z dwumianu Newtona na wyliczenie wyrażenia $S_p(x-1)$).

Zdumiewające związki między różnymi wielomianami S_p odkrył Bernoulli:

$$S_{p-1}(x) = 1/p \cdot [S_p'(x) - S_p'(0)]$$

gdzie S_p' oznacza pochodną wielomianu. Stosując ten wzór, można rekurencyjnie wyznaczać kolejne wielomiany. Otóż, znając S_p, najpierw wyliczamy jego funkcję pierwotną, która nie ma wyrazu wolnego (w przypadku wielomianów jest to bardzo proste zadanie). Jeśli tą funkcją jest wielomian Q, wtedy $S_{p+1}(x) = (p+1) \cdot Q(x) + a \cdot x$, gdzie a jest tak dobraną liczbą, by $S_{p+1}(1) = 1$. (Przy okazji, $B_{p+1} = a$).

Znane są wzory rekurencyjne i w postaci ogólnej na liczby Bernoulliego. Jednym z najbardziej spektakularnych wzorów, w którym pojawiają się liczby Bernoulliego, jest wzór odkryty przez Eulera. Otóż, dla dowolnej liczby dodatniej parzystej p:

$$1/1^p + 1/2^p + 1/3^p + 1/4^p + ... = (-1)^{p/2-1} \cdot (2\pi)^p \cdot B_p / (2 \cdot p!)$$

[po lewej stronie występuje sumowanie w nieskończoność, po prawej stronie w jednym z nawiasów pojawia się liczba "pi"]. Ze wzoru tego wynika m.in., że moduł n-tej liczby Bernoulliego jest olbrzymi dla dużych n parzystych (np. B_{90} to ułamek, który w liczniku ma *73* cyfry, a w mianowniku liczbę *272118*).

Na koniec jeszcze jedna ciekawostka. Mimo że mianowniki liczb Bernoulliego (w postaci nieskracalnej) zachowują się dość nieprzewidywalnie (np. $B_{14} = 7/6$, podczas gdy $B_{12} = - 691/2730$ [!]), są one wyrażalne ściśle precyzyjnym wzorem, w myśl twierdzenia von Staudta-Clausena (z roku 1840): mianownik B_n dla parzystego n to iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych p, że $p-1$ dzieli n.