KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Sławomir Cynk

Konstrukcje geometryczne

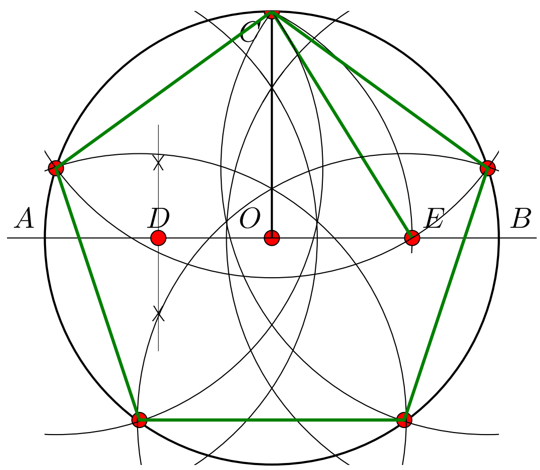
2 lutego 2013

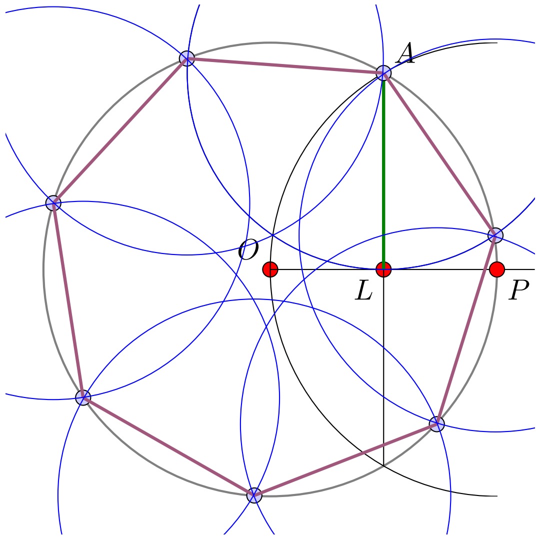
Trzy słynne problemy konstrukcyjne starożytnej matematyki greckiej
Wykonać przy pomocy cyrkla i linijki następujące konstrukcje

- Trysekcja kąta — podział kąta na trzy równe części
- Podwojenie sześcianu — wyznaczenie boku sześcianu o objętości dwa razy większej od danego sześcianu
- Kwadratura koła — konstrukcja kwadratu o polu równym polu danego koła

Starożytni Grecy ponadto umieli skonstruować n–kąt foremny dla $n = 3, 4, 5, 6$, ale nie umieli dla $n = 7$.

Poniższe rysunki zawierają dokładną konstrukcję pięciokąta foremnego oraz przybliżoną (z błędem rzędu 2‰) – siedmiokąta foremnego.





Konstrukcja pięciokąta foremnego może być łatwo wyprowadzona z równości

$$4\cos^2 72^\circ + 2\cos 72^\circ - 1 = 0, \qquad \text{czyli} \qquad \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Podobne wyliczenia pokazują, że liczby $\cos 40^o$ i $\cos\frac{360^o}{7}$ są pierwiastkami równań

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \qquad 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

Stosując metody geometrii analitycznej można zauważyć, że wykonalność konstrukcji punktu jest równoważna wyrażeniu jego współrzędnych przez pierwiastniki. Oczywiście pierwiastki równania kwadratowego wyrażają się przez pierwiastniki. Pierwiastki wielomianu stopnia 3 wyrażają się przez pierwiastniki jeżeli wielomian jest rozkładalny, czyli ma pierwiastek.

- Podwojenie sześcianu nie jest wykonalne, gdyż liczba $\sqrt[3]{2}$ nie wyraża się przez pierwiastniki stopnia 2.

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

- Trysekcja kąta φ jest wykonalna, jeżeli wielomian
$$x^3 - 3x - 2\cos\varphi$$
posiada pierwiastek wyrażający się przy pomocy liczb wymiernych, liczby $\cos\varphi$ i operacji arytmetycznych, np. dla $\varphi = 60^\circ$ mamy $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Ponieważ równanie
$$x^3 - 3x - 1 = 0$$
nie ma pierwiastków wymiernych, więc trysekcja kąta 60° nie jest wykonalna.
- Ponieważ wielomiany
$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \qquad 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$
nie mają pierwiastków wymiernych, więc konstrukcje siedmiokąta i dziewięciokąta nie są wykonalne.

Wykonalność konstrukcji n–kąta foremnego została rozstrzygnięta przez Pierre Wantzela, Twierdzenie Gaussa–Wantzela mówi, że konstrukcja n–kąta foremnego jest wykonalna wtedy i tylko wtedy, gdy n jest iloczynem potęgi dwójki i licznych liczb pierwszych Fermata. Znanych jest pięć liczb pierwszych Fermata: $3, 5, 17, 257, 65537$.

Przy badaniu wykonalności konstrukcji geometrycznych stosujemy wyniki Nielsa Abela i Evariste Galois na temat rozwiązalności równań algebraicznych.