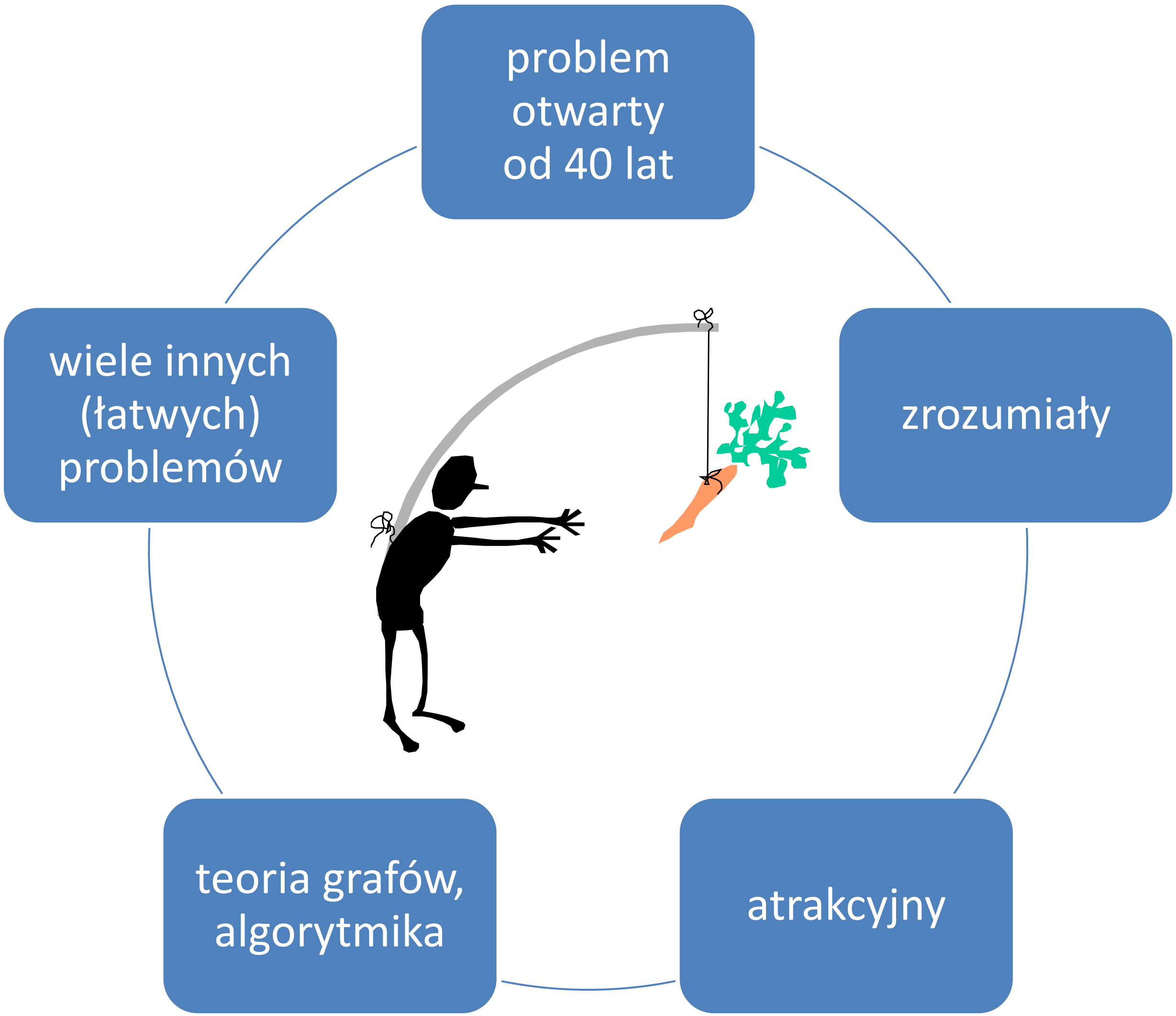
Młodzieżowe Uniwersytety Matematyczne
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Hipoteza Černego, czyli jak zaciekawić ucznia teorią grafów

Adam Roman, Instytut Informatyki UJ

Projekt realizowany przez Uniwersytet Rzeszowski w partnerstwie z Uniwersytetem Jagiellońskim oraz Państwową Wyższą Szkołą Zawodową w Chełmie
Centralne Biuro Projektu, Uniwersytet Rzeszowski ul. Rejtana 16a, 35-959 Rzeszów tel. 17 8721304, faks 17 8721281

Motywacja – dlaczego Hipoteza Černego?

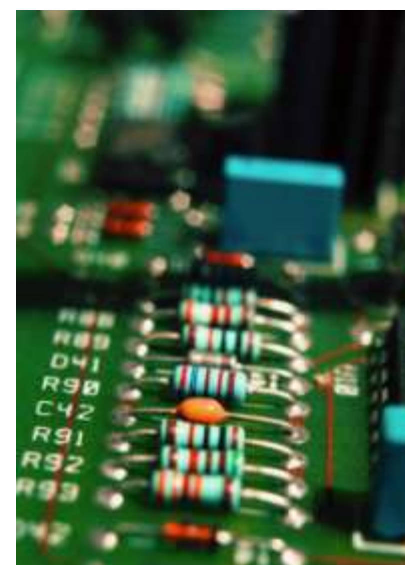


Synchronizacja

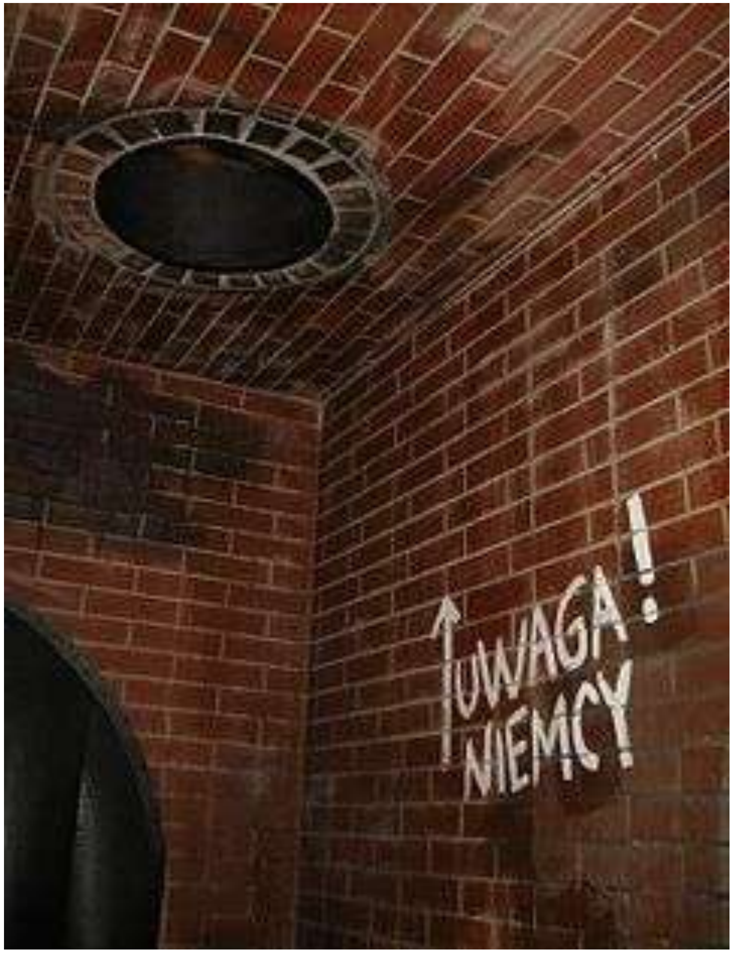
- Hipoteza Černego związana jest z pojęciem automatów synchronizujących
- Synchronizacja jest ważnym pojęciem w teorii automatów
- Synchronizacja ma wiele praktycznych zastosowań

Zastosowania synchronizacji

- znajdowanie pozycji na mapie
- testowanie obwodów elektrycznych
- resetowanie biokomputera
- kodowanie (kody odporne na błędy transmisji)
- tzw. orientery części
- … i inne



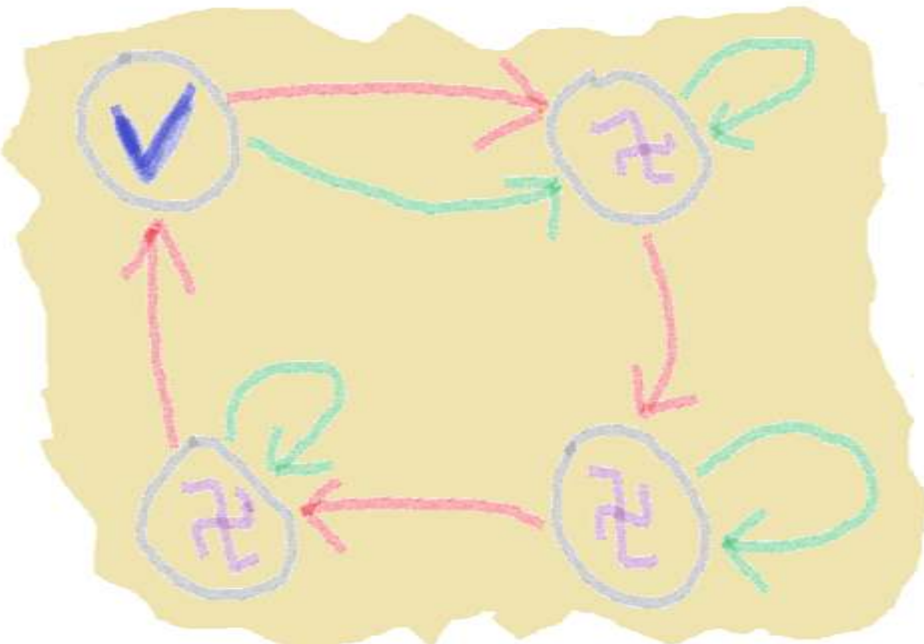
Problem partyzanta



Źródło: Muzeum Powstania Warszawskiego

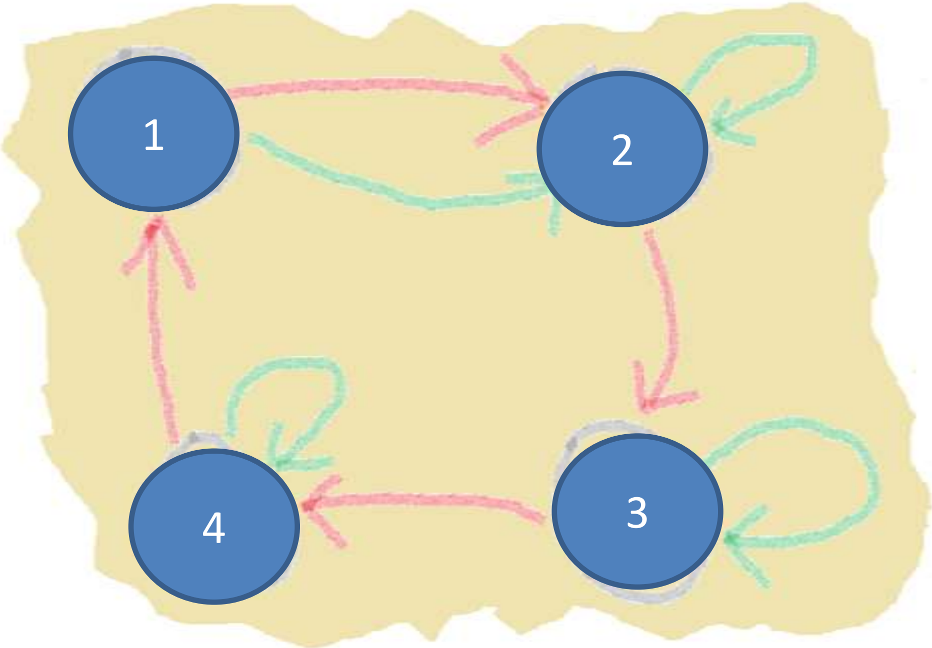
- komory połączone jednokierunkowymi tunelami
- z każdej komory wychodzą dwa tunele
- każda komora ma właz
- tylko jeden właz prowadzi na wolność
- jest ciemno – nie umiemy rozróżnić komór

Mapa kanałów

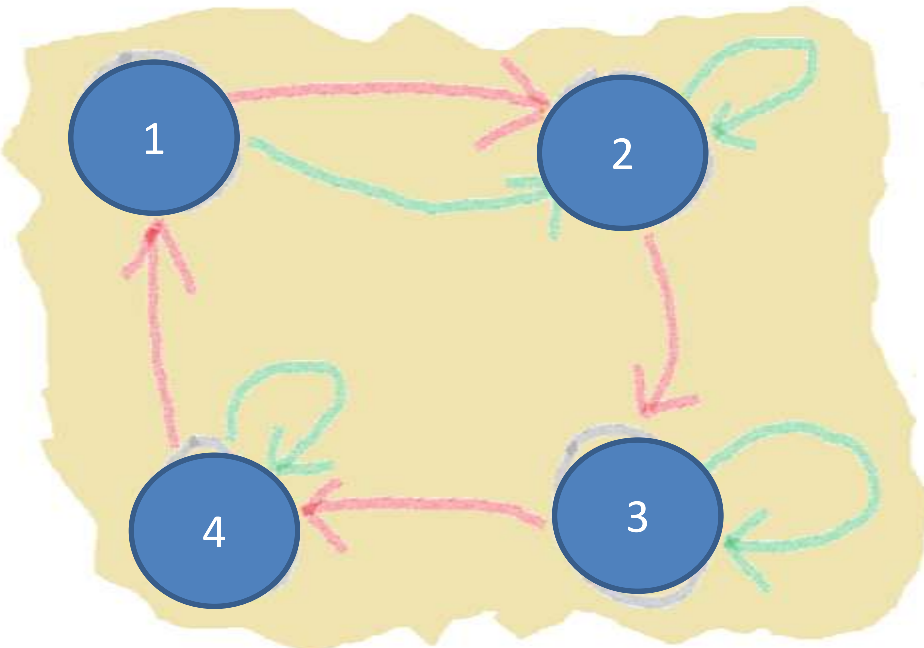


- dysponujemy mapą połączeń pomiędzy komorami
- na mapie zaznaczona jest również komora z włazem prowadzącym na wolność
- jak dojść do komory oznaczonej „V” nie wiedząc w której komorze jesteśmy?

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów

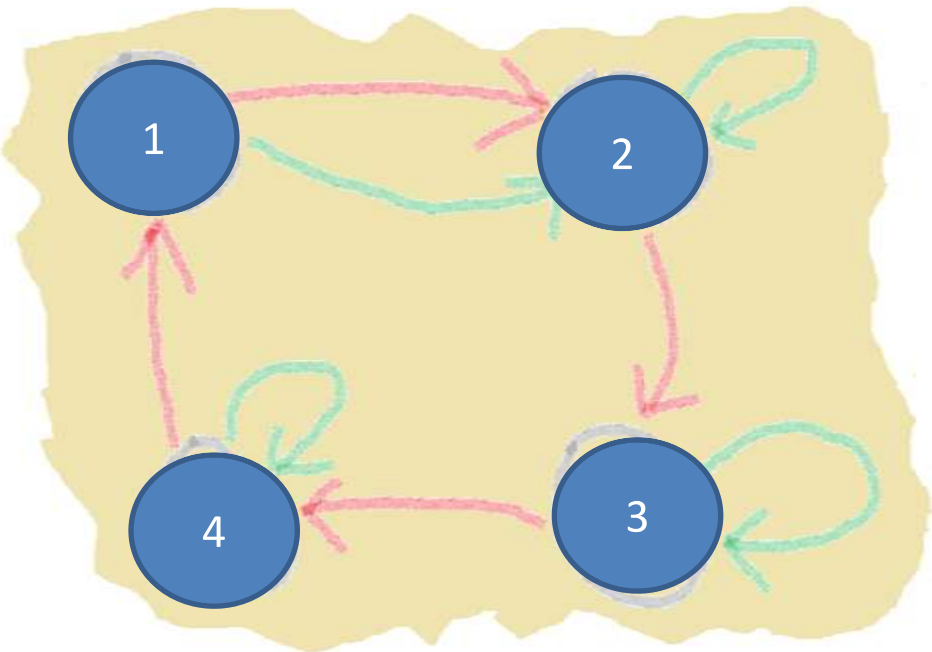


Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



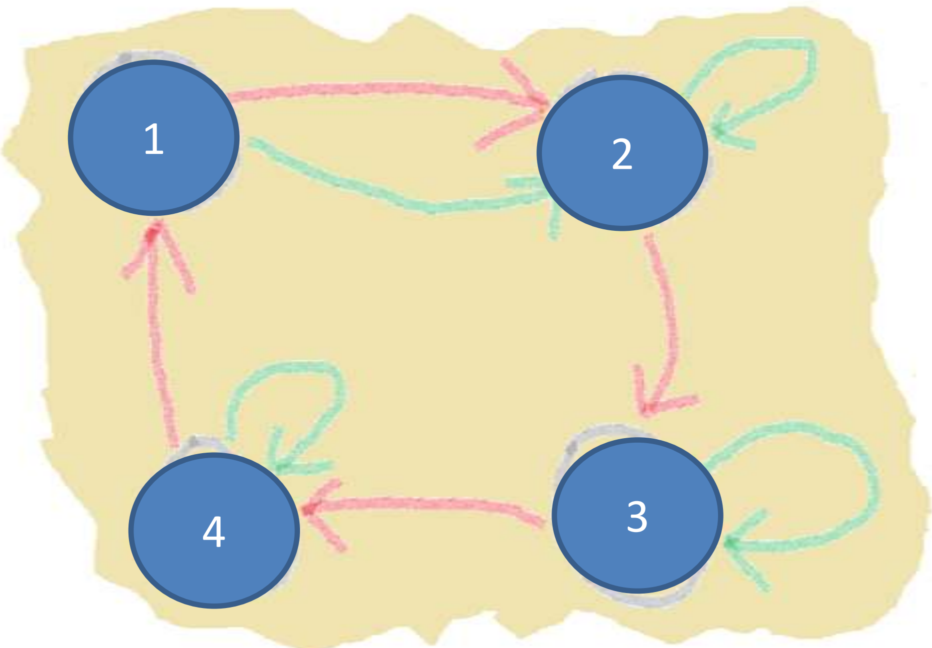
	1	2	3	4

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



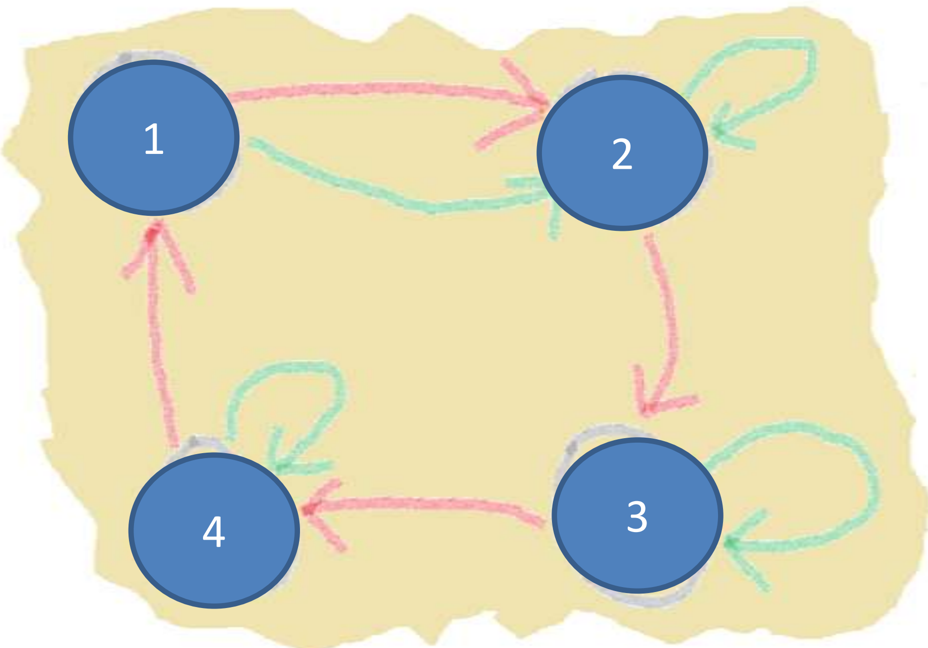
	1	2	3	4
	2			
	3			
	4			
	1			
	2			
	3			
	4			
	1			
	2			
	3			
	4			
	1			

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



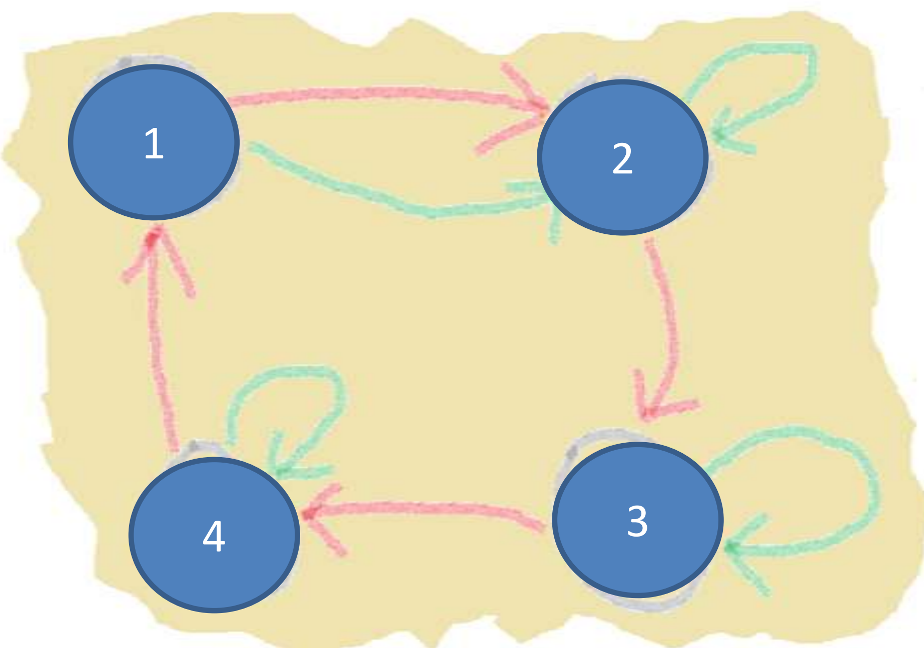
	1	2	3	4
	2	2		
	3	3		
	4	4		
	1	1		
	2	2		
	3	3		
	4	4		
	1	1		
	2	2		
	3	3		
	4	4		
	1	1		

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



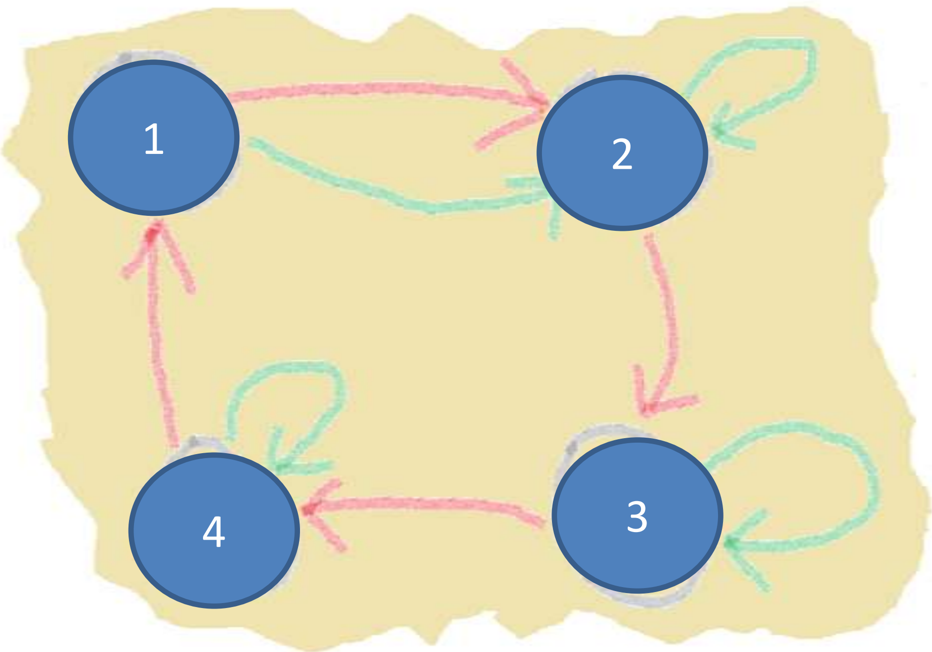
	1	2	3	4
	2	2	3	
	3	3	4	
	4	4	1	
	1	1	2	
	2	2	2	
	3	3	3	
	4	4	4	
	1	1	1	
	2	2	2	
	3	3	3	
	4	4	4	
	1	1	1	

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



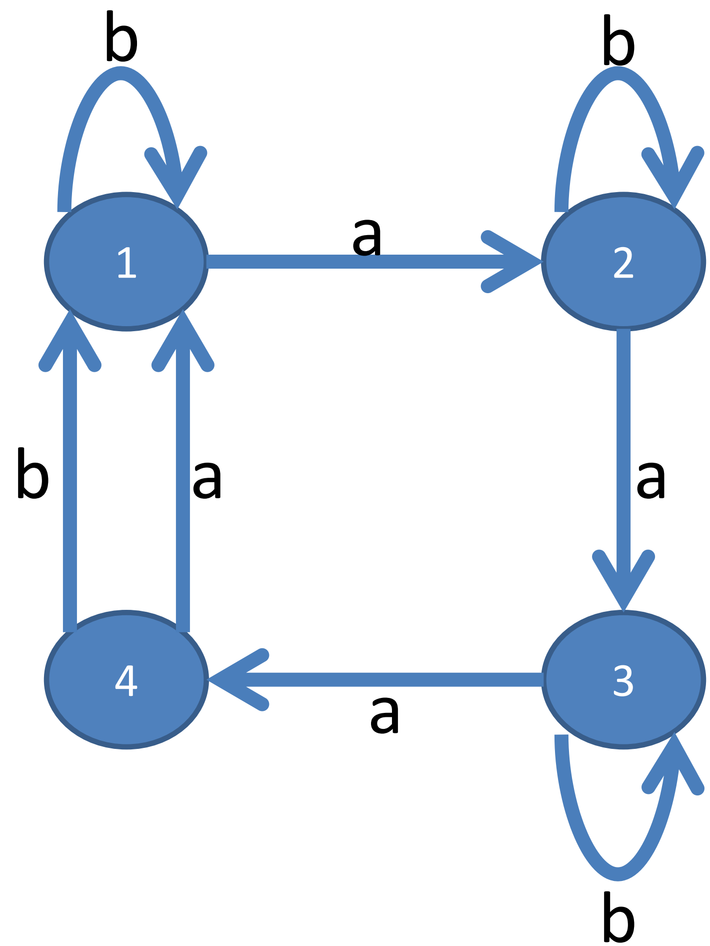
	1	2	3	4
	2	2	3	4
	3	3	4	1
	4	4	1	2
	1	1	2	3
	2	2	2	3
	3	3	3	4
	4	4	4	1
	1	1	1	2
	2	2	2	2
	3	3	3	3
	4	4	4	4
	1	1	1	1

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



	1	2	3	4
	2	2	3	4
	3	3	4	1
	4	4	1	2
	1	1	2	3
	2	2	2	3
	3	3	3	4
	4	4	4	1
	1	1	1	2
	2	2	2	2
	3	3	3	3
	4	4	4	4
	1	1	1	1

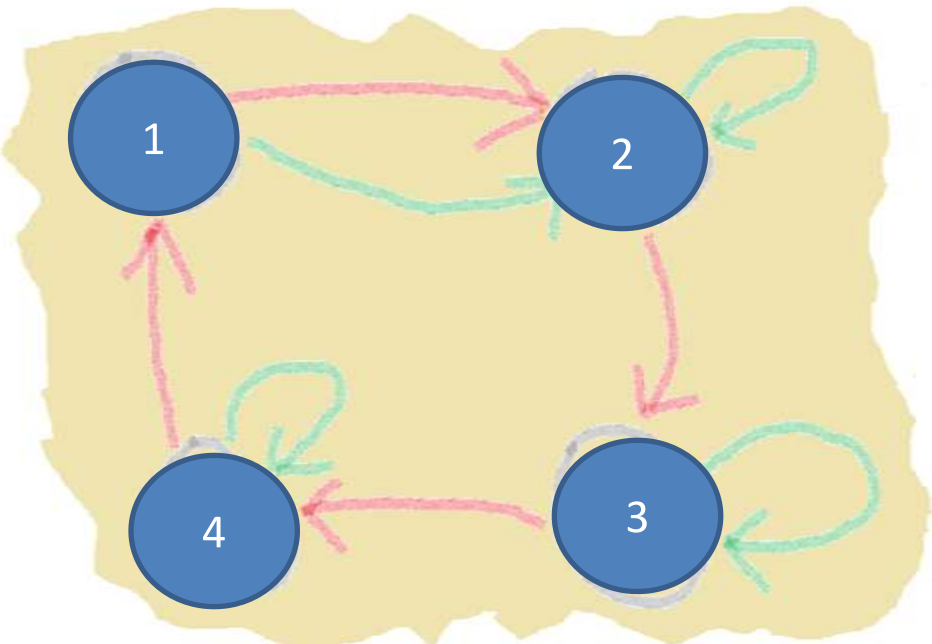
Sformalizowanie problemu



- digraf G=(V, E) etykietowany
- stały stopień wychodzący wierzchołka
- chodzenie po grafie:
  - 1.a = 2
  - 1.abba = 3 itd.
- słowo *w* synchronizuje graf, jeśli sprowadza wszystkie wierzchołki do jednego:

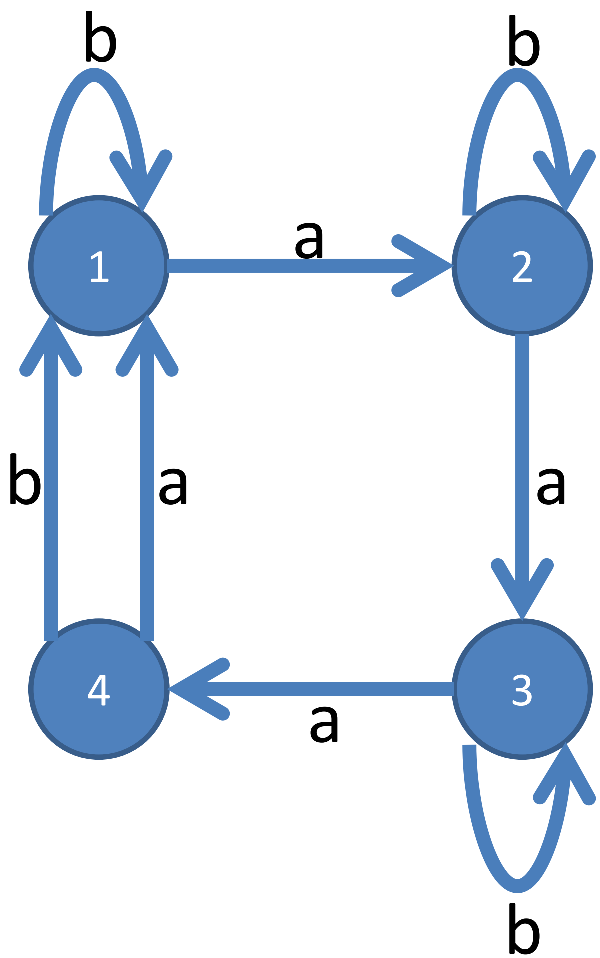
$$\exists p \in V \, \forall q \in V \; q.w = p$$

Problem 1: znajdź wyjście z kanałów



	1	2	3	4
	2	2	3	4
	3	3	4	1
	4	4	1	2
	1	1	2	3
	2	2	2	3
	3	3	3	4
	4	4	4	1
	1	1	1	2
	2	2	2	2
	3	3	3	3
	4	4	4	4
	1	1	1	1

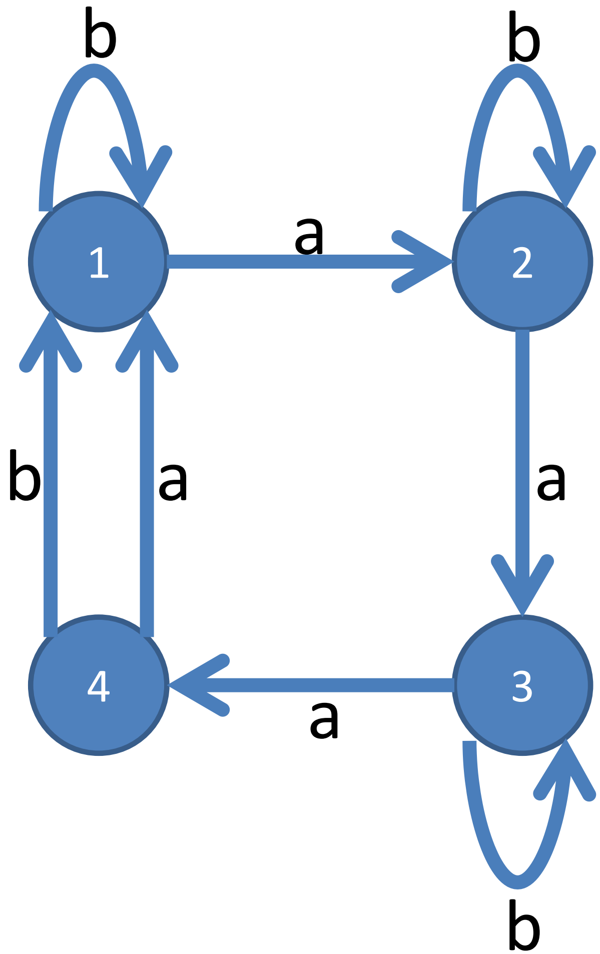
Problem 2: znajdowanie sekwencji synchronizującej



- wejście: graf
- wyjście: sekwencja synchronizująca (o ile istnieje)

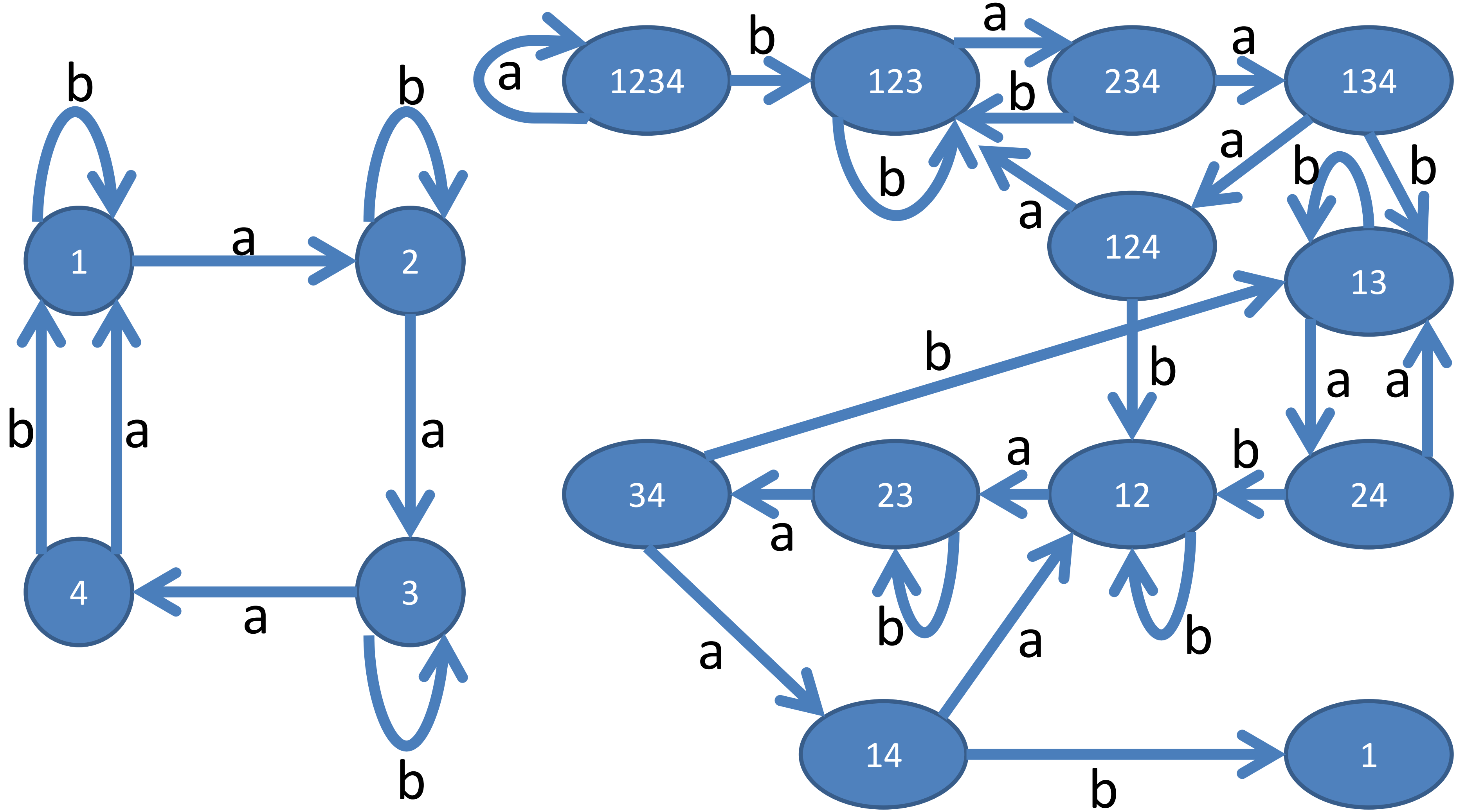
- pytania: kiedy istnieje sekwencja synchronizująca?
- jeśli istnieje, jaka może być jej długość?
- złożoność algorytmu

Problem 2: znajdowanie sekwencji synchronizującej

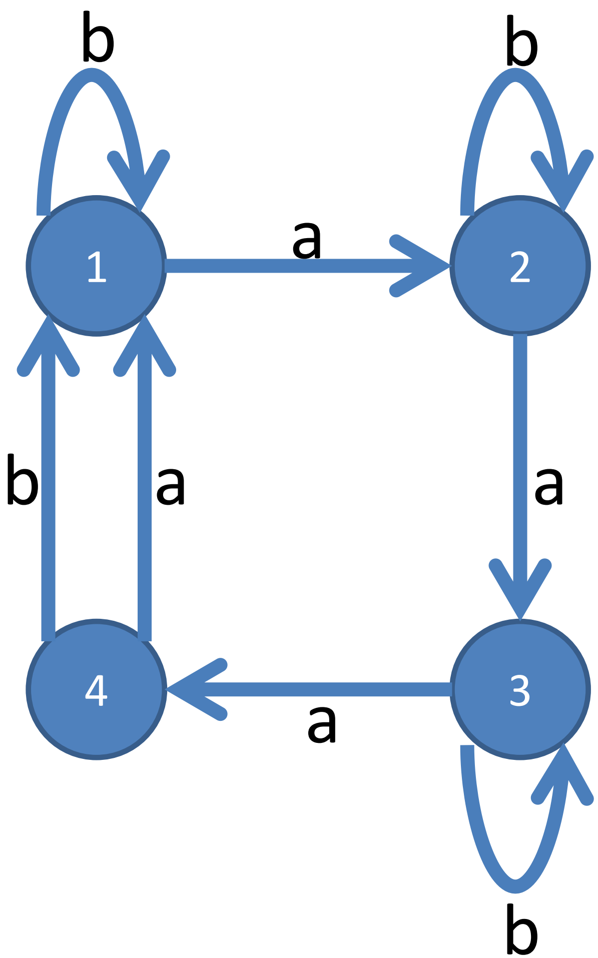


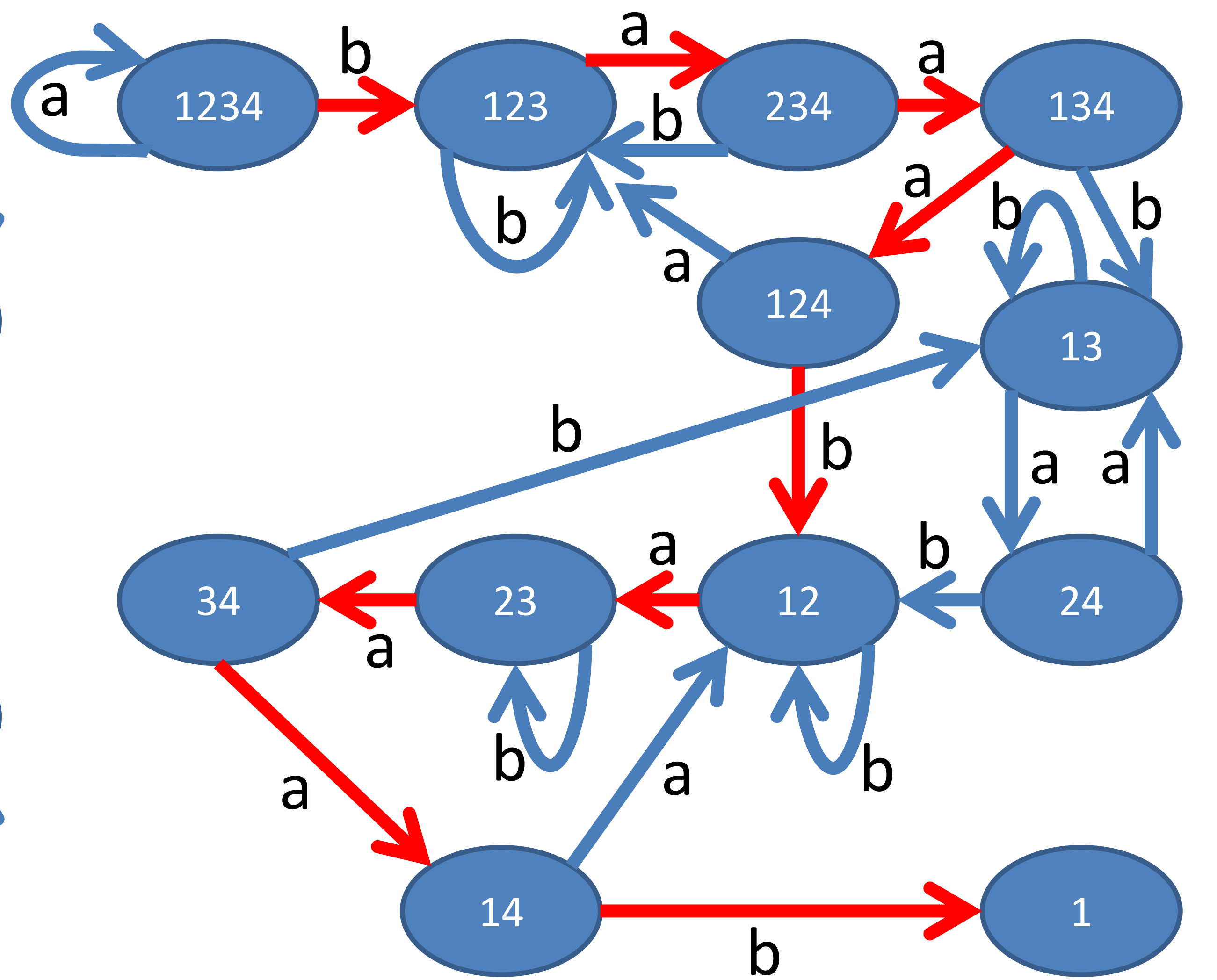
- idea: wprowadzić do modelu niepewność (nie wiadomo, gdzie jesteśmy)
- na początku możemy być w każdym możliwym wierzchołku
- model: graf potęgowy

Problem 2: znajdowanie sekwencji synchronizującej



Problem 2: znajdowanie sekwencji synchronizującej





Złożoność algorytmu

- algorytm tworzy wierzchołki reprezentujące podzbiory wierzchołków grafu wyjściowego
- jeśli wyjściowy graf ma n wierzchołków, to liczba wierzchołków w grafie potęgowym będzie rzędu 2^n
- złożoność jest więc wykładnicza
- własność: algorytm pozwala znaleźć najkrótszą możliwą sekwencję synchronizującą

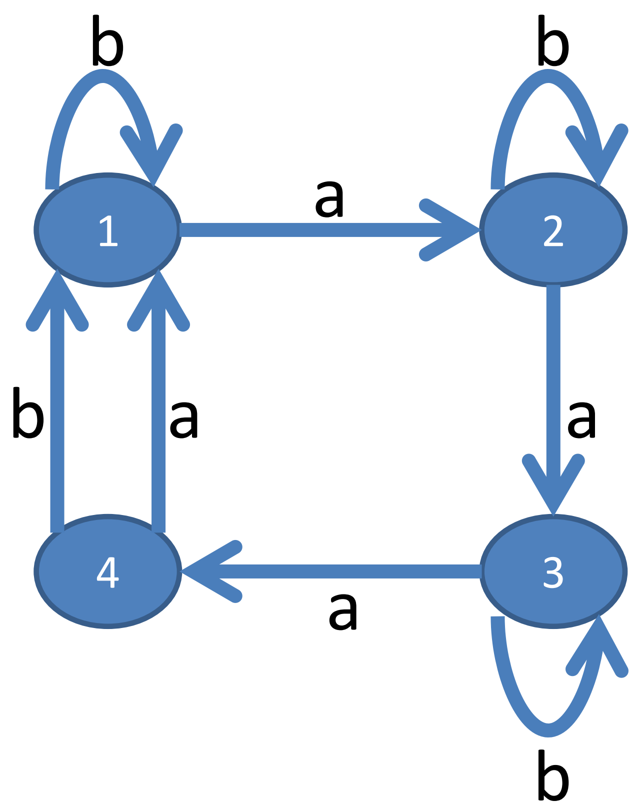
Kolejne problemy

- Problem 3: kiedy istnieje sekwencja synchronizująca (jaką własność musi mieć graf, aby taką sekwencję posiadać)?
  - na pewno musi być spójny, ale czy to jest WKW?
- Problem 4: jaka może być długość najkrótszej sekwencji synchronizującej?
  - podać oszacowanie zależne od liczby *n* wierzchołków grafu
- oba problemy łatwo rozwiązać poprzez analizę wielomianowego algorytmu znajdowania sekwencji synchronizującej

Wielomianowy algorytm znajdowania sekwencji synchronizującej

1. niech Q = zbiór wierzchołków grafu
2. niech v będzie słowem pustym (0 liter)
3. dopóki $|Q| > 1$ wykonuj:
   a. weź dwa dowolne wierzchołki $p, r \in Q$ i znajdź dla nich najkrótsze słowo w takie, że $p.w = r.w$
   b. $Q := \{q.w \mid q \in Q\}$
   c. $v := vw$
4. zwróć sekwencję synchronizującą v

Przykład



- Q={1,2,3,4}, v=puste
- w=b, 1.b=4.b
  - Q.b={1,2,3}, v=b
- w=aab, 2.aab=3.aab
  - {1,2,3}.aab = {1,3}, v=baab
- w=abaaab, 1.abaaab=3.abaaab
  - {1,3}.abaaab = {1}, v=baababaaab
- sekwencja ma długość 10, algorytm „potęgowy" zwrócił krótsze (o długości 9)
- ten algorytm nie jest optymalny!

Rozwiązanie problemu 3

1. niech Q = zbiór wierzchołków grafu
2. niech v będzie słowem pustym (0 liter)
3. dopóki $|Q| > 2$ wykonuj:
   a. weź dwa dowolne wierzchołki $p, r \in Q$ i znajdź dla nich najkrótsze słowo w takie, że $p.w = r.w$
   b. $Q := \{q.w \mid q \in Q\}$
   c. $v := vw$
4. zwróć sekwencję synchronizującą v

aby sekwencja istniała, ta własność musi zachodzić dla dowolnej pary wierzchołków

Analiza algorytmu wielomianowego

- w każdym kroku pod wpływem wybranego słowa *w* synchronizują się przynajmniej 2 stany
- słowo *w* ma długość rzędu n^2, bo tyle jest możliwych par stanów
- kroków będzie co najwyżej rzędu n
- zatem algorytm ma złożoność rzędu n^3

Rozwiązanie problemu 4

1. niech Q = zbiór wierzchołków grafu
2. niech v będzie słowem pustym (0 liter)
3. dopóki |Q| > 2 wykonuj:
   a. weź dwa dowolne wierzchołki p, r ϵ Q i znajdź dla nich najkrótsze słowo w takie, że p.w = r.w
   b. Q := {q.w | q ϵ Q}
   c. v := vw
4. zwróć sekwencję synchronizującą v

liczba kroków rzędu *n*

każde takie słowo może mieć długość rzędu n^2

czyli jeśli algorytm znajdzie sekwencję, to będzie ona miała długość rzędu n^3

Hipoteza Černego

- dany niech będzie synchronizowalny graf o *n* wierzchołkach (tzn. istnieje dla niego sekwencja synchronizująca)

- hipoteza: najkrótsza sekwencja synchronizująca ma długość $\leq (n-1)^2$

- problem otwarty od 1964 roku
- najlepsze znane ograniczenie: $\leq (n^3-n)/6$
- aby rozwiązać problem, należy udowodnić ograniczenie lub znaleźć kontrprzykład (wystarczy jeden graf)

Czy problem jest trudny?

- problem otwarty od 40 lat => raczej trudny
- hipoteza związana ściśle z tzw. Problemem Kolorowania Drogi
  - dany graf bez etykiet, pytamy czy istnieje etykietowanie, które pozwala zsynchronizować ten graf
  - dokładne pytanie: czy względna pierwszość długości wsystkich cykli w grafie jest WKW na to, by dało się to zrobić
- problem był otwarty przez prawie 40 lat
- rozwiązany w 2009 przez Trahtmana metodami elementarnymi (!)
- być może hipoteza Černego również nie jest trudna?

Nagroda!

- w 1936 S. Mazur postawił pewien problem dotyczący przestrzeni Banacha
- nagrodą była… żywa gęś
- w 1972 problem rozwiązał P. Enflö
- Wydział Matematyki i Informatyki UJ funduje taką samą nagrodę dla osoby, która rozwiąże hipotezę Černego! ☺