



Materiały metodyczne

Sposoby nauczania matematyki – w tym metody

1. Czynnościowe nauczanie matematyki

Zofia Krygowska, znakomity dydaktyk matematyki, charakteryzuje koncepcję czynnościowego nauczania:

„Czynnościowe nauczanie matematyki jest postępowaniem dydaktycznym, uwzględniającym stale i konsekwentnie operatywny charakter matematyki równoległe z psychologicznym procesem interioryzacji, prowadzącym od czynności konkretnych i wyobrażeniowych do operacji abstrakcyjnych. Czynnościowe nauczanie matematyki opiera się więc:

- a) na wydobyciu przez analizę teoretyczną z materiału nauczania podstawowych operacji w każdej definicji, twierdzeniu, dowodzie,
- b) na świadomym organizowaniu sytuacji problemowych sprzyjających procesowi interioryzacji i kształtowaniu myślenia matematycznego ucznia jako specyficznego działania, jako swobodnego i świadomego posługiwania się przyswajanymi stopniowo operacjami oraz na konsekwentnym stosowaniu zabiegów dydaktycznych mających na celu zapewnienie prawidłowości i efektywności tego procesu”¹.

Z tej charakterystyki wynika, że podczas przygotowywania propozycji dydaktycznego opracowania jakiegoś pojęcia w sposób czynnościowy należy dokonać matematycznej analizy operacji tkwiących w tym pojęciu (tzn. wyróżnić ciąg czynności prowadzących do konstrukcji jego desygnatów). Równoległe – uwzględniając prawidłowości psychologiczne – należy zaplanować różnego rodzaju ćwiczenia, które pozwolą uczniowi przebyć drogę od czynności konkretnych, przez wyobrażeniowe do abstrakcyjnych.

Jedną z dwóch fundamentalnych zasad czynnościowego nauczania matematyki jest organizowanie sytuacji problemowych sprzyjających występowaniu trzech rodzajów operacji: konkretnych, wyobrażeniowych i abstrakcyjnych. Zofia Krygowska proponuje szereg zabiegów dydaktycznych, które mają zapewnić prawidłowość i efektywność kształcenia z użyciem omawianej metody. Są to następujące zalecenia:

„a) Wiązanie treści matematycznych z **wyraźnie sformułowanymi schematami postępowania** (np. definicje genetyczne, reguły wynikające z twierdzeń, ujawnianie ogólniejszych metod w toku całego nauczania, pytanie: «jak to mogę wykorzystać?» itp.).

b) **Wiązanie operacji z operacjami do nich odwrotnymi.**

c) **Wiązanie operacji z różnych dziedzin matematyki w bardziej złożone schematy.**

d) Uwzględnianie **różnych ciągów operacji prowadzących do tego samego rezultatu** (np. czynnościowa interpretacja «dwustronna» wzorów algebraicznych i trygonometrycznych, ujawnianie równoważności pewnych definicji, ujawnianie różnych warunków wystarczających dla tej samej tezy, różnych dowodów tego samego twierdzenia, różnych sposobów rozwiązywania tego samego zadania itp.).

e) **Stawianie ucznia w sytuacjach konfliktowych**, w których przyswojone mu schematy postępowania zawodzą i w których uczeń musi przekształcić (zaadaptować) dawny schemat lub wypracować nowy.

f) **Opis słowny operacji**, którymi uczeń myśli, szczególnie w niższych klasach («co robię?»).

g) **Algorytmizacja rozwiązania zadania z zastosowaniem różnych form zapisu** (drzewa i inne organigramy) tam, gdzie to jest celowe i możliwe.

¹ Z. Krygowska, *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, Warszawa 1977, s. 127.



Projekt „Uczenie się przez działanie. Innowacyjny program nauczania „Poznać i zrozumieć świat” do edukacji wczesnoszkolnej” jest finansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, działanie 3.3.4. Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

h) Właściwe i celowe **wiązanie czynności konkretnych** (zapis symboliczny, rysunek, czynności rzeczywiste wykonywane na przedmiotach materialnych) z myślowymi operacjami, przy czym czynność konkretna:

– może być źródłem procesu interioryzacji, w którym jako jej odbicie powstaje określona operacja myślowa,

– może być wykonywana równoległe z operacjami myślowymi, wspierać je i stabilizować – przez odbicie w konkretności i równocześnie je pobudzać,

– może być weryfikacją w konkretności efektywności pomyślanego ciągu operacji.

i) Konsekwentne uczenie **swobodnego posługiwania się poznanymi operacjami** i przyzwyczajanie ucznia do tego, że tylko **określone działanie, a nie tylko bierna kontemplacja** i oczekiwanie na «natchnienie» prowadzi do rozwiązania zagadnienia, np. uczenie korzystania z lektury matematycznej zawsze z ołówkiem w rękę i kartką papieru, z tłumaczeniem tekstu słownego na ciąg operacji konkretnie lub symbolicznie wykonywanych, a nie bierne i wielokrotne czytanie tego tekstu przy zupełnym jego niezrozumieniu, tak często praktykowane przez uczniów).

j) Zwrócenie uwagi na to, aby **stosowana symbolika miała również charakter operacyjny**, aby wizualnie sugerowała operację (np. strzałki jako symbol przyporządkowania)².

Metodę czynnościowego nauczania matematyki Zofii Krygowskiej na język praktyki przełożyła Helena Siwek. Dla rozwoju myślenia matematycznego bardzo ważne jest świadome wykonywanie czynności przez dziecko i skierowanie ich na określony cel.

Stosowanie metody czynnościowej w planowaniu procesu kształtowania się pojęć matematycznych powinno polegać na kolejnym przejściu trzech etapów pracy.

E t a p 1

Najpierw nauczyciel musi sobie uświadomić, jakie etapy rozumowania, jaki ciąg czynności i w jakiej kolejności należy przeprowadzić, aby skonstruować nowe pojęcie. Inaczej mówiąc, musi on dokonać matematycznej analizy operacji tkwiących w tym pojęciu.

E t a p 2

Teraz nauczyciel musi opracować ogólny plan kształtowania nowego pojęcia. Plan ten opiera się na przekonaniu, że aby pojęcie zostało prawidłowo i w pełni przyswojone przez dziecko, należy zasymulować przechodzenie dziecka przez kolejne stadia rozwoju intelektualnego: przedoperacyjne, operacji konkretnych i operacji formalnych. Należy to robić w ten sposób, aby w każdym symulowanym stadium proces nauczania przechodził przez trzy systemy przetwarzania i przyswajania informacji: system reprezentacji enaktywnej, ikonicznej, symbolicznej. Każdemu z tych trzech systemów odpowiadają innego rodzaju ćwiczenia, są to odpowiednio: ćwiczenie czynności konkretnych, ćwiczenie czynności wyobrażonych i ćwiczenie czynności abstrakcyjnych.

E t a p 3

W zależności od poziomu nauczania: czynności konkretnych, wyobrażonych lub abstrakcyjnych, na którym nauczyciel kształtuje dane pojęcie, musi on dobrać konkretne zadania stymulujące pożądane czynności ucznia. Jednakże sposób doboru ćwiczeń nie może być przypadkowy³.

Kształtowanie pojęć matematycznych jest procesem ciągłym i w głównej mierze dokonuje się w naturalnych sytuacjach życia codziennego, podczas nadarzających się okazji. Zaplano-

² Ibidem, s. 127–128.

³ H. Siwek, *Czynnościowe nauczanie matematyki*, WSiP, Warszawa 1998.



Projekt „Uczenie się przez działanie. Innowacyjny program nauczania „Poznać i zrozumieć świat” do edukacji wczesnoszkolnej” jest finansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, działanie 3.3.4. Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

wane działania służą wprowadzeniu nowych treści lub uporządkowaniu i ukierunkowaniu nagromadzonych doświadczeń dzieci.

2. Wykorzystanie elementów metody Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej

Celem metody Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej, stosowanej przez nauczyciela wczesnej edukacji, powinno być zdiagnozowanie za pomocą testów dojrzałości ucznia do uczenia się matematyki w warunkach szkolnych. Na tę dojrzałość składają się:

1. Dziecięce liczenie:
 - sprawne liczenie i rozróżnianie liczenia błędnego od poprawnego;
 - umiejętność wyznaczania wyniku dodawania i odejmowania w zakresie 10 w pamięci lub na palcach.
2. Operacyjne rozumowanie na poziomie konkretnym w zakresie:
 - uznawanie stałości ilości nieciągłych;
 - wyznaczanie konsekwentnych serii.
3. Zdolność do odrywania się od konkretów i posługiwanie się reprezentacjami symbolicznymi w zakresie:
 - pojęć liczbowych;
 - działań arytmetycznych;
 - schematu graficznego.
4. Dojrzałość emocjonalna wyrażająca się w:
 - pozytywnym nastawieniu do rozwiązywania zadań;
 - odporności emocjonalnej na sytuacje trudne intelektualnie.
5. Zdolność do syntetyzowania i zintegrowania funkcji percepcyjno-motorycznych, która wyraża się sprawnym odwzorowywaniem złożonych kształtów, rysowaniu i konstruowaniu⁴.

3. Metody rozwiązywania zadań tekstowych

Głównym sposobem uczenia się matematyki jest rozwiązywanie zadań. Rozwiązanie zadania łączy się z pokonaniem przez dziecko trudności. Ważne jest, aby dziecko samodzielnie potrafiło rozwiązać te trudności. Do szkoły uczęszczają jednak dzieci, które nie potrafią poradzić sobie nawet z prostymi zadaniami. Nie rozumieją ich matematycznego sensu i nie dostrzegają zależności między liczbami.

Zofia Cydzik definiuje zadanie tekstowe jako sytuację życiową powiązaną takimi zależnościami, których wykrycie prowadzi do odpowiedzi na pytanie główne. Przy rozwiązaniu zadania problemem jest ustalenie zależności między danymi w zadaniu wielkościami, zgodnie z warunkiem zawartym w pytaniu.

Zadania tekstowe w klasie pierwszej są materiałem poznawczym, którego treść stanowią wiadomości (struktura zadania tekstowego, zależności między wielkościami danymi i wielkością poszukiwaną) oraz umiejętności intelektualne (dokonywanie analizy i syntezy zadania, ujmowanie zadania w formułę matematyczną). Na początku zadania powinny zawierać treść łatwą i konkretną, fabułę ciekawą i dynamiczną, jawne, określające wprost czynności matematyczne. Sugerowana jest pełna budowa tekstów zadań zakończona pytaniem. Z czasem

⁴ E. Gruszczyk-Kolczyńska, *Dzieci ze specyficznymi trudnościami uczeniu się matematyki*, WSiP, Warszawa 1992.



Projekt „Uczenie się przez działanie. Innowacyjny program nauczania „Poznać i zrozumieć świat” do edukacji wczesnoszkolnej” jest finansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, Program Operacyjny Kapitał Ludzki, działanie 3.3.4. Modernizacja treści i metod kształcenia – projekty konkursowe.

przechodzi się do zadań otwartych i półotwartych. Mają one więcej niż jedno poprawne rozwiązanie, i każde można uzyskać innym sposobem.

Wśród metod rozwiązywania zadań tekstowych możemy wyróżnić:

- **metodę analityczną** – cofanie się z rozumowaniem, znalezienie głównej niewiadomej zadania (Co wystarczy wiedzieć, aby tę liczbę znaleźć?);
- **metodę syntetyczną** – wyciąganie wniosków z tego, co wiemy, wyodrębnienie danych zadania (Czego można się dowiedzieć na podstawie tych danych?);
- **metodę analityczno-syntetyczną** – polega na kilkakrotnym przechodzeniu od analizy do syntezy i od syntezy do analizy. Jest niewątpliwie najczęściej stosowaną metodą w kształtowaniu logicznego myślenia i usamodzielniania uczniów w rozwiązywaniu zadań tekstowych;
- **metodę symulacji** – jedna z czynnościowych metod rozwiązywania zadań polegająca na symulowaniu na materiale konkretnym sytuacji opisanych w zadaniu (polecana przy rozwiązywaniu zadań za pomocą równań); przy rozwiązywaniu zadań, gdy liczby dane w zadaniu są duże, stosuje się metodę częściowej symulacji (część symulacji na rysunku, część – jej kontynuacja – w myśli);
- **metodę „guziczkową”** – użycie schematu graficznego (rysuje się kółka – guziczki); metoda ta naśladuje rozwiązanie manipulacyjne, czyli symulację za pomocą konkretnych przedmiotów (polecana przy rozwiązywaniu zadań za pomocą równań); najpierw przedstawia się na rysunku sytuację końcową, następnie otacza się pętlą liczbę kółek zgodnie z sytuacją w zadaniu;
- **metodę „kruszenia”** – modyfikowanie, zwiększanie lub zmniejszanie liczby danych i ich wartości, zastępowanie danych innymi, rezygnacja z niektórych danych, zmiana miejsca danych, a także przekształcanie zadania, jego odwracanie, wprowadzanie nowych związków i zależności, uszczegóławianie lub uogólnianie zadania. Metodę kruszenia można stosować w różnych wersjach. Wszystkie zaczynają się od zadania bazowego⁵.

Walory metody „kruszenia”:

- doskonale rozwija myślenie krytyczno-logiczne uczniów; uczy dostrzegania związków i zależności występujących w zadaniu bazowym oraz umiejętności wykorzystywania ich do tworzenia nowych wersji zadania,
- rozwija płynność myślenia – uczeń nie poprzestaje na ułożeniu jednego pytania, układa ich całe ciągi,
- rozwija giętkość myślenia – uczeń jest zmuszony do szybkiej zmiany kierunku, przechodzi z jednego toru myślenia na inny, bowiem dostrzega coraz nowe związki w zadaniu bazowym,
- rozwija oryginalność myślenia – uczeń nie poprzestaje na układaniu pytań łatwych i prostych, układa coraz wymyślniejsze pytania,
- głośna zbiorowa praca uaktywnia uczniów, którzy na zasadzie skojarzeń z pytaniami ułożonymi przez kolegów formułują kolejne,
- jest atrakcyjną dla uczniów metodą pracy z zadaniem tekstowym⁶.

⁵ E. Stucki, *Metodyka nauczania matematyki w klasach niższych*, cz. II, WSP, Bydgoszcz 1993, s. 59–60.

⁶ Z. Cydzik, *Nauczanie matematyki w klasie pierwszej i drugiej szkoły podstawowej*, WSiP, Warszawa 1990; zob.: J. Hanisz, *Układanie i rozwiązywanie zadań tekstowych metodą „kruszenia”*, „Życie Szkoły” 1990, nr 8.



4. Heurystyczna metoda Georga Pòlya

Proces myślenia zachodzący podczas rozwiązywania problemów nazywamy myśleniem produktywnym, jest tzw. procesem heurystycznym (wytwarzanie pomysłów rozwiązania problemu). Myślenie to umożliwia wysuwanie pomysłów rozwiązania problemu. Heurystyka (grec.) oznacza umiejętność dokonywania odkryć⁷.

Jedną z właściwości psychicznych dziecka jest dążenie do rozwiązywania zadań. Zdaniem G. Pòlya rozwiązywanie zadania jest poszukiwaniem drogi pokonania trudności, pozwalającej na ominięcie przeszkód, na osiągnięcie celu, którego nie sposób osiągnąć od razu i wprost. Odgadywać i sprawdzać to podstawy metody G. Pòlya. Wyróżnia on dwa rodzaje zadań: zadania typu „znaleźć” i typu „udowodnić”. W klasach niższych mamy głównie do czynienia z pierwszym typem zadań (szukanie niewiadomej). G. Pòlya w swojej metodzie rozwiązywania zadań wyróżnia pięć podstawowych operacji, które są zarazem etapami ich rozwiązywania:

1. Zrozumienie zadania – ustalenie na początku, co mamy rozwiązać, czyli dostrzeżenie problemu matematycznego w zadaniu. Uczeń powinien wyróżnić warunki matematyczne: wielkości podane w zadaniu, wielkość poszukiwaną, stosunki między tymi wielkościami.
2. Układanie planu rozwiązania – wyłonienie odpowiedniego pomysłu i sprawdzenie, czy rozwiązanie jest osiągalne. Nauczyciel pomaga uczniom, zadając pytania pomocnicze, wychodząc od niewiadomej: co jest niewiadomą? Jak można znaleźć rozwiązanie? W jaki sposób?
3. Wykonanie planu.
4. Sprawdzenie wyniku – jak można sprawdzić wynik? Jak można sprawdzić uzasadnienie rozwiązania? Sprawdzenie wyniku zmusza ucznia do wykonywania operacji odwrotnych, tak bardzo potrzebnych w rozwijaniu myślenia.
5. Refleksja nad rozwiązaniem – samodzielne rozwiązanie zadania jest zawsze odkryciem. Pytania i sugestie podczas rozwiązywania są bardzo ważnym elementem tej metody.

5. Rozwiązywanie zadań według metody Georga Pòlya

Jest to metoda uczenia się i nauczania rozwiązywania zadań; jest propozycją nauczania myślenia. Autor wyróżnia dwie fazy: wstępną i podstawową. W fazie wstępnej nauczyciel omawia i rozwiązuje zadania typowe. Jednocześnie uczniowie otrzymują zadania do samodzielnego rozwiązania w domu. Sprzyja to przypomnieniu, pełnemu zrozumieniu znajomości metod rozwiązywania omówionych na zajęciach. W fazie podstawowej obowiązuje zasada pracy grupowej. Realizowana jest w trzech etapach:

- 1) każdy uczeń samodzielnie rozwiązuje jedno zadanie różne od innych, może liczyć na pomoc nauczyciela,
- 2) uczeń sprawdza, uzupełnia, upraszcza, szuka innego rozwiązania zadania i wybiera sposób prezentacji przed grupą,
- 3) zajęcia odbywają się w grupach (po cztery osoby), skład grup zgodny jest z wolą uczniów.

Jeden uczeń przejmuje rolę nauczyciela, prezentuje zadanie, pobudza aktywność grupy i pomaga w poszukiwaniu rozwiązania. Po znalezieniu rozwiązania następuje prezentacja rozwiązania i krytyczna ocena (w grupie). Ciekawe rozwiązania prezentowane są całej klasie⁸.

⁷ J. Nowik, *Edukacja matematyczna w kształceniu zintegrowanym*, WSZ, Racibórz 2009.

⁸ S. Sokołowski, *Rozwiązywanie zadań tekstowych*, „Życie Szkoły” 2004, nr 1; E. Stucki, *Metodyka nauczania...*