KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Nakładka do pracy z uczniem o specjalnych potrzebach edukacyjnych

na

Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących

Praca z uczniem zdolnym

Opracowanie: Edyta Pobiega, Małgorzata Zbińkowska

Warszawa 2014 - 2015

UNIWERSYTET SWPS

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Wstęp

Zdolności można zdefiniować jako różnice indywidualne, które sprawiają, że przy jednakowej motywacji i uprzednim przygotowaniu poszczególni ludzie osiągają w porównywalnych warunkach zewnętrznych niejednakowe rezultaty w uczeniu się i działaniu. *[T. Tomaszewski, (red.), Psychologia. Warszawa 1977]*

Zdolności mogą być rozumiane jako sprawniejsze wykonywanie określonych czynności w stosunku do innych, wrodzone predyspozycje do wykonywania określonych działań lub jako uwarunkowane wewnętrznie i najczęściej wrodzone możliwości sprawnego działania – w sensie określonych predyspozycji i postawy. *[D. Czelakowska, Inteligencja i zdolności twórcze dzieci w początkowym okresie edukacji. Oficyna Wydawnicza „Impuls”, Kraków 2007]*

Uczeń zdolny to taki, który osiąga lepsze wyniki od swoich rówieśników w przypadku, gdy zachowane są jednakowe dla wszystkich warunki pracy, lub uzyskujący te same, co oni wyniki przy mniejszym wysiłku. Zawdzięcza to większemu niż u innych, rozwojowi takich zdolności jak myślenie, zdolność obserwacji, wyobrażania, pamięć, uwaga, sprawności manualne i ruchowe. [W.Okoń]

Dzieci zdolne (ogólnie lub kierunkowo) charakteryzują pewne cechy, do których należą *[Tokarska I, Trening ogólnorozwojowy dla dzieci zdolnych z młodszych klas szkoły podstawowej XI "Zeszyt Promocji Oświatowych", Wych. Oświaty Gminy W-wa Centrum, Warszawa 1997]:*

1. Ponadprzeciętny poziom rozwoju intelektu.
2. Szybkie zapamiętywanie, prawidłowe kojarzenie i rozumowanie.
3. Ciekawość świata i ludzi, dar bystrej obserwacji otoczenia.
4. Dociekliwość, zadawanie dużej liczby pytań.
5. Szeroki wachlarz zainteresowań, dużo wiadomości pozaszkolnych, niekiedy ukierunkowane uzdolnienia i pasje.
6. Wykonywanie zadań umysłowych z przyjemnością, umiejętność skupienia uwagi.
7. Bogata wyobraźnia, ciekawe, oryginalne pomysły. Potrzeba wyrażania swoich wrażeń, myśli i emocji w różnej formie, np. w muzyce, tańcu, plastyce, w słowie lub piśmie (pisanie wierszy, opowiadań itp.).
8. Niezależna postawa, obrona swoich poglądów i pomysłów.
9. Poczucie humoru.

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Profesor W.A. Krutiecki wyróżnił cechy ucznia osiągającego wybitne sukcesy matematyczne:

- wysoki poziom zamiłowania do matematyki
- pracowitość i dobra organizacja pracy, silna motywacja, radość z tworzenia i poznawania
- wysoka zdolność skupienia się na zadaniu i dobre samopoczucie w trakcie rozwiązywania problemów matematycznych
- określony zakres wiadomości i umiejętności matematycznych
- uzdolnienia matematyczne, rozumiane jako cechy umysłu pozwalające na łatwe i skuteczne uczenie się matematyki

Pozostając przy ostatnim wyodrębnionym punkcie. Co to są te uzdolnienia matematyczne? Profesor Krutiecki wskazuje na takie wyróżniki uzdolnień matematycznych:

- łatwość chwytania formalnej struktury zadania - czyli, o co chodzi i co nam mówią w zadaniu
- zdolność logicznego myślenia w sferze symboli, stosunków ilościowych i przestrzennych
- zdolność bystrego i rozległego uogólniania matematycznych faktów, stosunków i działań
- zdolność posługiwania się zredukowanymi strukturami (np. wzory skróconego mnożenia)
- łatwość kojarzenia wniosków i zapamiętywania informacji
- dążenie do prostych i jasnych rozwiązań
- skłonność to widzenia świata matematycznymi oczami, czyli ciągłe liczenie i mierzenie świata

Krutiecki wyodrębnił także cechy, które NIE wiążą się bezpośrednio z uzdolnieniami matematycznymi:

- szybkość procesów intelektualnych - matematyk wcale nie musi pracować szybko
- zdolność do szybkiego obliczania w pamięci - możesz obliczać działania w sekundę, ale to nie czyni Cię Einsteinem

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

- automatyczna pamięć do cyfr i formuł - bo fakt, ze pamiętasz, nie oznacza, że rozumiesz
- wyobraźnia przestrzenna - nie musisz być architektem i genialnym matematykiem na raz
- zdolność do poglądowego przedstawiania abstrakcji matematycznych - potrzebne tylko, jeśli chcesz kogoś matematyki nauczyć

[Krutiecki W.A.:1968, Psichołogia matiematiczieskich sposobnostiej szkolnikow, Proswieszczenije, Moskwa] cytowany w [Gruszczyk-Kolczyńskia Edyta, "Dzieci uzdolnione matematycznie (cz 1.)": w "Psychologia w szkole", nr 1 (29) 2011]

Metody identyfikacji uczniów zdolnych

- nominacja przyznawana przez nauczycieli (nieformalne i formalne)
- wyniki sprawdzianów wiadomości
- iloraz inteligencji
- nominacja przyznawana przez eksperta z danej dziedziny
- nominacja przyznawana przez rodziców
- nominacja przyznawana przez uczniów.

Wyniki proponowanych sposobów identyfikacji uczniów zdolnych muszą być rozpatrywane jednocześnie i uczeń może być uznany za zdolnego wówczas, jeśli uzyskuje wysokie wyniki w badaniach z pomocą co najmniej kilku metod.*[Paitner F.: Kim są wybitni?, WSiP, Warszawa 1993]*

Więcej na temat identyfikacji uczniów zdolnych można znaleźć w poniższej literaturze (materiały wydane w ramach projektu ORE, dostępne w wersji książkowej, niektóre również na stronach internetowych ORE)

- Model pracy z uczniem zdolnym w szkole podstawowej. Jak praktycznie i systemowo zorganizować edukację uczniów zdolnych na poziomie szkoły podstawowej? [ostatni dostęp 20.07.2015]
  Autorka: Iwona Fechner-Sędzicka, s. 33 – 38
- Model pracy z uczniem zdolnym w gimnazjum [ostatni dostęp 20.07.2015]
  Zespół redakcyjny w składzie: Teresa Dąbrowska, Lidia Dyndor, Maria Foryś, Kinga Gałązka, Elżbieta Kolczyńska, Aneta Madziara, Katarzyna Pęczek, Ewa Sprawka, Ewa Wachowicz, s. 38 – 52
- Model pracy z uczniem zdolnym w szkole ponadgimnazjalnej [ostatni dostęp 20.07.2015]
  Autorzy: Kinga Gałązka, Ewa Antonina Muzioł

- Jak odkrywać i rozwijać uzdolnienia przyrodnicze uczniów w szkole podstawowej, gimnazjum i szkole ponadgimnazjalnej [ostatni dostęp 20.07.2015]

  Autorzy: Urszula Grygier, Beata Jancarz- Łanczkowska, Krzysztof Piotrowski, s. 23 - 24
- Uczeń zdolny – analiza dostępnych narzędzi diagnostycznych [ostatni dostęp 20.07.2015]

  Autor: Natalia Cybis, Ewa Drop, Tomasz Rowiński, Jan Cieciuch

Charakterystyka ucznia zdolnego wg autorek tego opracowania

Po przeanalizowaniu wielu źródeł opisujących uczniów zdolnych oraz na podstawie własnych doświadczeń z długoletniej pracy nauczycielek matematyki w szkole średniej, autorki niniejszego opracowania uznają, że uczeń zdolny (matematycznie), który uczy się matematyki w szkole na poziomie podstawowym to taki, który posiada następujące cechy i umiejętności:

1. Nie ma trudności w uczeniu się matematyki, osiąga co najmniej dobre oceny
2. Chętnie podejmuje się rozwiązywania większej ilości zadań, również o podwyższonym stopniu trudności lub poszukuje własnych sposobów na rozwiązywanie zadań typowych
3. Podejmuje chętnie nowe wyzwania
4. Wykorzystuje każdą oferowaną mu sytuację do doskonalenia swoich umiejętności
5. Jego motywacją do nauki jest potrzeba osiągnięcia dobrego wyniku z matury z matematyki
6. Ma silnie rozwinięte poczucie obowiązku i pracowitość
7. Szybkie tempo pracy
8. Jest samodzielny, lubi uczyć się samotnie i samodzielnie
9. Jest wytrwały w dążeniu do celu
10. Umie koncentrować swoją uwagę na problemie przez długi czas
11. Stawia sobie wysokie wymagania
12. Posiada zdolności logicznego i krytycznego myślenia, również abstrakcyjnego
13. Jest spostrzegawczy, posiada umiejętności wnikliwej obserwacji

Metody i formy pracy z uczniem zdolnym

Prace długoterminowe – projekty i WebQuest

Metoda projektu jest szerzej opisana w poradniku metodycznym. Zarówno metoda projektu jak i metoda WebQuest powinny być stosowane przez wszystkich uczniów, a nie tylko tych zdolnych. Natomiast w przypadku uczniów zdolnych może to być dodatkowe wyzwanie w przypadku, gdy zaproponowane tematy będą trudniejsze i wymagające pracy twórczej, poszukiwania w wielu źródłach oraz zastosowania nowych narzędzi technologii informacyjnych.

WebQuest – rodzaj metody projektów zorientowanej na uczniowskie badania w oparciu o instrukcję umieszczoną na stronie internetowej. Wyjściowym źródłem informacji w badaniach uczestników projektu jest Internet. Źródła online mogą być uzupełnione materiałami podręcznymi - http://pl.wikipedia.org/wiki/WebQuest [ostatni dostęp 20.07.2015]
Piotr Peszko: Jak korzystać z WebQuestu? [ostatni dostęp 20.07.2015] edunews.pl.
http://zunal.com/webquest.php?w=70050 [ostatni dostęp 20.07.2015] – przykład WebQuestu przygotowanego przy pomocy narzędzia wspierającego ich tworzenie - zunal

Prace badawcze (z wykorzystaniem GeoGebry jako oprogramowania do geometrii dynamicznej) – stawianie hipotez i ich dowodzenie

- Przykłady problemów do badania i opisy poszukiwania sposobów ich rozwiązań można znaleźć w opracowaniu [Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki [ostatni dostęp 20.07.2015] Praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, s. 67 – 76]. Dalsze przykłady w kolejnych rozdziałach naszej nakładki.
- Walory dydaktyczne nauczania geometrii wspomaganego przez oprogramowanie do geometrii dynamicznej [na podstawie Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki Praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, s. 77].:
    - Szybkie, wielokrotne wykonanie tych samych konstrukcji i sprawdzenie, czy i kiedy zachodzi opisana w zadaniu własność
    - „zobaczenie" rozwiązania – np. w zadaniach z parametrem, poszukiwaniu zbiorów punktów o podanej własności

- Przedłużanie zadań – czy założenia można osłabić, czy podane własności dotyczą też innych obiektów
- Wizualizacja twierdzeń i animowanie ich dowodów
- Odkrywanie nowych twierdzeń
- Weryfikacja poprawności konstrukcji

Rozwiązywanie zadań o podwyższonym stopniu trudności

Uczeń zdolny ma często potrzebę rozwiązywania większej ilości zadań o większym stopniu trudności niż typowe zadania proponowane na lekcjach. Warto mieć przygotowane takie zestawy zadań do poszczególnych działów, aby można było je wykorzystać do realizacji na lekcji w przypadku, gdy uczeń szybko wykonana wszystkie zaplanowane typowe zadania lub w zróżnicowanej pracy domowej. Proponujemy takie zestawy zadań w dalszej części naszej nakładki, przy rozdziałach odpowiadających działom podstawy programowej. Nie wymagają one wiedzy ani umiejętności wykraczających poza podstawę programową poziomu podstawowego.

Nie należy przesadzać z ilością zadań dodatkowych, ale pozostawić uczniom czas na refleksję nad nimi – możliwość przedłużenia zadania, zmianę warunków początkowych, warunki rozwiązywalności w przypadku innych danych. Warto zadbać o to, aby były to również zadania łamiące dotychczasowe schematy.

Sugerowane typy zadań na podstawie [Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki Praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, s. 90]:

- Z nadmiarem danych
- Z niedoborem danych
- Z danymi nieprecyzyjnymi
- O dyskusyjnych odpowiedziach
- Z „hakiem”
- Z „przymrużeniem oka”
- Wielopoziomowe
- Otwarte

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

- Antyschematyczne

Więcej informacji oraz przykłady takich typów zadań w cytowanym opracowaniu s. 90 – 93.

Poszukiwanie różnych sposobów rozwiązania tego samego zadania

Warto przypomnieć tutaj nieco już zapomnianą dawną prawdę dydaktyczną: „lepiej rozwiązać jedno zadanie wieloma sposobami niż wiele zadań tym samym sposobem lub wiele zadań, z których każde jednym, właściwym dla niego, sposobem" – [Rozszerzony program matematyki dla gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki Autor: Wojciech Guzicki]

- Przykłady zadań i ich rozwiązań można znaleźć w opracowaniu Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki Praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, s. 52 - 54

Konkursy, turnieje, mecze matematyczne

Nie każdy uczeń zdolny lubi rywalizację. Ale dla niektórych dobrą motywacją do nauki jest zmierzenie się z innymi. Konkursy dobierać trzeba bardzo ostrożnie, szczególni dla uczniów, którzy uczą się matematyki tylko na poziomie podstawowych, dopasowując ich stopień trudności do możliwości ucznia. Proponujemy kilka możliwości konkursów oraz zestawów zadań przygotowujących do konkursów ze źródeł internetowych.

- Kangur Matematyczny
- Alfik Matematyczny
- MAT
- Pangea
- Różne konkursy http://www.math.edu.pl/konkursy [ostatni dostęp 20.07.2015]
- http://www.matematyka.wroc.pl/konkursy/matematyczne [ostatni dostęp 20.07.2015]
- http://www.matgim4.republika.pl/zadlic.html [ostatni dostęp 20.07.2015]
- http://www.matgim4.republika.pl/regul.html [ostatni dostęp 20.07.2015]
- http://www.matgim4.republika.pl/love.html [ostatni dostęp 20.07.2015]
- http://www.matgim4.republika.pl/konkurs.html [ostatni dostęp 20.07.2015]

Liczby rzeczywiste

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 42 s. 23]

   Oblicz:

   a) $\log_{64} \log_{16} \log_{4} 16$,

   b) $\log \log \log 10^{10}$,

   c) $\log_{1,5} \log_{8} \log_{2} 16$

2. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 43 s. 23]

   Oblicz:

   a) $\log_{4} (3 + \log_{3} (1 + \log_{2} 4))$,

   b) $\log_{4} (1 + \log_{4} (2 + \log_{4} 16)))$,

   c) $\log_{0,4} (2 + \log_{0,25} (1 - \log_{4} 2))$

3. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 50 s. 24]

   a) Dodatnie liczby x, y, z spełniają warunek $\log_{2} x = \log_{3} y = \log_{4} z = 3$. Oblicz $\sqrt{xyz}$

   b) Dodatnie liczby x, y, z spełniają warunek $\log_{2} x = \log_{3} y = \log_{4} z = 2$. Oblicz $\sqrt[3]{xyz}$

   c) Dodatnie liczby x, y, z spełniają warunek $\log_{2} x = \log_{3} y = \log_{4} z = 5\frac{1}{3}$. Oblicz $\sqrt[4]{xyz}$

4. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 53 s. 24]

   Oblicz, zakładając, że $\log_{2} 3 = a$:

   a) $\log_{2} 12$,

   b) $\log_{2} 18$,

   c) $\log_{2} 1,5$

5. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 54 s. 24]

   Oblicz, zakładając, że $\log_{3} 2 = a$:

   a) $\log_{3} 12$,

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

b) $\log_3 36$,

c) $\log_3 13{,}5$

Zadania na dowodzenie

1. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2013, zadanie 31]

   Wykaż, że liczba $6^{100} - 2 \cdot 6^{99} + 10 \cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

2. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2014, zadanie 28]

   Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

3. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, czerwiec 2011, zadanie 27]

   Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

4. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, czerwiec 2012, zadanie 29]

   Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

5. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, sierpień 2011, zadanie 25]

   Udowodnij, że iloczyn kolejnych liczb naturalnych od 1 do 16, czyli $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 16$, jest podzielny przez 2^{15}.

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Wyrażenia algebraiczne

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. Uzasadnij, że:

a. $(-a-b)^2 = (a+b)^2$

b. $(-a+b)^2 = (a-b)^2$

2. Przedstaw w postaci sumy algebraicznej:

a. $(-x+2y)^2 =$

b. $(-3a-\sqrt{2}y)^2 =$

c. $(-3\sqrt{2}b+a)^2 =$

d. $(-2a-2y)^2 =$

3. Uzasadnij, że:

a. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

b. $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

c. $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$

4. Usuń niewymierność z mianownika:

a. $\frac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}} =$

b. $\frac{12}{(3-\sqrt{2})+\sqrt{3}} =$

c. $\frac{1}{1-\sqrt{3}+3\sqrt{2}} =$

5. Przeczytaj przykład.

Wyrażenie $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ możemy zapisać w prostszej postaci korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy oraz zależności $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}} = \sqrt{14-2\cdot 3\sqrt{5}} = \sqrt{(3)^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2} = \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} =$$

$$|3-\sqrt{5}| = 3-\sqrt{5}$$

Przedstaw podaną liczbę w postaci $a+b\sqrt{c}$, gdzie $a,b\in R, n\in N$.

a. $\sqrt{3-2\sqrt{2}} =$

b. $\sqrt{39+12\sqrt{3}} =$

c. $\sqrt{20-6\sqrt{11}}=$

d. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=$

e. $\sqrt{8+2\sqrt{7}}=$

6. [MATeMAtyka, zbiór zadań klasa I, Nowa Era, str. 42, zad. 13] Oblicz:

a. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}-\sqrt{9+4\sqrt{2}}=$

b. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{28-4\sqrt{3}}=$

c. $\sqrt{29-4\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}=$

d. $\sqrt{7+2\sqrt{10}}-\sqrt{17+4\sqrt{15}}=$

7. Oblicz:

a. $(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2=$

b. $(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{6}}-\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{6}})^2=$

c. $(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}})^2=$

8. [MATeMAtyka, zbiór zadań klasa I, Nowa Era, str. 55, zad. 19] Uzasadnij równości:

a. $\sqrt{8+4\sqrt{3}}-\sqrt{8-4\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$

b. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}=4$

9. Wykaż, że liczba $\sqrt{(1-4\sqrt{5})^2}-\sqrt{(4\sqrt{5}-2)^2}$ jest liczbą wymierną.

10. [Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do I klasy liceów i techników, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro,zad.3.208, str. 94] Wykaż, że liczba $3^{16}-2^{16}$ jest podzielna przez 13

11. [Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do I klasy liceów i techników, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro,zad.3.125, str. 83] Wykaż, że jeśli $x^2+y^2=2\ i\ x+y=2,\ to\ x=y=1$.

12. Wykaż, że jeśli $\frac{1}{x}-x=2$, to $x^2+\frac{1}{x^2}=2$.

13. [Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do I klasy liceów i techników, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro,zad.3.128, str. 83] Wykaż, że jeśli $x^2+y^2=3\ i\ \ x-y=-2,\ to\ xy=\frac{-1}{2}$.

14. [Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do I klasy liceów i techników, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro,zad.3.137, str. 83] Wykaż, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych nieparzystych jest liczbą parzystą.

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Zadania na dowodzenie

1. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2010, zadanie 30]

   Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

2. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2011, zadanie 25]

   Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

3. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, zadanie 27]

   Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0<a<b<c$, to $\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$.

4. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2013, zadanie 28]

   Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x+y+z=0$, prawdziwa jest nierówność $xy+yz+zx \leq 0$.

   Możesz skorzystać z tożsamości $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

5. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, sierpień 2010, zadanie 31]

   Wykaż, że jeżeli $a>0$ i $b>0$ oraz $\sqrt{a^2+b} = \sqrt{a+b^2}$, to $a=b$ lub $a+b=1$.

6. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, sierpień 2013, zadanie 30]

   Uzasadnij, że jeżeli a jest liczbą rzeczywistą różną od zera i $a+\frac{1}{a}=3$, to $a^2+\frac{1}{a^2}=7$.

7. [Próbny egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, listopad 2010, zadanie 30]

   Uzasadnij, że jeśli $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2$, to $ad=bc$.

8. [Próbny egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, grudzień 2014, zadanie 28]

   Uzasadnij, że jeżeli liczba całkowita nie dzieli się przez 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

9. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2015, zadanie 27]

   Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2-8xy+5y^2 \geq 0$.

Równania i nierówności

1. Rozwiąż równania:
   a. $4x^4 - 100x^2 + 576 = 0$, wprowadź pomocniczą niewiadomą $x^2 = t$
   b. $x^4 = 16x^2$
   c. $x^4 + 12x^2 + 35 = 0$
   d. $4x^4 + 9 = 37\mathrm{x}^2$
   e. $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
   f. $x - 5\sqrt{x} + 4 = 0$, wprowadź pomocniczą niewiadomą$\sqrt{x} = t$
   g. $x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$
   h. $x - 7\sqrt{x} + 6 = 0$
   i. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$
   j. $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$, wprowadź pomocniczą niewiadomą$x^3 = t$
   k. $x^3 - 4\sqrt{x^3} = 32$, wprowadź pomocniczą niewiadomą $\sqrt{x^3} = t$
   l. $3(x^2 - 4x) - (x^2 - 4x)^2 + 10 = 0$, wprowadź pomocniczą niewiadomą $x^2 - 4x = t$
   m. $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 3x - 1) = -6$, wprowadź pomocniczą niewiadomą $x^2 - 3x = t$
   n. $(3x^2 + x - 2)^2 = 30x^2 + 10x - 36$, wprowadź pomocniczą niewiadomą $3x^2 + x - 2 = t$
   o. $4\left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{3}{x}\right) = 32$, wprowadź pomocniczą niewiadomą$x + \frac{3}{x} = t$
   p. $x^2 + \frac{25}{x^2} + 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 18 = 0$, wprowadź pomocniczą niewiadomą$x - \frac{5}{x} = t$
   q. $x^2 - 5|x| + 6 = 0$, wprowadź pomocniczą niewiadomą$|x| = t$
   r. $x^2 + 10|x| + 20 = 0$
   s. $x^2 - 3|x| - 4 = 0$
   t. $2x^2 - 5|x| - 3 = 0$
2. Korzystając z faktu, że jeśli $|f(x)| = g(x)$, to $f(x) = g(x) lub\ f(x) = -g(x)$ rozwiąż równania (Pamiętaj o sprawdzeniu!)
   a. $|x - 3| = x$

   b. $|2x+5| = 2x$
   c. $|x^2 - 4x| = x - 4$
   d. $|3 - 4x| = 6$
   e. $|5 - x| = 0$
   f. $|x^2 + 2x - 3| = x^2 - x + 1$
3. Korzystając z faktu, że jeśli $|f(x)| = |g(x)|$, to $f(x) = g(x) lub\ f(x) = -g(x)$ rozwiąż równania (Pamiętaj o sprawdzeniu!)
   a. $|5 - x| = |3x + 8|$
   b. $|x + 3| = |2x - 1|$
   c. $|x - 6| = |x^2 - 6x|$
   d. $|x^2 - 1| = |x^2 + 3x - 1|$
   e. $|2x - 6| = |x^2 - 3x|$
4. Wyznacz wszystkie wartości m, dla których równanie z niewiadomą x ma dokładnie jedno rozwiązanie:
   a. $x - 2m + 4 = mx$
   b. $3mx - 2m - 2x - 3$
5. Zbadaj, dla jakich wartości współczynników m równanie $|x - 1| = m$ ma rozwiązania. Narysuj w układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x) = |x - 1|$ oraz $g(x) = m$ (wykorzystaj aplet *rownania01.ggb*, m zmieniaj przy pomocy suwaka)
6. Dla jakiej wartości współczynnika m równanie $|x + 2| = m$ ma dwa różne rozwiązania. Skorzystaj z ilustracji sporządzonej w programie GeoGebra (zmodyfikuj aplet *rownania01.ggb* lub wykonaj własny). Dla jakiej wartości m rozwiązania tego równania są ujemne?
7. Jaka liczba dodatnia jest mniejsza od jej kwadratu o liczbę dodatnią d? Czy to zadanie ma zawsze rozwiązanie?
8. Rozłóż liczbę dodatnią d na takie dwa składniki dodatnie, żeby suma ich kwadratów była równa liczbie dodatniej p.

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

9. Dwie rury mogą napełnić basen, działając razem, w ciągu t godzin. Druga z nich mogłaby sama napełnić ten sam zbiornik, działając o d godzin dłużej niż pierwsza. W ciągu ilu godzin pierwsza rura mogłaby sama napełnić ten zbiornik?

Funkcje i ich własności

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 3 s. 40]

Dla jakich wartości m dziedziną funkcji f jest zbiór D_f

a) $f(x) = \frac{x}{x+m}$, $D_f = R - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{2-x}{2x-m}$, $D_f = R - \{1\}$

c) $f(x) = \frac{x+1}{mx}$, $D_f = R - \{0\}$

2. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 4 s. 40]

Dla jakich wartości m dziedziną funkcji f jest zbiór D_f

a) $f(x) = \frac{x}{(x+m)(x-1)}$, $D_f = R - \{1, 4\}$

b) $f(x) = \frac{mx-1}{x^2-m}$, $D_f = R - \{-3, 3\}$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-m}$, $D_f = R$

3. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 5 s. 40]

Dla jakich wartości m dziedziną funkcji f jest zbiór D_f

a) $f(x) = \frac{x+1}{(x+m)(x-1)}$, $D_f = R - \{1\}$

b) $f(x) = \frac{x^2+x+2}{(mx+2)(x^2+x-2)}$, $D_f = R - \{-2, 1,6\}$

4. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 14 s. 42]

Sprawdź, czy punkt P należy do wykresu funkcji f

a) $f(x) = (x^4 - x^3 + x - 1)^{2010}$, $P = (-1, 1)$

b) $f(x) = x^{2010} - 3x^{2009} + 3x - 1$, $P = (3, 8)$

c) $f(x) = x^{100} - 5x^{97} - 6x^{96}$, $P = (2, 0)$

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Funkcja liniowa

Prace długoterminowe – projekty i WebQuest – przykłady i źródła

- https://sites.google.com/site/buraczek170/home/tresci-nauczania--matematyka [ostatni dostęp 20.07.2015]

Funkcja kwadratowa

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej, wiedząc, że do jej wykresu należą punkty $A=(1,2), B=(-1,6), C=(2,3)$
2. Wykaż, że funkcja $f(x)=x^2-kx+k^2$ przyjmuje wartości nieujemne dla każdej liczby rzeczywistej k
3. Podaj największą wartość funkcji $f(x)=\frac{1}{x^2+3}$
4. Podaj najmniejszą wartość funkcji $f(x)=\frac{-1}{x^2+1}$
5. Wyznacz wartość k, tak, aby miejsca zerowe podanej funkcji były liczbami przeciwnymi (wykorzystaj aplet *zdolni_kwadratowa01.ggb*, poeksperymentuj, postaw hipotezę, a potem udowodnij ją wykonując obliczenia)
    a. $f(x)=x^2+kx+4$
    b. $g(x)=x^2+kx+k$
    c. $h(x)=x^2+k$
6. Wyznacz wartość k, tak, aby funkcja $f(x)=x^2+kx+9$ (wykorzystaj aplet *zdolni_kwadratowa02.ggb*, poeksperymentuj, postaw hipotezę, a potem udowodnij ją wykonując obliczenia)
    a. Miała jedno miejsce zerowe
    b. Miała dwa różne miejsca zerowe i jednym z miejsc zerowych była liczba -9
7. Wyznacz wartość k, tak, aby funkcja $f(x)=kx^2+x+9$ (wykorzystaj aplet *zdolni_kwadratowa03.ggb*, poeksperymentuj, postaw hipotezę, a potem udowodnij ją wykonując obliczenia)
    a. Miała jedno miejsce zerowe

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

b. Miała dwa różne miejsca zerowe i jednym z miejsc zerowych była liczba -9

8. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, której jednym z miejsc zerowych jest liczba 3, wykres ma oś symetrii x=1, a jej wartość największa w przedziale $\langle 6, 7\rangle$ wynosi 32.
9. Wyznacz wzór funkcji kwadratowej f, która ma jedno miejsce zerowe równe 2, a jej wartość najmniejsza w przedziale $\langle -3, -2\rangle$ wynosi -5

Prace długoterminowe – projekty i WebQuest – przykłady i źródła

- Czy parabole są wszędzie? http://funkwadrat.blogspot.com/ [ostatni dostęp 20.07.2015]
- http://poster.4teachers.org/worksheet/view.php?id=70100&page=2 [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Parabole wokół nas http://www.matgimbolkow.ssl2.pl/parabole-wokol-nas/ [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Gdzie spotkamy parabole? http://mschrist.wikispaces.com/home [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Parabolas in real life http://youtu.be/cXOcBADMp6o [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Jakie jest równanie paraboli w logo znanej firmy? http://mschrist.wikispaces.com/Sample+Project [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Co łączy parabole z delfinami? http://parabolicmotion.weebly.com/ [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Projekt http://projekt-matematyczny.blogspot.com/ [ostatni dostęp 20.07.2015]

Eksperymentowanie

- Jaką zastosować strategię, aby trafić piłką do kosza? http://www.flonga.com/play/top-basketball.htm [ostatni dostęp 20.07.2015]

Prace badawcze (z wykorzystaniem GeoGebry)

1. Utwórz aplet pozwalający zaobserwować, jaką figurę tworzą wierzchołki parabol
   a. $y = (x-2)^2 + m$
   b. $y = (x-m)^2 + 1$
   c. $y = (x-m)^2 + m$

d. $y = (x - m)^2 + 2m$

e. $y = (x - m)^2 + m^2$

W każdym przypadku na podstawie obserwacji spróbuj postawić hipotezę. Następnie udowodnij ją.

2. Utwórz aplet, który pozwoli obserwować wpływ zmiany wartości współczynników a, b, c we wzorze funkcji kwadratowej w postaci ogólnej ustal wartości dwóch z nich, zmieniaj trzeci. Jak zmienia się wtedy położenie i kształt paraboli?
3. Dla jakich wartości m prosta $y = 2x + m$ ma z parabolą $y = x^2 - 4x + 5$ jeden punkt wspólny? Narysuj obie krzywe i zmieniając wartość m, postaw hipotezę, co do rozwiązania. Następnie udowodnij ją rachunkowo.
4. Jak wartość m wpływa na ilość punktów wspólnych prostej $y = 2x + 1$ i paraboli $y = x^2 + m$?
5. Narysuj wykresy funkcji $f(x) = \frac{x^4+x^2}{x^2+1}$ oraz $f(x) = \frac{x^4-x^2}{x^2-1}$. Czy są jednakowe?

   Wskazówka: Wykorzystaj narzędzie Punkt na obiekcie, ustaw punkt P na wykresie funkcji i poruszając nim zmieniaj jego położenie. Kiedy punkt P znika? Uzasadnij to wykonując obliczenia.

Ciągi

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7.20 s. 137]

   Ciąg (a_n) jest ciągiem malejącym o wyrazach dodatnich. Zbadaj monotoniczność ciągu (b_n), wiedząc, że:

   a. $b_n = \frac{1}{a_n}$

   b. $b_n = a_n^2$

2. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7.90 s. 145]

   W skończonym ciągu geometrycznym dwa ostatnie wyrazy są równe odpowiednio $a_{n-1} = \frac{25}{32}$ oraz $a_n = \frac{25}{64}$. Wiedząc, że suma wszystkich wyrazów tego ciągu wynosi $199\frac{39}{64}$, wyznacz:

   a. wyraz pierwszy tego ciągu

   b. liczbę wyrazów tego ciągu

3. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2009: zad. 26 s. 140]

   Wyznacz pierwszy wyraz a_1 i iloraz ciągu geometrycznego, wiedząc, że suma sześcianów trzech początkowych wyrazów jego wyrazów wynosi 757, a iloczyn tych wyrazów 27.

4. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7.80 s. 237]

   Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego równa się 1. Stosunek sumy m początkowych wyrazów tego ciągu do sumy n ($m \neq n$) początkowych wyrazów wynosi $m^2 : n^2$. Znajdź różnicę i wzór ogólny tego ciągu.

5. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7.146 s. 245]

   O nieskończonym ciągu (x_n) wiadomo, że:

a. Ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = 4^{x_n}$ jest ciągiem geometrycznym o ilorazie 16

b. $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{20} = 480.$

Oblicz x_1.

6. [M. Zakrzewski, T. Żak, E. Jakubas, P. Nodzyński Matematyka przed maturą przyjemna i pożyteczna, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2004: zad. 17 s. 97]

Uzasadnij, że w skończonym ciągu arytmetycznym mediana jest równa średniej arytmetycznej wyrazów skrajnych. Oblicz sumę 77-wyrazowego ciągu arytmetycznego o medianie 7.

7. [E. Bańkowska, D. Stankiewicz, Matematyka w zastosowaniach zbiór zadań dla szkół średnich, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001: zad. 4.17 s. 37]

Z miast A i B, odległych od siebie o 119 km, wyjeżdża naprzeciw siebie dwóch kolarzy, przy czym drugi startuje z miasta B dwie godziny później niż pierwszy z miasta A. Pierwszy kolarz pokonuje w pierwszej godzinie trasę 20 km, w każdej następnej o 2 km mniej niż w poprzedniej. Drugi kolarz pokonuje w pierwszej godzinie 10 km, a w każdej następnej o 3 km więcej niż w poprzedniej. Oblicz po ilu godzinach (od chwili wyjazdu pierwszego kolarza) spotkają się obaj kolarze i w jakiej odległości od miasta B.

8. [M. Trzeciak, M. Jankowska Matematyka klasa 3 zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum, WSiP, Warszawa 2004: zad. 76 s. 58]

Rozwiąż równanie $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 \cdot \ldots \cdot 2^{2n} = (0{,}25)^{-28}$

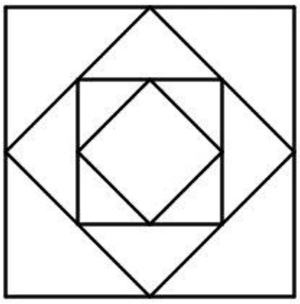
9. [M. Trzeciak, M. Jankowska Matematyka klasa 3 zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum, WSiP, Warszawa 2004: zad. 177 s. 71]

W kwadrat o boku a wpisano kwadrat, łącząc środki boków wyjściowego kwadratu. W powstały kwadrat wpisano kolejny kwadrat itd. (patrz rysunek). Dla dziesięciu kolejnych kwadratów oblicz:

a. Sumę ich pól

b. Sumę długości ich przekątnych

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl



Zadania na dowodzenie

1. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2009: zad. 22 s. 129]

   Wykaż, że trzy wyrażenia $\frac{1+x}{1+y}, \frac{x+y}{2y}, \frac{x+y^2}{y+y^2}$ tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny dla dowolnego $x\epsilon R, y\epsilon R-\{0,-1\}$.

2. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2009: zad. 21 s. 134]

   Wykaż, że jeśli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to ciąg (b_n) o wyrazie ogólnym $b_n = a_{3n}$ jest również geometrycznym.

3. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7.55 s. 234]

   Wykaż, że jeśli ciąg $(a_n), n\epsilon N_+$ jest ciągiem arytmetycznym, to ciągi (b_n) i (c_n) $b_n = a_{3n}$ oraz $c_n = -\frac{1}{2}a_{2n-1}$ są również arytmetyczne.

4. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2009: zad. 10 s. 136]

   Dany jest ciąg geometryczny (a_n) o parzystej liczbie wyrazów, w którym $a_1 \neq 0$ oraz $q\epsilon R-\{-1,0,1\}$. Wykaż, że stosunek sumy wszystkich wyrazów tego ciągu do sumy wyrazów o numerach parzystych wynosi $\frac{1+q}{q}$.

5. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7,100 s. 239]

   Wykaż, że nieskończony ciąg (a_n), gdzie

   a. $a_n = 10 \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n$

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

b. $a_n = \frac{6}{3^{2n+1}} + \frac{11}{9^n}$

Jest ciągiem geometrycznym.

6. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7,103 s. 239]

Udowodnij, że jeśli a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny, to:

a. $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

b. $(a - d)^2 = (a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2$

c. $(a - b + c - d)^2 = (a - b)^2 + 2(b - c)^2 + (c - d)^2$

Wskazówka: Skoro a, b, c, d tworzą ciąg geometryczny, to $b = aq, c = aq^2, d = aq^3$.

7. [M. Kurczab, E. Kurczab, E. Świda, Matematyka Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 2, Oficyna Edukacyjna*Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013: zad. 7,104 s. 240]

Udowodnij, że trzy liczby a, b, c tworzące ciąg geometryczny spełniają warunek:

a. $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$

b. $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

8. [M. Zakrzewski, T. Żak, E. Jakubas, P. Nodzyński Matematyka przed maturą przyjemna i pożyteczna, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2004: zad. 17 s. 97]

Uzasadnij, że w skończonym ciągu arytmetycznym mediana jest równa średniej arytmetycznej wyrazów skrajnych. Oblicz sumę 77-wyrazowego ciągu arytmetycznego o medianie 7.

Eksperymentowanie-przedłużanie zadań

[Kalkulatory graficzne w twojej szkole, 1/1999: zad. 48 s. 16] Układy równań i ciągi arytmetyczne.

a. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 6x + 7y = 8 \end{cases}$

b. Rozwiąż inny układ równań, w którym kolejne współczynniki są o 1 większe (o 2 większe…)

c. Dobieraj współczynniki układu równań liniowych tak, aby tworzyły ciąg arytmetyczny. Rozwiąż ten układ. Co zauważasz?

Uwaga: Wykorzystaj program GeoGebra do graficznego rozwiązywania układów.

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Trygonometria

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 2 s. 71]

   Oblicz bez użycia tablic matematycznych

   a) $sin^2 23° + sin^2 67°$

   b) $tg^2 17° \cdot tg^2 73° - \cos 90°$

   c) $cos^2 15° - cos^2 75°$

2. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 3 s. 71]

   Oblicz bez użycia tablic matematycznych

   a) $\frac{\sin 39°}{\sin 51°} \cdot \frac{\cos 39°}{\cos 51°}$

   b) $tg\ 30° \cdot tg\ 40° \cdot tg\ 50° \cdot tg\ 60°$

   c) $\frac{4 \sin 18°}{\cos 72°}$

3. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 9 s. 72]

   Oblicz $\sin \alpha$, jeśli wiadomo, że α jest kątem ostrym

   a) $cos^2 \alpha + \sin \alpha + 1 = 0$

   b) $3sin^2 \alpha + \cos \alpha - 3 = 0$

   c) $2 \cos \alpha = 3tg\ \alpha$

4. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 19 s. 73]

   Sprawdź, czy istnieje taki kąt ostry α, dla którego spełniona jest podana zależność.

   Odpowiedź uzasadnij.

   a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

   b) $\cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

   c) $tg\ \alpha = \frac{2^{-2} \cdot (0,5)^{-5}}{4 \cdot 64^{\frac{1}{6}}}$

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

Prace długoterminowe – projekty i WebQuest – przykłady i źródła

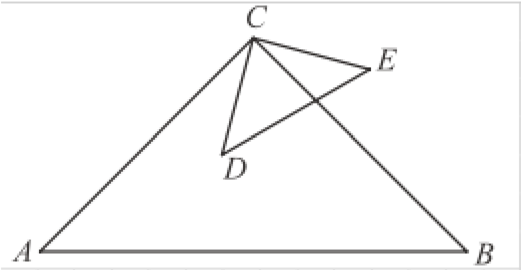
- Trygonometria na co dzień http://prezi.com/hrdktrao4bet/trygonometria-na-co-dzien/ [ostatni dostęp 20.07.2015]
- Przykłady zastosowań trygonometrii [ostatni dostęp 20.07.2015] http://www.mf.fundacja2lo.pl/pdf2012/01_Zastosowania_trygonometrii.pdf, http://www.youtube.com/watch?v=lEm9EYZwD3A
- Rozważania o dachach http://www.klubdachy.pl/przeglad/rozwazania-o-dachach-cz-2-trzeci-wymiar-pitagorasa-i-sinus-z-cosinusem/ [ostatni dostęp 20.07.2015]

Planimetria

Zadania na dowodzenie

1. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2010, zadanie 28]

Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



2. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2011, zadanie 29]

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

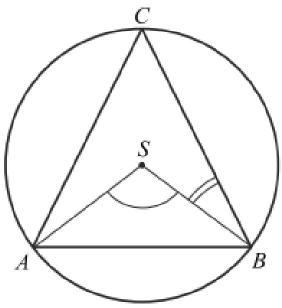
3. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2012, zadanie 30]

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.

4. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2014, zadanie 31]

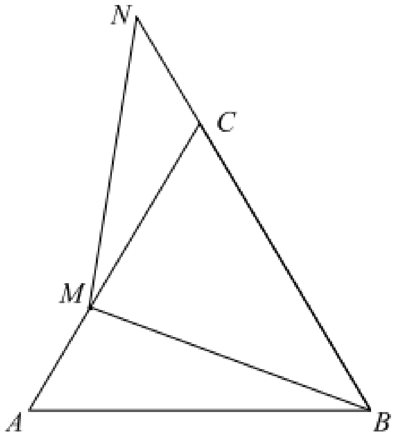
Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, o ramionach AC i BC, leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).

Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC.



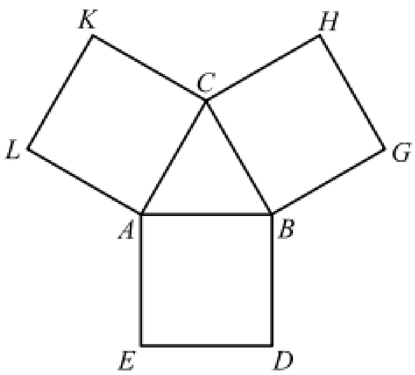
5. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, czerwiec 2011, zadanie 25]

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.



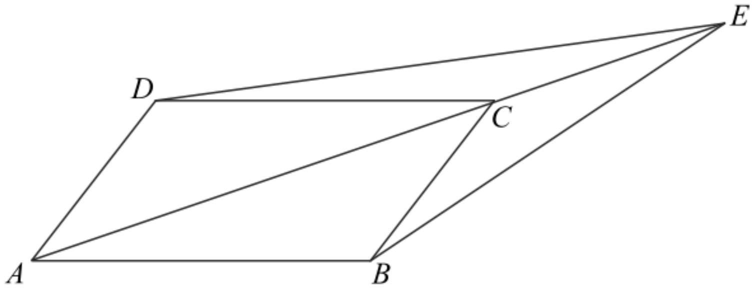
6. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, sierpień 2011, zadanie 28]

Na bokach trójkąta równobocznego ABC (na zewnątrz tego trójkąta) zbudowano kwadraty $ABDE$, $CBGH$ i $ACKL$. Udowodnij, że trójkąt KGE jest równoboczny.



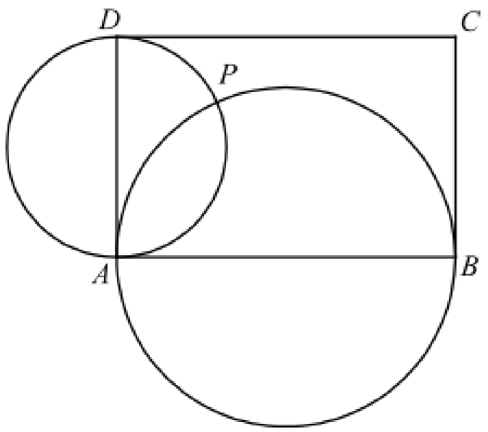
7. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, sierpień 2012, zadanie 30]

Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$ (zobacz rysunek). Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.



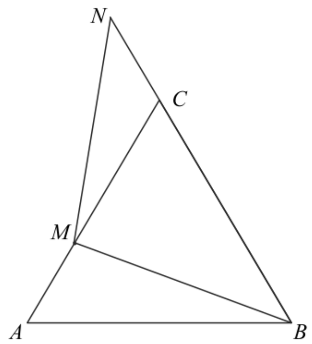
8. [Próbny egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, listopad 2010, zadanie 29]

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.



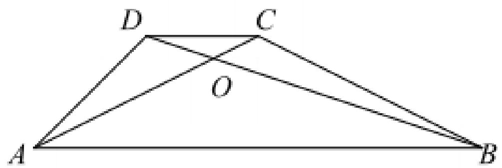
9. [Arkusz ćwiczeniowy z matematyki, poziom podstawowy, marzec 2012, zadanie 25]

Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.



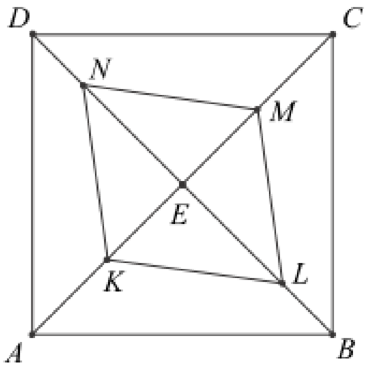
10. [Próbny egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, grudzień 2014, zadanie 31]

W trapezie $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O takim, że $|AO| : |OC| = 5 : 1$. Pole trójkąta AOD jest równe 10. Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ jest równe 72.



11. [Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2015, zadanie 28]

Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty K i M są środkami odcinków – odpowiednio – AE i EC. Punkty L i N leżą na przekątnej BD tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$ i $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy $1:3$.



Ponieważ sposób zapisu rozwiązań zadań na dowodzenie bywa dla uczniów kłopotliwy, proponujemy zapoznanie z zapisem dwukolumnowym (two-column proofs) zaczerpniętymi z doświadczeń anglosaskiej tradycji nauczania. Przykłady dostępne są w publikacjach przygotowanych w ramach projektu Opracowanie i wdrożenie kompleksowego systemu pracy z uczniem zdolnym (wersje książkowe - egzemplarze bezpłatne, wydane przez ORE oraz dostępne na stronach internetowych ORE):

- Jak pracować z uczniem zdolnym? Poradnik nauczyciela matematyki
  Praca zbiorowa pod red. Małgorzaty Mikołajczyk, s.63 - 65
- Rozszerzony program matematyki dla gimnazjum. Poradnik nauczyciela matematyki
  Autor: Wojciech Guzicki, s.96 - 101

Prace długoterminowe – projekty i WebQuest – przykłady i źródła

- Trójkąty i czworokąty [ostatni dostęp 20.07.2015]
  http://www.womkat.edu.pl/files/doradca_produkty/WQ/Matematyka/Trojkaty%20i%20czworkaty/index.html
- Podobieństwo http://www.projectmathematics.com/similar.htm [ostatni dostęp 20.07.2015]

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

- Rozważania o dachach http://www.klubdachy.pl/przeglad/rozwazania-o-dachach-cz-1-plaszczyzny-i-figury/ [ostatni dostęp 20.07.2015]

Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej

W tabeli zostały zebrane hasła z Podstawy programowej z działu Geometria analityczna oraz Narzędzia programu GeoGebra.

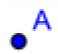
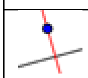
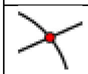
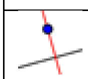
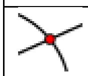
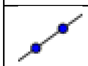
	Podstawa programowa	ikona	Narzędzie w GeoGebrze
1.	8.1 wyznacza równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty (w postaci kierunkowej lub ogólnej)		Prosta przechodząca przez dwa punkty
2.	8.2 bada równoległość i prostopadłość prostych na podstawie ich równań kierunkowych;		Nachylenie
			Relacja między dwoma obiektami
3.	8.3 wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt;		Prosta równoległa
			Proste prostopadłe
4.	8.4 oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych		Przecięcie dwóch obiektów
5.	8.5 wyznacza współrzędne środka odcinka;		Środek
6.	8.6 oblicza odległość dwóch punktów;		Odległość lub długość
7.	8.7 znajduje obrazy niektórych figur geometrycznych (punktu, prostej, odcinka, okręgu, trójkąta itp.) w symetrii osiowej		Symetria osiowa
			Symetria środkowa

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

	względem osi układu współrzędnych i symetrii środkowej względem początku układu.		

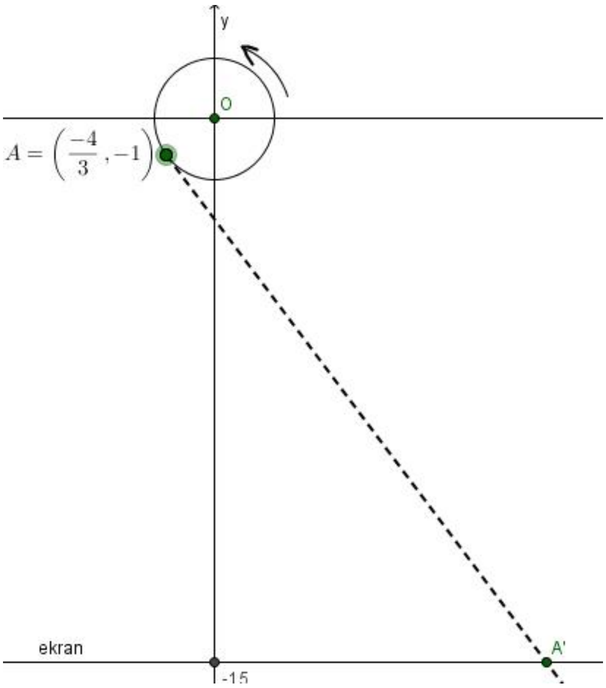
Przy rozwiązywaniu niektórych zadań z tego działu warto ułożyć „plan” wykorzystujący w.w. narzędzia i od ilustracji graficznej przejść do rozwiązania algebraicznego (zadania1-4)

1. Wyznacz równania prostych zawierających boki trójkąta ABC, jeśli dany jest wierzchołek trójkąta A(0,2) oraz równania prostych zawierających dwie wysokości: $h_1: x + y - 4 = 0 \ i \ h_2: 2x - y = 0$. Przykładowe rozwiązanie:

		obliczenia
	Narysuj punkt A o współrzędnych (0,2)	
	Narysuj proste $h_1: y = -x - 4 \ i \ h_2: y = 2x$	Skorzystaj z interpretacji współczynników funkcji liniowej
	Prosta d przechodząca przez A prostopadła do h_1	$y - 2 = -\frac{1}{-1}(x - 0)$
	Przecięcie dwóch obiektów d oraz h_2	$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = 2x \end{cases}$ $stąd \ B(2,4)$
	Prosta e przechodząca przez A prostopadła do h_2	$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 0)$
	Przecięcie dwóch obiektów e oraz h_1	$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = -x - 4 \end{cases}$ $stąd \ C(4,0)$
	Prosta przechodząca przez dwa punkty B oraz C	$\begin{cases} 4 = 2a + b \\ 0 = 4a + b \end{cases}$ $stąd \ y = -2x + 8$

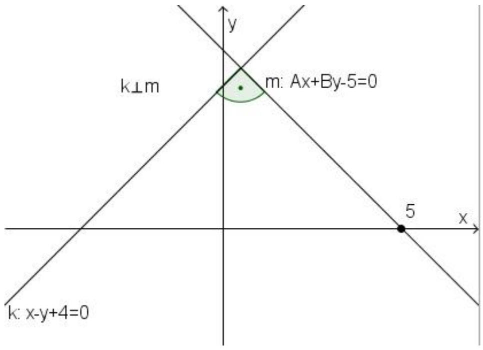
2. Punkty A(-4,4), B(4,0) są wierzchołkami trójkąta ABC, zaś punkt M(3,4) jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta. Wyznacz współrzędne punktu C
3. Wykaż, że środek okręgu opisanego na trójkącie o wierzchołkach A(-4,0), B(0,-4), C(4,0) leży na paraboli o równaniu $y = x^2 - 6x$.
4. Znajdź długości promienia okręgu o środku w punkcie S(3,-2), stycznego do prostej o równaniu $3x - 4y - 12 = 0$.

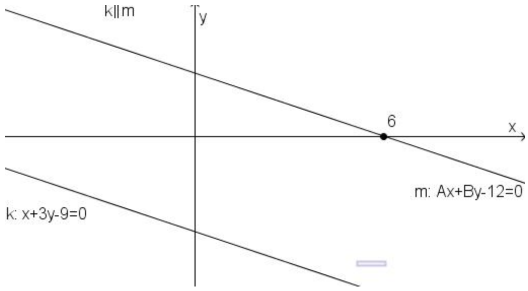
5. [„Matematyka w zadaniach praktycznych”, Przemysław Butrym, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2004] Sportowiec trenuje rzut młotem. Młot (czyli kula na linie) zatacza koło o promieniu $1\frac{2}{3}$metra, a po upuszczeniu uderza w ekran odległy o 15metrów. Umieśćmy układ współrzędnych jak na rysunku. Jeśli młot został upuszczony w punkcie $A = (-\frac{4}{3}, -1)$, to gdzie uderzy w ekran?



Przeanalizuj ruch młota po wypuszczeniu z ręki sportowca - wykorzystaj aplet zdolnianallityczna01.

6. [Matematyka zakres podstawowy Zbiór zadań do liceów i techników klasa 3, zadanie 2.32 strona 30, Marcin Kurczab, Elżbieta Kurczab, Elżbieta Świda, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2013] Na podstawie danych z rysunku poniżej wyznacz współczynniki A i b w równaniu ogólnym prostej m:





7. Oblicz pole trójkąta ABC o wierzchołkach A(5,1), B(7,4), C(9,-3) dorysowując prostokąt opisany na trójkącie (skorzystaj z apletu zdolnianalityczna02).

a) Oblicz obwód trójkąta

b) Oblicz sumę długości wysokości trójkąta

Prace badawcze (z wykorzystaniem GeoGebry)

8. Dany jest trójkąt ABC. Środki boków trójkąta to D, E, F. Skorzystaj z apletu zdolnianalityczna 03.

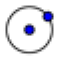
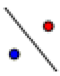
a) Ustal związek pomiędzy długością odcinka DE i długością boku AC trójkąta. Wykorzystaj odpowiednie narzędzia z paska Narzędzi, a następnie wykonaj obliczenia.

b) Zbadaj, jakie jest wzajemne położenie odcinków DE i AC.

c) Zbadaj, czy odkryte zależności spełniają także odcinki EF i AB oraz DF i BC. Możesz wpisywać dowolne współrzędne punktów i sprawdzać swoje hipotezy.

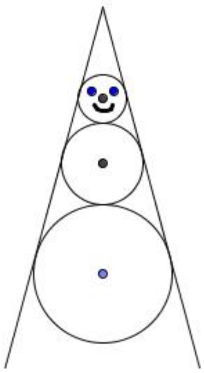
d) Sformułuj odpowiednie twierdzenie o odcinku łączącym środki boków w trójkącie, udowodnij to twierdzenie.

9. Korzystając z wniosków z poprzedniego zadania wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta ABC mając dane współrzędne środków jego boków (-2,0), (0,-2), (1,3) (skorzystaj z apletu zdolnianalityczna 04). Przeanalizuj kolejne kroki konstrukcji w aplecie. Wykorzystaj przycisk Odtwórz. Wykonaj samodzielne obliczenia, porównaj swoje wyniki ze współrzędnymi wyznaczonymi w aplecie. Powtórz to samo zadanie dla innych danych. Najpierw oblicz potem porównaj z ilustracją w aplecie.

10. Środek ciężkości trójkąta leży na przecięciu środkowych. Wyprowadź wzór na współrzędne tego punktu w zależności od współrzędnych wierzchołków.
11. Narysuj w układzie współrzędnych punkt S(-2,3). Zaznacz punkty, które są odległe od niego o 5. Ile jest takich punktów? Oznacz jeden z szukanych punktów jako P(x,y). Ile wynosi długość odcinka SP? Skorzystaj ze wzoru na długość odcinka. Podnieś obie strony do kwadratu. Gratuluję, właśnie odkryłeś równanie okręgu. Sprawdź swoje rozwiązanie z tablicami matematycznymi. W programie GeoGebra znajduje się narzędzie  -okrąg o danym środku, który przechodzi przez dany punkt. Wykorzystaj swoje odkrycie do rozwiązania kolejnych zadań.
12. W kwadracie ABCD dane są: wierzchołek A(1,-3) i równanie prostej $k\colon y = 2x$, w której zawarta jest jedna z przekątnych kwadratu. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków.
13. Punkt C(1,2) jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym |CA|=|CB|=5. Bok AB zawiera się w prostej o równaniu $2x + y + 1 = 0$. Wyznacz współrzędne wierzchołków A i B oraz pole trójkąta ABC.
14. Narysuj w układzie współrzędnych prostą o równaniu $y = x$ oraz punkt $A(1,2)$. Skonstruuj punkt symetryczny do punktu A względem danej prostej. Odczytaj współrzędne otrzymanego punktu. Co ciekawego zauważyłeś. Powtórz ten eksperyment z punktami o innych współrzędnych. Wykorzystaj narzędzie . Sformułuj hipotezę o współrzędnych punktów symetrycznych względem prostej y=x. Uzasadnij tę hipotezę.

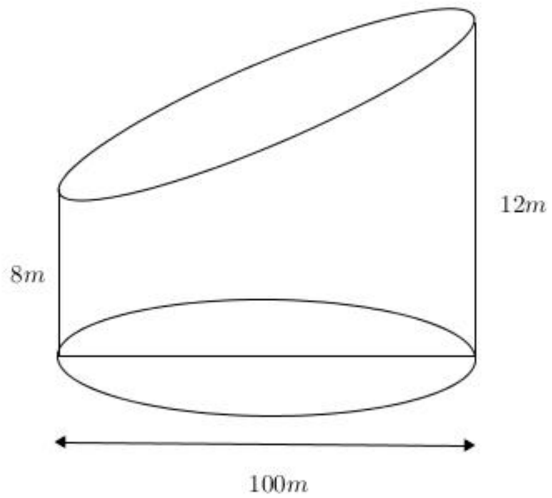
Stereometria

1. [Ciekawe zadania z geometrii, zadanie 8.24 Romuald Rutkowski, WSiP 1995] Dowieść, że w czworościanie foremnym suma odległości dowolnego jego punktu wewnętrznego od wszystkich jego ścian jest stała i wyjaśnić jej sens geometryczny.
2. [Ciekawe zadania z geometrii, zadanie 8.27 Romuald Rutkowski, WSiP 1995] Dowieść, że w czworościanie foremnym wysokości przecinają się w stosunku 1:3.
3. [Geometria na maturze, zadanie 2 str. 67 Tomasz Gronek, Wydawnictwa Szkolne PWN, Warszawa 2007] Obserwując ulepionego przez siebie bałwana (rysunek), Jędrzej zauważył, że linie poprowadzone po obu bokach postaci będą styczne do wszystkich trzech kul śniegowych (chłopcu udało się utoczyć idealne kule!). Linie, przecinając się nad głową bałwana, tworzą kąt 30°. Ile najmniejszych kul udałoby się zrobić z największej kuli, jeżeli nie byłoby żadnych strat śniegu podczas tej przeróbki?

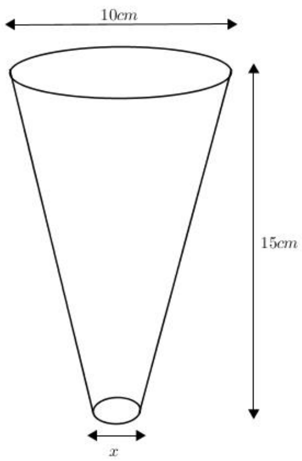


4. [Geometria na maturze, zadanie 6 str. 74 Tomasz Gronek, Wydawnictwa Szkolne PWN, Warszawa 2007] Nowoczesna hala sportowa ma kształt walca ściętego(rysunek). Jaka jest objętość powietrza znajdującego się w pustej hali? Wynik podaj z dokładnością do $1m^3$.

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

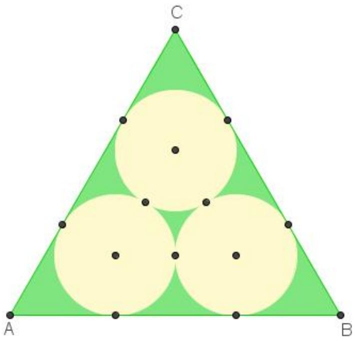


5. [Geometria na maturze, zadanie 8 str. 74 Tomasz Gronek, Wydawnictwa Szkolne PWN, Warszawa 2007] Szklanka ma kształt stożka ściętego o wysokości 15cm. Średnica górnej części wynosi 10cm. W szklance mieści się 0.5l wody. Jaka jest średnica dna naczynia?



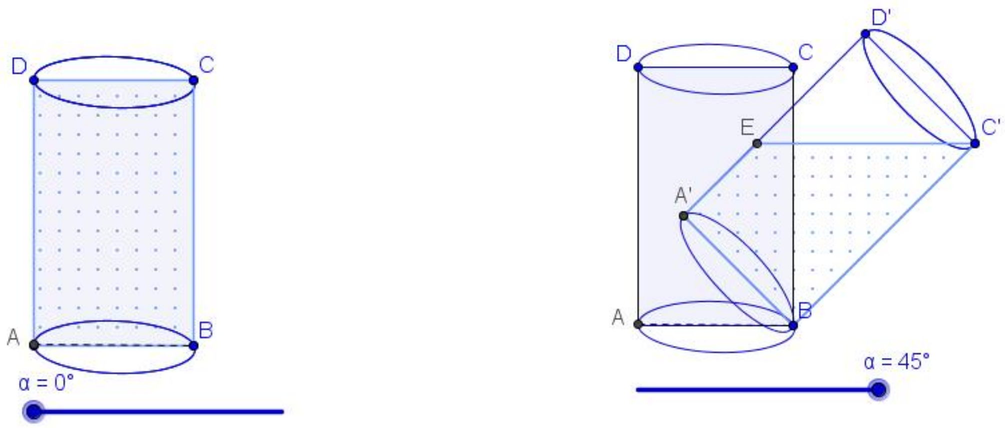
6. Krawędzie podstawy prostopadłościanu mają długości a oraz b. Przekątna prostopadłościanu tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt o mierze α. Oblicz:
   a. Pole powierzchni całkowitej
   b. Objętość bryły
7. Przekątna podstawy prostopadłościanu tworzy z jego krawędzią podstawy o długości a kąt o mierze α, a przekątna prostopadłościanu tworzy z jego krawędzią boczną kąt o mierze β. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

8. Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu wzdłuż tworzącej jest prostokątem, którego przekątna o długości d tworzy z bokiem odpowiadającym wysokości walca kąt o mierze α. Oblicz objętość tego walca.
9. Wysokość stożka jest równa H, a jego kąt rozwarcia ma miarę 2α. Oblicz:
   a. Pole powierzchni całkowitej
   b. Objętość bryły.
10. [Matematyka w zastosowaniach zbiór zadań dla szkół średnich, zadanie 6.48, Elżbieta Bańkowska, Dorota Stankiewicz, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001]. Ołówek ma kształt walca o promieniu podstawy r=0.5cm i wysokości h=20cm. Ołówki są pakowane po trzy sztuki do pudełek w kształcie graniastosłupów prawidłowych trójkątnych, Oblicz pole powierzchni najmniejszego pudełka mieszczącego 3 ołówki

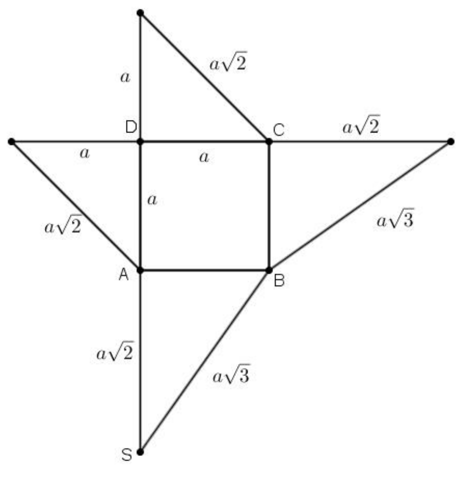


11. [Matematyka w zastosowaniach zbiór zadań dla szkół średnich, zadanie 6.37, Elżbieta Bańkowska, Dorota Stankiewicz, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001]. Naczynie w kształcie walca, którego długość wysokości jest większa od długości średnicy podstawy, ma masę 50g. Po napełnieniu wodą ma masę 200g. Przechylając naczynie tak, że tworząca wyznacza z kierunkiem pionu kąt $\alpha = 45°$, wylało się 30g wody. Oblicz długość średnicy podstawy d i wysokość h walca(gęstość wody $\rho = 1\frac{g}{cm^3}$). Skorzystaj z apletu zdolnistereometria01

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl



12. [Matematyka w zastosowaniach zbiór zadań dla szkół średnich, zadanie 6.39, Elżbieta Bańkowska, Dorota Stankiewicz, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001]. Na stole stoi szklanka pełna wody, mająca kształt walca obrotowego o promieniu podstawy r i wysokości h(h≥2r). Nachylając szklankę o kąt α względem stołu, gdzie $\alpha \epsilon \langle 0^0, 45^0 \rangle$, wylewamy część wody ze szklanki. Wyznacz objętość V wody pozostałej w szklance, jako funkcję kąta nachylenia α. Skorzystaj z apletu zdolnistereometria01 do poprzedniego zadania.
13. [Matematyka przed maturą Przyjemna i pożyteczna, przykład 16 strona 163, Marek Zakrzewski, Tomasz Żak, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2004]. W ostrosłupie, którego siatkę przedstawia rysunek, oblicz miarę kąta pomiędzy:
    a. Ścianą boczną ABS a podstawą
    b. Krawędzią BS a podstawą
    c. Krawędziami SB i SD



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Rachunek prawdopodobieństwa

Zadania dodatkowe (o podwyższonym stopniu trudności)

1. Losowanie spośród liczb {0,1,2,3…9}. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   a. Wylosowana liczba nie jest podzielna przez 4
   b. Wylosowana liczba jest dzielnikiem liczby 24
   c. Wylosowana liczba różni się o 2 od liczby 5
   d. Kwadrat wylosowanej liczby jest mniejszy od 20
   e. Wylosowana liczba spełnia równanie $2(x-3)+1=3(x+1)$
   f. Wylosowana liczba spełnia równanie $(6\text{-}x)^2=1$
2. Rzut dwukrotny kostką. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   a. Liczba oczek na pierwszej kostce będzie dzielnikiem liczby oczek na drugiej kostce
   b. Liczby oczek na obu kostkach różnią się o 1
3. Trzykrotny rzut monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzeń:
   a. Co najmniej raz wypadnie orzeł
   b. W trzecim rzucie wypadnie co innego niż w pierwszym
   c. Reszka wypadnie co najwyżej raz
   d. W drugim rzucie wypadnie to samo, co w pierwszym
4. [W. Babiański, L. Chańko, J. Czarnowska, J. Wesołowska MATeMAtyka 3 Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2012: zad. 14 s. 57]

   W urnie znajdują się kule zielone i białe – razem 9 kul. Losujemy dwukrotnie, bez zwracania po jednej kuli. Ile jest kul białych, jeśli prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru jest równe prawdopodobieństwu wylosowania dwóch kul o różnych kolorach?
5. [W. Babiański, L. Chańko, J. Czarnowska, J. Wesołowska MATeMAtyka 3 Kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2012: zad. 14 s. 57]

   Na loterii jest pięćdziesiąt losów, w tym piętnaście wygrywających. Nagrody to: jedna w wysokości 100 zł, cztery po 10 zł i dziesięć po 5 zł. Jeden los kosztuje 5 zł. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wygrana będzie nie mniejsza od poniesionych kosztów, jeśli kupimy:

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 022 517 96 00, faks 022 517 96 25
www.swps.pl

a. Jeden los

b. Dwa losy

6. [P. Jurczyszyn, M. Wesołowski, Matematyka Zbiór zadań przygotowujących do matury, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2011: zad. 36 s. 92]

Dany jest zestaw liczb: 2, 1, 3, 5, 1, 3, 2, 3. Losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowano liczbę:

a. Większą niż średnia arytmetyczna zestawu danych

b. Nie większą niż mediana zestawu liczb

c. Większą niż odchylenie standardowe zestawu liczb

Prace długoterminowe – projekty i WebQuest – przykłady i źródła

- Gry losowe http://www.matzinf.cba.pl/grylosowe/index.html [ostatni dostęp 20.07.2015]

Wykaz apletów przygotowanych do nakładki dla uczniów zdolnych

1	Równania i nierówności – zadanie 5	zdolni_rownania01
2	Funkcja kwadratowa – zadanie 5	zdolni_kwadratowa01
3	Funkcja kwadratowa – zadanie 6	zdolni_kwadratowa02
4	Funkcja kwadratowa – zadanie 7	zdolni_kwadratowa03
5	Funkcja kwadratowa – praca badawcza 3	zdolni_kwadratowa04
6	Funkcja kwadratowa – praca badawcza 4	zdolni_kwadratowa05
7	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej - zadanie 5 - ilustracja rzutu młotem	zdolni_analityczna01
8	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej - zadanie 7 - pole trójkąta	zdolni_analityczna02
9	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej - zadanie 8 - praca badawcza odcinek łączący środki boków w trójkącie	zdolni_analityczna03
10	Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej - zadanie 9 - odcinek łączący środki boków w trójkącie	zdolni_analityczna04
11	Stereometria - zadanie 11 - wylewanie wody z walca	zdolni_stereometria01