



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 2

Liczby rzeczywiste

- 11. Potęga o wykładniku wymiernym
- 12. Prawa działań na potęgach
- 13. Wykorzystywanie własności potęg w innych dziedzinach- fizyka i astronomia
- 14. Wykorzystywanie własności potęg w innych dziedzinach-chemia
- 15. Wykorzystywanie własności potęg w innych dziedzinach- informatyka

Opracowanie L7

Temat: Potęga o wykładniku wymiernym

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *rzeczywiste04*
- Masz przed sobą aplet przy pomocy którego, nauczysz się zamieniać potęgi o wykładniku wymiernym na pierwiastki i pierwiastki na potęgi o wykładniku wymiernym.
 - Przycisk *Nowy przykład* służy do zmiany polecenia, z kolejnymi przykładami do wykonania
 - Przeczytaj uważnie polecenie, a następnie zaznacz jedno z trzech *Pól wyboru*, przy którym jest prawidłowa odpowiedź
 - Po zaznaczeniu *Pola wyboru* na ekranie pojawi się komunikat, czy dobrze wykonałeś zadanie
 - Jeżeli Twoja odpowiedź nie jest poprawna, zastanów się jeszcze raz, nie zmieniaj przykładu i ponownie zaznacz odpowiedź
 - Możesz wykonywać dowolną liczbę przykładów, tak długo aż będziesz biegle zamieniać potęgi na pierwiastki i odwrotnie

a) $9^{\frac{3}{2}}$ 3^{-1}

b) $27^{\frac{1}{3}}$ $9^{0,5}$

c) $256^{\frac{-1}{4}}$ 2^5

d) $0,008^{\frac{-1}{3}}$ 5^{-2}

Zadanie 7. Zaprojektuj domino, w którym wykorzystasz zamianę potęg na pierwiastki i odwrotnie. Ułóż domino zaprojektowane przez kolegę.

Przykładowe domino:

START	$16^{\frac{1}{4}}$
2	$\sqrt{2}$
$2^{\frac{1}{2}}$	$32^{\frac{2}{5}}$
4	$27^{\frac{-1}{3}}$
$\frac{1}{3}$	META

Temat: Prawa działań na potęgach

Zadanie 1. Zapisz podane liczby w postaci potęgi liczby 2

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{8} =$

b) $4^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{16} =$

c) $\left(2^{\frac{-1}{4}}\right)^{2,4} =$

d) $\frac{1024^{10}}{\sqrt[5]{64}} =$

Zadanie 2. Zapisz podane liczby w postaci potęgi liczby 3

a) $3 \cdot \sqrt{27} =$

b) $9^{\frac{1}{3}} : \sqrt[5]{81} =$

c) $\left(27^{\frac{-3}{4}}\right)^{1,6} =$

d) $\frac{243^{\frac{-1}{3}}}{\sqrt[5]{81}} =$

Zadanie 3. Zapisz podane liczby w postaci potęgi liczby 5

a) $\sqrt{5\sqrt{5}} =$

b) $\sqrt{5\sqrt[3]{25}} =$

c) $\frac{\sqrt[4]{125}}{25^{-0,3}} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{25}} =$

Zadanie 4. Wstaw znaki $<$, $>$, $=$

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot 2,25^{\frac{-1}{2}}$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ b) $8^{0,25} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ $16^{\frac{-1}{2}}$ c) $\left(\frac{2^{-1,2}}{4^{-2,1}}\right)^{\frac{1}{3}}$ 125^0

Zadanie 5. Wyznacz n i m

a) ${}^{12}\sqrt{6} \cdot {}^3\sqrt{6} = {}^n\sqrt{6}$

b) ${}^4\sqrt{11} \cdot {}^5\sqrt{11} = {}^n\sqrt{11^m}$

c) $\frac{{}^5\sqrt{7}}{{}^9\sqrt{7}} = {}^n\sqrt{7^m}$

Zadanie 6. Podaj konieczne założenia i doprowadź do najprostszej postaci

a) $\left(\frac{a^4(a^{-2})}{(a^2)^{-6}}\right)^{-0,5} =$

b) $\frac{{}^5\sqrt{a^2}}{\sqrt[7]{\sqrt[3]{a \cdot a}}} =$

c) $\frac{\sqrt[3]{a^{-1}}}{\sqrt[4]{\sqrt[5]{a \cdot a^2}}} =$

Temat: Wykorzystywanie własności potęg w innych dziedzinach- fizyka i astronomia

Poniżej przedstawiono w tabeli przedrostki w układzie SI

przedrostek	mikro	mili	centy	decy	deka	hekto	kilo	mega
skrót	μ	m	c	d	da	h	k	M
Liczba przez którą mnożymy jednostkę	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10	10^2	10^3	10^6

skrót	μm	mm	cm	dm	m	km	przykłady
Liczba przez którą mnożymy jednostkę	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10^3	$1\text{km}=10^3\text{m}$
	10^{-9}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	1	$1\text{cm}=10^{-5}\text{km}$
	10^{-4}	10^{-1}	1	10^1	10^2	10^5	$1\mu m = 10^{-4}\text{cm}$

Jeśli mamy jednostki kwadratowe, to np. $1\text{mm}^2=(10^{-3})^2\text{m}^2 = 10^{-6}\text{m}^2$

Dla jednostek sześciennych np. $1\text{dm}^3 = (10^{-1})^3\text{m}^3 = 10^{-3}\text{m}^3$

Dla jednostek czasu:

skrót	s	min	h
Liczba przez którą mnożymy	60^2	60^1	1
	60^1	1	60^{-1}
	1	60^{-1}	60^{-2}

Zadanie 1. Zamień jednostki

- a) $12 \frac{km}{min}$ na $\frac{m}{s}$
- b) $34 \frac{kg}{mm^3}$ na $\frac{g}{m^3}$
- c) $85 \frac{cm}{h}$ na $\frac{m}{s}$
- d) $45 \frac{t}{cm^2}$ na $\frac{g}{m^2}$

Zadanie 2.

- a) Najszybsze zwierzę Gepard osiąga prędkość 110km/h. Podaj tę wielkość w m/min
.....
- b) Najszybszy Polak Jędrzej Dobrowolski osiągnął na nartach zawrotną prędkość 235,19 km/h . Podaj ten wynik w m/s
.....
- c) Największy Ocean Spokojny ma 178,7 mln km², podaj tę wielkość w m²
.....

Zadanie 3.[1]Odpowiedzi na pytania zapisz w postaci wykładniczej.

Całkowite zużycie energii w Polsce w roku 2000 wynosiło $W_c=3753 \cdot 10^{15}[J] = 3753[PJ]$

Liczba mieszkańców Polski w 2000r wynosi $N=38$ mln osób

Zużycie nośników energii:

węgiel kamienny 84,9 mln ton czyli 2,2 tony na osobę rocznie

węgiel brunatny 59,5 mln ton czyli 1,56 tony na osobę rocznie

ropa 18,3 mln ton czyli 0,48 tony na osobę rocznie

gaz ziemny 13,2 mld m³ czyli 348 m³ na osobę rocznie (7x7x7m³)

Oblicz ile jedna statystyczna osoba rocznie zużywa energii

$$W = \frac{W_c}{N} \quad W \approx$$

Oblicz liczbę sekund w ciągu roku

t=

Oblicz średnią moc niezbędną do życia w Polsce statystycznej osoby w 2000r.

$$P = \frac{W}{t} =$$

Zadanie 4. Prędkość światła w próżni wynosi $3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Rok świetlny to odległość jaką w ciągu roku pokona światło w próżni. 109 to liczba gwiazd, których odległość od Ziemi nie przekracza 20 lat świetlnych. Dwie najbliższe to Proxima Centauri (4,22 lata świetlne), Alpha Centauri (4,39 lat świetlnych). Oblicz o ile km od Ziemi są oddalone wymienione gwiazdy

Zadanie 5. Badano liczebność bakterii i na podstawie obserwacji ustalono, że liczba bakterii zmienia się wg wzoru $N(t) = 10^5 \cdot 3^t$, gdzie t oznacza czas w minutach.

Oblicz ile bakterii będzie w tej kolonii po upływie

- a) 1 godziny
- b) doby
- c) tygodnia

[1] dane pochodzą ze strony <http://dsid.ipj.gov.pl/> Narodowe Centrum Badań Jądrowych dział Edukacji i Szkoleń

Temat: Wykorzystywanie własności potęg w innych dziedzinach-chemia.

Uwaga: wyniki zadań podaj w notacji wykładniczej

Zadanie 1. Mol jest miarą liczności materii . W molu jest $6,02 \cdot 10^{23}$ drobin (atomów, jonów, cząsteczek, elektronów itp.). Ta liczba drobin zawartych w molu to tzw. liczba Avogadra N_A .

Oblicz ile atomów Fe znajduje się w 4 molach tego pierwiastka.

n – liczba moli,

N_A – liczba atomów w jednym molu,

N – liczba atomów w podanej liczbie moli,

Podstaw do wzoru:

$$N = n \cdot N_A$$

$$N =$$

Zadanie 2. Masa molowa jest to masa 1 mola drobin (atomów, cząsteczek, jonów, elektronów itp.). Jest ona równa liczbowo masie atomowej lub cząsteczkowej danej substancji.

Na przykład masa atomowa magnezu (której wartość znajdujemy w układzie okresowym) wynosi

24 , to masa molowa magnezu $M_{Mg} = 24 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Oblicz masę 3 moli kwasu siarkowego (VI)

Najpierw oblicz masę molową kwasu (potrzebne wartości odczytaj w układzie okresowym)

$$M_{H_2SO_4} = 2 \cdot \frac{g}{mol} + \frac{g}{mol} + 4 \cdot \frac{g}{mol} = \frac{g}{mol}$$

n– liczba moli,

M– masa molowa,

m– masa,

Podstaw do wzoru

$$m = nM$$

$$m =$$

Zadanie 3[1]. Gęstość elektronów w różnych materiałach

Liczba elektronów w 1 cm³ materiału X o gęstości g_x, średniej liczbie masowej A_x oraz średniej liczbie atomowej Z_x wynosi

$$n_e = \frac{g_x Z_x}{A_x} N_A$$

gdzie N_A=6.02x10²³ to liczba Avogadro

Uzupełnij tabelkę:

Materiał	Średnia gęstość materiału g _x	liczba masowa średniego atomu ,A _x	liczba atomowa średniego atomu, Z _x	Gęstość elektronów, n _e
uran. U	~19	238.03	92	4.423 · 10 ²⁴ / cm ³
ołów. Pb	11.35			
platyna. Pt	21.45			
żelazo. Fe	7.87			
aluminium. Al	2.70			
woda. H ₂ O	1.00	~6	~3.3	~3.35 · 10 ²³ / cm ³
ciało ludzkie	~1	~6.33	~3.45	~3.3 · 10 ²³ / cm ³
powietrze	0.00129	~14.5	~7.23	

Zadanie 4.[1] Przybliżony skład chemiczny ciała człowieka, (pierwiastki, występujące w ilościach $\geq 0,01$ grama)

Pierwiastek	Symbol	Część wagi ciała [%]	Masa [g]
Tlen	O	65,0	45 500
Węgiel	C	18,0	12 600
Wodór	H	10,0	7 000
Azot	N	3,0	2 100
Wapń	Ca	1,5	1 050
Fosfor	P	1,0	700
Siarka	S	0,25	175
Potas	K	0,2	140
Sód	Na	0,15	105
Chlor	Cl	0,15	105
Magnez	Mg	0,05	35
Żelazo	Fe	0,0057	4
Cynk	Zn	0,0033	2,3
Stront	Sr	0,0002	0,14
Miedź	Cu	0,00014	0,1
Aluminium	Al.	0,00014	0,1
Ołów	Pb	0,00011	0,08
Arsen	As	0,00014	0,1
Antymon	Sb	0,00013	0,09
Cyna	Sn	0,000043	0,03
Jod	I	0,000043	0,03
Kadm	Cd	0,000043	0,03
Mangan	Mn	0,00003	0,02
Bar	Ba	0,000023	0,016
Lantan	La	0,00007	0,05
Niob	Nb	0,00007	0,05
Tytan	Ti	0,000021	0,015
Nikiel	Ni	0,000014	0,01
Bor	B	0,000014	0,01

Na podstawie podanej dalej tabelki, podającej uśredniony skład chemiczny ludzkiego ciała, otrzymujemy dla ciała o masie 70 kg :

liczba atomów	$N_{at} \approx 6,65 \times 10^{27}$
liczba atomowa „średniego atomu”	$Z_C \approx 3,45$
liczba masowa „średniego atomu”	$A_C \approx 6,33$
masa spoczynkowa elektronu	$m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$

Łączna masa wszystkich elektronów, zawartych w ludzkim ciele o masie 70 kg wynosi

$$N_{at} \cdot Z_C \cdot m_e =$$

Zadanie 5. Okres połowicznego rozpadu Cs 137 wynosi 30 lat. Określ jaka część pierwiastka rozpadnie się w ciągu $t=2$ lat, które minęły od katastrofy elektrowni jądrowej w Fukushima (Japonia).

Oznaczenia:

m -masa pierwiastka promieniotwórczego po upływie czasu t w latach

m_0 - masa początkowa pierwiastka

$T=30$ okres połowicznego rozpadu w latach

$$\frac{m}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}}$$

[1] dane pochodzą ze strony <http://dsid.ipj.gov.pl/> Narodowe Centrum Badań Jądrowych dział Edukacji i Szkoleń

Temat: Wykorzystywanie własności potęg w innych dziedzinach-informatyka

Zadanie 1. System stosowany w technice cyfrowej to system dwójkowy (binarny) . Do zapisywania liczb stosujemy w nim dwie cyfry 0 i 1.

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	0	0	1	1	0	0	1

Korzystając z tabeli możesz zamienić liczbę zapisaną w systemie dwójkowym, na liczbę zapisaną w systemie dziesiętnym (decymalnym)

$$10011001_{(2)} = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 153_{(10)}$$

Można także zamieniać ułamki

2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-5}	2^{-6}
1	0	0	1	1

Zamienimy

$$0,10011_{(2)} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} = 0,546875_{(10)}$$

Można też przedstawić wynik w postaci ułamka zwykłego $\frac{1}{2} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{35}{64}$

Korzystając z poprzedniego przykładu zapisz liczby w systemie dziesiętnym

- a) $1110,001_{(2)} =$
- b) $10101010,11_{(2)} =$
- c) $1,000111_{(2)} =$

Zadanie 2. nie jest obowiązkowe ☺ W systemie szesnastkowym (Hex) do zapisu liczb używamy szesnastu cyfr 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F. Cyfry oznaczone literami odpowiadają wartościom dziesiętnym:

A-10 B-11 C-12 D-13 E-14 F-15

16^6	16^5	16^4	16^3	16^2	16^1	16^0
			2	1	A	F

Zamienimy liczbę:

$$21AF_{(16)} = 2 \cdot 16^3 + 1 \cdot 16^2 + A \cdot 16^1 + F \cdot 16^0 = 2 \cdot 4096 + 1 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 15 \cdot 1 = 8623$$

Zamiana liczb pomiędzy systemem dwójkowym i szesnastkowym : ponieważ podstawa systemu Hex to $16=2^4$, to jeden znak w systemie szesnastkowym zastępuje cztery znaki w systemie dwójkowym np.

$$\begin{array}{ccc} 1111 & 0000 & 1010_{(2)} \\ \swarrow & \downarrow & \swarrow \\ & F & 0 & A_{(16)} \end{array}$$

Zamień na system dziesiętny następujące liczby

- $ABBA_{(16)}$
- $10001010000_{(2)}$
- $1A2F_{(16)}$
- $BABA_{(16)}$

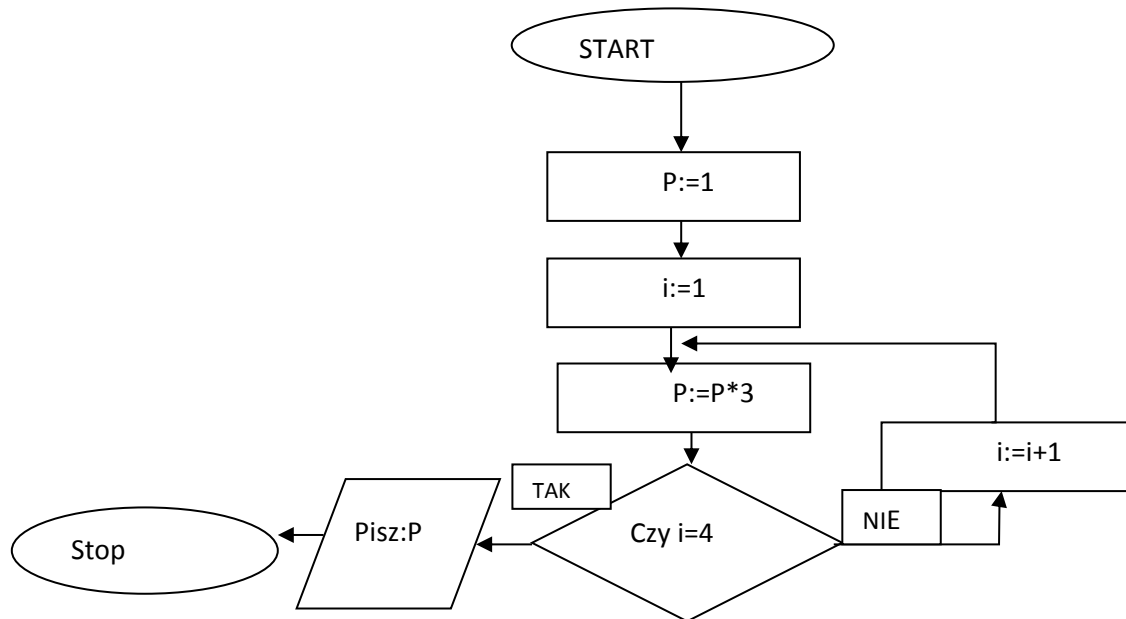
Uwaga: Swoje wyniki możesz sprawdzić np. w GeoGebra.

- Otwórz program GeoGebra.
- Obok *Pola Wprowadzania* otwórz listę z poleceniami.
- Wybierz *Algebra*
- Wybierz *ZSystemuLiczenia*[„Liczba jako tekst”, <podstawa liczenia>] i *Wklej*
- W polu *Wprowadzania* pojawi się *ZSystemuLiczenia*[
- Jeśli chcesz zamienić liczbę $BABA_{(16)}$ wpisz w nawiasie kwadratowym

ZSystemuLiczenia[„BABA”,16] i potwierdź Enter

Wynik możesz odnaleźć w Widoku *Algebry*

Zadanie 3. Przeanalizuj schemat blokowy pewnego algorytmu. Spróbuj odpowiedzieć na pytanie : Którą potęgę i jakiej liczby możemy obliczyć wg tego algorytmu?



Zadanie 4. Informacje w komputerze są reprezentowane za pomocą liczb w systemie dwójkowym. Informację 0 lub 1 nazywamy *bitem* (*1b*). Informacje łączy się w grupy np. *bajt* (*1B*) to 8 bitów. Za pomocą bajta możemy przedstawić $2^8=256$ informacji.

przedrostek	skrót	mnożnik	zależności
kilo	K	$2^{10} = 1024$	1KB=1024 bajtów
mega	M	2^{20}	1MB=1024KB
giga	G	2^{30}	1GB=1024MB
tera	T	2^{40}	1TB=1024GB
peta	P	2^{50}	1PB=1024TB
eksa	E	2^{60}	1EB=1024PB

Teraz możesz już odpowiedzieć na pytanie kluczowe.