



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 3





Liczby rzeczywiste:

- 20. Pojęcie logarytmu
- 21. Logarytm iloczynu i ilorazu
- 22. Logarytm potęgi o wykładniku naturalnym
- 23. Obliczenia z zastosowaniem logarytmów i ich własności
- 24. Obliczenia z zastosowaniem logarytmów i ich własności cd.
- 25. Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia

Opracowanie L3

Temat: Pojęcie logarytmu

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik rzeczywiste05.
- Masz przed sobą aplet ilustrujący wyznaczanie wartości logarytmów.
- Suwakami możesz zmieniać wartości podstawy logarytmu i liczby logarytmowanej – używaj do tego narzędzia Przesuń  (klawisz ESC uaktywnia to narzędzie).
- Przy pomocy narzędzia Przemieszczaj obszar roboczy  możesz przesuwać obszar, na którym znajduje się wykres. Możesz również przesuwać osie kombinacją Shift + ciągnij.
- Przy pomocy narzędzi Przybliż  i Oddal  możesz przybliżać i oddalać obraz, to samo osiągniesz używając kółka myszy.
- Przycisk RESET służy do powrotu do ustawień wyjściowych.

Zadanie 1. Zapisz dla jakich wartości x spełnione są równania

$5^x = 25$	$2^x = 32$	$9^x = 3$	$4^x = 1$	$16^x = \frac{1}{2}$	$10^x = 0,1$
$x = \underline{\hspace{2cm}}$	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	$x = \underline{\hspace{2cm}}$	$x = \underline{\hspace{2cm}}$

Sprawdź swoje rozwiązania przy pomocy apletu.

DEFINICJA

Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Logarytmem liczby b przy podstawie a nazywamy wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^x = b$$

Zadanie 2.

Uzupełnij według przykładu:

$\log_2 16 = 4,$	bo	$2^4 = 16$
$\log_2 64 = 6,$	bo	$\underline{\hspace{2cm}}$
$\log_3 81 = \underline{\hspace{2cm}},$	bo	$\underline{\hspace{2cm}}$
$\log_{10} 0,1 = \underline{\hspace{2cm}},$	bo	$\underline{\hspace{2cm}}$
$\log_2 \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}},$	bo	$\underline{\hspace{2cm}}$

$$\log_{\frac{1}{5}}125 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \text{bo} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\log_{\sqrt{3}}27 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \text{bo} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\log_{11}11 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \text{bo} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\log_{0,5}1 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \text{bo} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

Jakie wartości możemy otrzymać wykonując logarytmowanie? Zapisz wniosek.

Zadanie 3. Uzasadnij, wynikające z definicji logarytmu własności prawdziwe dla $a > 0$, $a \neq 0$, $b > 0$.

$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$	$\log_a a^x = x$	$a^{\log_a b} = b$
----------------	----------------	------------------	--------------------

UWAGA: Logarytm przy podstawie 10 nazywamy logarytmem dziesiętnym i zamiast pisać $\log_{10}b$, możemy pisać $\log b$.

Zadanie 4. Oblicz:

$\log_4 1024 =$	$\log_{\frac{8}{27^3}} =$	$\log_{\sqrt{7}}\sqrt{7} =$	$\log_{0,25} 16 =$
$\log_{0,1} 10^6 =$	$\log_{\frac{1}{100}} =$	$\log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2} =$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 7} =$
$\log_{2\sqrt{3}} 1 =$	$\log_{\pi} \pi^{-36} =$	$\sqrt{13}^{\log_{\sqrt{13}} 13} =$	$\log 0,000000001 =$

Zadanie 5. Oblicz:

$$\log_{6\frac{1}{216}} + \log\sqrt[3]{10} - \log_{1,5\frac{2}{3}} =$$

$$\log_{0,1}(\log_2 1024) - \log_9(\log_8(\log_3 9)) =$$

Zadanie 6. Dla jakich liczb x podane równości są prawdziwe:

$\log_x 8 = 3$	$\log_x 0,5 = -1$	$\log_{27} x = \frac{2}{3}$	$\log_9 x = 1$
----------------	-------------------	-----------------------------	----------------

Temat: Logarytm iloczynu i ilorazu

Zadanie 1. Sprawdź, że prawdziwe są równania:

$$\log_2 8 + \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \left(8 \cdot \frac{1}{4} \right)$$

$$\log_{\frac{1}{3}} 3 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(3 \cdot \frac{1}{27} \right)$$

TWIERDZENIE O LOGARYTMIE ILOCZYNU

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y.$$

Dowód. Niech $s = \log_a x$ i $t = \log_a y$.

Z definicji logarytmu: $a^s = x$ i $a^t = y$

$$x \cdot y = a^s \cdot a^t$$

Z własności działań na potęgach: $x \cdot y = a^{s+t}$

Z definicji logarytmu: $\log_a(x \cdot y) = s + t$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y. \quad \text{c.n.p.}$$

TWIERDZENIE O LOGARYTMIE ILORAZU

Jeżeli a , x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie o logarytmie ilorazu.

Zadanie 3. Oblicz, korzystając z twierdzeń o logarytmie iloczynu i ilorazu:

$$\log_3 18 + \log_3 1,5 =$$

$$\log_3(27 \cdot 81) =$$

$$\log_2 48 - \log_2 12 =$$

$$\log_2 \frac{32}{\sqrt[3]{2}} =$$

Zadanie 4. Oblicz:

$$\log_7 13 - \log_7 \frac{13}{49} =$$

$$\log_2 6 + \log_2 12 + \log_2 \frac{4}{9} =$$

$$\log_7 21 - \log_7 3\sqrt{7} =$$

$$\log_{0,2} 0,3 - \log_{0,2} 0,5 - \log_{0,2} 15 =$$

$$\log 3000 + \log \frac{1}{2} + \log 4 - \log 5 + \log 125 =$$

Zadanie 5. Sprawdź czy prawdziwa jest równość:

$$\log 700 = 2 + \log 7$$

$$\log_2 \frac{32}{5} = 5 - \log_2 5$$

Temat: Logarytm potęgi o wykładniku naturalnym

Zadanie 1. Sprawdź, że prawdziwe jest równanie:

$$-\frac{1}{4} \cdot \log_5 625 = \log_5 (625)^{-\frac{1}{4}}$$

TWIERDZENIE O LOGARYTMIE POTĘGI O WYKŁADNIKU NATURALNYM

Jeżeli a i x są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:

$$\log_a x^n = n \cdot \log_a x.$$

Zadanie 2. Oblicz, korzystając z twierdzeń o logarytmie potęgi:

$$\log_5 5^8 =$$

$$\log 1000000 =$$

Zadanie 3. Przeanalizuj przykład, a następnie przedstaw podane wyrażenia w postaci jednego logarytmu:

Przykład.

$$\begin{aligned} 5\log_2 t^3 - 2\log_2 3t^2 + 4 &= \log_2 (t^3)^5 - \log_2 (3t^2)^2 + \log_2 2^4 = \\ \log_2 t^{15} - \log_2 (9t^4) + \log_2 16 &= \log_2 \frac{t^{15}}{9t^4} + \log_2 16 = \log_2 \left(\frac{1}{9}t^{11}\right) + \log_2 16 \\ &= \log_2 \left(\frac{16}{9}t^{11}\right) \end{aligned}$$

$$2\log_7 a + \log_7 (5ab) =$$

$$\log \frac{m^2}{9} + \log 3m - 4\log \frac{m}{3} =$$

$$2\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2}p^5\right) - 6\log_{\frac{2}{3}} p^2 - 5\log_{\frac{2}{3}} p =$$

Zadanie 4. Otwórz plik rzeczywiste05. Odczytaj jaka jest przybliżona wartość $\log 8$, a następnie oblicz:

$$\log 80 \approx$$

$$\log 0,008 \approx$$

$$\log 64 \approx$$

$$\log 5,12 \approx$$

Zadanie 5. Odczytaj z pliku rzeczywiste05 jaka jest przybliżona wartość $\log 2$ oraz $\log 5$, a następnie oblicz:

$$\log \frac{32}{25} \approx$$

$$\log 0,8 \approx$$

$$\log \frac{4}{25} - \log 6,25 \approx$$

$$\log \frac{1}{16} + \log 2,5 \approx$$

Temat: Obliczenia z zastosowaniem logarytmów i ich własności

Zadanie 1. Oblicz:

$$36^{\log_6 7} - 125^{\log_5 9} =$$

Zadanie 2. Wykaż, że liczba a jest liczbą naturalną.

$$a = \log 10^{12} + \log_{0,2} 25$$

Zadanie 3. Wykaż, że liczba b jest liczbą całkowitą.

$$b = 20 - \sqrt{4^{\log_2 13}}$$

Zadanie 4. Wykaż, że liczba c jest liczbą wymierną.

$$c = \frac{2}{3} + \log_{2\sqrt{2}} 8 - \log_{\frac{1}{2}} 0,25$$

Zadanie 5. Przeczytaj informację, przeanalizuj przykład i na jego podstawie rozwiąż zadanie.

Informacja (MATeMAtyka 2, str. 236, Wydawnictwo Nowa Era, 2008).

W żyjącym organizmie (roślinnym lub zwierzęcym) stosunek ilości radioaktywnego izotopu węgla ^{14}C do izotopu nieradioaktywnego ^{12}C wynosi około $1,5 \cdot 10^{-12}$. Po śmierci organizmu ilość radioaktywnego izotopu ^{14}C maleje (okres jego połowicznego rozpadu wynosi około 5700 lat), a ilość izotopu ^{12}C pozostaje niezmienną. Podczas prac archeologicznych pomiar zawartości izotopu ^{14}C może więc stanowić podstawę do określenia wieku znalezisk.

Przykład. Oblicz wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 80% początkowej zawartości tego izotopu.

Korzystamy ze wzoru:

$$m = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

który opisuje masę próbki promieniotwórczego izotopu o okresie połowicznego rozpadu T , po upływie czasu t , m_0 oznacza masę początkową próbki.

Z informacji wiemy, że $T = 5700$ lat.

Z treści zadania wnioskujemy, że $m = 80\%m_0$, czyli $m = 0,8m_0$.

Zatem:

$$0,8m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$0,8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\frac{t}{5700} = \log_{\frac{1}{2}}0,8$$

Przybliżoną wartość logarytmu odczytujemy z apletu rzeczywiste05:

$$\frac{t}{5700} \approx 0,3219$$

$$t \approx 1835$$

Odp. Znaleźisko ma około 1835 lat.

Zadanie. Oblicz wiek znaleziska, w którym zmierzona zawartość izotopu ^{14}C jest równa 65% początkowej zawartości tego izotopu.

Odp. _____

Temat: Obliczenia z zastosowaniem logarytmów i ich własności cd.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik rzeczywiste06
- Suwakami możesz zmieniać opisane wartości.
- Możesz przesuwać obszar, na którym znajduje się wykres. Możesz również przesuwać oś kombinacją Shift + ciągnij.
- Przy pomocy narzędzi kółka myszy możesz przybliżać i oddalać obraz.
- Przycisk RESET służy do powrotu do ustawień wyjściowych.

Zadanie 1. Przeczytaj informację, przeanalizuj przykłady i na ich podstawie rozwiąż zadania.

Informacja. Poziom głośności dźwięku w decybelach można obliczyć ze wzoru:

$$L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

L – poziom głośności dźwięku w decybelach

I – natężenie dźwięku w W/m^2

I_0 – natężenie dźwięku odpowiadające progowi słyszalności, $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$.

Przykład 1. Natężenie dźwięku pracującego młota pneumatycznego to 10^{-2} W/m^2 . Wyraż poziom głośności pracującego młota pneumatycznego w decybelach.

$$L = 10 \cdot \log \frac{10^{-2}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^{10} = 10 \cdot 10 \cdot \log 10 = 100 \cdot 1 = 100[\text{dB}]$$

Zadanie 1. Natężenie dźwięku startującego odrzutowca to 10^2 W/m^2 . Wyraż poziom głośności startującego odrzutowca w decybelach.

Odp. _____

Przykład 2. Poziom głośności koncertu rockowego to 110 dB. Oblicz natężenie dźwięku podczas koncertu rockowego w W/m^2 .

$$110 = 10 \cdot \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$11 = \log \frac{I}{10^{-12}}$$

$$\frac{I}{10^{-12}} = 10^{11}$$

$$I = 10^{11} \cdot 10^{-12}$$

$$I = 10^{-1} \text{ [W/m}^2\text{]}$$

Odp. Natężenie dźwięku podczas koncertu rockowego to 10^{-1} W/m^2 .

Zadanie 2. Poziom głośności skrzypiec grających pianissimo to 30 dB. Oblicz natężenie dźwięku skrzypiec w W/m^2 .

Odp. _____

Sprawdź swoje obliczenia w pliku rzeczywiste06.

Zadanie 2. Przeczytaj informację, przeanalizuj przykład i na jego podstawie rozwiąż zadanie.

Informacja. Siłę trzęsień ziemi oblicza się w skali Richtera ze wzoru:

$$R = \log \frac{A}{A_0}$$

R – siła trzęsienia ziemi mierzona w stopniach w skali Richtera,

A – amplituda trzęsienia ziemi w centymetrach

A_0 – amplituda wzorcowa, odpowiadająca drganiom niewyczuwalnym przez człowieka,

$A_0 = 10^{-4} \text{ cm}$.

Terytorium Polski zalicza się do obszarów asejsmicznych. Strefami podwyższonej aktywności sejsmicznej są polskie góry oraz obszary działalności górniczej.

Przykład. Przyjmuje się, że największe trzęsienie ziemi w historii Polski miało miejsce 5 czerwca 1443 roku. Prawdopodobnie epicentrum znajdowało się na północ od Wrocławia, a siłę wstrząsów odczuła cała środkowa Europa. Jak podają źródła historyczne trzęsienie spowodowało zniszczenia kościołów i kamienic we Wrocławiu, Brzegu i Krakowie. Szacuje się, że zginęło około 30 osób. Jan Długosz, który był bezpośrednim świadkiem trzęsienia, zanotował, że "wieże i gmachy waliły się na ziemię, rzeki występowały z łożysk, a ludzie nagłym strachem zdjęci, od zmysłów i rozumu odchodzili". Na podstawie opisów i

obserwowanych do dziś skutków naukowcy oceniają, że trzęsienie miało siłę 5,8 stopni w skali Richtera. Oblicz amplitudę drgań tego trzęsienia ziemi.

$$5,8 = \log \frac{A}{10^{-4}}$$

$$\frac{A}{10^{-4}} = 10^{5,8}$$

$$A = 10^{5,8} \cdot 10^{-4}$$

$$A = 10^{1,8} \approx 63$$

Odp. Amplituda drgań tego trzęsienia ziemi to około 63 cm.

Zadanie. 26 grudnia 2004 na Ocenia Indyjskim, w pobliżu zachodniego wybrzeża północnej Sumatry miało miejsce podwodne trzęsienie ziemi o sile 9,1 stopni w skali Richtera. Trzęsienie ziemi wywołało 15 metrową falę tsunami, która uderzyła w wybrzeża kilku państw Azji Południowo – Wschodniej. W wyniku tego tragicznego zdarzenia zginęło co najmniej 294000 ludzi. Oblicz amplitudę drgań tego trzęsienia ziemi.

Odp. _____

Sprawdź swoje obliczenia w pliku rzeczywiste06.

Zadanie 3. Jedno z najsilniejszych trzęsień ziemi w Polsce miało miejsce 1 marca 1993 roku w okolicach Beskidu Sądeckiego. Amplituda drgań tego trzęsienia ziemi wynosiła 5 cm. Określ siłę tego trzęsienia ziemi w stopniach skali Richtera.

Odp. _____

Sprawdź swoje obliczenia w pliku rzeczywiste06.

Temat: Błąd bezwzględny i błąd względny przybliżenia

DEFINICJA

Przybliżając liczbę w postaci dziesiętnej, zwykle stosujemy regułę zaokrąglania, która polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby. Gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 0, 1, 2, 3, 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy niezmienną. Gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest: 5, 6, 7, 8, 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o 1.

DEFINICJA

Gdy przybliżenie liczby jest od niej mniejsze, to jest to przybliżenie z niedomiarem.

Gdy przybliżenie liczby jest od niej większe, to jest to przybliżenie z nadmiarem.

Różnica liczby i jej przybliżenia to błąd przybliżenia.

Zadanie 1.

Uzupełnij tabelę:

Liczba	Przybliżenie z dokładnością do:				
	części setnych	części dziesiętnych	całości	dziesiątek	setek
1132,8309					
986,061					
14,00712					
0,82					
9999,999					

Wszystkie przybliżenia z nadmiarem zaznacz na czerwono, a wszystkie przybliżenia z niedomiarem na niebiesko.

DEFINICJA

Niech a będzie przybliżeniem liczby x . Błąd bezwzględny przybliżenia jest to wartość bezwzględna różnicy między liczbą x i jej przybliżeniem a , czyli liczba $|x - a|$.

Zadanie 2.

Wychowawczyni powiedziała grupie dzieci, aby poprosiły rodziców o pieniądze na spektakl teatralny. Bilet kosztował 16,50 zł. W tabeli przedstawiono o jaką kwotę dzieci poprosiły rodziców. Uzupełnij tabelę.

	Kwota o jaką dziecko poprosiło rodziców	Błąd bezwzględny	Rodzaj przybliżenia (z nadmiarem/ z niedomiarem)
Kasia	17,00 zł		
Marcin	16,50 zł		
Ewa	16,00 zł		
Karol	20,00 zł		

Sprawdź swoje obliczenia w aplikacji rzeczywiste07.

Jak myślisz, jakie były konsekwencje popełnionych błędów?

DEFINICJA

Niech a będzie przybliżeniem liczby x . Stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x nazywamy błędem względnym: $\frac{|x-a|}{|x|}$.

UWAGA

Błąd względny często wyraża się w procentach: $\frac{|x-a|}{|x|} \cdot 100\%$.

Zadanie 3.

W ogrodzie zoologicznym zważono zwierzęta, a wynik ważenia zaokrąglono do kilograma. Wyniki pomiarów dwóch zwierząt: fenka (małego liska pustynnego) i żyrafy przedstawiono w tabeli. Uzupełnij tabelę.

	Fenek	Żyrafa
masa rzeczywista (w kilogramach)	0,8 kg	892,2 kg
masa w przybliżeniu do kilograma (w kilogramach)		
błąd bezwzględny przybliżenia (w kilogramach)		
błąd względny przybliżenia (w procentach)		

Sprawdź swoje obliczenia w aplecie rzeczywiste07.

Jak myślisz, jakie mogą być konsekwencje popełnionych błędów?

Zadanie 4.

Państwo Różańscy zaplanowali, że na remont mieszkania wydadzą 40000 zł, a państwo Fiołkowscy na remont swojego mieszkania przeznaczyci 15000 zł. W rzeczywistości remont mieszkania państwa Różańskich kosztował 38000 zł, a państwa Fiołkowskich - 17000 zł. Podaj błąd bezwzględny i błąd względny, jakie popełniono przy szacowaniu wydatków.

Zadanie 5. Otwórz plik rzeczywiste08.

Autorem najstarszej odnalezionej pracy matematycznej (papiirusu Rhinda) jest Ahmes, pisarz i matematyk faraona Amenehata III. Prawie 4 tysiące lat temu Ahmes zapisał, że pole koła jest równe polu kwadratu, którego bok jest równy $\frac{8}{9}$ średnicy. Taki sposób przybliżenia pola koła nazywamy metodą egipską.

Oblicz pole koła o średnicy 2 metodą egipską i tak jak to robimy współcześnie.

Sprawdź swoje obliczenia w pliku rzeczywiste08, ustawiając suwak na wartość 2.

Jaki błąd bezwzględny a jaki błąd względny (wyrażony w procentach) daje metoda egipska dla średnicy równej 2?

Sprawdź swoje obliczenia w pliku rzeczywiste08, zaznaczając odpowiednie pola wyboru.

Czy jeśli zmieniamy średnicę koła błędy też ulegają zmianie? Uzasadnij swoją obserwację.