KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących"
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 5

Wyrażenia algebraiczne

1. Wzory skróconego mnożenia- kwadrat sumy
2. Wzory skróconego mnożenia- kwadrat różnicy
3. Wzory skróconego mnożenia- różnica kwadratów
4. Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki liniowe
5. Zastosowania wzorów skróconego mnożenia

Opracowanie L7

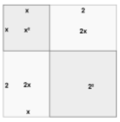
Temat: Wzory skróconego mnożenia- kwadrat sumy

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *wyrażenia02* zaznacz pole wyboru *Kwadrat sumy*
- Masz przed sobą aplet, który przedstawia interpretację geometryczną kwadratu sumy dwóch liczb .
    - Możesz poruszać niebieskim punktem P wzdłuż boku dużego kwadratu
    - Każda zmiana położenia punktu P powoduje zmianę długości odcinków, na które podzielony jest bok dużego kwadratu
    - Skoro bok kwadratu ma długość $a + b$, to pole kwadratu możemy obliczyć wg wzoru $P = (a + b)^2$
    - Sprawdź, na jakie mniejsze figury można podzielić duży kwadrat
    - Zapisz sumę pól tych figur
    - Porównaj swoje wyniki ze wzorem przedstawionym w aplecie
    - Sprawdź jak zmienia się wzór w dwóch skrajnych położeniach punktu P (na jednym i drugim końcu odcinka)
    - Zapisz wzór w zeszycie $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Otwórz plik *wyrażenia01*
- Masz przed sobą aplet, dzięki któremu będziesz sprawnie posługiwać się wzorami
    - Przycisk *Nowy przykład* uruchamia jeden z dwóch rodzajów poleceń
    - Przy poleceniu *Rozwinięcie kwadratu sumy* wpisz do pola tekstowego $a^2 + 2ab + b^2$ dobierając odpowiednio a i b do zmieniających się przykładów. Przy wpisywaniu nie może być spacji. Wykładniki potęg zapisz jako x^2
    - Przy błędnie wpisanej odpowiedzi pojawi się komunikat, jakie powinno być prawidłowe rozwiązanie
    - Przy poleceniu *Kwadrat sumy* wpisz do pola tekstowego $(a + b)^2$ dobierając odpowiednio a i b do zmieniających się przykładów. Przy wpisywaniu nie może być spacji. Wykładniki potęg zapisz jako x^2
    - Przy błędnie wpisanej odpowiedzi pojawi się komunikat, jakie powinno być prawidłowe rozwiązanie
    - Przykłady nie powtarzają się, możesz ćwiczyć tak długo aż nauczysz się biegle stosować wzór na kwadrat sumy i jego rozwinięcie.

Zadanie 1.[1] Pole kwadratu o boku $x+2$ [cm] można obliczyć wykorzystując wzór skróconego mnożenia $(x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=x^2+4x+4 \quad [cm^2]$

Działanie to można zilustrować rysunkiem



Oblicz pole kwadratu, którego bok ma długość :

a) $4+y$ [cm] P=

b) $x+3y$ [cm] P=

c) $x+\sqrt{2}$ [cm] P=

d) $2a+3\sqrt{2}$[cm] P=

Do każdego z podpunktu dorysuj kwadrat i opisz pola i boki jak w poprzednim przykładzie

a)	c)
b)	d)

Zadanie 2.[1] Pole pewnego kwadratu wyraża się wzorem $4x^2+4x+1\ [cm^2]$. Ile wynosi długość boku tego kwadratu?

Zadanie 3.[1] Uzupełnij tabelkę:

Długość boku kwadratu	Pole kwadratu
$3x$	
$3x + \cdots$	$9x^2 + 6x + 1$
$3x + 2y$	
$5x + \cdots$	$25x^2 + 20xy + 4y^2$
$... + 2b$	$a^2 + 4ab + 4b^2$
	$64a^2 + 160ay + 100y^2$
$... + \frac{2}{3}x$	$\frac{9}{16}y^2 + xy + \frac{4}{9}x^2$
	$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{9}y^2$
$a\sqrt{5} + b\sqrt{2}$	
$x\sqrt{2} + \cdots$	$2x^2 + 2\sqrt{6}\,xy + 3y^2$

Zadanie 4.[1] Przedstaw podane wyrażenia w postaci sum algebraicznych

a) $(a + 2x)^2 =$
b) $(\frac{1}{2}a + 2y)^2 =$
c) $(3x + 2y)^2 =$
d) $(a + \frac{1}{3}x)^2 =$
e) $(11a + 2y)^2 =$
f) $(0.1x + 0.2y)^2 =$
g) $(\sqrt{3}a + \sqrt{2}x)^2 =$
h) $(x\sqrt{5} + 2y)^2 =$

Literatura: [1] Lekcje matematyki z kalkulatorem graficznym w gimnazjum, praca zbiorowa, str.68, wyd. Omega Art. Na zlecenie Edukacja z TI

Temat: Wzory skróconego mnożenia- kwadrat różnicy

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *wyrażenia03*
- Masz przed sobą aplet, dzięki któremu będziesz sprawnie posługiwać się wzorami na kwadrat różnicy
  - Przycisk *Nowy przykład* uruchamia jeden z dwóch rodzajów poleceń
  - Przy poleceniu *Rozwinięcie kwadratu różnicy* wpisz do pola tekstowego $a^2 - 2ab + b^2$ dobierając odpowiednio a i b do zmieniających się przykładów. Przy wpisywaniu nie może być spacji. Wykładniki potęg zapisz jako x^2
  - Przy poleceniu *Kwadrat różnicy* wpisz do pola tekstowego $(a - b)^2$ dobierając odpowiednio a i b do zmieniających się przykładów. Przy wpisywaniu nie może być spacji. Wykładniki potęg zapisz jako x^2
  - Przykłady nie powtarzają się, możesz ćwiczyć tak długo aż nauczysz się biegle stosować wzór na kwadrat różnicy i jego rozwinięcie

Zadanie 1. Zapisz kwadrat różnicy w postaci sumy algebraicznej

a) $(x - 2y)^2 =$
b) $(\frac{1}{2}y - 4x)^2 =$
c) $(3x - 2y)^2 =$
d) $(3a - \frac{2}{3}b)^2 =$
e) $(12x - 0.1y)^2 =$
f) $(0.1a - 20y)^2 =$
g) $(\sqrt{2} - 2\sqrt{3}x)^2 =$
h) $(\sqrt{5} - 2)^2 =$
i) $(22x - 1.5y)^2 =$
j) $(\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 =$
k) $(a\sqrt{8} - 0.5b)^2 =$
l) $(3.5y - x)^2 =$
m) $(\frac{3}{4}x - 0.5y)^2 =$

Zadanie 2. Zapisz sumę algebraiczną w postaci kwadratu różnicy

a) $4x^2 - 8xy + 4y^2$=

b) $100x^2 - 20xy + y^2 =$

c) $9 - 18a + 9a^2 =$

d) $25y^2 - 30ay + 9a^2 =$

e) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{5}xy + \frac{4}{25}y^2 =$

f) $\frac{4}{9}a^2 - ab + \frac{9}{16}b^2 =$

g) $4x^2 - 4\sqrt{2}xy + 2y^2 =$

h) $25x^2 - 10\sqrt{3}xy + 3y^2 =$

i) $144 - 12y + 0.25y^2 =$

j) $1.44b^2 - 12ab + 25a^2 =$

k) $27x^2 - 18xy + 3y^2 =$

l) $144x^2 - 120xy + 25y^2 =$

Zadanie 3. Uprość wyrażenie posługując się wzorami skróconego mnożenia

a) $(1 - \sqrt{2})^2 + (2 - 3\sqrt{2})^2 =$

b) $(3 - 2\sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 =$

c) $(2 - 2\sqrt{7})^2 + (1 - \sqrt{7})^2 =$

d) $(1 - \sqrt{5})^2 + 2(2 - 3\sqrt{5})^2 =$

e) $(3 - \sqrt{8})^2 - (1 - 3\sqrt{2})^2 =$

f) $(1 - \sqrt{6})^2 + (2 - 3\sqrt{6})^2 =$

g) $(2-\sqrt{3})^2-\left(1-3\sqrt{3}\right)^2=$

h) $2(1-2\sqrt{2})^2+\left(2-3\sqrt{3}\right)^2=$

i) $3(6-5\sqrt{2})^2-\left(4-2\sqrt{8}\right)^2=$

j) $2-3\left(2-3\sqrt{11}\right)^2=$

Temat: Wzory skróconego mnożenia- różnica kwadratów

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *wyrażenia02* zaznacz pole wyboru *Różnica kwadratów*
- Masz przed sobą aplet, który przedstawia interpretację geometryczną różnicy kwadratów dwóch liczb .
    - Możesz poruszać zielonym punktem P wzdłuż boku dużego kwadratu
    - Każda zmiana położenia punktu P powoduje zmianę długości odcinków, na które podzielony jest bok dużego kwadratu
    - Przeanalizuj jakimi sposobami przedstawiono sumę zielonych pól
    - Sprawdź, na jakie mniejsze figury można podzielić zielone pola
    - Zapisz sumę pól tych figur
    - Porównaj swoje wyniki ze wzorem przedstawionym w aplecie
    - Sprawdź jak zmienia się wzór w dwóch skrajnych położeniach punktu P (na jednym i drugim końcu odcinka)
    - Zapisz w zeszycie wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
- Otwórz plik *wyrażenia04*
- Masz przed sobą aplet, dzięki któremu będziesz sprawnie posługiwać się nowo poznanymi wzorami
    - Przycisk *Nowy przykład* uruchamia jeden z dwóch rodzajów poleceń
    - Przy poleceniu *Rozwinięcie różnicy kwadratów* wpisz do pola tekstowego $(a - b)(a + b)$ dobierając odpowiednio a i b do zmieniających się przykładów. Przy wpisywaniu nie może być spacji.
    - Przy poleceniu *Różnica kwadratów* wpisz do pola tekstowego $a^2 - b^2$ dobierając odpowiednio a i b do zmieniających się przykładów. Przy wpisywaniu nie może być spacji. Wykładniki potęg zapisz jako x^2.
    - Przykłady nie powtarzają się, możesz ćwiczyć tak długo aż nauczysz się biegle stosować wzór na różnicę kwadratów i jego rozwinięcie.

Zadanie 1. Zapisz w postaci sumy algebraicznej iloczyn sumy przez różnicę;

a) $(2x-3y)(2x+3y)=$
b) $(2a-5b)(2a+5b)=$
c) $(12x-3y)(12x+3y)=$
d) $(2x-13y)(2x+13y)=$
e) $(x-8y)(x+8y)=$
f) $(6x-y)(6x+y)=$
g) $\left(\frac{1}{2}x-3y\right)\left(\frac{1}{2}x+3y\right)=$
h) $\left(2x-\frac{3}{4}y\right)\left(2x+\frac{3}{4}y\right)=$
i) $\left(\sqrt{2}x-7y\right)\left(\sqrt{2}x+7y\right)=$
j) $\left(\sqrt{12}x-\sqrt{3}y\right)\left(\sqrt{12}x+\sqrt{3}y\right)=$
k) $\left(\sqrt{7}-3\right)\left(\sqrt{7}+3\right)=$
l) $\left(0.2x-\sqrt{11}\right)\left(0.2x+\sqrt{11}\right)=$
m) $\left(2.1-a\sqrt{15}\right)\left(2.1+a\sqrt{15}\right)=$
n) $\left(0.5x-\sqrt{2}\right)\left(0.5x+\sqrt{2}\right)=$
o) $\left(2x-2\sqrt{3b}\right)\left(2x+2\sqrt{3b}\right)=$

Zadanie 2. Zapisz różnicę kwadratów w postaci iloczynu sumy przez różnicę:

a) $4x^2-9y^2=$
b) $16x^2-25y^2=$
c) $144x^2-49y^2=$
d) $4a^2-3b^2=$
e) $2x^2-25y^2=$
f) $5x^2-81a^2=$
g) $256x^2-y^2=$
h) $\frac{1}{49}b^2-0.09y^2=$
i) $\frac{36}{49}x^2-\frac{9}{16}y^2=$
j) $2-9y^2=$
k) $5a^2-3b^2=$
l) $0.09x^2-7y^2=$

m) $3.61x^2 - 1.69y^2 =$

n) $2.25x^2 - 1.21y^2 =$

o) $5x^2 - 7b^2 =$

p) $289 - 25y^2 =$

Zadanie 3. Uzupełnij wyrażenia zawierające wzory na różnicę kwadratów:

a) $(\ldots\ x - 2y)(4x + 2y) = 16x^2 - \cdots$

b) $(5x - \cdots y)(5x + 7y) = \cdots x^2 - \cdots$

c) $\left(\sqrt{5}a - 3b\right)(\ldots a + 3b) = \cdots a^2 - \cdots b^2$

d) $(\ldots x - \cdots y)(\ldots x + \cdots y) = 12x^2 - 8y^2$

e) $(2a - \cdots y)(\ldots a + \cdots y) = \cdots a^2 - 81 \ldots$

f) $(\ldots x - \cdots b)(5x + 7b) = \cdots x^2 - \cdots b^2$

g) $(2a - \cdots y)(\ldots + 7 \ldots) = 4 \ldots - \cdots$

h) $(5x - \cdots y)\left(\ldots x + \sqrt{2}y\right) = \cdots x^2 - \cdots$

i) $\left(\sqrt{6}x - \cdots y\right)\left(\sqrt{6}x + \sqrt{7}y\right) = \cdots - \cdots$

j) $4 \ldots - 9 \ldots = (2x - 3y)(\ldots . + \cdots)$

k) $16a^2 - 25x^2 = (\ldots a - \cdots)(\ldots . + \cdots x)$

l) $144y^2 - \cdots = (\ldots - 3 \ldots)(\ldots . + \cdots b)$

m) $4 \ldots - 2x^2 = (2 \ldots - \cdots)(\ldots a + \cdots)$

n) $3x^2 - 5 \ldots = (\ldots x - \cdots y)(\ldots . + \cdots)$

o) $8a^2 - \cdots = (\ldots - 3y)(\ldots a + \cdots y)$

p) $2 \ldots - 49c^2 = \left(\sqrt{2}a - \cdots\right)(\ldots . + \cdots)$

q) $7x^2 - 36y^2 = (\ldots x - \cdots y)(\ldots . +6 \ldots)$

r) $5b^2 - \cdots = (\ldots - a)(\ldots . +a)$

s) $4 \ldots - 9 \ldots = (2a - 3b)(\ldots . + \cdots)$

t) $121x^2 - 196 \ldots = (\ldots x - \cdots y)(\ldots x + \cdots y)$

Temat: Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia do rozkładu wyrażeń algebraicznych na czynniki liniowe

Zadanie 1. Rozłóż na czynniki liniowe:

a) $4x^2 - 4x + 1 =$
b) $16x^2 - 25 =$
c) $81 + 18x + x^2 =$
d) $36x^2 - 24x + 4 =$
e) $196x^2 - 225 =$
f) $0.81 + 1.8x + x^2 =$
g) $49x^2 - 42x + 9 =$
h) $64x^2 - 5 =$
i) $625 + 100x + 4x^2 =$
j) $x^2 - 6x + 9 =$
k) $x^2 - 3 =$
l) $1 + 2x + x^2 =$

Zadanie 2. Rozłóż na czynniki liniowe i wyznacz te wartości x, dla których wyrażenie przyjmuje wartość 0.

a) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

b) $25x^2 - 16 = 0$

c) $1 + 18x + 81x^2 = 0$

d) $4x^2 - 24x + 36 = 0$

e) $225 - 361x^2 = 0$

f) $1 + 1.8x + 0.81x^2 = 0$

g) $9x^2 - 42x + 49 = 0$

h) $5x^2 - 64 = 0$

i) $4 + 100x + 625x^2 = 0$

j) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

k) $x^2 - 8 = 0$

l) $16 + 8x + x^2 = 0$

Temat: Zastosowania wzorów skróconego mnożenia.

Przykład 1. Aby usunąć niewymierność z mianownika $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3-\sqrt{2}}}$ należy rozszerzyć ułamek przez $\mathbf{3+\sqrt{2}}$ czyli zastosować wzór na różnicę kwadratów $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$, wówczas

$$\frac{7}{3-\sqrt{2}}\cdot\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{7(3+\sqrt{2})}{3^2-\sqrt{2}^2}=\frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=\frac{7(3+\sqrt{2})}{7}=3+\sqrt{2}$$

Przykład 2. Aby usunąć niewymierność z mianownika $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2+\sqrt{3}}}$ należy rozszerzyć ułamek przez $\mathbf{2-\sqrt{3}}$ czyli zastosować wzór na różnicę kwadratów $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$, wówczas

$$\frac{5}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{5(2-\sqrt{3})}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{5(2-\sqrt{3})}{4-3}=\frac{5(2-\sqrt{3})}{1}=5(2-\sqrt{3})$$

Zadanie 1. Usuń niewymierność z mianownika stosując wzór na różnicę kwadratów. Jeśli w mianowniku jest suma powinieneś rozszerzyć przez różnicę, jeśli w mianowniku jest różnica powinieneś rozszerzyć przez sumę.

a) $\frac{4}{4-\sqrt{2}}\cdot\frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=$

b) $\frac{6}{4-\sqrt{2}}\cdot\frac{4+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}=$

c) $\frac{2}{3-\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=$

d) $\frac{7}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=$

e) $\frac{5}{2+\sqrt{6}}\cdot\frac{2-\sqrt{6}}{2-\sqrt{6}}=$

f) $\frac{3}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} =$

g) $\frac{6}{3+\sqrt{7}} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} =$

h) $\frac{2}{1-2\sqrt{3}} =$

i) $\frac{2}{4+3\sqrt{5}} =$

j) $\frac{5}{4+2\sqrt{2}} =$

k) $\frac{2}{5+2\sqrt{6}} =$

l) $\frac{12}{6+2\sqrt{7}} =$

m) $\frac{13}{2-3\sqrt{2}} =$

n) $\frac{1}{1-4\sqrt{3}} =$

o) $\frac{45}{5-2\sqrt{5}} =$