



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 7

Funkcje

- 8. Miejsce zerowe funkcji
- 9. Monotoniczność funkcji
- 10. Wartości dodatnie i ujemne funkcji
- 11. Wartość najmniejsza i największa funkcji
- 12. Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Opracowanie: L1

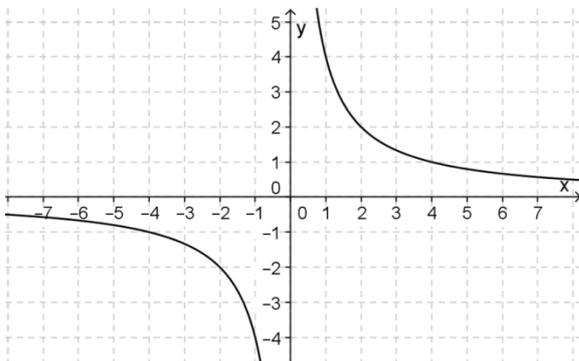
Temat: Miejsca zerowe funkcji

Praca z wykorzystaniem apletu *funkcje03*.

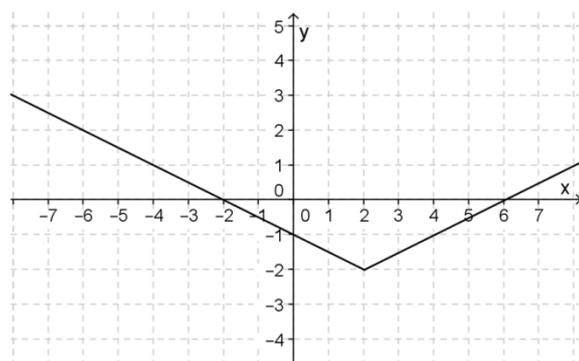
1. Otwórz plik *funkcje03*.
2. Zapoznaj się z definicją miejsca zerowego funkcji oraz z uwagą dotyczącą odczytywania miejsca zerowego z wykresu funkcji (naciśnij „Definicja”, „Uwaga”).
3. Przeglądaj przykłady („Następny przykład”) i określaj miejsca zerowe funkcji. Po naciśnięciu „Miejsca zerowe funkcji” sprawdzisz poprawność swojej odpowiedzi.
4. Po prezentacji przejdź do zadań (opcja *zadania*). Możesz przejrzeć po 7 przykładów z 3 zestawów. Zwróć uwagę na zgodność wyników obliczeń z odczytaną odpowiedzią z wykresu funkcji.
5. Po prezentacji wykonaj poniższe zadania.

Karta pracy

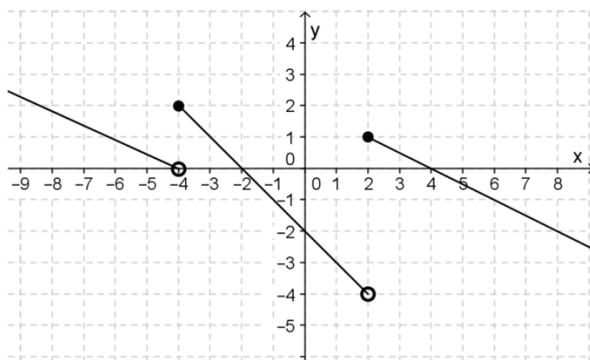
Zadanie 1: Odczytaj z wykresu funkcji jej miejsca zerowe.



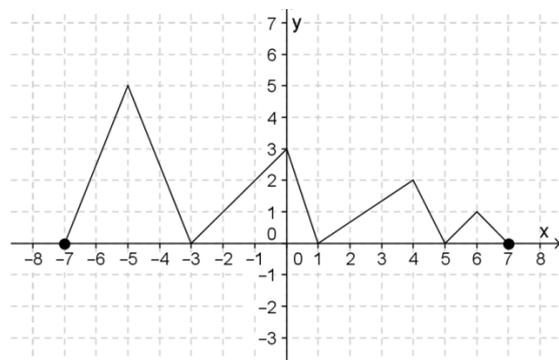
Miejsca zerowe funkcji: _____



Miejsca zerowe funkcji: _____



Miejsca zerowe funkcji: _____



Miejsca zerowe funkcji: _____

Zadanie 2: Przeanalizuj przykłady i wyznacz miejsca zerowe funkcji a) – i).

Przykład: Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = 3x + 4$

Dziedziną powyższej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji wystarczy rozwiązać równanie: $3x + 4 = 0$

Rozwiązanie: $3x + 4 = 0$

$$3x = -4$$

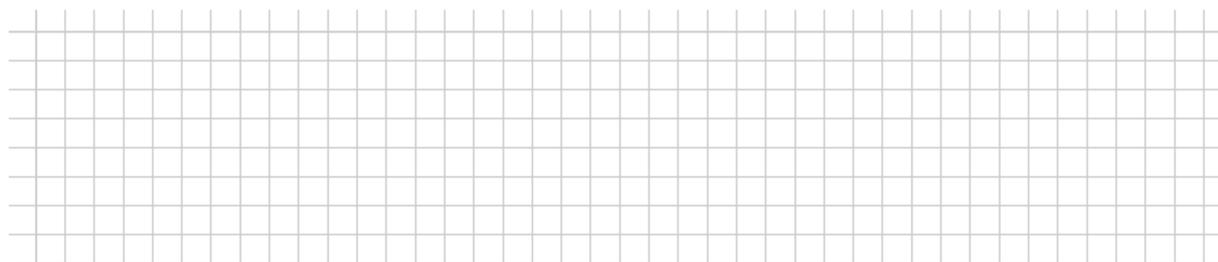
$$x = -\frac{4}{3}$$

Odpowiedź: Miejscem zerowym jest liczba $-\frac{4}{3}$.

a) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 5$

b) $f(x) = 4 - x$

c) $f(x) = 1,2x - 0,5$



Przykład: Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = x^2 - 4$

Dziedziną powyższej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych. Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji należy rozwiązać równanie: $x^2 - 4 = 0$

Rozwiązanie: $x^2 - 4 = 0$

Korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia i tworzymy iloczyn:

$$(x + 2)(x - 2) = 0$$

Iloczyn jest wtedy równy 0 jeśli jeden z czynników jest równy 0:

$$x + 2 = 0 \quad \text{lub} \quad x - 2 = 0$$

Rozwiązujemy równania:

$$x = -2 \quad \text{lub} \quad x = 2$$

Odpowiedź: Miejsca zerowe funkcji: $x = -2$, $x = 2$.

Uwaga: Jednym ze sposobów zamiany sumy algebraicznej na iloczyn jest wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias.

d) $f(x) = x^2 - 5$

e) $f(x) = 3x - x^2$

f) $f(x) = 9x^2 - 6x + 1$



Przykład: Wyznacz miejsce zerowe funkcji $f(x) = \frac{x-3}{5+x}$

Dziedziną powyższej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem liczby -5 . Aby wyznaczyć miejsce zerowe tej funkcji rozwiązujemy równanie: $\frac{x-3}{5+x} = 0$. Ponieważ mianownik tego wyrażenia nie może przyjąć wartości 0 , wystarczy przyrównać licznik do 0 .

Rozwiązanie: $\frac{x-3}{5+x} = 0$

założenie: $x \neq -5$

$D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Uwaga: Należy zawsze sprawdzić czy rozwiązanie należy do dziedziny funkcji.

Odpowiedź: Miejsce zerowe funkcji: $x = 3$.

g) $f(x) = \frac{x+4}{x+2}$

h) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

i) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-4}$



Temat: Monotoniczność funkcji

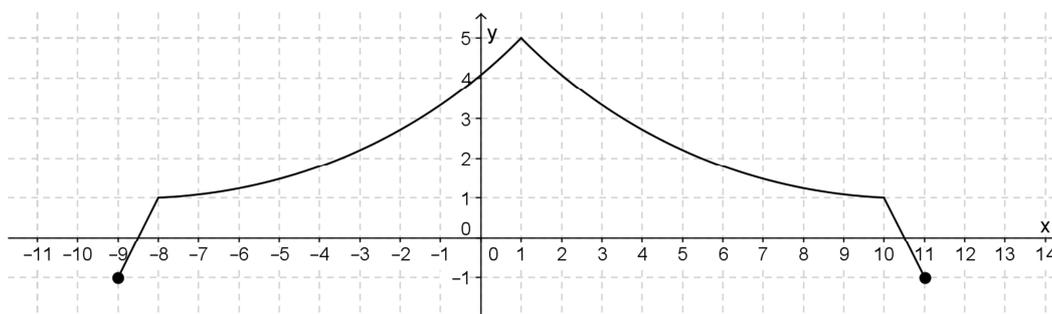
Praca z wykorzystaniem apletu *funkcje04*.

1. Otwórz plik *funkcje04*.
2. Zapoznaj się z definicją funkcji rosnącej, malejącej i stałej. Aby odkryć treść definicji zaznacz odpowiednie opcje z określeniami funkcji rosnącej, malejącej i stałej.
3. Przejdź do strony „Zadania”. Wykonuj polecenia zgodnie z treścią zadań. Odpowiedzi sprawdzaj naciskając przycisk „Odpowiedź”.
4. Dla funkcji **1** naciśnij przycisk „Włącz animację”. Obserwuj położenie pomocniczej strzałki. Określ dla funkcji **1** czy jest ona rosnąca, czy malejąca.
5. Używając suwaka wyświetl przykład z wykresem funkcji **2**. Określ czy funkcja jest rosnąca czy malejąca. (Naciśnij przycisk „Włącz animację”. Zwróć uwagę jak zmienia się położenie strzałki pomocniczej. Jak porusza się strzałka? Jaki jest związek między ruchem strzałki, a tym, że funkcja jest rosnąca?)
6. Funkcja **2** jest rosnąca. Wskaż dwa różne argumenty na wykresie tej funkcji i wyjaśnij używając definicji, dlaczego jest to funkcja rosnąca.
7. Wyświetl przykład z wykresem funkcji **3**. Naciśnij przycisk „Włącz animację”. Wyjaśnij zależność pomiędzy ustawieniem i ruchem pomocniczej strzałki a tym, czy funkcja jest rosnąca czy malejąca. Określ czy funkcja jest rosnąca czy malejąca.
8. Funkcja **3** jest malejąca. Wskaż dwa różne argumenty na wykresie tej funkcji i wyjaśnij używając definicji, dlaczego jest to funkcja malejąca.
9. Wyświetl przykład z wykresem funkcji **4**. Naciśnij przycisk „Włącz animację”. Obserwując strzałkę pomocniczą odpowiedz na pytanie: Dlaczego nie można nazwać tej funkcji funkcją rosnącą? Dlaczego nie można jej nazwać funkcją malejącą?
10. Naciśnij przycisk „Włącz animację” ponownie. Zwróć uwagę na kolor śladu na osi OX. Dla jakich argumentów strzałka ma kolor czerwony, a dla jakich kolor niebieski?
11. Określ przedział, w którym funkcja **4** jest rosnąca i przedział, w którym funkcja jest malejąca. (Zwróć uwagę, czy prawidłowo wyznaczasz końce przedziałów.)
12. Wyświetl przykład wykresu funkcji **5**. Naciśnij przycisk „Włącz animację”. Zwróć uwagę na położenie i kolor strzałki pomocniczej. Dla jakich argumentów strzałka ma kolor czerwony, dla jakich kolor niebieski? Sprawdź kolor śladu na osi OX.
13. Określ przedziały, w których funkcja jest rosnąca i przedziały, w których jest malejąca. (Zwróć uwagę, czy prawidłowo wyznaczasz końce przedziałów. Sprawdź swoją odpowiedź wybierając opcję *Odpowiedź*)

14. Używając suwaka wyświetl przykład z wykresem funkcji **6**. Określ przedziały, w których funkcja jest rosnąca, przedziały, w których jest malejąca i przedziały, w których jest stała. (Naciśnij przycisk „Włącz animację”. Zwróć uwagę jak zmienia się położenie i kolor strzałki pomocniczej. Sprawdź kolor śladu na osi OX.)
15. Przypomnij wszystkie definicje: funkcji rosnącej, malejącej i stałej. Dlaczego funkcji z przykładu **4** nie można nazwać funkcją rosnącą? Dlaczego nie można nazwać ją funkcją malejącą? Na te same pytania odpowiedz biorąc pod uwagę funkcję **5** i **6**.

Karta pracy

Zadanie 1. Dla funkcji przedstawionej na poniższym wykresie określ przedział, w którym jest ona rosnąca i przedział, w którym jest malejąca.

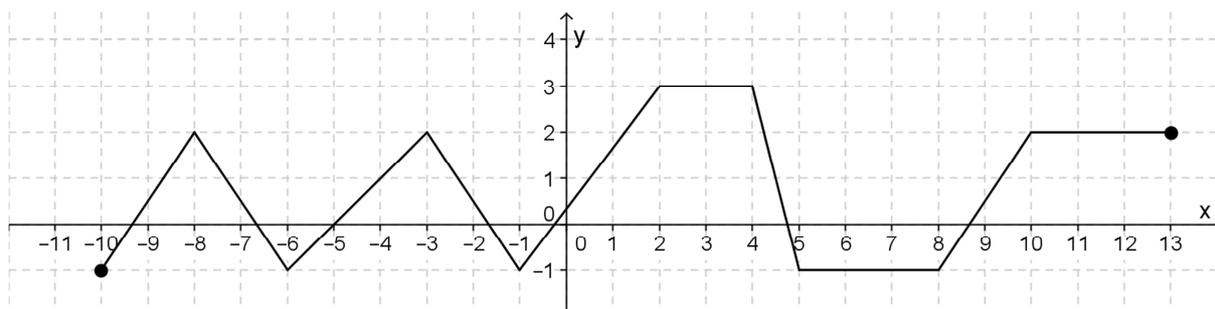


Odpowiedź:

funkcja jest rosnąca w przedziale _____

funkcja jest malejąca w przedziale _____

Zadanie 2. Dla funkcji przedstawionej na wykresie określ przedziały, w których jest ona rosnąca, przedziały, w których jest malejąca i przedziały, w których jest stała.



Odpowiedź:

funkcja jest rosnąca w przedziałach _____

funkcja jest malejąca w przedziałach _____

funkcja jest stała w przedziałach _____

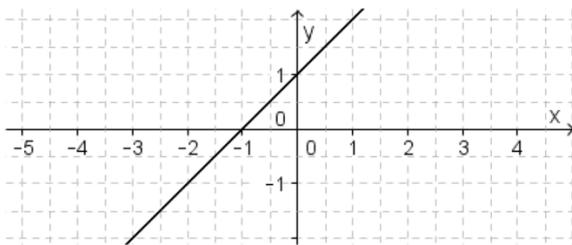
Temat: Wartości dodatnie i ujemne funkcji

Praca z wykorzystaniem apletu *funkcje05*.

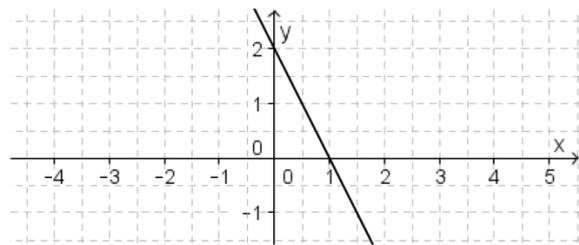
- Otwórz plik *funkcje05*.
- Możesz przeglądać 8 przykładów na 3 różne sposoby. Każdy ze sposobów prezentuje rozwiązania 3 typów zadań. Pierwszy typ zadań to odczytywanie argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie, nieujemne, ujemne, niedodatnie. Opcje „ślad odcinka” i „Rysuj odpowiedź” umożliwiają wybór trybu wyświetlania. Po wyborze odpowiednich opcji naciśnij START aby obejrzeć prezentację. Po prezentacji wykonaj zadania. (Rozwiązywanie zadań drugiego i trzeciego typu przewidziane jest na jedną z następnych lekcji.)

Karta pracy

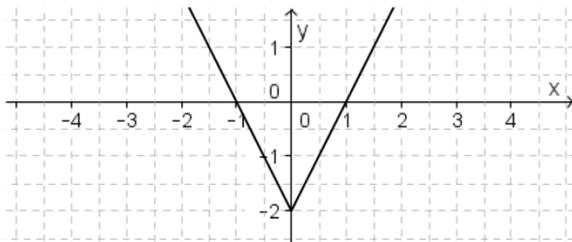
Zadanie 1. Dla każdej z poniższych funkcji wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie. (Zakreśl odpowiednie fragmenty wykresu.)



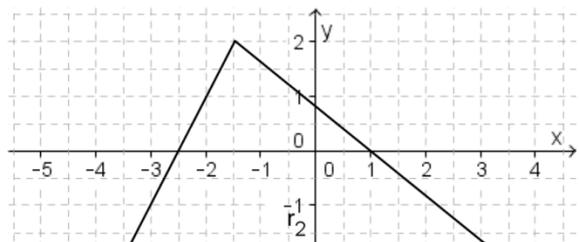
$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____



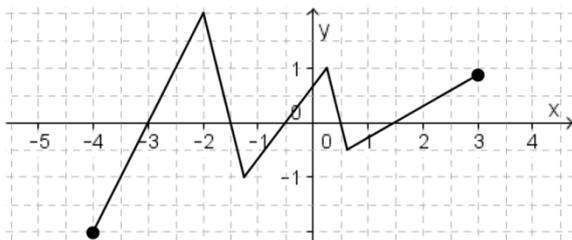
$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____



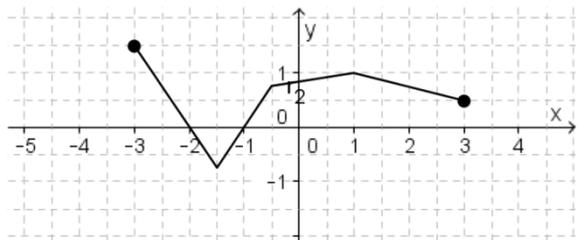
$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____



$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____

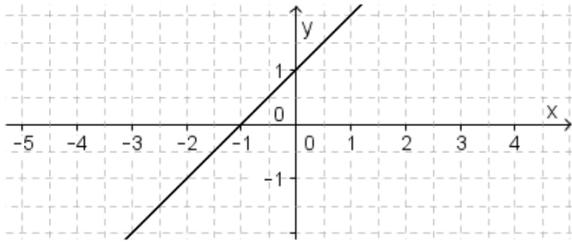


$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____

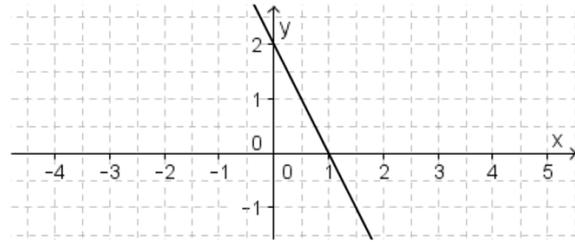


$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____

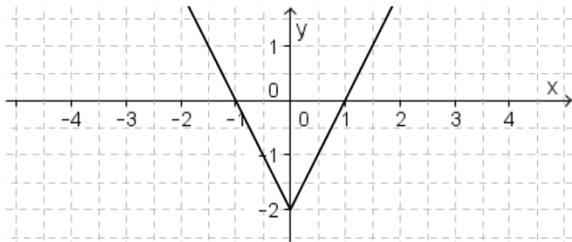
Zadanie 2. Dla każdej z poniższych funkcji wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne. (Zakreśl odpowiednie fragmenty wykresu.)



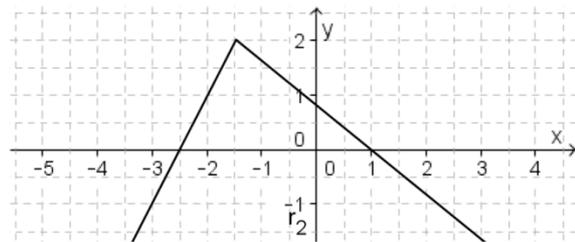
$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____



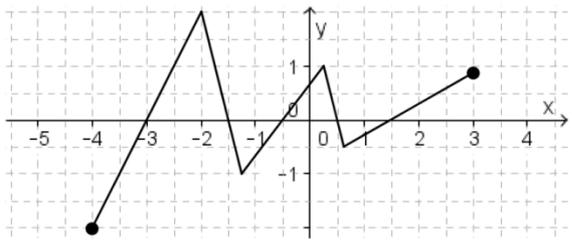
$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____



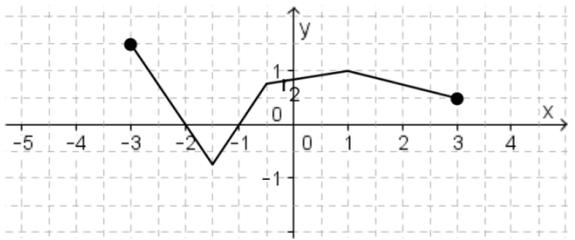
$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____



$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____

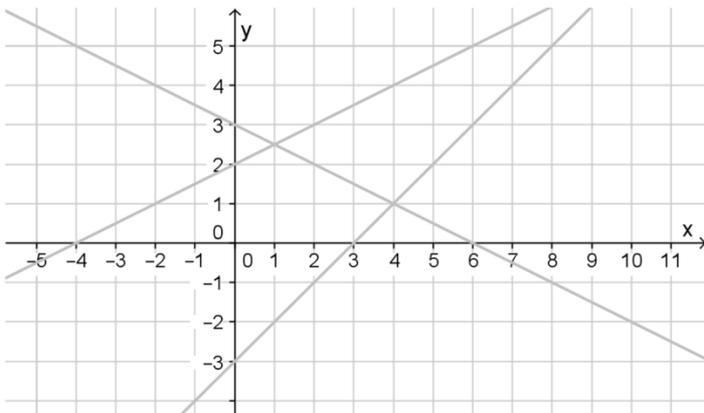


$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____



$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____

Zadanie 3. Narysuj wykres funkcji f (skorzystaj z prostych zaznaczonych w układzie współrzędnych). Wyznacz argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i argumenty dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty, 1) \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{dla } x \in (1, 4) \\ x - 3 & \text{dla } x \in (4, \infty) \end{cases}$$

$f(x) > 0$ dla $x \in$ _____

$f(x) < 0$ dla $x \in$ _____

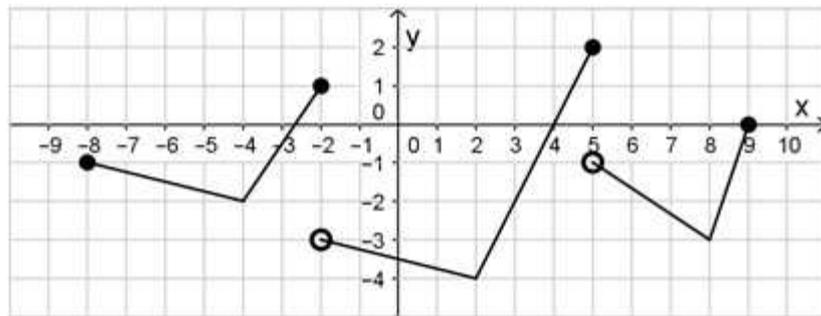
Temat: Wartość najmniejsza i największa funkcji

Praca z wykorzystaniem apletu *funkcje06*.

Otwórz plik *funkcje06*. Prezentowane są 4 przykłady. Wykorzystaj każdą podpowiedź i odpowiedź zanim przejdziesz do kolejnego przykładu. W przykładzie 4 masz możliwość zmieniania przedziału AB poprzez przesuwanie punktów A i B.

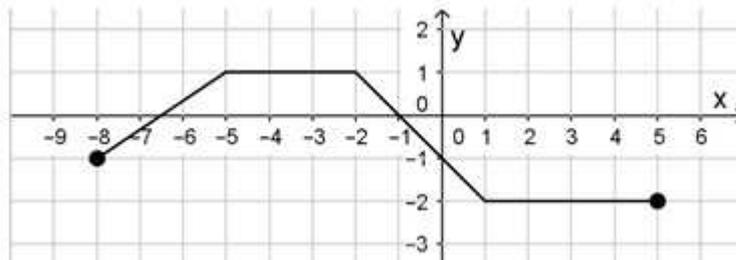
Zadanie 1. Dla poniższych funkcji określ: dziedzinę, zbiór wartości funkcji, wartość najmniejszą i największą oraz podaj argumenty, dla których funkcja te wartości przyjmuje.

a)



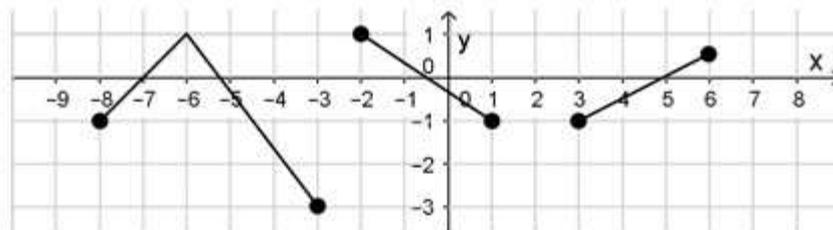
Dziedzina funkcji: _____	Wartość największa: ____ dla $x =$ ____
Zbiór wartości funkcji: _____	Wartość najmniejsza: ____ dla $x =$ ____

b)



Dziedzina funkcji: _____	Wartość największa: ____ dla $x \in$ ____
Zbiór wartości funkcji: _____	Wartość najmniejsza: ____ dla $x \in$ ____

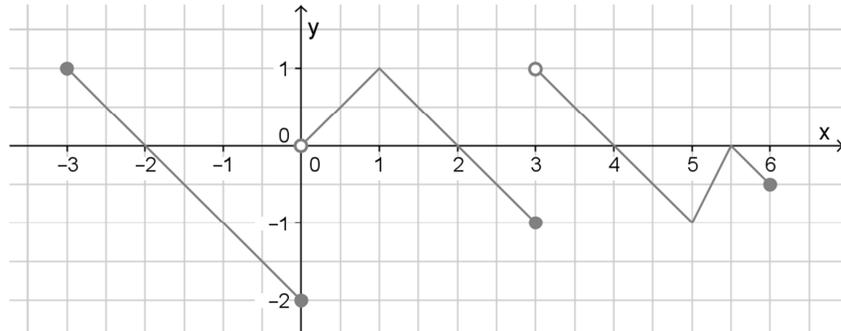
c)



Dziedzina funkcji: _____	Wartość największa: ____ dla $x =$ ____
Zbiór wartości funkcji: _____	Wartość najmniejsza: ____ dla $x =$ ____

Zadanie 2. W każdym przykładzie zaznacz fragment wykresu funkcji ograniczając ją do podanego przedziału. Ustal jaka jest najmniejsza oraz największa wartość funkcji w tym przedziale i podaj argumenty, dla których funkcja te wartości przyjmuje.

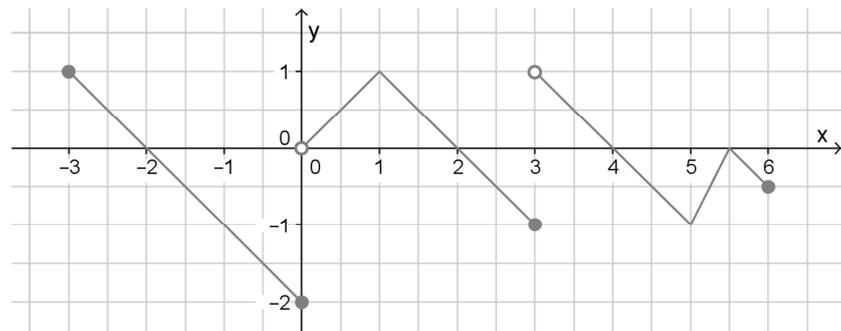
a) W przedziale $\langle 0, 3 \rangle$



wartość największa: _____ dla $x =$ _____

wartość najmniejsza: _____ dla $x =$ _____

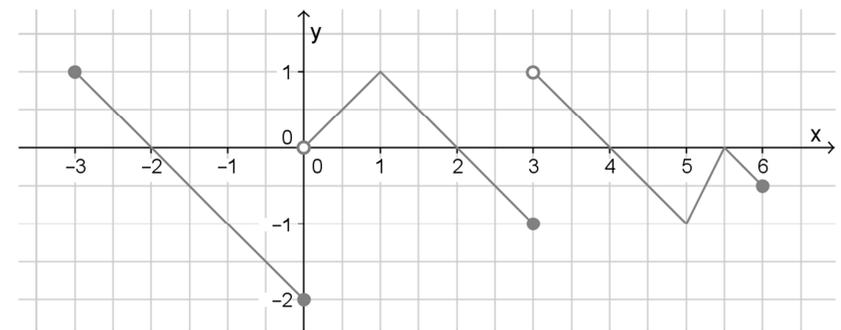
b) W przedziale $\langle -1, 0 \rangle$



wartość największa: _____ dla $x =$ _____

wartość najmniejsza: _____ dla $x =$ _____

c) W przedziale $\langle -2, 4 \rangle$

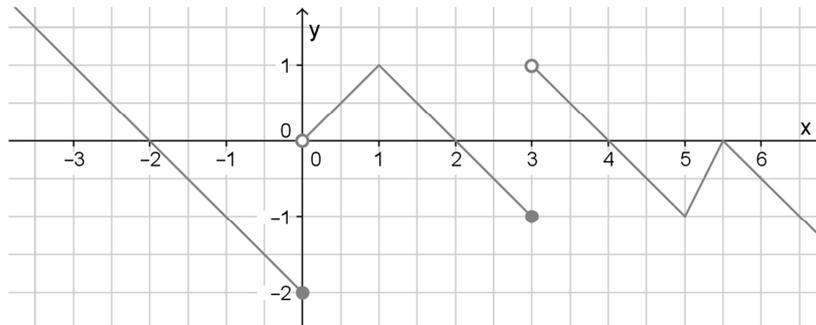


wartość największa: _____ dla $x =$ _____

wartość najmniejsza: _____ dla $x =$ _____

Zadanie 3. W każdym przykładzie zaznacz fragment wykresu tej funkcji ograniczając ją do podanego przedziału. Ustal jaka jest najmniejsza oraz największa wartość funkcji w tym przedziale i podaj argumenty, dla których funkcja te wartości przyjmuje.

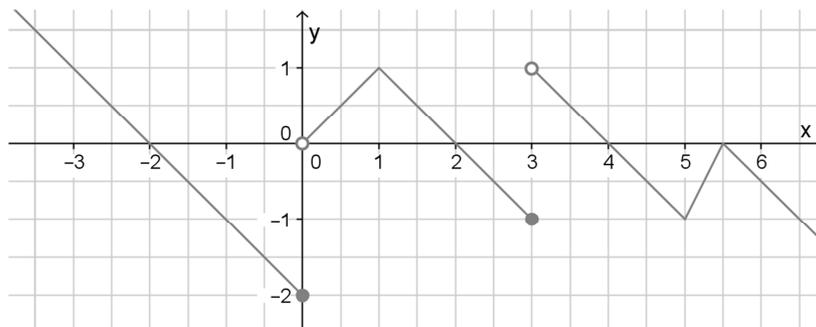
a) W przedziale $(-\infty, 3 >$



wartość największa: -----

wartość najmniejsza: -----

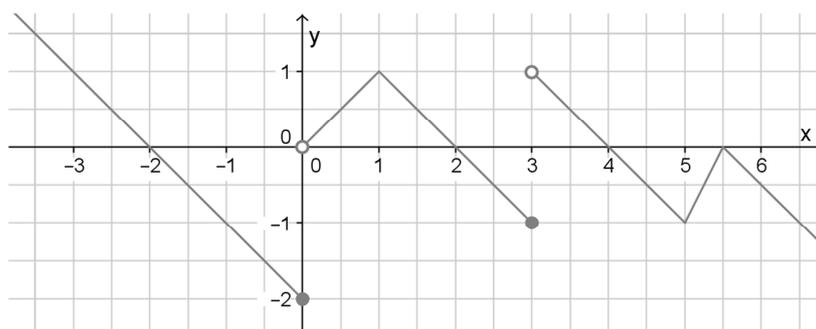
b) W przedziale $< 2, 5 >$



wartość największa: -----

wartość najmniejsza: -----

c) W przedziale $< 3, \infty >$



wartość największa: -----

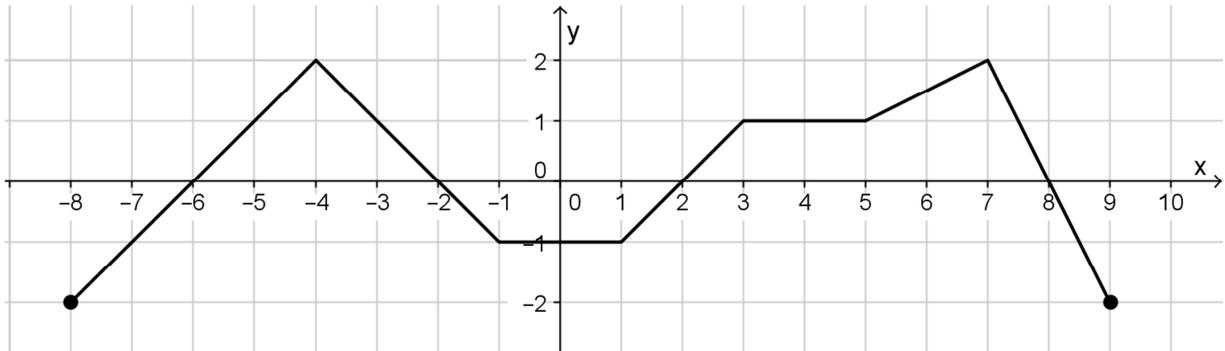
wartość najmniejsza: -----

Temat: Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Przed przystąpieniem do zadań skorzystaj z apletów prezentujących odczytywanie własności funkcji z wykresu: *funkcje02*, *funkcje03*, *funkcje04*, *funkcje05*, *funkcje06*.

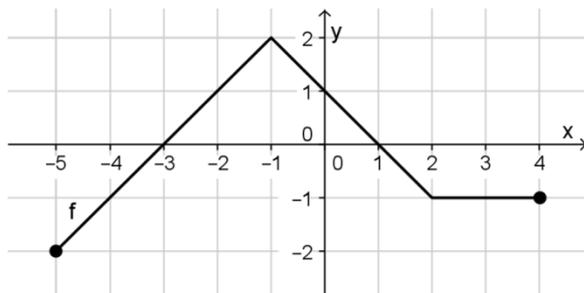
Karta pracy

Zadanie 1. Na podstawie wykresu odczytaj własności funkcji.



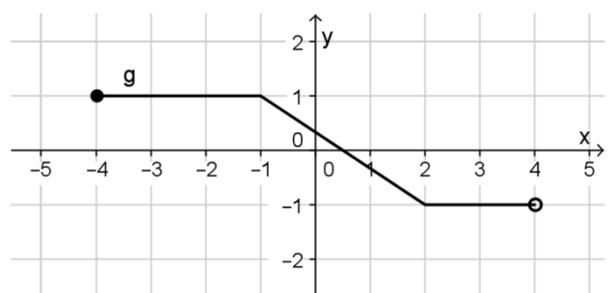
- Dziedzina funkcji: $D =$ _____
- Zbiór wartości funkcji: $ZW =$ _____
- Miejsca zerowe funkcji: _____
- Przedziały, w których funkcja jest rosnąca: _____
Przedziały, w których funkcja jest malejąca: _____
Przedziały, w których funkcja jest stała: _____
- Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie: _____
Argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne: _____
- Wartość największa: _____ dla argumentów: _____
- Wartość najmniejsza: _____ dla argumentów: _____

Zadanie 2. Na podstawie wykresu funkcji f odczytaj rozwiązanie równania i nierówności.



$f(x) = 1$ dla _____

$f(x) \leq 1$ dla _____



$g(x) = -1$ dla _____

$g(x) > -1$ dla _____

