



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 10

Funkcja liniowa

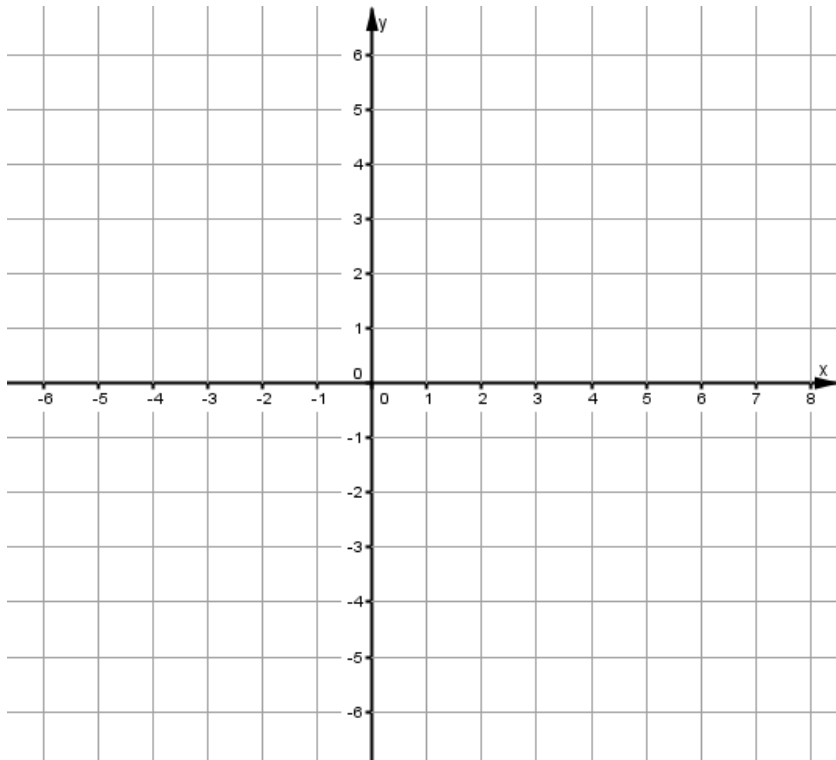
10. Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.
11. Geometryczna interpretacja układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi (1).
12. Geometryczna interpretacja układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi (2).
13. Wykorzystanie własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych.
14. Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk fizycznych oraz z życia codziennego.

Opracowanie L2

Temat: Równanie pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

Zadanie 1. Dany jest warunek: $-3 \cdot \square + 4 \cdot \square = 8$

- W puste pola wpisz odpowiednie liczby tak aby otrzymać równość prawdziwą.
 - Jak myślisz - ile par liczb spełnia warunek?
 - Czy dany warunek można zapisać inaczej?
 - Para liczb (a, b) spełniających ten warunek wyznacza współrzędne punktu. Zaznacz w układzie współrzędnych te punkty i określ jak są położone?
- Otwórz program GeoGebra.
 - W pole wprowadzania wpisz równanie $-3x + 4y = 8$. Przedstaw interpretację graficzną równania.



Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy równanie postaci $ax + by = c$, gdzie $a^2 + b^2 \neq 0$, $x \in R$ i $y \in R$. Liczby a , b , c nazywamy współczynnikami równania.

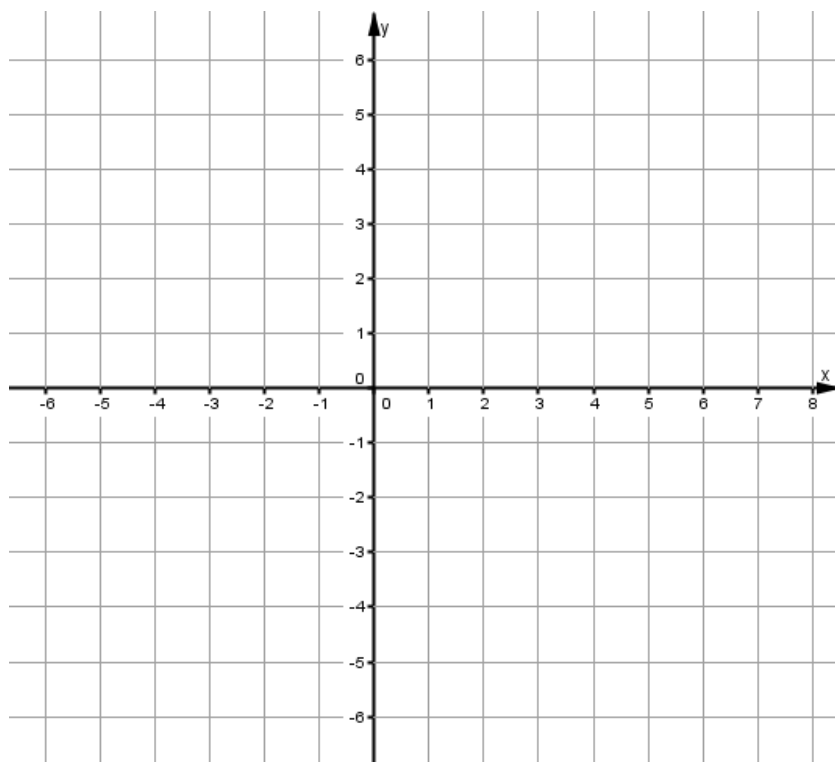
- Podaj inne przykłady równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Jaka jest interpretacja graficzna tych równań?

Zadanie 2. Podaj przykłady równań liniowych z dwiema niewiadomymi uzupełniając odpowiednio tabelę. Przedstaw interpretację graficzną otrzymanych równań.

a) Przykłady równań liniowych z dwiema niewiadomymi gdy: $a = 0$ i $b \neq 0$.

| Lp. | a | b | c | Równanie: | Podaj trzy pary liczb spełniające równanie |
|-----|---|----|---|--|---|
| | | | | $0 \cdot x + b \cdot y = c$ Inna postać równania $b \cdot y = c \rightarrow y = \frac{c}{b}, b \neq 0$ | |
| I. | 0 | -2 | | $y = 3$ | <ul style="list-style-type: none"> • • • |
| II. | 0 | | 4 | | <ul style="list-style-type: none"> • • • |

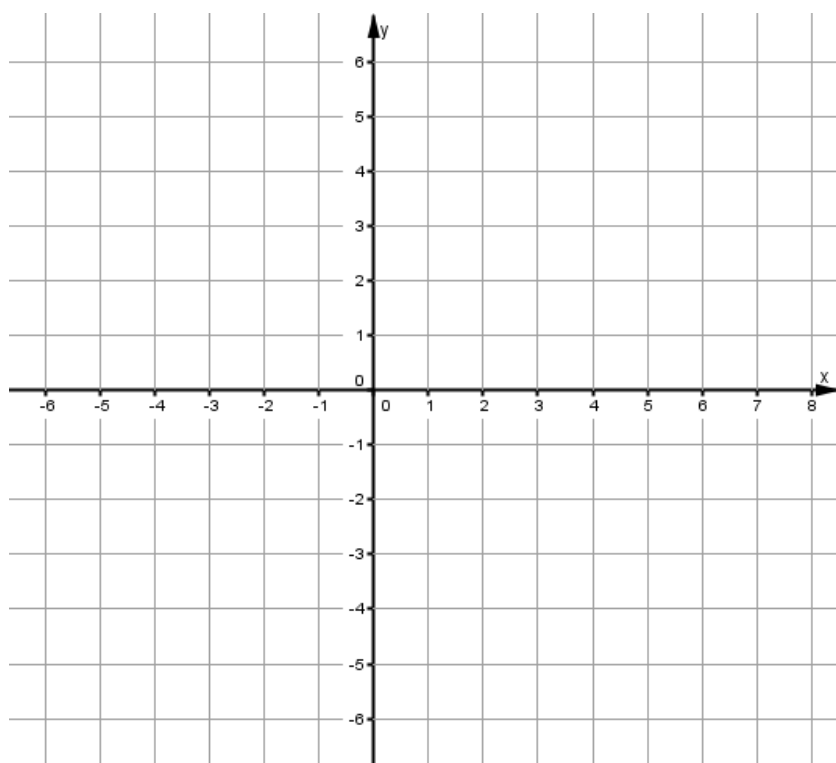
Interpretacja graficzna.



b) Przykłady równań liniowych z dwiema niewiadomymi gdy: $a \neq 0$ i $b = 0$

| Lp. | a | b | c | Równanie: | Podaj trzy pary liczb spełniające równanie |
|-----|----------------|---|---|-----------------------|--|
| | | | | Inna postać równania | |
| I. | $-\frac{1}{2}$ | 0 | | | • |
| | | | | | • |
| | | | | | • |
| II. | | 0 | | | • |
| | | | | $3x = -6 \rightarrow$ | • |
| | | | | | • |

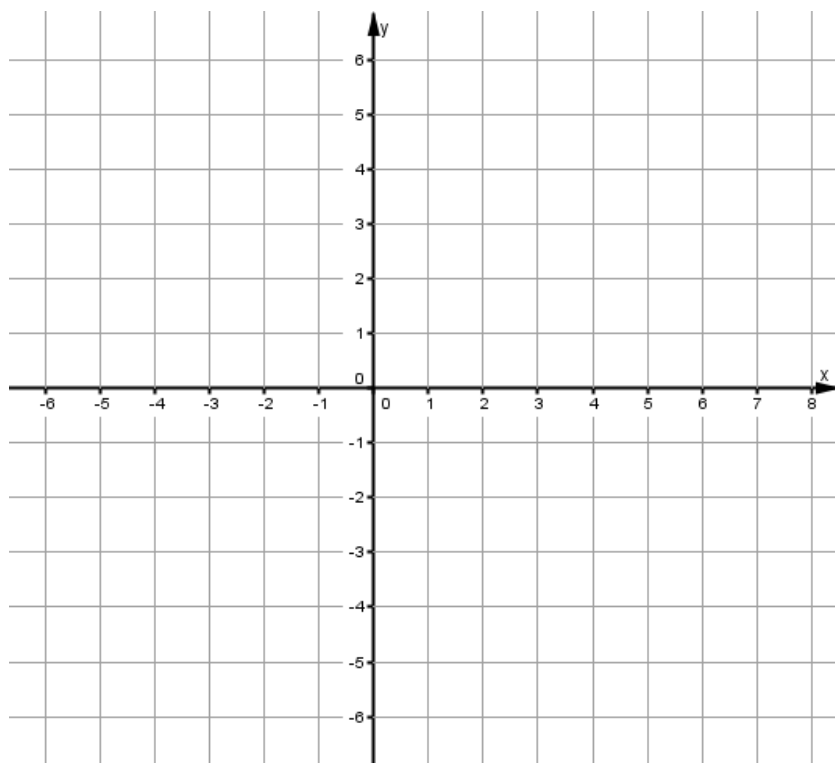
Interpretacja graficzna.



c) Przykłady równań liniowych z dwiema niewiadomymi gdy: $a \neq 0$ i $b \neq 0$

| Lp. | a | b | c | Równanie: | Wpisz trzy pary liczb spełniające równanie |
|-----|---|---|---|----------------------|--|
| | | | | Inna postać równania | |
| I. | | 3 | | | • • • |
| II. | | | 0 | | • • • |

Interpretacja graficzna.



Zadanie 3. Podaj interpretację graficzną równań:

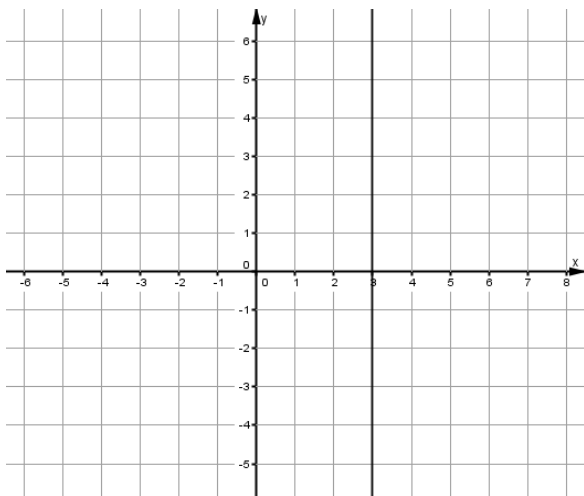
a) $2(x + y) - 1 = y - x$

c) $y - 5 = 3 - y$

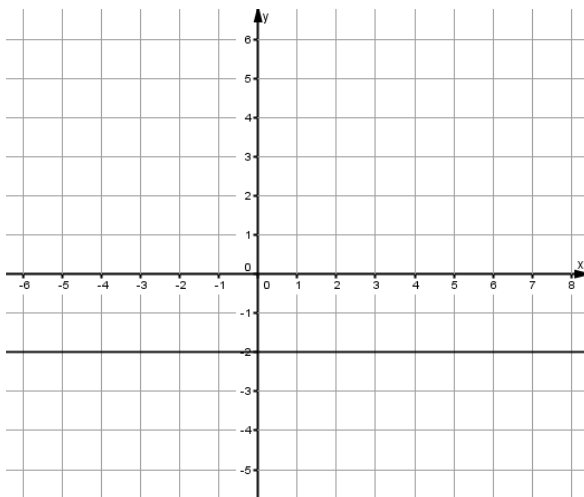
b) $3x + y = y - 3$

Zadanie 4. Wyznacz równanie, którego wykres jest przedstawiony poniżej.

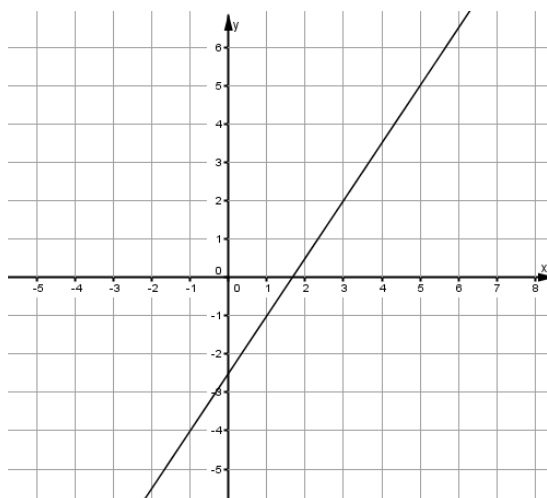
a) Równanie:



b) Równanie:



c) Równanie:



Temat: Geometryczna interpretacja układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi (1)

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *liniowa06*

Masz przed sobą aplet ilustrujący geometryczną interpretację układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.

- Za pomocą Pole wyboru **Współczynniki** – **suwaki** możesz ustalać wartości współczynników a_1, b_1, c_1 oraz a_2, b_2, c_2 w poszczególnych równaniach.
- Wpisując w **Pola tekstowe** odpowiednie liczby również możesz dobrać współczynniki równań. Współczynniki możesz dobierać z zakresu $\langle -10, 10 \rangle$.
- Pola wyboru: **Interpretacja graficzna, Pokaż k, Pokaż l, Położenie prostych k, l** ilustrują graficzną interpretację układu równań.
- Pole wyboru **Odpowiedź** – podaje odpowiedź co jest rozwiązaniem układu równań oraz określa rodzaj układu.
- Przycisk **Odśwież Widok** wyczyszcza wszystkie pola wyboru oraz wykres.

Zadanie 1. Sprawdź czy podana para liczb spełnia poszczególne równania układu równań:

$$\begin{cases} x + 2y = -4 & \text{(I)} \\ -x + 3y = -1 & \text{(II)} \end{cases}$$

- | | | |
|------------|-------------|-------------|
| a) (5,1) | c) (1, -3) | e) (-2, -1) |
| b) (-6, 1) | d) (-5, -2) | f) (2, -2) |

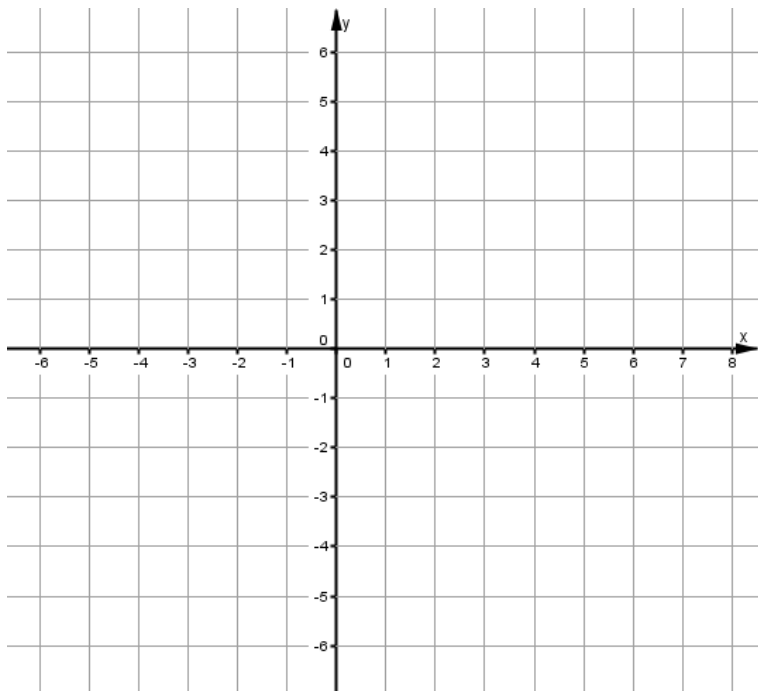
Wpisz do tabeli odpowiednią parę liczb:

| Para liczb która: | spełnia tylko I równanie | spełnia tylko II równanie | spełnia I równanie i II równanie | nie spełnia równania I i nie spełnia równania II |
|-------------------|--------------------------|---------------------------|----------------------------------|--|
| to : | | | | |

Wykorzystując aplet *liniowa06* przedstaw interpretację geometryczną podanego układu równań. Co jest rozwiązaniem tego układu równań?

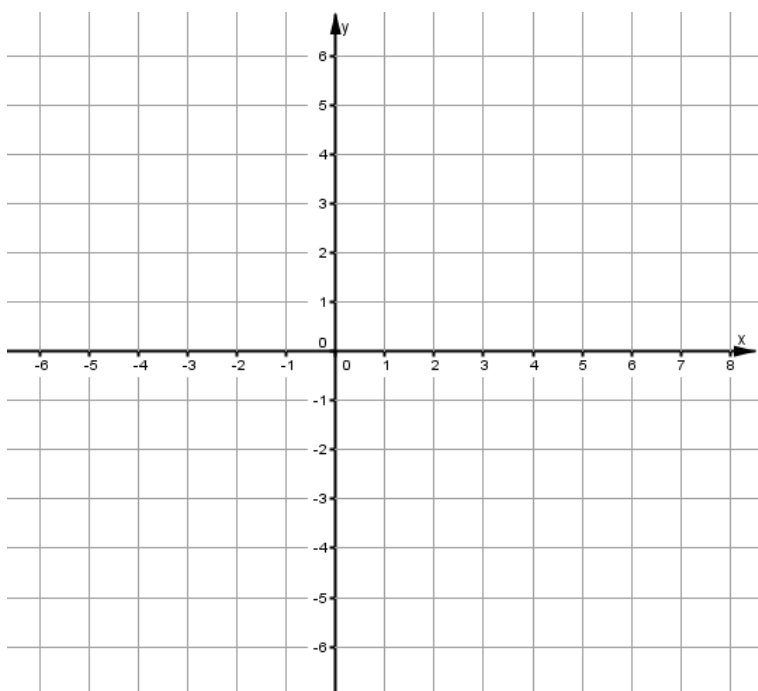
Zadanie 2. Przedstaw interpretację graficzną układu równań i podaj jego rozwiązanie. Określ czy jest to układ oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny? Sprawdź swoje rozwiązania przy pomocy apletu *liniowa06*.

a)
$$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ -x + 2y = -1 \end{cases}$$



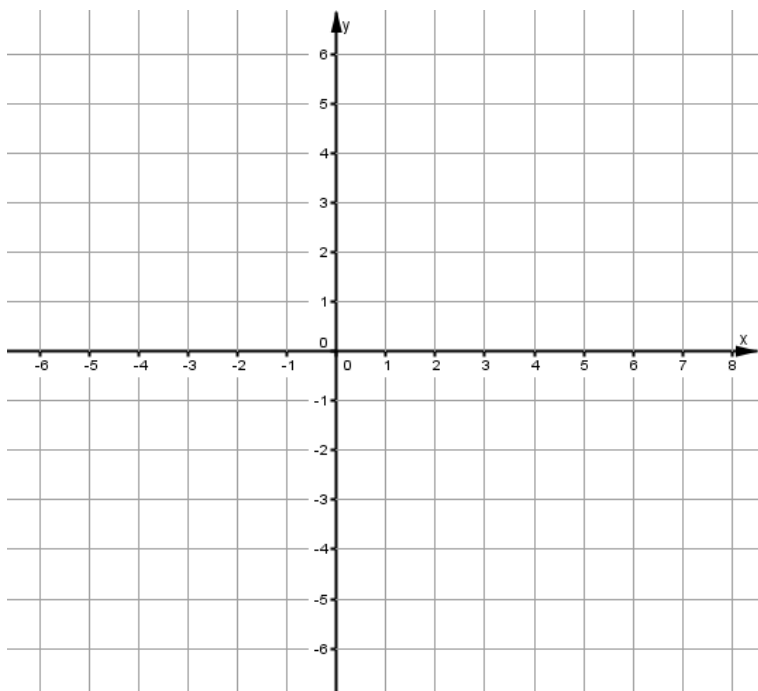
Odpowiedź:

b)
$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases}$$



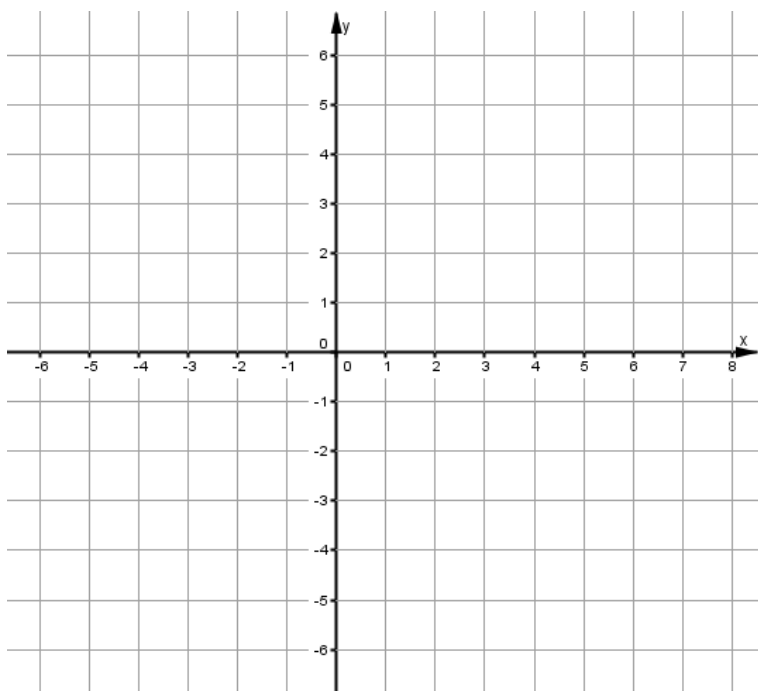
Odpowiedź:

c)
$$\begin{cases} -4x + 2y = -2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$



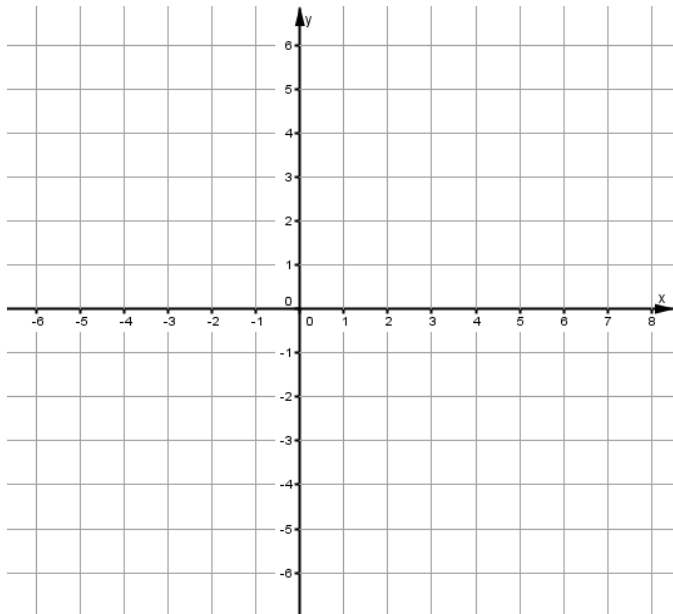
Odpowiedź:

d)
$$\begin{cases} 2x = -4 \\ x + y = 3 \end{cases}$$



Odpowiedź:

e)
$$\begin{cases} y = 3 \\ 4x - y = 1 \end{cases}$$



Odpowiedź:

Zadanie 3. Podaj interpretację graficzną układu równań:
$$\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x + 4y = 5 \end{cases}$$

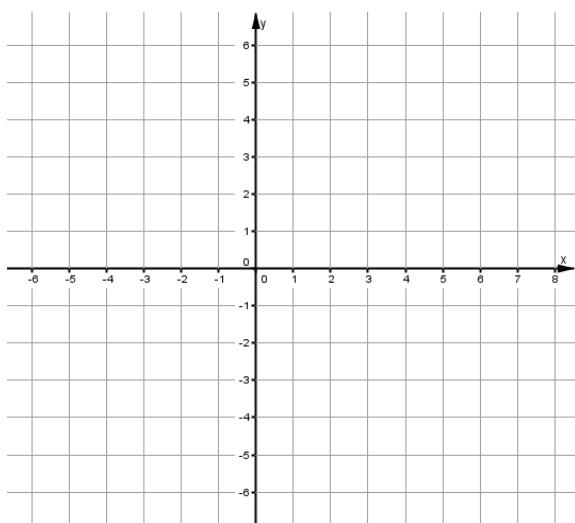
Określ jego rozwiązanie. Czy na podstawie interpretacji graficznej możesz podać dokładne rozwiązanie układu równań? Podany układ rozwiąż algebraicznie. Sprawdź rozwiązanie wykorzystując aplet *liniowa06*

Zadanie 4. Narysuj w układzie współrzędnych prostą określoną równaniem $y = -4x + 3$. Dorysuj w tym układzie drugą prostą tak, aby równania obu prostych tworzyły układ:

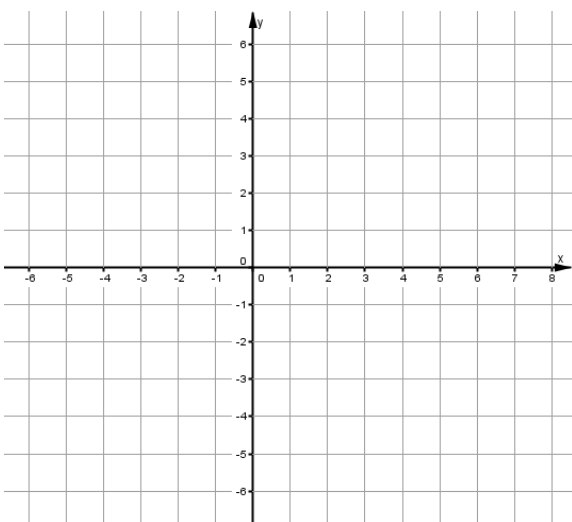
- a) oznaczony
- b) nieoznaczony
- c) sprzeczny

Zapisz układ równań, odpowiadający danej interpretacji graficznej.

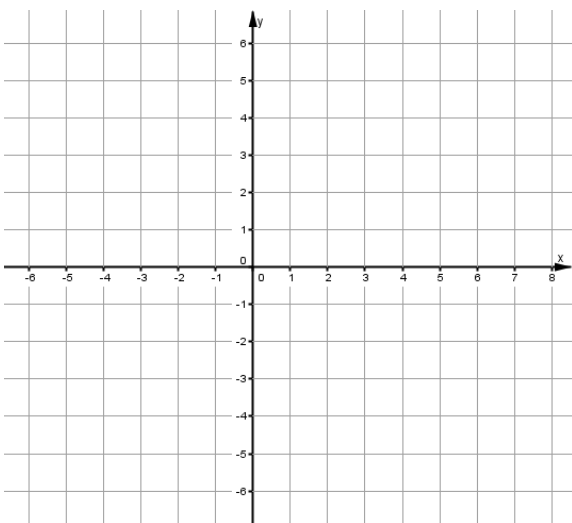
a) Układ równań:



b) Układ równań:



c) Układ równań:



Temat: Geometryczna interpretacja układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi (2)

- Do rozwiązywania zadań 1a, 2a, 3a wykorzystaj aplet *liniowa06*
- Podaj metodę tworzenia układów równań nieoznaczonych, sprzecznych, oznaczonych.
- Wykorzystaj tę metodę w zadaniach 1 b, 2 b, 3 b, 4. Sprawdź swoje wnioski przy pomocy apletu *liniowa06*

Zadanie 1. Dopisz brakujące równanie, tak aby układ równań był oznaczony:

a) $\begin{cases} -5x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 0,2y = 4 \end{cases}$

Zadanie 2. Dopisz drugie równanie, tak aby układ równań był sprzeczny:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 0,4x + 0,5y = 2 \end{cases}$

Zadanie 3. Dopisz pierwsze równanie, tak aby układ równań miał nieskończenie wiele rozwiązań:

a) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -5x + y = 3 \end{cases}$

Zadanie 4. Nie rozwiązując układu równań określ, czy dany układ jest: oznaczony, nieoznaczony czy sprzeczny? Odpowiedź uzasadnij.

a) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$

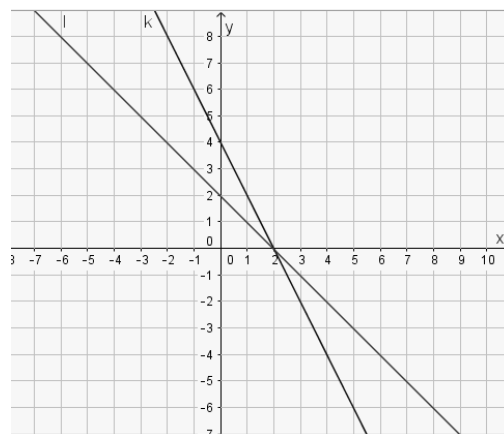
c) $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = 0,5x - 1 \\ y = -2x + 5 \end{cases}$

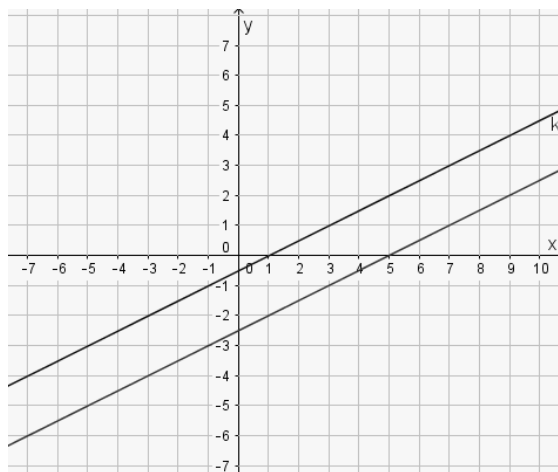
d) $\begin{cases} 2x - y = -6 \\ -x + \frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

Zadanie 5. Napisz układ równań, którego interpretację geometryczną przedstawiono na rysunku:

a) Układ:



b) Układ:



Sprawdź swoje wnioski przy pomocy apletu *liniowa06*

Zadanie 6. Utwórz układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi tak, aby dana para liczb była rozwiązaniem tego układu

- a) (0, 2)
- b) (-1, 2)

Czy można utworzyć więcej niż jeden układ spełniający warunki zadania?

Jaką zasadę można przyjąć dla układu, którego rozwiązaniem jest dana para liczb?

Do analizy zadania lub sprawdzenia wniosków możesz wykorzystać aplet *liniowa06*.

Zadanie 7. Podane układy równań rozwiąż graficznie i algebraicznie:

a)
$$\begin{cases} -5x - y = 5 \\ 2x + 4y = -2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} -0,4x + 1,2y = 0,4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} -125x - 7y = 125 \\ 20x + 3y = -20 \end{cases}$$

Jaką wspólną własność mają te układy równań? Podaną własność uogólnij i uzasadnij.

Który układ różni się od pozostałych? Na czym ta różnica polega?

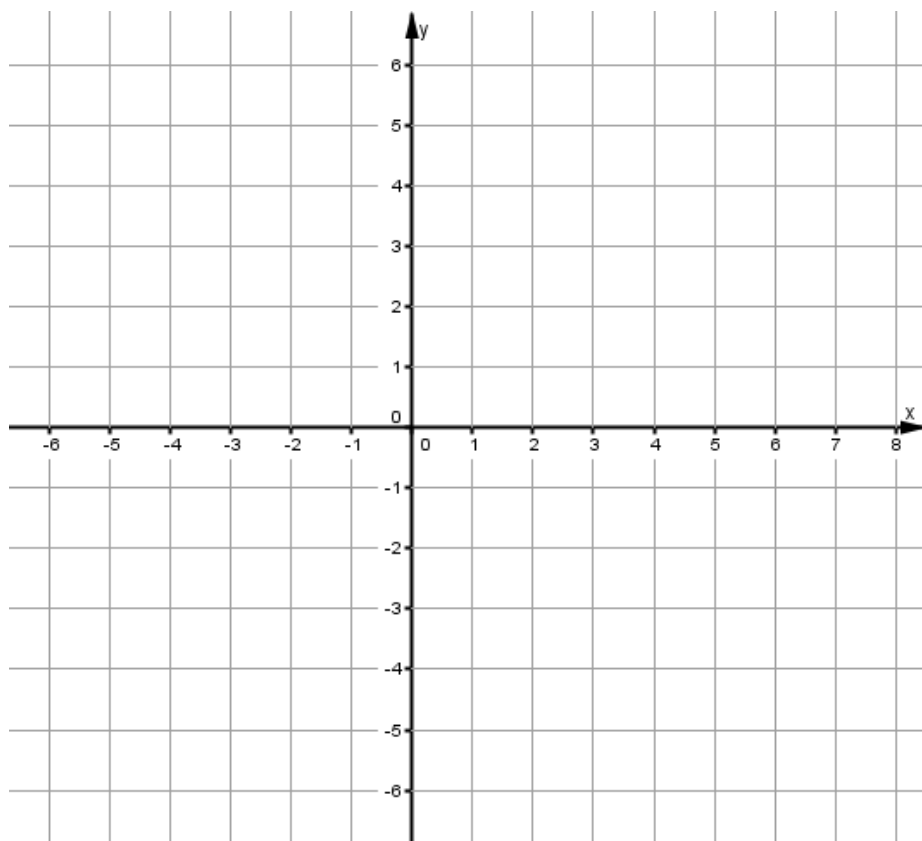
Utwórz swoje układy równań, które mają tę własność.

Temat: Wykorzystanie własności funkcji liniowej do interpretacji zagadnień geometrycznych.

Zadanie 1. Wśród funkcji opisanych wzorem $y = \frac{3}{4}x + b$, $b \in R$, znajdź te, których wykresami są proste wyznaczające z osiami OX, OY trójkąt o polu równym 24.

Karta pracy nr 1

a) Narysuj wykres funkcji dla $b = 3$.



b) Wyznacz punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami OX i OY.

Punkt przecięcia z osią OY: $A = (\dots, \dots)$, Punkt przecięcia z osią OX: $B = (\dots, \dots)$

c) Zaznacz trójkąt ABC i wyznacz jego pole.

$$P_{\Delta ABC} =$$

- Otwórz aplet *liniowa07*
 - W polu Grafiki2 wybierz za pomocą suwaka zadanie = 1.
 - Zaznacz pole wyboru Wizualizacja graficzna i zmieniaj za pomocą suwaka współczynnik
- b. Co można powiedzieć o trójkątach ABC?

- Dla jakiej wartości b pole trójkąta ABC wyniesie 24? Podaj ilustrację graficzną w tym przypadku.
- Rozwiąż zadanie algebraicznie a następnie sprawdź swoje rozwiązanie przy pomocy apletu.

Zadanie 2. Dla jakiej wartości m proste, które są wykresami funkcji:

$$y = (2m + 3)x + 1 \text{ oraz } y = -2x + m - 1$$

- będą prostopadłe
- będą równoległe
- przetną się w punkcie $D = (2, -9)$
- przetną się w punkcie $D = (-2, 3)$?

Karta pracy nr 2

- Otwórz aplet *liniowa07*
- W polu Grafiki2 wybierz za pomocą suwaka zadanie = 2.
- W polu Grafiki zmieniaj za pomocą suwaka liczbę m . Obserwuj równania prostych.
- Dobierz liczbę m tak aby te proste były prostopadłe. Zadanie rozwiąż algebraicznie.
- Zaznacz wizualizację graficzną i sprawdź odpowiedź.
- Dobierz liczbę m tak aby te proste były równoległe.
- Zaznacz wizualizację graficzną i sprawdź odpowiedź. Rozwiąż zadanie algebraicznie.
- Dobierz liczbę m tak aby te proste przecinały się w punkcie D .

Zadanie3. Punkty $K = (-3, -3)$, $L = (9, 1)$, $M = (6, 10)$ są kolejnymi wierzchołkami prostokąta $KLMN$. Wyznacz wierzchołek N . Napisz równania prostych zawierających boki MN i KN prostokąta.

Karta pracy nr 3

- Otwórz aplet *liniowa07*
- W polu Grafiki2 wybierz za pomocą suwaka zadanie = 3.
- Zaznacz pole wyboru Ilustracja początkowa. Zastanów się w jaki sposób graficznie można wyznaczyć punkt N . Za pomocą przycisku Pokaż rozwiązanie graficzne możesz zobaczyć rozwiązanie zadania.

| | |
|-----------------------|--|
| Równanie prostej ML | |
|-----------------------|--|

| | |
|------------------------------------|--|
| | |
| Równanie prostej KL | |
| Wyznaczenie współrzędnych punktu N | |
| Równanie prostej MN | |
| Równanie prostej KN | |

Zadanie 4. Dane są punkty R, S. Trójkąt RST jest prostokątny. Jaki warunek musi spełniać punkt T, jeżeli punkt T leży na przeciwprostokątnej trójkąta RST?

Karta pracy nr 4

- Otwórz aplet *liniowa07*
- Zaznacz pole wyboru Wizualizacja graficzna. Zauważ, że można zmieniać położenie punktów R, S.
Punkt T leży na przeciwprostokątnej trójkąta RST. Co możesz powiedzieć na temat położenia prostej ST i odcinka RS? Co możesz powiedzieć na temat położenia prostej RT i odcinka RS? Wykorzystaj te informacje do rozwiązania zadania.
- Sprawdź rozwiązanie za pomocą pola wyboru Rozwiązanie 1, Rozwiązanie 2.

Zadanie 5. Boki trójkąta zawierają się w prostych $y = -x + 3$, $y = x - 1$, $y = -3x - 5$. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta. Przedstaw interpretację graficzną zadania. Zadanie rozwiąż algebraicznie. Ilustrację graficzną zadania oraz inne przykłady można otrzymać przy pomocy apletu *liniowa07* – **zadanie =5**.

Temat: Zastosowanie funkcji liniowej do opisywania zjawisk fizycznych oraz z życia codziennego.

Zadanie 1. Temperatura zamarzania wody wynosi 0°C lub 32°F . Punktem wrzenia wody jest 100°C lub 212°F . Zależność między skalą Celsjusza a skalą Fahrenheita jest liniowa. Przyjmij, że C oznacza temperaturę wyrażoną w stopniach Celsjusza, natomiast F oznacza temperaturę wyrażoną w stopniach Fahrenheita. Wyraż F jako funkcję C oraz C jako funkcję F .

- Znajdź temperaturę, przy której wskazania obu termometrów są równe.
- Wyraż w stopniach Fahrenheita 36°C
- Wyraż w stopniach Celsjusza 100°F

Zadanie 2. Samolot lecąc z wiatrem, pokonuje 1200 kilometrów w ciągu dwóch godzin. Droga powrotna pod wiatr, zabiera mu 2,5 godziny. Oblicz prędkość własną samolotu i prędkość wiatru.

Zadanie 3. Pani Kowalska prowadzi damski zakład fryzjerski. Miesięczne koszty utrzymania firmy wynoszą 1100 zł. Ścięcie włosów w tym zakładzie kosztuje 30 zł. Napisz wzór funkcji, która opisuje dochód właścicielki zakładu w zależności od liczby klientek decydujących się na ścięcie włosów. Przy ilu klientkach w ciągu miesiąca dochód pani Kowalskiej ze ścicia włosów wyniesie 1300 zł?

Zadanie 4. Za zużycie wody mieszkańcy pewnego miasta płacą $3,81\text{ zł} / \text{m}^3$ plus $2,90\text{ zł}$ stałą opłatę miesięczną.

- Napisz wzór, za pomocą którego można policzyć koszty zużycia wody.
- Ile wody zużyto w miesiącu, jeżeli rachunek za wodę wyniósł $29,57\text{ zł}$?

Zadanie 5. Samochód zużywa średnio 6 l paliwa na 100 km. Kierowca zatankował 70 l paliwa i wyruszył w podróż.

- Przedstaw za pomocą wzoru i wykresu ilość litrów paliwa, jaka pozostała w baku w zależności od liczby przejechanych kilometrów.
- Ile litrów paliwa pozostanie w baku po przejechaniu 520 km?
- Ile kilometrów przejechał kierowca jeżeli w baku pozostało 24 l paliwa?

Zadanie 6. Pieszy, rowerzysta, kierowca samochodu wyruszyli z tego samego miejsca i w tym samym kierunku. Pieszy i rowerzysta wyruszyli równocześnie, natomiast samochód

wyruszył 90 minut po nich. Prędkość pieszego wynosiła $5 \frac{km}{h}$, rowerzysty $14 \frac{km}{h}$, samochodu $50 \frac{km}{h}$.

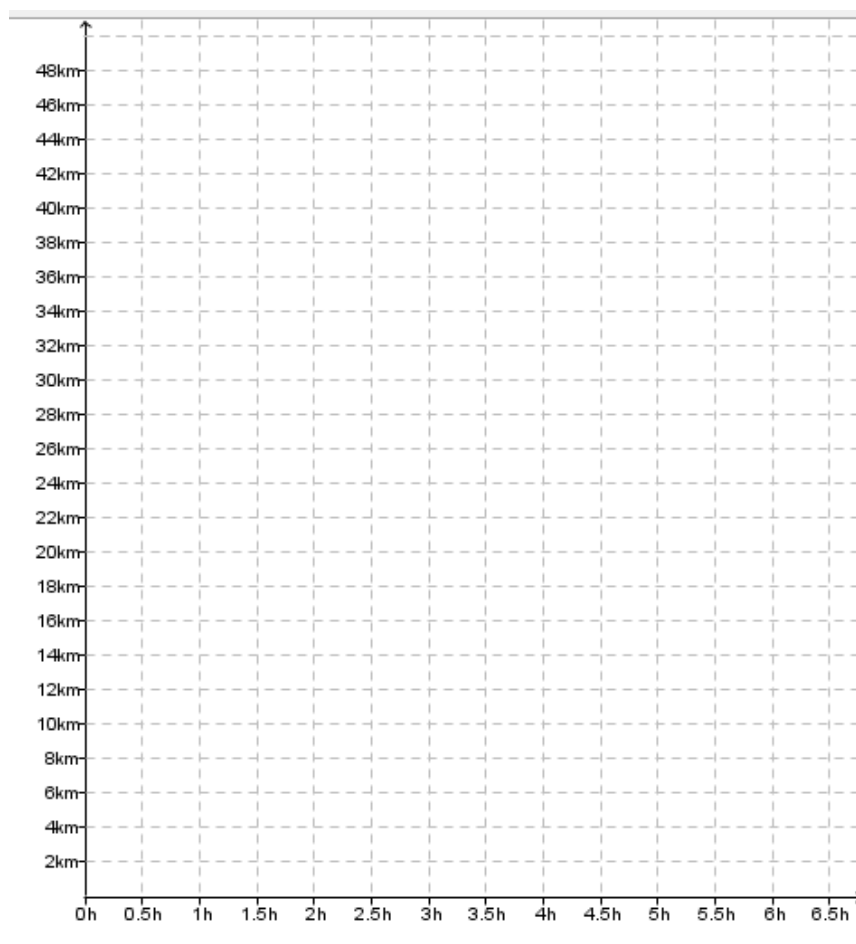
- a) Napisz wzory zależności przebytej drogi od czasu dla pieszego, rowerzysty i samochodu.

$$S_p(t) =$$

$$S_r(t) =$$

$$S_a(t) =$$

- b) Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy powyższych zależności.



- c) Po jakim czasie samochód minie pieszego?
 d) Po jakim czasie samochód minie rowerzystę?
 e) Ile kilometrów przejedzie samochód od miejsca spotkania z pieszym do miejsca spotkania z rowerzystą?