



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 11

Funkcja kwadratowa:

1. Funkcja $f(x)=ax^2$
2. Przesuwanie wykresów funkcji $f(x)=ax^2$
3. Postać kanoniczna funkcji kwadratowej
4. Postać kanoniczna i ogólna funkcji kwadratowej
5. Postać ogólna funkcji kwadratowej
6. Miejsca zerowe funkcji kwadratowej
7. Postać iloczynowa funkcji kwadratowej.

Opracowanie L5

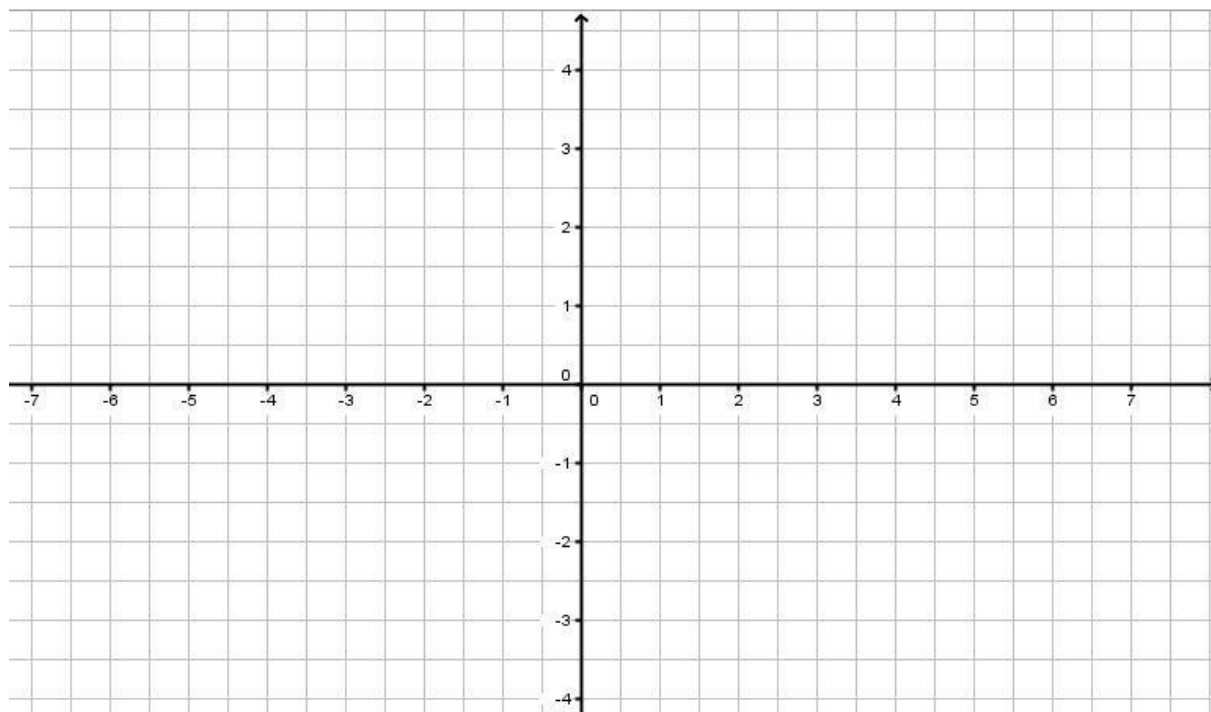
Temat: Funkcja $f(x)=ax^2$

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *kwadratowa01*
- Masz przed sobą aplet ilustrujący szkicowanie wykresów funkcji typu $f(x)=ax^2$ – przy jego pomocy nauczysz się samodzielnie szkicować wykresy funkcji
 - **Suwak a** pozwala na ustalenie wartości współczynnika a we wzorze funkcji, czyli na ustalenie, jaki będzie wzór funkcji, której wykres będziesz obserwować na ekranie
 - Pole wyboru **Tabelka częściowa** zawiera współrzędne wybranych punktów, które należą do wykresu funkcji.
 - Pole wyboru **Pokaż punkty z tabelki** zaznacza punkty z tabelki w układzie współrzędnych
 - Pole wyboru **Więcej punktów** zaznacza punkty, które również należą do wykresu funkcji, ale nie są umieszczone w tabelce częściowej
 - Pole wyboru **Pokaż wykres** wyświetla wykres funkcji o wybranym wzorze
- Ustal wartość suwaka na 1
 - Jaki jest wtedy wzór funkcji?
 - Wyświetl tabelkę częściową funkcji, odczytaj z tabelki współrzędne kilku punktów, które należą do wykresu funkcji
 - Podaj współrzędne punktu spoza tabelki częściowej, który należy do wykresu funkcji
 - Wyświetl za pomocą pola wyboru Więcej punktów, punkty w układzie współrzędnych
- Przy pomocy suwaka zmień wartość a na inną dodatnią – obserwuj zmianę położenia punktów
- wyświetl wykres funkcji, zmieniaj wartość a
- jak wygląda wykres funkcji, gdy $a=0$?

Zadanie 1: Narysuj wykresy funkcji:

$f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=5x^2$, $f(x)=0,5x^2$ – w jednym układzie współrzędnych. Jakie wspólne cechy posiadają te funkcje?

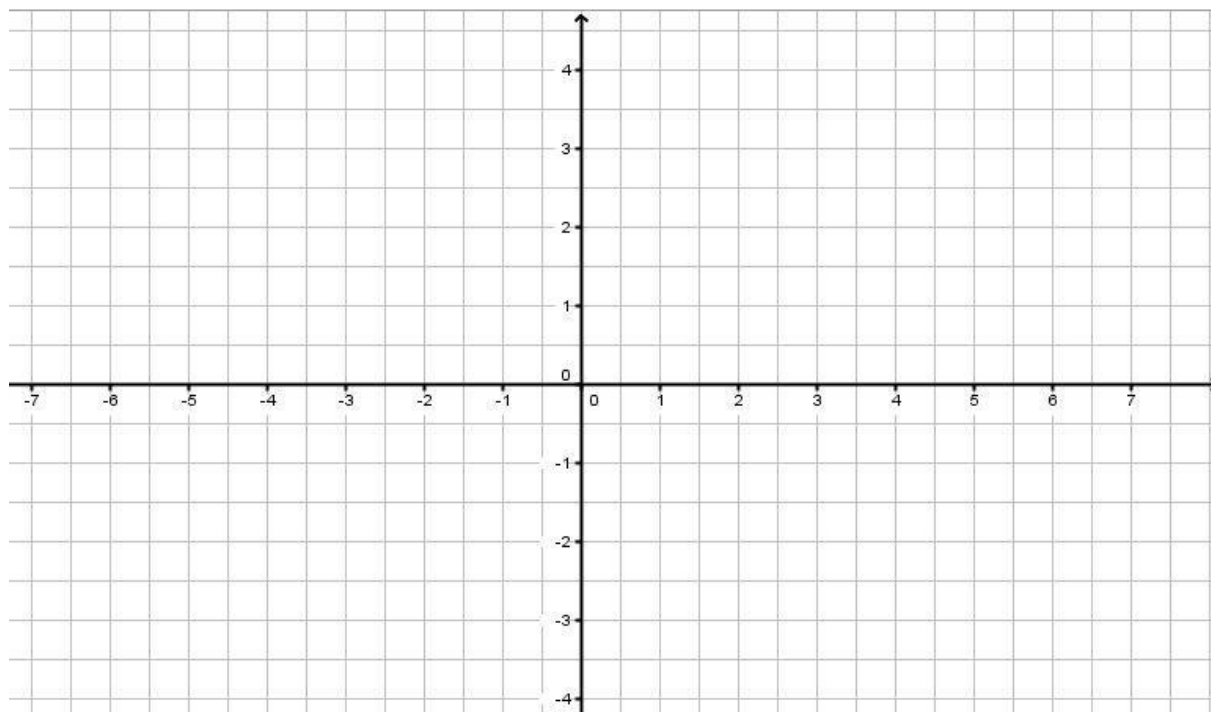


Cechy wspólne:

Sprawdź przy pomocy apletu, czy narysowałeś je poprawnie.

Zadanie 2: Narysuj wykresy funkcji:

$f(x) = -x^2$, $f(x) = -2x^2$, $f(x) = -5x^2$, $f(x) = -0,5x^2$ – w jednym układzie współrzędnych. Jakie wspólne cechy posiadają te funkcje?



Cechy wspólne:

Sprawdź przy pomocy apletu, czy narysowałeś je poprawnie.

Wykresem funkcji $f(x) = ax^2$, dla $a \neq 0$ jest parabola.

Zadanie 3. Czy punkt $(-2, 8)$ należy do paraboli $f(x) = 2x^2$? Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia.

Zadanie 4. Do wykresu funkcji $f(x) = ax^2$ należy punkt o współrzędnych $(3, -9)$. Jaka jest wartość a ?

Zadanie 5. Oblicz wartość funkcji $f(x)=0,5x^2$ dla argumentu 4.

Zadanie 6. Dla jakiego argumentu wartość funkcji $f(x)=0,25x^2$ wynosi 16?

- Otwórz plik *kwadratowa02*
- Wyświetl przy pomocy pól wyboru wierzchołek paraboli oraz oś symetrii wykresu. Zmieniaj wartości a za pomocą suwaka. Jaki ma to wpływ na współrzędne wierzchołka i oś symetrii?
- Ustaw za pomocą suwaka dowolną **dodatnią** wartość a .
Jakie własności ma wtedy funkcja $f(x)=ax^2$?
Czy inna dodatnia wartość a zmienia własności funkcji? Sprawdź swoją odpowiedź wyświetlając własności funkcji.
- Ustaw za pomocą suwaka dowolną **ujemną** wartość a .
Jakie własności ma wtedy funkcja $f(x)=ax^2$?
Czy inna ujemna wartość a zmienia własności funkcji? Sprawdź swoją odpowiedź wyświetlając własności funkcji.
- Podsumowanie: Uzupełnij tabelkę, podając wartości funkcji

	$a>0$	$a<0$
Dziedzina		
Zbiór wartości		
Wartość najmniejsza		
Wartość największa		
Miejsce zerowe		
Wartości dodatnie		
Wartości ujemne		
Oś symetrii		
Funkcja rosnąca dla		
Funkcja malejąca dla		

Temat: Przesuwanie wykresów funkcji $f(x)=ax^2$

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *kwadratowa03*
- Masz przed sobą aplet ilustrujący przesuwanie wykresów funkcji typu $f(x)=ax^2$ – przy użyciu suwaków możesz zmieniać wartości a , p , q .
- Ustaw za pomocą suwaka wartość $a=1$ oraz $p=0$ i $q=0$. Otrzymałeś wykres funkcji znany z poprzedniej lekcji.
- Zmieniaj teraz wartość q na dowolną **dodatnią**.
 Jak przesuwa się wtedy wykres funkcji?
 Jak zmienia się współrzędne wierzchołka paraboli?
 Jak zmienia się oś symetrii wykresu?
 Zmieniaj teraz q za pomocą suwaka na dowolne **ujemne**. Jak wtedy jest przesuwany wykres funkcji?
- Które własności funkcji zmieniają się przy przesunięciu wykresu funkcji $f(x)=ax^2$ w górę lub w dół?
- A jak zmieniają się własności funkcji, gdy ma ona ramiona skierowane w dół?
- Podsumowanie - własności funkcji $f(x) = ax^2 + q$

	a>0			a<0		
Trzy przykłady wzorów funkcji						
Wierzchołek paraboli z przykładu						
Wierzchołek paraboli (ogólnie)						
Zbiór wartości						
Wartość najmniejsza						
Wartość największa						

- Zmieniaj teraz wartość p na dowolną **dodatnią**, a q ustaw na **0**.

Jak przesuwa się wtedy wykres funkcji?

Jak zmieniają się współrzędne wierzchołka paraboli?

Jak zmieniają się oś symetrii wykresu?

- Zmieniaj teraz p za pomocą suwaka na dowolne ujemne. Jak wtedy jest przesuwany wykres funkcji?
- Które własności funkcji zmieniają się przy przesunięciu wykresu funkcji $f(x)=ax^2$ w prawo lub w lewo?
- A jak zmieniają się własności funkcji, gdy ma ona ramiona skierowane w dół?
- Podsumowanie - własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2$

	a>0			a<0		
Trzy przykłady wzorów funkcji						
Wierzchołek paraboli z przykładów						
Wierzchołek paraboli (ogólnie)						
Oś symetrii						
Funkcja rosnąca dla						
Funkcja malejąca dla						

- Przesuwaj teraz parabolę jednocześnie w pionie i w poziomie.

Jak zmieniają się współrzędne wierzchołka paraboli?

Jak zmieniają się oś symetrii wykresu?

- Podsumowanie - własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$

	a>0			a<0		
Trzy przykłady wzorów funkcji						
Wierzchołek paraboli z przykładów						
Wierzchołek paraboli (ogólnie)						
Oś symetrii						

Zadanie1. Wykres jakiej funkcji należy narysować i w jaki sposób go przesunąć, aby otrzymać funkcję o podanym wzorze. Podaj w każdym przypadku współrzędne wierzchołka paraboli.

$$f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$$

$$f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2 + 3$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 1$$

$$f(x) = (x + 10)^2 - 15$$

Temat: Postać kanoniczna funkcji kwadratowej

Postacią kanoniczną funkcji kwadratowej nazywamy funkcję o wzorze

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \text{ gdy } a \neq 0$$

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *kwadratowa03*
- Masz przed sobą aplet ilustrujący rysowanie wykresów funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ użyciu suwaków możesz zmieniać wartości a, p, q .
- Narysuj przy pomocy apletu wykresy funkcji. Dla każdej z nich omów własności.
 - $f(x) = 2(x - 1)^2 + 3$
 - $f(x) = -2(x - 1)^2 + 3$
 - $f(x) = \frac{1}{2}(x + 5)^2 + 3$
 - $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 1$
 - $f(x) = (x + 1)^2 - 5$
- Bez rysowania wykresów omów własności funkcji
 - $f(x) = 3(x - 5)^2 + 7$
 - $f(x) = -(x - 1)^2 + 3$
 - $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2 + 2$
 - $f(x) = -\frac{1}{2}(x + 4)^2 - 2$
 - $f(x) = (x + 4)^2 - 4$
- Uogólnij własności funkcji $f(x) = a(x - p)^2 + q$ na dowolne wartości p, q z podziałem na dodatnie i ujemne wartości współczynnika a .

	$a > 0$	$a < 0$
Wierzchołek paraboli (ogólnie)		
Oś symetrii		
Funkcja rosnąca dla		
Funkcja malejąca dla		
Zbiór wartości funkcji		
Wartość najmniejsza		
Wartość największa		

Temat: Postać kanoniczna i ogólna funkcji kwadratowej

Postacią ogólną funkcji kwadratowej nazywamy funkcję o wzorze

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ gdy } a \neq 0$$

Kanoniczna → Ogólna

Zadanie 1. Zamień wzór funkcji kwadratowej do postaci ogólnej

- $f(x) = -(x - 1)^2 + 3$

- $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2 + 2$

Ogólna → Kanoniczna

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

$$f(x) = a(x^2 - 2px + p^2) + q$$

$$f(x) = ax^2 - 2apx + ap^2 + q$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Czyli

$$-2ap = b, \text{ zatem } p = \frac{-b}{2a}$$

$$\text{Oraz: } ap^2 + q = c$$

$$q = -ap^2 + c$$

$$q = -a \left(\frac{-b}{2a} \right)^2 + c$$

$$q = -a \frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$q = \frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a}$$

$$q = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Podsumowując:

Mamy wzór funkcji w postaci ogólnej: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\text{Obliczamy: } \Delta = b^2 - 4ac, p = \frac{-b}{2a}, q = \frac{-\Delta}{4a}$$

Zapisujemy wzór w postaci kanonicznej $f(x) = a(x - p)^2 + q$

Przykład. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli i sprowadź do postaci kanonicznej

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 10$$

- $\Delta = -4, p = -4, q = 2$, czyli $W = (-4, 2)$, a postać kanoniczna funkcji to $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)^2 + 2$

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *kwadratowa04*
- Masz przed sobą aplet ilustrujący rysowanie wykresów funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wartości a, b, c we wzorze funkcji możesz zmieniać za pomocą suwaków.
- Narysuj przy pomocy apletu wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}x + 1$. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli. Sprawdź na wykresie, czy zrobiłeś to poprawnie. Wyświetl postać kanoniczną funkcji.

To samo wykonaj dla funkcji $f(x) = -x^2 - x - 1$, $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 1$,
 $f(x) = -x^2 + 5x$

Temat: Postać ogólna funkcji kwadratowej

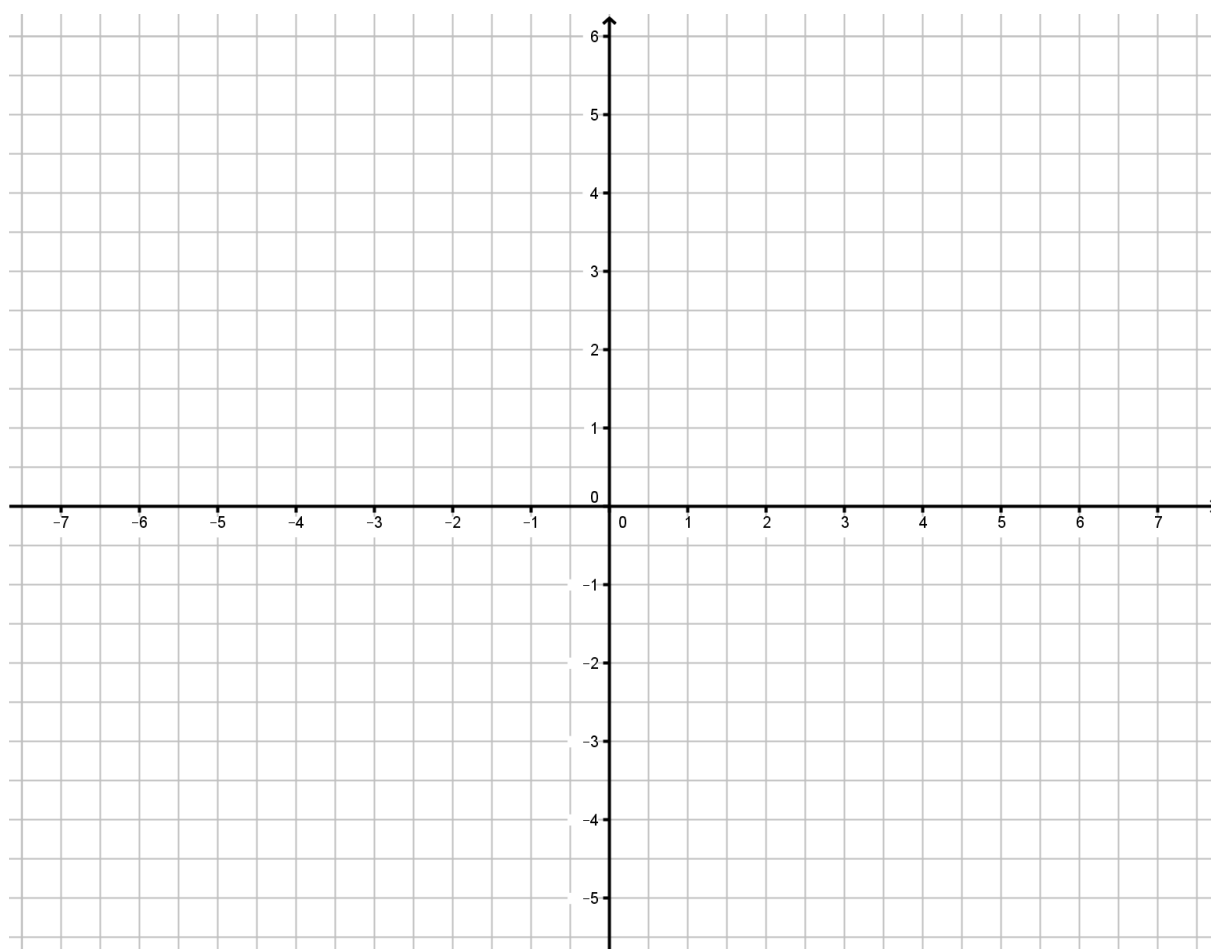
Zadanie 1. Naskicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 + 5x + 6$ (wykonaj niezbędne obliczenia i uzupełnij)

Punkt przecięcia z osią OY:

$\Delta =$

$p =$

$q =$



Zadanie 2. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 - 3x + 2$ (wykonaj tylko niezbędne obliczenia)

ZW =

Zdanie 3. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = -x^2 + 7x - 12$ (wykonaj tylko niezbędne obliczenia)

Rosnąca dla $x \in$

Malejąca dla $x \in$

Temat: Miejsca zerowe funkcji kwadratowej

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *kwadratowa03*
- Narysuj przy jego pomocy pięć wykresów funkcji kwadratowych, które mają dwa miejsca zerowe. Ich wzory wpisz do tabelki znajdującej się poniżej. Odczytaj współrzędne wierzchołka każdej paraboli. Ustal znaki a oraz q oraz na ich podstawie znak Δ (skoro $q = \frac{-\Delta}{4a}$, to $\Delta = -4aq$)

wzór funkcji	wierzchołek	znak a	znak q	znak Δ
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	(p, q)	+		
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	(p, q)	-		

Wniosek: Funkcja kwadratowa **ma dwa miejsca zerowe**, gdy

- Narysuj pięć wykresów funkcji kwadratowych, które mają jedno miejsce zerowe. Ich wzory wpisz do tabelki znajdującej się poniżej. Odczytaj współrzędne wierzchołka każdej paraboli. Ustal znaki a oraz q oraz na ich podstawie znak Δ

• wzór funkcji	wierzchołek	znak a	znak q	znak Δ
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	(p, q)	+		
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	(p, q)	-		

Wniosek: Funkcja kwadratowa ma **jedno miejsce zerowe**, gdy

- Narysuj pięć wykresów funkcji kwadratowych, które nie mają miejsc zerowych. Ich wzory wpisz do tabelki znajdującej się poniżej. Odczytaj współrzędne wierzchołka każdej paraboli. Ustal znaki a oraz q oraz na ich podstawie znak Δ

wzór funkcji	wierzchołek	znak a	znak q	znak Δ
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	(p, q)	+		
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	(p, q)	-		

Wniosek: Funkcja kwadratowa **nie ma miejsc zerowych**, gdy

Temat: Postać iloczynowa funkcji kwadratowej

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik *kwadratowa05*
- Przy pomocy suwaków możesz zmieniać wartości a , x_1 , x_2
- Narysuj przy jego pomocy pięć wykresów funkcji kwadratowych, które mają dwa miejsca zerowe -1 oraz 5 . Zapisz wzory tych funkcji w postaci iloczynowej oraz podaj równania ich osi symetrii. Zapisz wzór każdej z tych funkcji w postaci ogólnej.

postać iloczynowa	oś symetrii	postać ogólna

- Czym różnią się te funkcje?
- Ile jest funkcji, które mają takie same miejsca zerowe jak podane funkcje?
- Jak położenie osi symetrii wykresu funkcji zależy od miejsc zerowych?
- Uzupełnij $x=p=$
- Jak bez obliczania Δ wyznaczyć drugą współrzędną wierzchołka paraboli?
- Narysuj przy pomocy apletu *kwadratowa05* pięć wykresów funkcji kwadratowych, które mają dwa jednakowe miejsca zerowe, czyli jedno miejsce zerowe, równe 2 . Zapisz wzory tych funkcji w postaci iloczynowej oraz podaj równania ich osi symetrii. Zamień wzór każdej z tych funkcji na postać ogólną.

postać iloczynowa	oś symetrii	postać ogólna

- Czym różnią się te funkcje?
- Jak położenie osi symetrii wykresu funkcji zależy od miejsc zerowych?
- Uzupełnij $x=p=$
- Jak bez obliczania Δ wyznaczyć drugą współrzędną wierzchołka paraboli?

Zadanie 1. Odczytaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = -2(x - 3)(x + 2)$. Oblicz współrzędne wierzchołka paraboli, która jest wykresem tej funkcji.