Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 13

Funkcje

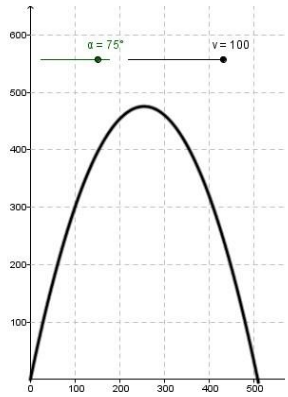
16. Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, ekonomicznych, fizycznych
17. Zastosowania funkcji kwadratowej
18. Zadania optymalizacyjne
19. Zadania optymalizacyjne- wyznaczanie wartości największej lub najmniejszej funkcji

Opracowanie L7

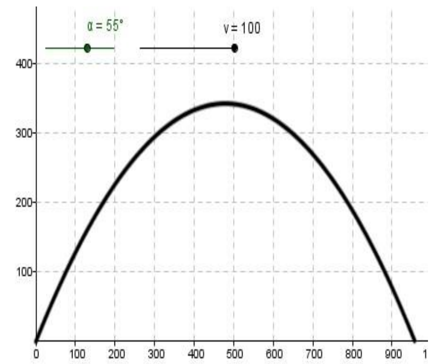
Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

Temat: Wykorzystanie własności funkcji kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych, ekonomicznych, fizycznych.

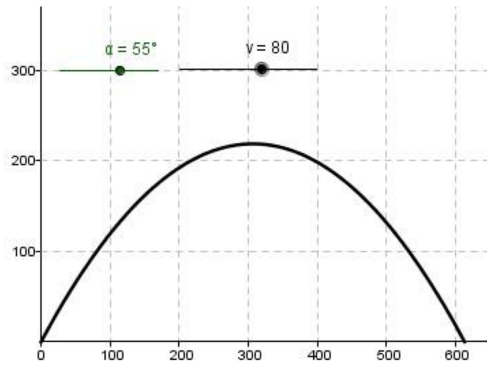
Zadanie 1. Na rysunkach przedstawiono tor ruchu pocisku wystrzelonego z prędkością początkową v=100m/s, pod kątem α. Oblicz maksymalny zasięg i wysokość, na którą wzniósł się pocisk. Trajektorię ruchu po pominięciu oporów powietrza opisuje wzór $f(x) = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2v^2 cos^2\alpha} x^2$, gdzie $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$.



A)



B)



C)

A) Po podstawieniu do wzoru otrzymujemy $f(x) = x \cdot tg75^o - \frac{9.81}{2(100)^2 cos^2 75^o} x^2$,

$f(x) \approx 3{,}73x - 0{,}0073x^2$, stąd możemy policzyć na jaką maksymalną wysokość wzniósł się pocisk stosując wzór na $q = \frac{-\Delta}{4a} \approx 476{,}5[m]$

Maksymalny zasięg związany jest z miejscami zerowymi funkcji kwadratowej.

$x(3{,}73 - 0.0073x) = 0 \Rightarrow x = 0 \ lub \ x = 511$, czyli 511[m]

Porównaj wyniki obliczeń z rysunkiem i przeprowadź analogiczne obliczenia dla pozostałych rysunków

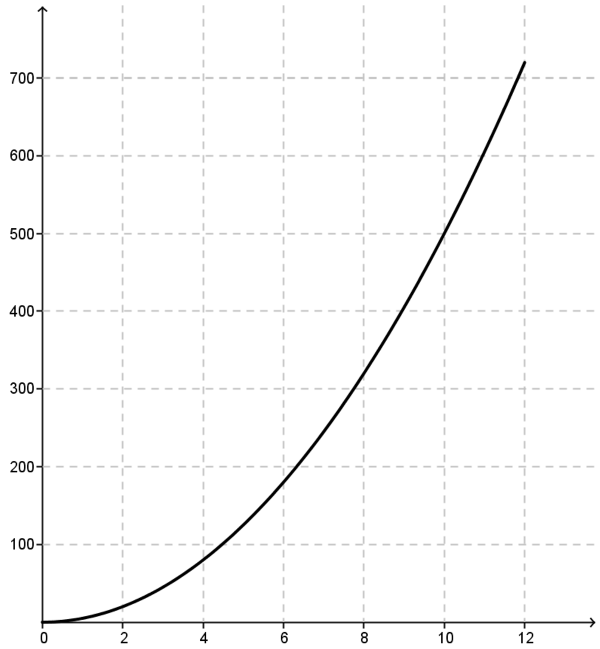
B) $f(x) = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2v^2 cos^2\alpha} x^2$

C) $f(x) = x \cdot tg\alpha - \frac{g}{2v^2 cos^2\alpha} x^2$

Zadanie 2

Na podstawie prawa swobodnego spadku Galileusza można uzależnić drogę[m] spadku ciała w próżni od czasu[s] jako $s(t) = \frac{gt^2}{2} \approx 5t^2[m]$.

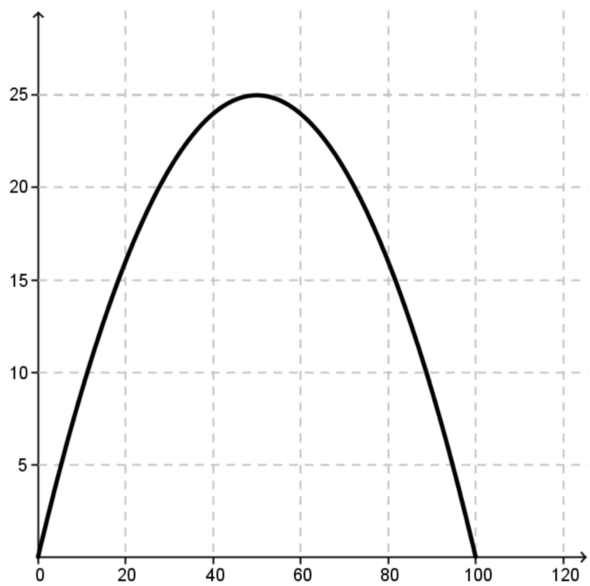
a)



a) Jak długo będzie spadać balast zrzucony z wieży Eiffla mającej 300m?[1]

b) Na wykresie przedstawiono zależność s(t). Ciało spuszczone z pewnej wysokości spadło na ziemię po 12[s] . Oblicz jaką część drogi pokonało w ciągu pierwszych 6[s]?

Zadanie 3



Tor lotu pocisku opisany jest wzorem $s(x) = -0.01x^2 + x$. Obok naszkicowano wykres tej funkcji. Określ dziedzinę funkcji. Oblicz największą wysokość na jaką wzniósł się pocisk. Oblicz w jakiej odległości[m] upadł pocisk.

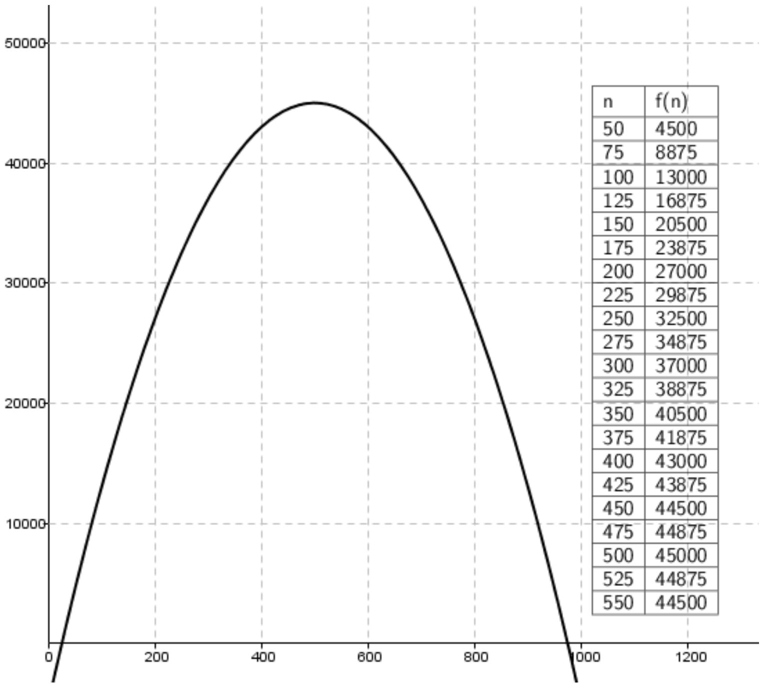
Zadanie 4

Przy produkcji n rowerów dziennie zakład osiąga dochód wyrażony w przybliżeniu funkcją $f(n) = 200n - 5000 - 0.2n^2$. Czy opłaci się zwiększyć produkcję z 50 do 100 sztuk? [1]

Dochód przy produkcji 50 sztuk wynosi ……

Dochód przy produkcji 100 sztuk wynosi ……

Opłaci się/nie opłaci się zwiększać produkcji.



n	f(n)
50	4500
75	8875
100	13000
125	16875
150	20500
175	23875
200	27000
225	29875
250	32500
275	34875
300	37000
325	38875
350	40500
375	41875
400	43000
425	43875
450	44500
475	44875
500	45000
525	44875
550	44500

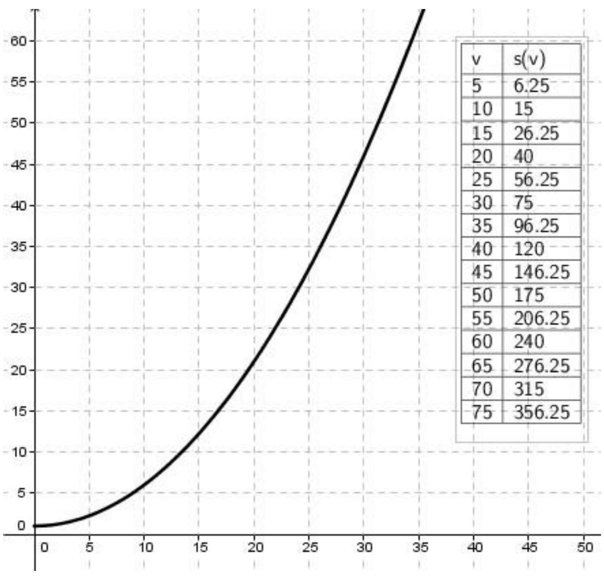
Wyjaśnij dlaczego przedstawiony obok wykres nie przedstawia zależności osiąganego dochodu $f(n)$ od liczby produkowanych dziennie rowerów n ?

Oblicz od jakiej liczby n, produkcja rowerów przynosi dochód.

Jaka wielkość produkcji daje największy dochód?

$n_w =$

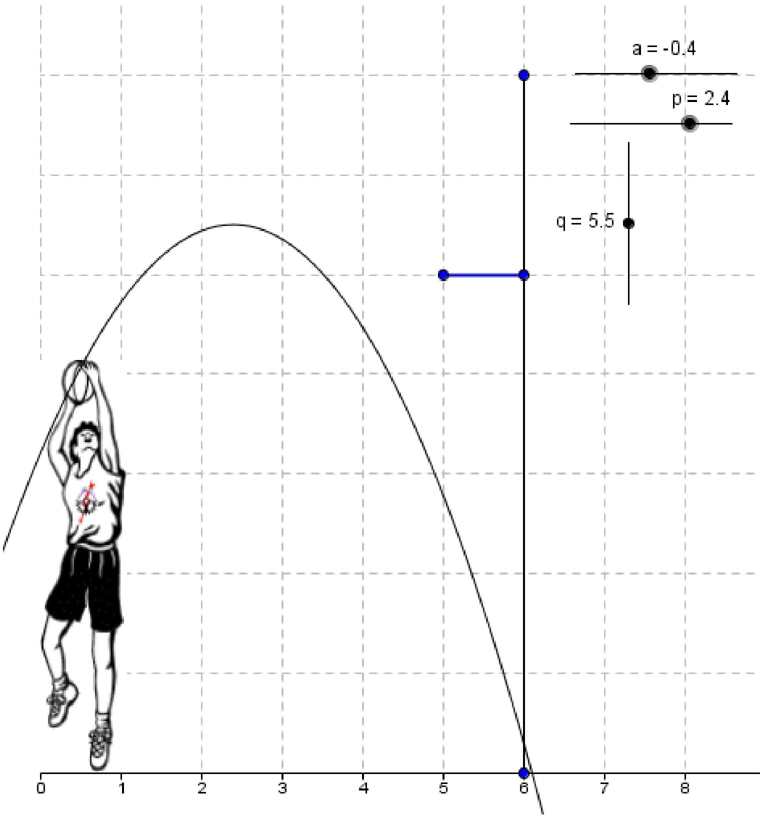
Pytanie kluczowe: ilustracja



v	s(v)
5	6.25
10	15
15	26.25
20	40
25	56.25
30	75
35	96.25
40	120
45	146.25
50	175
55	206.25
60	240
65	276.25
70	315
75	356.25

Zadanie5

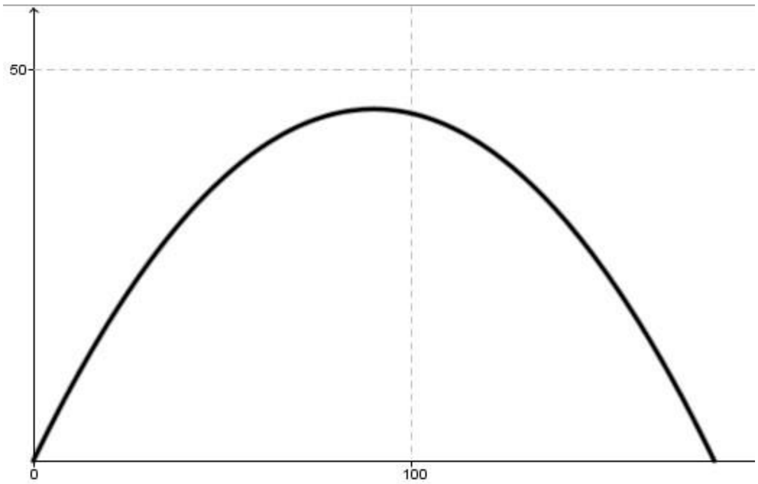
Koszykarz rzucający piłkę do kosza stoi w początku układu współrzędnych, kosz zawieszony jest na wysokości 5[j], modelem kosza jest odcinek o współrzędnych A=(5,5), B=(6,5). Opisz tor lotu piłki jeśli porusza się ona po paraboli. Wykorzystaj postać kanoniczną funkcji kwadratowej. Narysuj taki wykres będący torem lotu piłki koszykowej, gdy wpadła do kosza. Wykorzystaj program GeoGebra (poniżej zrzut ekranu, kiedy piłka nie trafiła do kosza). Zmieniaj parametry opisujące tor piłki (wykorzystaj suwaki).[2]



Temat: Zastosowania funkcji kwadratowej.

Zadanie 1

W III wieku p.n.e. Archimedes zbudował katapultę, która mogła miotać nawet 80kg kamienie. Na wykresie poniżej przedstawiono tor ruchu kamienia wyrzuconego przez katapultę. Wzór funkcji opisującej ten ruch to $y = -\frac{1}{180}x^2 + x$, gdzie x – odległość[m], y – wysokość[m]



a) Oblicz jaki był zasięg katapulty

b) Na jaką największą wysokość wzleciał kamień wyrzucony przez tę katapultę?

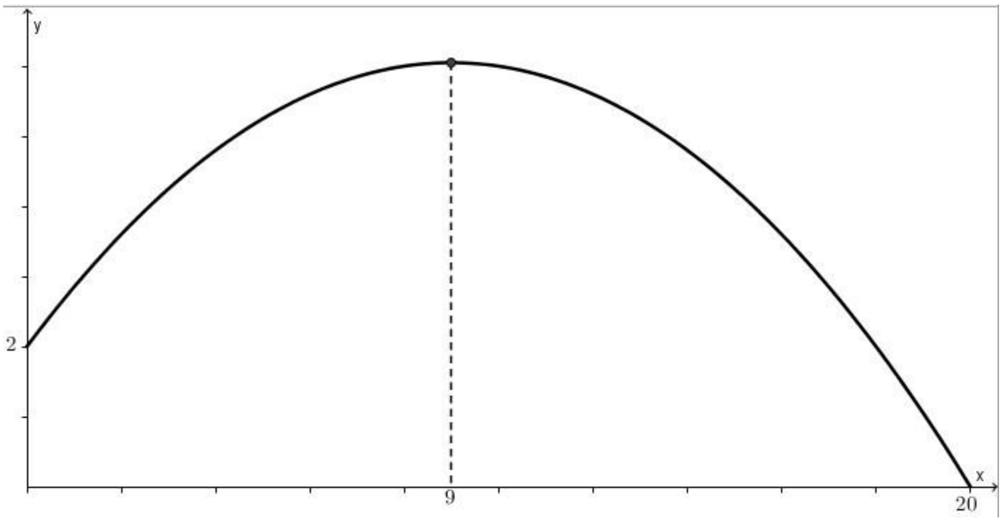
Zadanie 2

Na zdjęciu przedstawiono Gateway Arch (1965r Stany Zjednoczone) łuk upamiętniający podbój Dzikiego Zachodu. Wysokość tego łuku wynosi 630 stóp i jest równa odległości między ramionami mierzonej przy ziemi. Przyjmując, że jest to parabola wyznacz wzór paraboli, która przechodzi przez punkty zaznaczone na osiach układu współrzędnych.

Wskazówka: możesz wykorzystać postać iloczynową ($x_1 =$, $x_2 =$) lub postać kanoniczną $W = (0,\quad)$

Zadanie 3

Tor ruchu kuli pchniętej przez miotacza jest fragmentem paraboli. Na wykresie przedstawiono zależność wysokości, na której znajduje się kula, od jej odległości od miotacza (mierzonej w poziomie). Kropką zaznaczono wierzchołek paraboli.

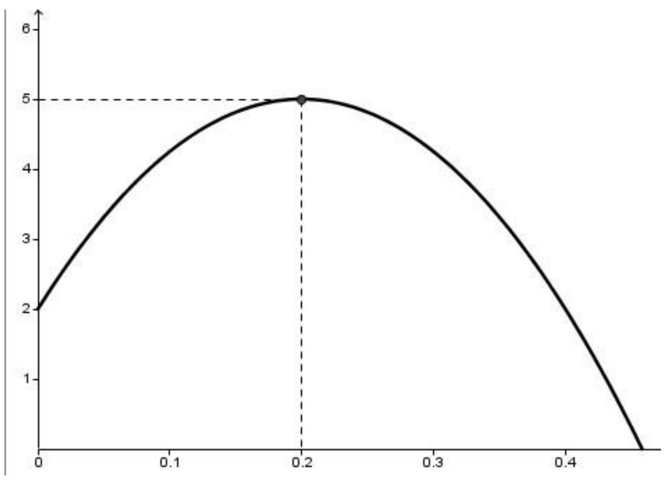


a) Wyznacz wzór funkcji, której wykres przedstawiono na rysunku

b) Oblicz na jakiej wysokości znajduje się kula w najwyższym punkcie swojego lotu.

Zadanie 4

Na wykresie przedstawiono jak zmienia się wysokość, na której znajdowała się piłka od momentu, w którym została odbita przez siatkarkę, do momentu, w którym upadła na ziemię. Wykres jest fragmentem paraboli.



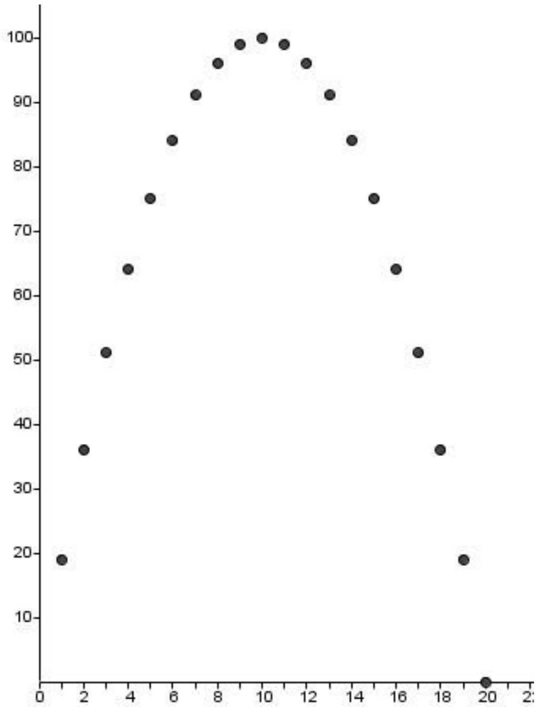
x- czas w sekundach
y- wysokość w metrach

a) Wyznacz wzór funkcji, której wykres przedstawiono powyżej.

b) Oblicz, po jakim czasie piłka spadła na ziemię. Jaka jest dziedzina funkcji?

c) Jak długo piłka wznosiła się nad siatką (górna krawędź siatki znajduje się na wysokości 2,24m)

Pytanie kluczowe: ilustracja



Temat: Zadania optymalizacyjne.

Zadanie 1

Jeden bok prostokąta ma długość *x*, a drugi *7,5-x*. Jak należy dobrać wymiary tego prostokąta, aby jego pole było największe?

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7
7.5-x	7.5	7	6.5	6	5.5	5	4.5	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0.5
pole															

Uzupełnij częściową tabelkę.

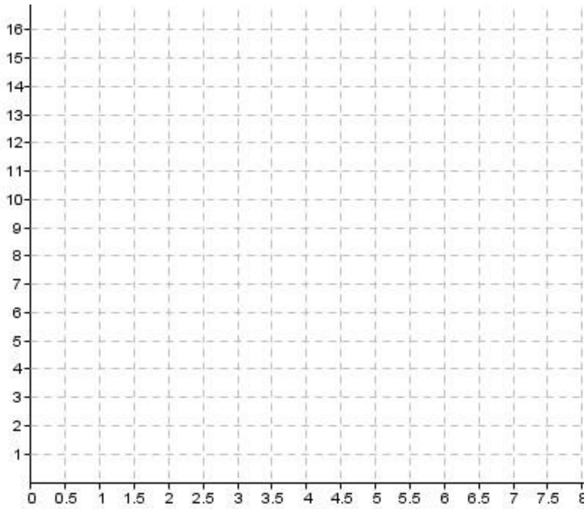
- Czy na podstawie tej tabelki możesz wyznaczyć największe pole?

- Czy taka metoda jest zawsze skuteczna?

- Zapisz wzór funkcji, która opisuje pole prostokąta.

- Jaką największą wartość można podstawić za x, a jaką najmniejszą, aby istniał prostokąt?

- Narysuj wykres funkcji, której wzór napisałeś



- Oblicz ile wynosi największe pole prostokąta, korzystając ze wzorów na współrzędne wierzchołka paraboli.

- Jak wyglądała by tabelka, gdyby zmienić długości boków na x i 1700-x? Która z metod- tabelka, czy wzór funkcji i jej wykres jest skuteczniejszą metodą?

Karta pracy nr1

Suma długości podstawy i wysokości opuszczonej na tę podstawę wynosi 8cm. Jak należy dobrać wymiary trójkąta, aby jego pole było największe. Ile wynosi to największe pole?

- Otwórz aplet kwadratowa08
- Przyjęto oznaczenia x- długość podstawy, y- długość wysokości trójkąta
- Zmień położenie punktu P. Dlaczego pole, które jest wyświetlone w drugim widoku się nie zmienia ?

- Zmieniaj położenie punktu N. W jakim zakresie takie zmiany są możliwe, aby trójkąt nie zniknął?

- Oznaczyłeś przez x- długość podstawy. Jak wysokość y zależy od x? Obserwuj zmieniające się dane w aplecie. Zapisz zależność $y = \cdots$

- Zapisz wzór funkcji opisującej pole trójkąta w zależności od długości podstawy x i wysokości y

- Zapisz ten sam wzór, tak aby była tylko jedna niewiadoma x

- Jaka jest dziedzina tej funkcji?

- W drugim widoku możesz obserwować jak zmiana długości podstawy wpływa na kształt wykresu. W którym położeniu punktu N (przy jakiej długości podstawy x) pole jest największe?

- Sprawdź swoje obserwacje wykorzystując odpowiednie wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

- Oblicz wymiary trójkąta o największym polu.

- Oblicz to największe pole.

Karta pracy nr2 (do pytania kluczowego)

Mamy 80m bieżących siatki ogrodzeniowej. Chcemy ogrodzić prostokątny ogródek przylegający jednym z boków do ściany domu. Jakie powinny być wymiary ogródka, aby jego powierzchnia była największa?

- Otwórz aplet kwadratowa09
- Przyjęto oznaczenia x- długość boku, który nie przylega do ściany domu, y- długość drugiego boku
- Zmień położenie suwaka, na którym ustawiasz długość boku x. Jak jest największa możliwa długość boku x? Dlaczego nie możesz ustawić większej długości x?

- Oznaczyłeś przez y- długość drugiego boku. Jak y zależy od x? Obserwuj zmieniające się dane w aplecie. Zapisz zależność $y = \cdots$

- Zapisz wzór funkcji opisującej pole prostokątnego ogródka w zależności od długości boków x i y

- Zapisz ten sam wzór, tak aby była tylko jedna niewiadoma x

- Jaka jest dziedzina tej funkcji?

- W drugim widoku możesz obserwować jak zmiana długości x wpływa na kształt wykresu. W którym położeniu suwaka (przy jakiej długości x) pole jest największe?

- Sprawdź swoje obserwacje wykorzystując odpowiednie wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

- Oblicz wymiary ogródka o największym polu.

- Oblicz to największe pole.

- Zaznacz w aplecie pole wyboru Rozwiązanie i zweryfikuj swoją odpowiedź z apletem.

Karta pracy nr3 (dla chętnych)

Odcinek o długości 24 cm podzielono na trzy części, z których zbudowano trójkąt równoramienny. Na bokach trójkąta zbudowano kwadraty. Jak dobrać wymiary trójkąta, aby suma pól kwadratów była jak najmniejsza? Oblicz tę sumę.

- Otwórz aplet kwadratowa10
- Przyjęto oznaczenia x- długość ramienia trójkąta, y- długość podstawy
- Zmień położenie suwaka, na którym ustawiasz długość boku x. Jak jest największa możliwa długość boku x? Wyjaśnij dlaczego nie możesz ustawić innych długości x?

- Oznaczyłeś przez y- długość podstawy. Jak y zależy od x? Obserwuj zmieniające się dane w aplecie. Zapisz zależność $y = \cdots$

- Zapisz wzór funkcji opisującej sumę pól kwadratów w zależności od długości boków x i y

- Zapisz ten sam wzór, tak aby była tylko jedna niewiadoma x

- Jaka jest dziedzina tej funkcji?

- W drugim widoku możesz obserwować jak zmiana długości x wpływa na kształt wykresu. W którym położeniu suwaka (przy jakiej długości x) pole jest najmniejsze?

- Sprawdź swoje obserwacje wykorzystując odpowiednie wzory na współrzędne wierzchołka paraboli.

- Oblicz wymiary trójkąta, dla których suma pól kwadratów jest największa .

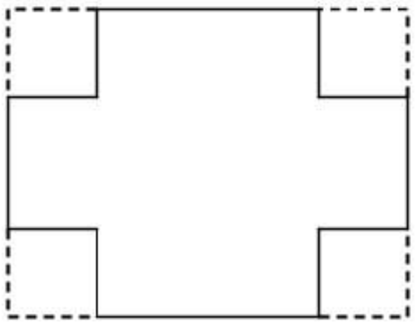
- Oblicz tą największą sumę pól.

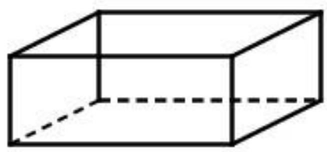
- Zaznacz w aplecie pole wyboru Rozwiązanie i sprawdź swoje rozwiązanie.

Temat: Zadania optymalizacyjne- wyznaczanie wartości największej lub najmniejszej funkcji.

Zadanie 1

Z prostokątnego arkusza tektury o wymiarach 30cm x40cm wycięto w rogach kwadraty o boku x długości x cm. Po zagięciu powstałych brzegów powstało prostopadłościenne otwarte pudełko.

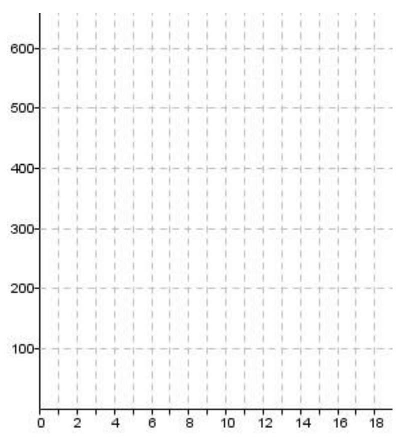




- Oznacz na rysunku długość boku wyciętego kwadratu literą x. Jak długości boków podstawy prostopadłościanu zależą od x? Zaznacz te długości na jednym i drugim rysunku (zacznij od siatki).
- Jakie wartości może przyjmować x, żeby można było zbudować pudełko?

- Wyznacz wzór funkcji opisującej pole powierzchni bocznej pudełka w zależności od długości x boku wyciętego kwadratu; podaj dziedzinę tej funkcji.

- Sporządź wykres tej funkcji w wyznaczonej dziedzinie



Oblicz, dla jakiej długości x pole powierzchni bocznej pudełka jest największe.

- Wyznacz to największe pole powierzchni bocznej.

Zadanie 2 (pytanie kluczowe)

Sklep z butami sprzedaje dziennie 16 par obuwia. Zysk ze sprzedaży jednej pary wynosi 40zł. Właściciel sklepu zauważył, że obniżenie ceny o każde 5zł powoduje wzrost sprzedaży o 4 pary dziennie. O ile powinien obniżyć cenę, aby osiągnął największy zysk?

- Wypełnij tabelkę

Liczba sprzedanych par obuwia	16	20	24	28
Zysk z jednej pary	40	35	30	25
Zysk ze sprzedaży	640			

- Jeśli właściciel sklepu dokonał x razy obniżki ceny o 5zł, to liczba sprzedanych par wzrosła o ……….. Wówczas zysk wyniósł Z(x)=(   )(   )
- Ile najwięcej takich obniżek można przeprowadzić?

- Wyznacz liczbę przeprowadzonych obniżek x, tak aby właściciel osiągnął największy zysk.