Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 14

Funkcje inne:

1. Wielkości odwrotnie proporcjonalne
2. Wykres i własności funkcji $\boldsymbol{y = \frac{a}{x},\ a \neq 0}$
3. Przesuwanie hiperboli.
4. Zastosowanie wykresów funkcji y=a/x do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

Opracowanie L6

Temat: Wielkości odwrotnie proporcjonalne.

Ćwiczenie 1.

Autobus przejechał pewną drogę w czasie 3 godzin, jadąc ze średnią prędkością 40km/h. Jak szybko musiałby jechać, żeby tę samą drogę przejechać w czasie 1 godziny i 30 minut?

Wykonaj potrzebne obliczenia.

Z gimnazjum pewnie pamiętasz, że zależność taką, jaka występuje pomiędzy prędkością i czasem przy stałej drodze nazywamy proporcjonalnością odwrotną. Mówimy zatem, że **dwie niezerowe wielkości x i y są odwrotnie proporcjonalne jeśli ich iloczyn jest stały: xy=a. Wielkość a nazywamy współczynnikiem proporcjonalności.**

Przykłady wielkości odwrotnie proporcjonalnych:

Prędkość [km/h]	120	80	60	50	45	40	30	25
Czas [h]	1	1,5	2	2,4	$2\frac{2}{3}$	3	4	4,8

W każdym przypadku samochód przejechał drogę 120 km. Współczynnik proporcjonalności wynosi 120 km.

Długość prostokąta	5cm	6dm	12cm	1,5dm	30cm	40cm	50dm	6dm
Szerokość prostokąta	6dm	0,05m	25cm	2dm	0,1m	7,5cm	0,6cm	50mm

Pole tego prostokąta wynosi 300 cm^2.

Zadanie 1. Czy wielkości, dane w tabeli są odwrotnie proporcjonalne? Odpowiedź uzasadnij. Jeśli tak, to podaj współczynnik proporcjonalności.

x	0.5	1	2	$\sqrt[3]{4}$	2.5
y	16	8	4	$4\sqrt[3]{2}$	3.2

x	1	2	3	4	6
y	12	6	2	3	2

Zadanie 2. Wyznacz a, b, c, d tak, żeby tabelka zawierała wielkości odwrotnie proporcjonalne.

x	45	b	60	2,5	d -5
y	a	3,6	3	c+3	90

Zadanie 3. Rozstrzygnij, czy poniższe wielkości wiąże proporcjonalność odwrotna.

	T/N
Im tańsze są ciastka, tym więcej możesz ich kupić za kieszonkowe.	
Im szybciej pijesz, tym mniej coli zostaje w butelce.	
Im bardziej odkręcisz kran, tym szybciej napełnisz wannę.	
Im więcej gości przyjdzie na przyjęcie urodzinowe, tym mniejszy kawałek tortu każdy dostanie (dzielimy cały tort po równo).	
Im dłuższe będą wakacje, tym krótszy będzie rok szkolny.	

Zadanie 4. Tona lodu ma objętość $1{,}09m^3$. Jaka jest gęstość tego lodu? Jaką objętość będzie miał wrzątek, który powstanie z tego lodu? Gęstość wody w temperaturze 100° wynosi $968{,}4\ kg/m^3$.

Temat: Wykres i własności funkcji $y = \frac{a}{x}$, $a \neq 0$.

Jeśli z zależności xy=a wyznaczymy y, to otrzymamy zależność $y = \frac{a}{x}$.

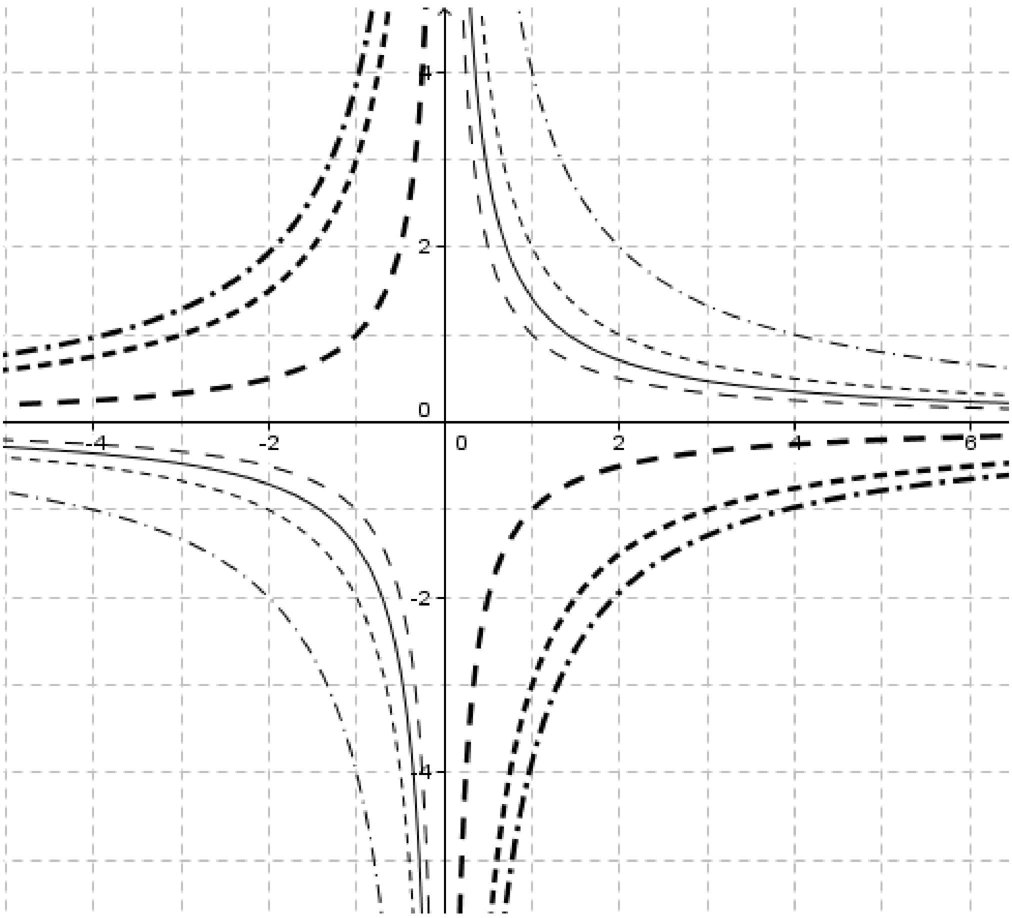
- Otwórz plik funkcje_inne01. Ustaw wartość suwaka a na 1. Wyświetl tabelkę częściową dla funkcji $y = \frac{1}{x}$. W pierwszym wierszu znajdują się wybrane argumenty, w drugim – obliczone dla nich wartości. Przeanalizuj ją uważnie. Czy wiesz, dlaczego nie znalazł się w niej argument x=0? Czy to przypadek, czy celowe działanie? Czy dla innych wartości współczynnika a zero mogłoby się tam znaleźć?
- Zaznacz opcję „pokaż punkty z tabelki". W układzie współrzędnych pojawią się punkty. Na ich podstawie można już określić przybliżony kształt wykresu. Żeby zobaczyć wykres, kliknij „pokaż wykres". **Taki kształt nazywamy hiperbolą, a każdą z jej dwóch części – gałęzią.**
- Możesz już wyłączyć opcję „pokaż punkty z tabelki". Przesuwaj suwakiem, zmieniając wartości a – poruszaj się po części suwaka z wartościami dodatnimi. Zaobserwuj, jak zmienia się wykres. Zwróć też uwagę na szczególną rolę osi układu współrzędnych. **Takie proste nazywają się asymptotami wykresu funkcji.** Uzupełnij część tabeli.
- Powtórz czynność z poprzedniego punktu dla a<0. Uzupełnij drugą część tabeli.

$y = \frac{a}{x}$	a>0	a<0
Dziedzina funkcji		
Zbiór wartości funkcji		
Ćwiartki, w których znajduje się wykres		
Monotoniczność funkcji:		
Argumenty, dla których funkcja rośnie		
Argumenty, dla których funkcja maleje		
Asymptoty wykresu funkcji:		
Pozioma – prosta o		

równaniu		
Pionowa – prosta o równaniu		

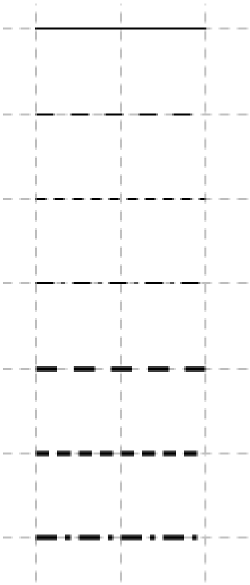
- Które cechy są wspólne, a które nie?
- Czy można powiedzieć, że funkcja jest rosnąca lub malejąca?
- Co dzieje się, gdy a=0?
- Zapisz w zeszycie wnioski.

Zadanie 1. Rysunek przedstawia różne hiperbole. Dopasuj je do wzorów, wpisując właściwy wzór obok linii, którą narysowano hiperbolę.



$y = \frac{1}{x}$ $y = -\frac{1}{x}$ $y = \frac{4}{x}$ $y = -\frac{\sqrt{15}}{x}$

$y = \frac{2}{x}$ $y = -\frac{3}{x}$ $y = \frac{\sqrt{2}}{x}$



Zadanie 2. Zwróć uwagę na krzywe $y = \frac{1}{x}$ oraz $y = -\frac{1}{x}$ (z poprzedniego zadania). W jaki sposób są położone względem siebie?

Do pozostałych wzorów dopisz takie, by ich wykresy też były symetryczne względem początku układu współrzędnych.

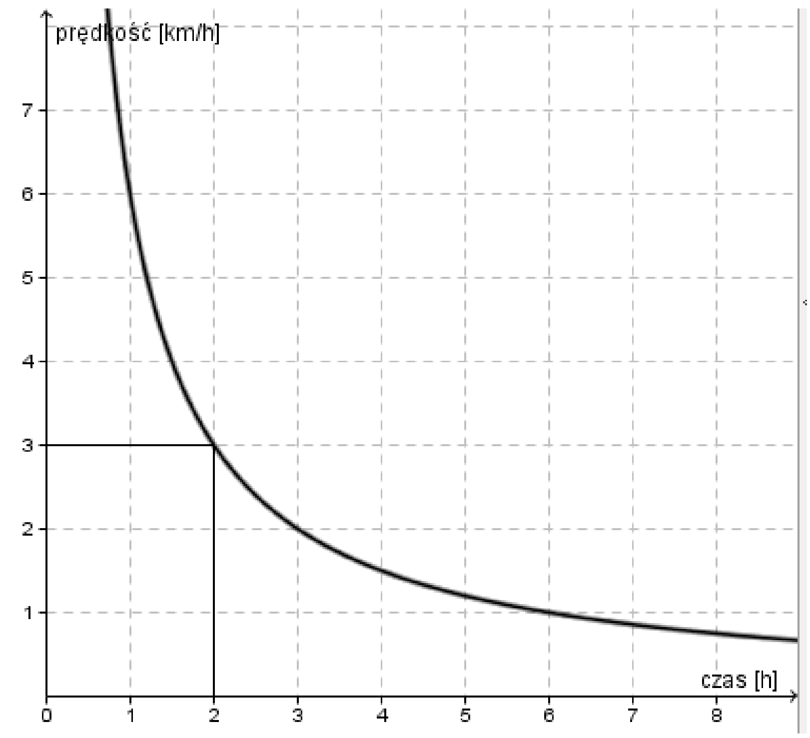
Zadanie 3. Napisz równanie hiperboli $y = \frac{a}{x}$ wiedząc, ze należy do niej punkt:

$A(2; 2)$, $B(-\frac{1}{3}; 12)$, $C(-4; -1{,}5)$, $D(\sqrt{5}; -2\sqrt{5})$.

Naszkicuj dwie z tych hiperbol.

- W pliku „funkcje_inne01” zaznacz opcję „pokaż prostokąt”.
  Przesuwaj punkt wzdłuż krzywej. Zwróć uwagę na pole prostokąta (liczba, którą widzisz wewnątrz prostokąta).
  Dlaczego dla ustalonej wartości współczynnika a pole nie ulega zmianie? Jak zmieni się pole, jeśli zmienisz a?
- Powyższa własność jest wykorzystywana do interpretowania zjawisk z życia codziennego, które są odwrotnie proporcjonalne (prędkość i czas przy ustalonej drodze – S=Vt, gęstość i objętość przy ustalonej masie – m=dV, masa i przyspieszenie przy ustalonej sile – F=ma, natężenie i opór przy ustalonym napięciu – U=IR, itp.).

Zadanie 4. Bartek jest zapalonym koszykarzem. Codziennie pokonuje drogę z domu na halę sportową. Wykres przedstawia zależność pomiędzy prędkością i czasem podczas przemieszczania się Bartka na trening (zwróć uwagę na dziedzinę tej funkcji).

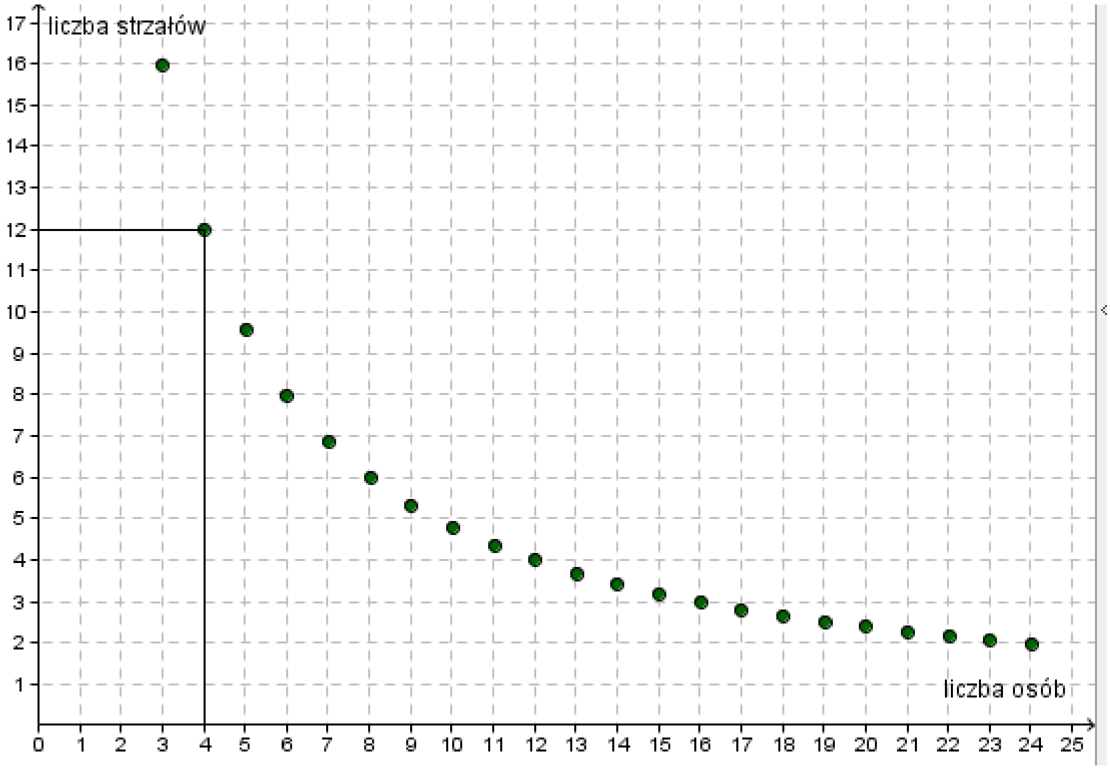


Na podstawie tego wykresu odpowiedz na pytania:

1. Jak daleko jest z domu na halę?
2. Jak szybko musi iść Bartek, jeśli do treningu ma 1,5 godziny? A jeśli zostało pół godziny?
3. Ile czasu zajmie mu droga ze średnią prędkością $3\frac{km}{h}$? A jeśli będzie jechał rowerem 5 razy szybciej?

Zadanie 5. Drużyna strzelecka wzięła udział w zawodach strzelania do rzutków. Każdy zawodnik strzelał tyle samo razy i każda drużyna ma do dyspozycji tyle samo strzałów. Ile strzałów mógł oddać każdy z zawodników, jeśli drużyna może liczyć nie mniej niż 5 i nie więcej niż 12 osób?

Jak poprawić poniższy wykres, żeby przedstawiał zależność liczby strzałów, oddanych przez jednego zawodnika od liczby zawodników?



Organizatorzy ustalają miejsce drużyny na podstawie ilości celnych strzałów. Jeden z zawodników strzela o wiele lepiej, niż reszta. Jaki skład powinien wystawić trener?

Temat: Przesuwanie hiperboli.

Z przesuwaniem wykresów funkcji spotkałaś/spotkałeś się już wcześniej. Przypomnisz sobie dzisiaj, w jaki sposób przesuwamy hiperbole. Otwórz aplet funkcje_inne02. Suwakami ustawiasz współczynnik proporcjonalności a, przesunięcie wzdłuż osi OX – p oraz wzdłuż osi OY – q.

- Ustaw suwak a na dowolnie wybraną przez siebie wartość. Suwak p ustaw na 1. Wciśnij przycisk „przesuń" i obserwuj animację. Zwróć uwagę, jak przesuwają się poszczególne punkty oraz jakie są równania asymptot.
- Możesz ukryć punkty na wykresie. Zmieniaj wartość p i patrz, jaki jest wzór funkcji. Zwróć uwagę, czym różni się dla dodatnich i dla ujemnych p.
- Wyczyść ekran (przycisk „wyczyść"). Postępuj analogicznie z suwakiem q.
- Zmieniaj obie wartości (p oraz q) jednocześnie i obserwuj wykres, wzór i asymptoty.
- Sformułuj wniosek, jak zmieni się wzór funkcji $y = \frac{a}{x}$ po przesunięciu o wartości p oraz q. Zapisz ten wniosek w zeszycie.
- Uzupełnij tabelę.

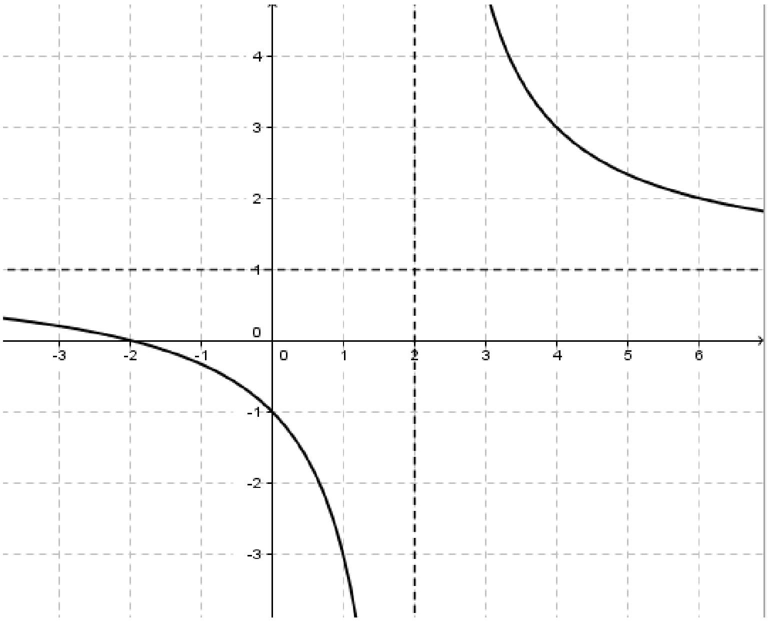
  Jeśli masz wątpliwości, korzystaj z programu funkcje_inne02. Najpierw wypełnij tabelę dla ustalonych p i q. Potem zmień p i q i od nowa wypełnij. Spróbuj uogólnić swoje rozumowanie.

$y = \frac{a}{x-p} + q$	a>0	a<0
Dziedzina funkcji		
Zbiór wartości funkcji		
Miejsce przecięcia z osią OY		
Monotoniczność funkcji:		
Argumenty, dla których funkcja rośnie		
Argumenty, dla których funkcja maleje		
Asymptoty wykresu funkcji:		
Pozioma – prosta o równaniu		

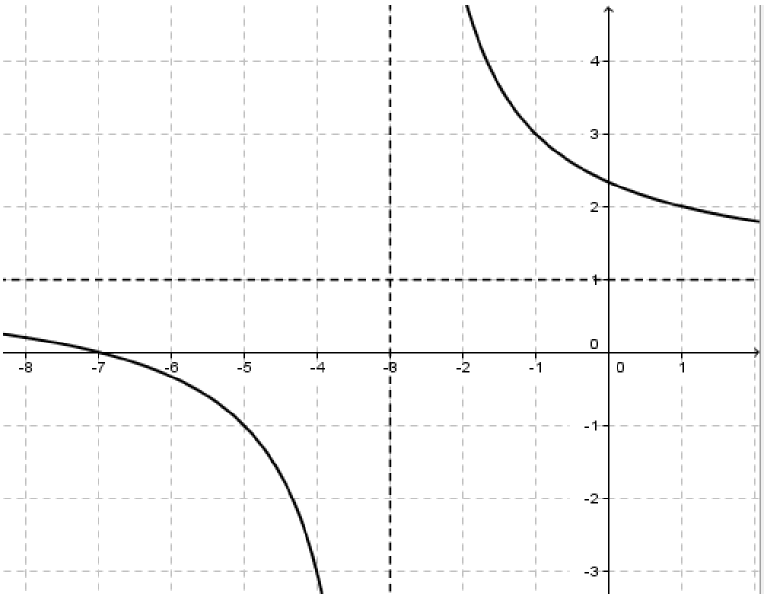
Pionowa – prosta o równaniu		

Zadanie 1. Wykres każdej z funkcji powstał przez przesunięcie hiperboli $y = \frac{4}{x}$ lub hiperboli $y = \frac{-4}{x}$. Napisz wzór funkcji po przesunięciu. Określ dziedzinę i zbiór wartości każdej z funkcji.

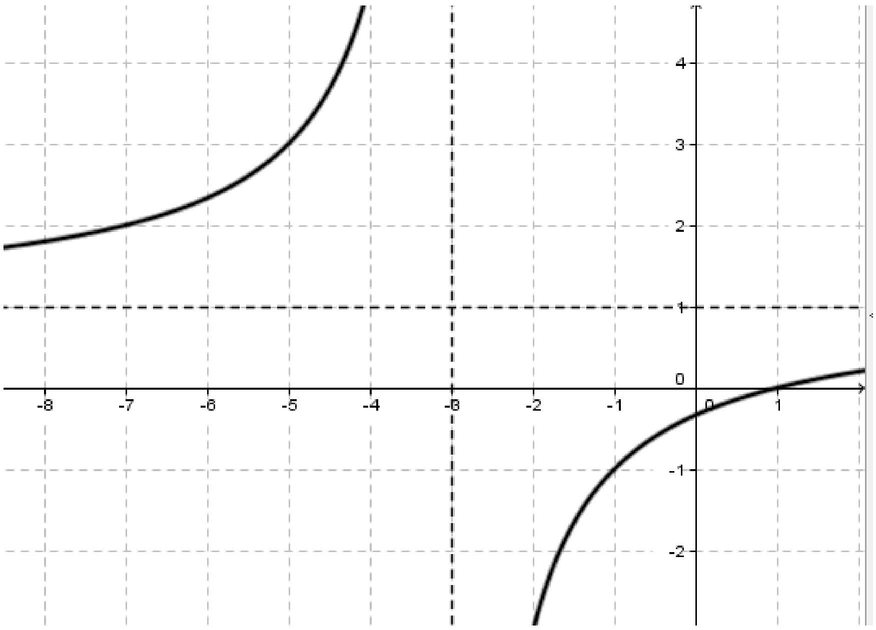
a)



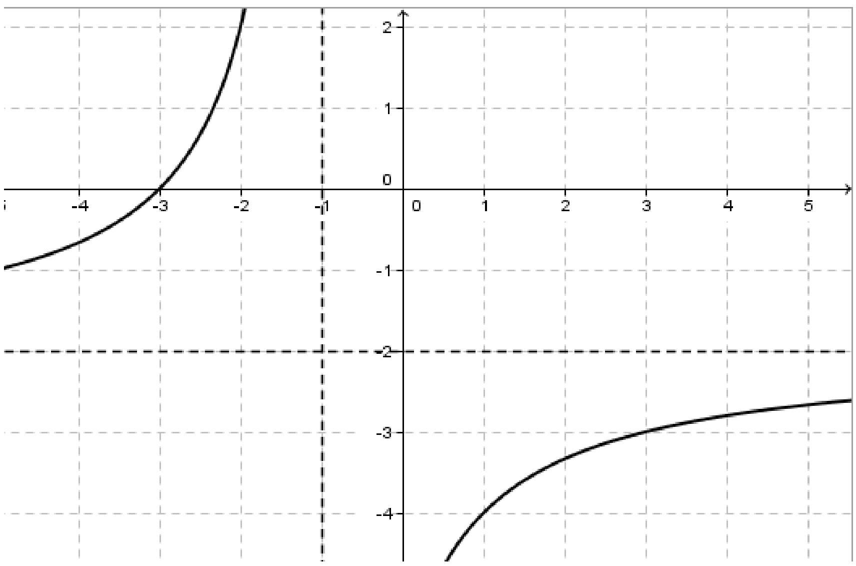
b)



c)



d)



Zadanie 2. Naszkicuj wykres funkcji, przekształcając odpowiednią hiperbolę. Napisz wzór funkcji, którą przekształcasz i określ przesunięcia. Wyniki możesz sprawdzić w aplecie.

$y = \frac{1}{x+2}$ $\qquad$ $y = \frac{1}{x} + 2$ $\qquad$ $y = \frac{-4}{x-1}$ $\qquad$ $y = \frac{-2}{x+1} - 2$

Zadanie 3.

a) Dziedziną funkcji $y = \frac{a}{x-p} + q$ jest zbiór R-{3}, zbiorem wartości zbiór R-{-1} Do wykresu funkcji należy punkt (4, -3). Wyznacz wzór tej funkcji.

b) Asymptoty hiperboli przecinają się w punkcie (-1,4) a jej miejscem zerowym jest liczba 2. Wyznacz równanie tej hiperboli i oblicz, w jakim punkcie przecina ona oś OY.

Temat: Zastosowanie wykresów funkcji y=a/x do interpretacji zagadnień związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi.

- Otwórz aplet funkcje_inne03. Zawiera on interpretację czterech zadań, związanych z wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi. Suwakiem n ustawiasz numer zadania.
- Ustaw n=1.

  U góry widzisz treść zadania 1. W dolnej części wyświetlona jest gałąź hiperboli, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych (dlaczego naturalnych a nie rzeczywistych?).

  Widać też dwa prostokąty. Pierwszy (z wierzchołkiem w A) ilustruje sytuację ucznia. Na osi OX widzisz, ile stron dziennie czyta. Na osi OY widać, ile dni trwa przeczytanie książki. Drugi prostokąt pokazuje sytuację po zwiększeniu szybkości czytania.

  Tekst w środkowej części ekranu pokazuje współrzędne tych wierzchołków prostokąta, które leżą na hiperboli.

  Przesuwaj punkt A wzdłuż hiperboli i zaobserwuj, jak zmienia się liczba dni czytania w zależności od szybkości czytania. Aplet jest zrobiony w ten sposób, że odcięte obu punktów różnią się zawsze o 8 (…gdyby czytał 8 stron dziennie więcej…).

  Ustaw punkty tak, żeby rzędne różniły się o 3 (…czytałby 3 dni krócej…). Jeśli uda ci się uzyskać wystarczającą dokładność, będziesz znać odpowiedź na pytanie. Zauważ, że to nie jest rozwiązanie, a jedynie ilustracja problemu.

  Żeby rozwiązać zadanie, należy ułożyć i rozwiązać układ równań. Zastanów się, jaka zależność wiąże współrzędne każdego z tych punktów. Jeśli nie wiesz, skorzystaj ze wskazówki.

  Jeśli nadal masz wątpliwości, skorzystaj z rozwiązania zadania 4 na lekcji „Wykres i własności funkcji $\boldsymbol{y = \frac{a}{x},\ a \neq 0}$.**”**
- Ustaw n=2.

  Prostokąty obrazują drogę przebytą przez każdy z pociągów. Dlaczego pole prostokąta wynosi 270?

  Przesuwaj niebieski punkt na hiperboli, aż współrzędne obu punktów spełnią warunki zadania. Prędkości zawsze różnią się o 9 (…jechał z prędkością o 9km/h mniejszą). Czasy powinny różnić się o 1 (…wyjechał o godzinę wcześniej…). Postaw hipotezę, dotyczącą szukanych prędkości pociągów.

Zweryfikuj ją odpowiednimi obliczeniami.

- Ustaw n=3.

  Tym razem widzisz trzy prostokąty, opisane przy wierzchołkach. Ilość wody, dostarczana w ciągu godziny przez pierwsza rurę jest zawsze o 5 większa. Ustaw punkty w ten sposób, żeby czas napełniania zbiornika przez drugą rurę był o 16h większy (…Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 h krótszy…). Odczytaj (oczywiście w przybliżeniu) rzędną wierzchołka czerwonego prostokąta – jest to czas napełniania zbiornika przez obie rury.

  Zweryfikuj swoje przypuszczenia – poznacz wtedy wartości dokładne. Oczywiście możesz skorzystać ze wskazówki. Co oznacza pole każdego z prostokątów?

- Ustaw n=4.

  W tym przypadku widzisz dwie hiperbole. Dlaczego? Jaką drogę pokonał pierwszy, a jaką drugi rowerzysta? Wykonaj potrzebne obliczenia. Porównaj otrzymane wyniki z polami prostokątów.

  Przesuwaj niebieski punkt, porównując współrzędne obydwu punktów z danymi w treści zadania (…Rowerzysta jadący z miejscowości A do miejscowości B wyjeżdża o 1 godzinę wcześniej i jedzie ze średnią prędkością o 7 km/h większą od średniej prędkości drugiego rowerzysty…).

  Tak jak poprzednio ułóż układ równań i rozwiąż go, żeby potwierdzić swoje przypuszczenia.