Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 15

Funkcje inne:

5. Wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.
6. Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych.
7. Zastosowanie funkcji wykładniczej do opisu zjawisk fizycznych i chemicznych.
8. Zastosowanie funkcji wykładniczej do opisu innych zjawisk z życia codziennego.

Opracowanie L6

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

Temat: Wykresy funkcji wykładniczych dla różnych podstaw.

Funkcja wykładnicza to funkcja opisana wzorem $y = a^x$, gdzie a>0

Zbuduj tabelkę częściową dla funkcji $y=2^x$.

Otwórz aplet funkcje_inne04. Ekran podzielony jest na dwie części. Górna służy do wyświetlania tabelki częściowej dla funkcji. W dolnej widzisz pola wyboru „pokaż punkty z tabelki” oraz „pokaż wykres”. Z lewej strony umieszczone są trzy przyciski. „Przybliż widok” i „oddal widok” służą do obserwowania wykresu funkcji w okolicy osi OX. Przycisk „Wyczyść” powoduje wyświetlenie wykresu funkcji w taki sposób, jak na początku. Użyj go, jeśli chcesz szybko wrócić do początkowego wykresu. .

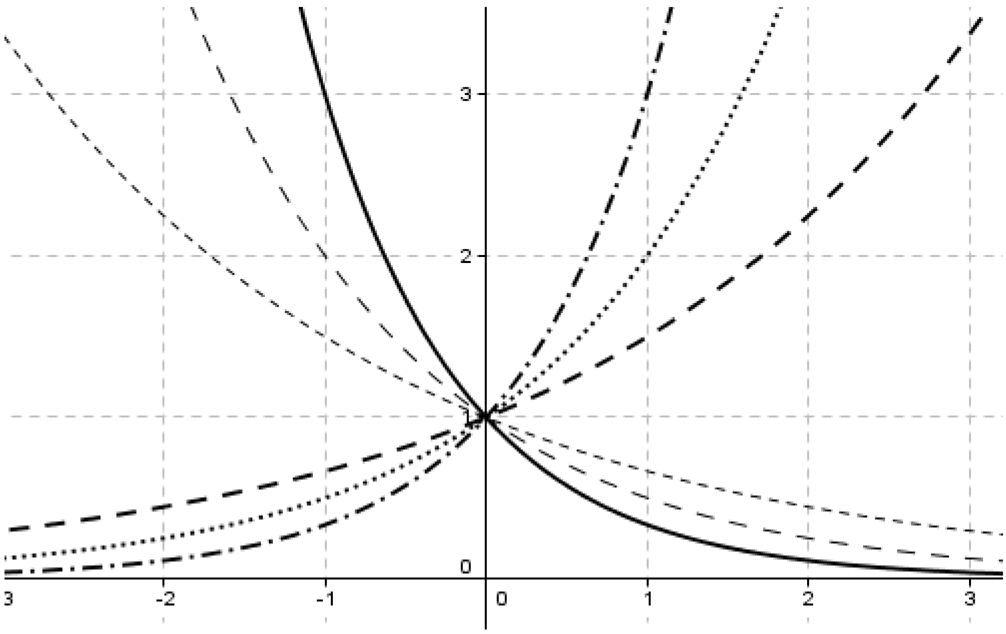
Ustaw wartość suwaka na 2. Zaznacz opcję „pokaż tabelkę częściową”. Sprawdź swoje obliczenia. Naszkicuj w zeszycie wykres funkcji $y=2^x$. Zaznacz opcje „pokaż punkty z tabelki” a następnie „pokaż wykres”. Sprawdź poprawność swojego wykresu. Zwróć uwagę na szczególną rolę osi OX. Możesz użyć przycisków „przybliż widok”, „oddal widok” i „wyczyść”.

Suwakiem zmieniaj wartość podstawy a. Obserwuj, jak zmieniają się własności funkcji w zależności od wartości podstawy. Swoje wnioski umieść w tabeli. Odpowiedz na pytanie, które własności są wspólne a które różne.

$y = a^x$	$a \in (0; 1)$	$a > 1$
Dziedzina funkcji		
Zbiór wartości funkcji		
Punkt przecięcia wykresu z osią OY		
Argumenty, dla których funkcja rośnie		
Argumenty, dla których funkcja maleje		
Asymptota wykresu funkcji – prosta o równaniu		

Zadanie 1. Dopasuj wykresy do wzorów funkcji.

Możliwe wzory to: $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 1.5^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Zadanie 2. W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji: $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. W jaki sposób są one położone względem siebie? Jak to uzasadnisz? Podaj kilka par funkcji mających tę samą własność.

Zadanie 3. Napisz wzór funkcji wykładniczej, jeśli do jej wykresu należy punkt:

a) (-1, 3) b) (4, 16) c) (6, 27)

Temat: Przekształcanie wykresów funkcji wykładniczych.

Część I – przesuwanie wykresów funkcji.

Otwórz aplet funkcje_inne05. Ekran podzielony jest na dwie części. Po lewej stronie widzisz wykres funkcji wykładniczej. Suwakiem a możesz regulować wartość podstawy. Po prawej stronie suwak p określa przesunięcie względem osi OX, suwak q – względem osi OY.

1. Ustaw wartość podstawy a=2. Ustaw wartość suwaka p np. na 1. Kliknij przycisk „Przesuń". Zaobserwuj, jak przesuwa się wykres funkcji oraz jak zmienia się wzór funkcji po przekształceniu (niebieski wzór na górze prawego okna). Wyczyść ekran (przycisk wyczyść). To samo zrób dla dowolnej ujemnej wartości p.
2. Powtórz te same czynności z suwakiem q.
3. Teraz ustaw p=1, q= -2. Jaki będzie wykres oraz wzór funkcji? A dla p= -2, q=3?

Zadanie1. Napisz wzór funkcji, której wykres otrzymasz, przesuwając wykres funkcji

$y = 3^x$:

a) o dwie jednostki w prawo

b) o jedną jednostkę w lewo

c) o jedną jednostkę w górę

d) o dwie jednostki w dół

e) o trzy jednostki w prawo i jedną w dół

f) o jedną jednostkę w lewo i dwie w górę.

Sprawdź poprawność swojej odpowiedzi w aplecie funkcje_inne05.

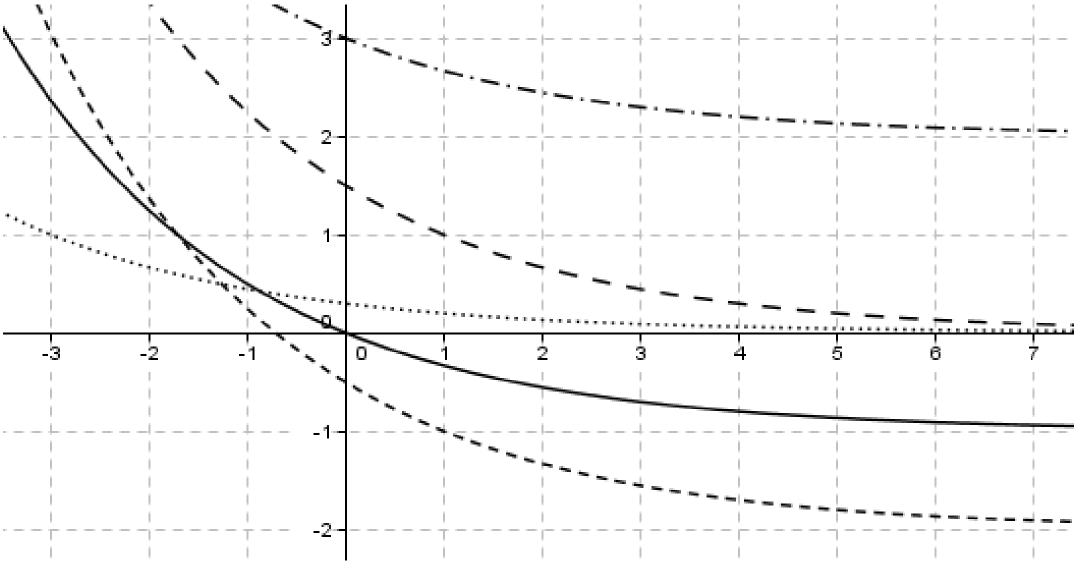
Zadanie 2. Określ, w jaki sposób należy przesunąć wykres funkcji $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, aby otrzymać wykres funkcji

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$, b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$, c) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$,

d) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$, e) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 3$, f) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2$,

g) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + \frac{1}{2}$, h) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + \frac{2}{3}$,

Zadanie 3. Wykresy funkcji powstały przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. Napisz wzory tych funkcji.



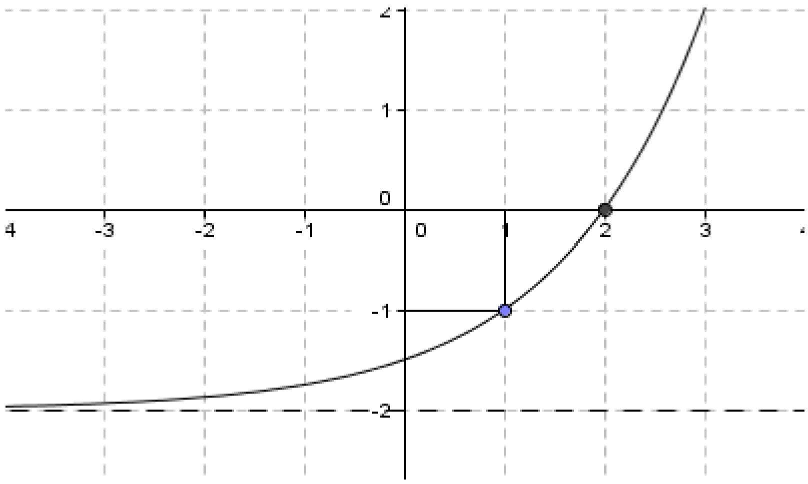
Jeśli masz kłopoty, zwróć uwagę, jak przesunął się punkt charakterystyczny dla każdej funkcji wykładniczej – punkt (0,1). Wyznacz też asymptotę. To ułatwi Ci określenie przekształcenia.

Zadanie 4. Określ własności funkcji

	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + \frac{1}{2}$	$y = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+2} - 1$	$y = \left(\frac{4}{3}\right)^{x-2} + 3$
Dziedzina				
Zbiór wartości				

Monotoniczność				
Równanie asymptoty				
Liczba miejsc zerowych				

Zadanie 5. Napisz wzór funkcji wykładniczej danej wykresem:



<u>Część II – przekształcanie wykresów funkcji przez symetrie względem osi układu współrzędnych.</u>

W aplecie funkcje_inne05 przekształć wykres dowolnej funkcji przez symetrię względem osi OX. Jaką funkcję otrzymasz?

Teraz tę samą funkcję przekształć przez symetrię względem osi OY. Jaki będzie wzór nowej funkcji?

Zwróć uwagę, że $3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Dlatego zanim naszkicujesz wykres, przekształć wzór funkcji tak, żeby było mniej pracy.

Zadanie 6. Uzupełnij tabelę:

Wzór funkcji	**Rodzaj przekształcenia**	**Wzór funkcji po przekształceniu.**
$y = 2^x$	Symetria względem osi OX	

	Symetria względem osi OX	$y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$
$y = \left(\frac{2}{35}\right)^x$		$y = \left(\frac{2}{35}\right)^{-x}$
$y = 3^x$		$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
$y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$	Symetria względem osi OY	

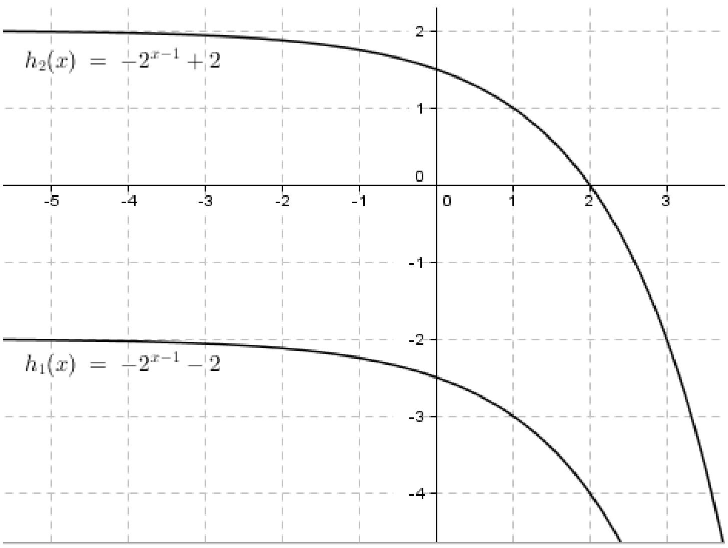
Dla chcących wiedzieć więcej

Dana jest funkcja $y = 2^x$. Przekształćmy ją przez symetrię względem osi układu współrzędnych i przesunięcia. W jaki sposób kolejność przekształceń wpływa na końcowy efekt? Czy ma znaczenie?

- Najpierw przesuńmy wykres o 1 jednostkę w prawo i 2 do góry. Otrzymamy funkcję g_1 o wzorze $y = 2^{x-1} + 2$. Następnie wykres funkcji g_1 przekształćmy przez symetrię względem osi OX. Otrzymamy funkcję h_1 o równaniu $h_1(x)=-g_1(x)$,

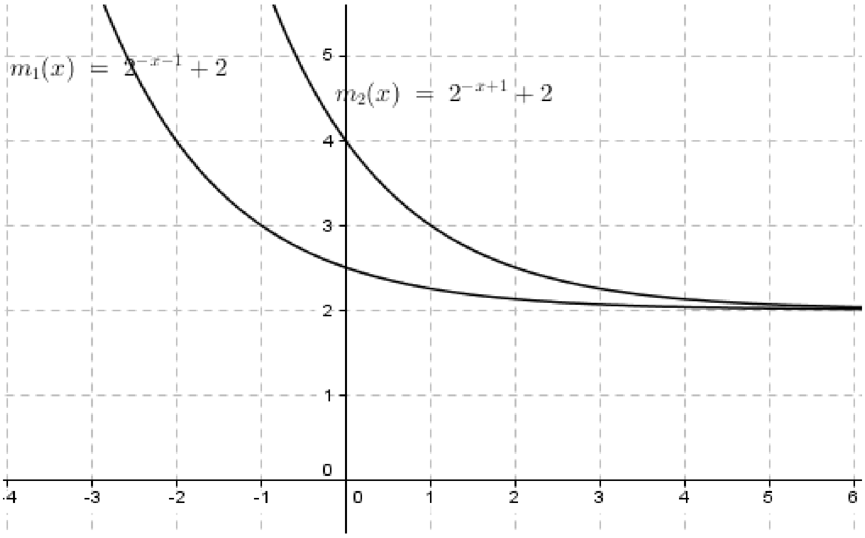
  czyli $y = -(2^{x-1} + 2) = -2^{x-1} - 2$.

- Najpierw przekształcimy wykres przez symetrię względem osi OX. Otrzymujemy funkcję g_2 o wzorze $y = -2^x$. Następnie funkcję g_2 przesuniemy o 1 jednostkę w prawo i 2 do góry. Otrzymamy funkcję h_2 o równaniu $h_2(x)=g_2(x-1)+2$,
  czyli $y = -2^{x-1} + 2$. Zauważ, że h_1 i h_2 są to inne funkcje.



Analogicznie przekształcamy wykres przez symetrię względem osi OY.

- Funkcję $y = 2^x$ przesuwamy o 1 jednostkę w prawo i 2 do góry. Otrzymamy funkcję g_1 o wzorze $y = 2^{x-1} + 2$. Teraz symetria względem osi OY. $m_1(x)=g_1(-x)$, czyli $y = 2^{-x-1} + 2$.
- Funkcję $y = 2^x$ przekształcamy przez symetrię względem osi OY. Otrzymamy funkcję g_2 o wzorze $y = 2^{-x}$. Teraz g_2 przesuwamy o 1 jednostkę w prawo i 2 do góry. Wtedy $m_2(x)=g_2(x-1)+2$, czyli $y = 2^{-(x-1)} + 2$. Oczywiście m_1 i m_2 to również inne funkcje.



Temat: Zastosowanie funkcji wykładniczej do opisu zjawisk fizycznych i chemicznych.

Jeżeli jakieś zjawisko można opisać za pomocą wzoru $a \cdot b^{kt} + c$, gdzie a, b, k, c – liczby rzeczywiste, a t – czas, to mówimy, że zachodzi ono wykładniczo. W ten sposób zmieniają się różne wielkości, zarówno w przyrodzie jak i innych dziedzinach życia.

Rozpad promieniotwórczy

Promieniotwórcze izotopy niektórych pierwiastków ulegają rozpadowi. Naukowcy zdefiniowali pojęcie: czas połowicznego rozpadu. Jest to czas, po upływie którego rozpadnie się dokładnie połowa początkowej ilości substancji. Jest charakterystyczny dla danego izotopu. Masę m, która pozostanie po czasie t określa zależność

$$m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$$

m_0 – masa początkowa, T – czas (okres) połowicznego rozpadu, wyrażony w takiej samej jednostce jak t.

Przykład 1. Okres połowicznego rozpadu izotopu ^{123}I (jod) wynosi 8 dni. Ile mg tego izotopu pozostanie po 24 dniach z próbki jodu o masie 600mg?

$$m = 600\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{8}} = 600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{600}{8} = 75\,[\mathrm{mg}]$$

Przykład 2. W próbce promieniotwórczego izotopu aktynu o masie atomowej ^{227}Ac znajduje sie n atomów. Okres połowicznego rozpadu wynosi 22 lata. Oblicz czas, w którym rozpadnie się $\frac{7}{8}n$ atomów tego izotopu.

Jeśli rozpadnie się $\frac{7}{8}n$ liczby atomów, to pozostanie ich $\frac{1}{8}n$. Zgodnie z zależnością

$\frac{1}{8}n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{22}}$. Po podzieleniu obu stron równania przez n (możemy to zrobić, bo n $\neq 0$) otrzymujemy $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{22}}$. Ponieważ $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$, to możemy zapisać $\frac{t}{22} = 3$, skąd $t = 66$. Zatem $\frac{7}{8}n$ atomów rozpadnie się po 66 latach.

Zjawisko rozpadu promieniotwórczego wykorzystywane jest też do określania wieku przedmiotów (tzw. datowanie radiowęglowe). Za opracowanie tej metody amerykański fizyk i chemik Willard Libby otrzymał w 1960 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie chemii. W 1946 wykazał, że pewna część atomów azotu zmienia się pod wpływem promieniowania kosmicznego w promieniotwórczy węgiel, czyli w izotop węgla ^{14}C. Ten przechodzi w dwutlenek węgla, przyswajany przez rośliny i obecny w całej przyrodzie. Wobec tego wszystkie organizmy żywe pochłaniają naturalny ^{14}C wraz z pożywieniem. Libby wysunął hipotezę, że zawartość ^{14}C w organizmach żywych nie zmienia się tak długo, jak długo przyswajają one składniki odżywcze, czyli w ciągu ich życia. W żywych organizmach na 1 atom ^{14}C przypada ok. bilion (10^{12}) atomów ^{12}C. Po obumarciu organizmu izotop ^{14}C, znajdujący się w roślinach i zwierzętach, rozpada się, a jego zawartość z czasem się zmniejsza. Czas połowicznego rozpadu wynosi około 5740 lat. Tymczasem zawartość izotopu ^{12}C nie ulega zmianie. Dlatego, znając stosunek masowy tych izotopów możemy określić wiek próbki, szczególnie organicznej. Zjawisko to znalazło szerokie zastosowanie w archeologii, historii sztuki czy kryminalistyce. Do określania wieku młodszych próbek używa się innych pierwiastków promieniotwórczych o krótszym czasie połowicznego rozpadu i znanej proporcji izotopu radioaktywnego do nieradioaktywnego.

Przykład 3. Ustalono, że w próbce pozostało 90% izotopu ^{14}C. Oszacuj, jak stara jest ta próbka.

$0{,}9m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5740}}$. Stąd $0{,}9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5740}}$.

Na podstawie definicji logarytmu $\frac{t}{5740} = log_{\frac{1}{2}}0{,}9$.

Z własności logarytmu: $t = 5740 \cdot log_{\frac{1}{2}}0{,}9 = 5740 \cdot \frac{log0{,}9}{log0{,}5} = 5740 \cdot \frac{-0{,}045757}{-0{,}30103} \approx 872{,}5$

Zatem próbka ma około 870 lat.

Zadanie 1. W pewnym kościele rzymskim odkryto bardzo stare freski. O ich autorstwo podejrzewano genialnego przedstawiciela Renesansu – Michała Anioła (1475 – 1564). Rzeczoznawcy, po zbadaniu dzieła określili stosunek izotopu ^{14}C na 96% wartości początkowej. Czy Michał Anioł może być twórcą tego dzieła?

Zadanie 2. Jakiego stosunku procentowego ^{14}C należy się spodziewać w próbce, która ma 1000 lat?

<u>Stygnięcie ciał.</u>

Poznałaś/ poznałeś już wzór, określający zależność temperatury ciała od czasu podczas stygnięcia

$T = T_0 + (T_p - T_0)e^{-kt}$,

gdzie T_0 – temperatura otoczenia, T_p – temperatura początkowa cieczy, e – stała matematyczna (około 2,72), k – stała, charakterystyczna dla danej cieczy, t – czas stygnięcia.

Przykład 4. Zielona herbata jest bardzo zdrowym napojem. Ma w składzie wiele witamin, np. P, K, C, E oraz witaminy z grupy B. Istnieją badania potwierdzające, że zwiększa szybkość spalania tkanki tłuszczowej w organizmie, obniża poziom cholesterolu oraz ciśnienie krwi, chroni przed zawałem serca, oczyszcza organizm z toksyn oraz działa przeciwbakteryjnie i przeciwwirusowo. Ponadto zapobiega chorobom serca, poprawia koncentrację i pracę mózgu. Dlatego warto ją pić regularnie. Aby wydobyć jej walory smakowe i zdrowotne należy parzyć ją w temperaturze 80 – 90 ^{o}C przez 2 – 4 minut (zależnie od gatunku).

Do zaparzenia Twojej herbaty potrzebna jest woda o temperaturze 82^{o}C. Ile minut od zagotowania musi upłynąć, żeby można było ją wlać do czajniczka? Temperatura otoczenia wynosi 20 ^{o}C . Przyjmij k=0,13. Na pewno pamiętasz, że w naszych warunkach woda wrze w temperaturze 100 ^{o}C.

$82 = 20 + (100 - 20)e^{-0,13t}$. Stąd po przekształceniach (wykonaj je samodzielnie) otrzymujemy $e^{-0,13t} = \frac{62}{80} = 0,775$

$-0,13t = ln0,775 \approx -0,255$

$t \approx 1,96.$

Zatem należy odczekać prawie dwie minuty.

Zadanie 3. Pieczeń piecze się w piekarniku w temperaturze 200 ^{o}C. Do spożycia nadaje się, gdy ma 50^{o}C. O ile szybciej będziesz mógł ją zjeść w zimie (temp. -8 ^{o}C) niż w lecie (temp. 28 ^{o}C), jeśli studzisz ją na balkonie? Przyjmij k=0,1.

Temat: Zastosowanie funkcji wykładniczej do opisu innych zjawisk z życia codziennego.

Jeśli pewna wielkość zwiększa się (lub zmniejsza) o tyle samo procent w jednostce czasu, to jej liczebność ilustruje model wykładniczy.

Np. jeśli notujemy coroczny przyrost wielkości X o 10%, po roku otrzymamy X+10%X=1,1X.

Po następnym roku (czyli po dwóch latach od początku) 1,1X+10%1,1X=1,1X+0,11X=1,21X=$(1,1)^2$X.

Po kolejnym roku 1,21X+10%1,21X=1,21X+0,121X=1,331X=$(1,1)^3$X.

Rozumując dalej w ten sposób, po n latach otrzymamy $(1,1)^n$X.

Liczebność populacji i demografia

Przy założeniu stałego przyrostu naturalnego model wykładniczy dosyć dobrze opisuje zjawiska demograficzne. Może on służyć do szacowania wielkości populacji po upływie określonego czasu.

Przykład1. Pewna kolonia bakterii liczyła początkowo 1000 osobników i co godzinę jej liczebność rosła o 10%. Ile bakterii kolonia ta liczyła po upływie doby?

$$x = 1000 \cdot 1{,}1^{24} \approx 9849{,}73$$

Zatem po 24 godzinach populacja zwiększy się prawie 10 razy! To uzasadnia regularne używanie środków odkażających.

Przykład 2. Bakterie *Escherichia coli* żyją w jelitach człowieka, pełniąc tam bardzo pożyteczną rolę. Jeśli jednak dostaną się do innych układów, mogą być źródłem wielu groźnych zakażeń (począwszy od „zwykłego" zatrucia pokarmowego, skończywszy na sepsie). Pałeczki bakterii mnożą się co 20 – 30 minut. Ile razy wzrośnie populacja tych bakterii po 12 godzinach? A ile razy po upływie doby?

Przyjmijmy optymistyczną wersję, że liczba bakterii podwaja się co pół godziny. Zatem w ciągu 12 godzin nastąpią 24 podziały. $x = x_0 \cdot 2^{24} = 16777216x_0$. W wersji pesymistycznej następują 3 podziały na godzinę. $x = x_0 \cdot 2^{36} = 68719476736x_0$. Liczba bakterii może wzrosnąć aż 68 miliardów razy! Zwróć uwagę na fakt, że 10 minut różnicy w czasie rozmnażania powoduje tak ogromną różnicę w wielkości populacji. Wykonaj odpowiednie obliczenia, aby odpowiedzieć na drugie pytanie z przykładu.

Zadanie 1. Po jakim czasie populacja bakterii *Escherichia coli* wzrośnie stukrotnie? Załóż, że bakterie te mnożą się co pół godziny.

Zadanie 2. W tabeli przedstawiono liczbę ludności Polski w kolejnych latach (źródło – www.stat.gov.pl). Oszacuj, ile milionów ludzi powinien liczyć nasz kraj, gdyby przyrost naturalny w dalszych latach był taki sam.

Rok	Liczba ludności [mln]
1970	29795
1980	32658
1990	35735

<u>Procent składany</u>

Jeżeli kapitał K_0 umieścimy na lokacie na p% w skali roku, to po n okresach kapitalizacji otrzymamy kwotę $K = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$.

Przykład 3. Założmy, że masz 1000 zł. Umieszczasz je w banku na rok. Bank oferuje oprocentowanie 6% (w skali roku). Ile będzie po tym czasie na koncie, jeśli odsetki kapitalizowane są

a) co roku b) co pół roku c) co kwartał

Rozwiązanie umieścimy w tabeli, co ułatwi porównanie.

	Kapitalizacja co rok	Kapitalizacja co pół roku	Kapitalizacja co kwartał
K_0	1000	1000	1000
p	6	3 (połowa z 6)	1,5 (ćwiartka z 6)
n	1	2 (dwa półrocza)	4 (cztery kwartały)
K	$1000\left(1+\frac{6}{100}\right)^1=$ $1000\cdot 1{,}06=$ 1060	$1000\left(1+\frac{3}{100}\right)^2=$ $1000\cdot 1{,}03^2=1060{,}9$	$1000\left(1+\frac{1{,}5}{100}\right)^4=$ $1000\cdot 1{,}015^4=$ 1061,36

Zadanie 3. Pan Michał umieścił w banku pewną kwotę na dwuletnią lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Bank kapitalizuje odsetki co pół roku. Ile pieniędzy miał Pan Michał, jeśli po zakończeniu lokaty na koncie było 16623,48?