KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 16

Ciągi:

1. Ciągi liczbowe. Sposoby opisywania ciągów.
2. Własności ciągów liczbowych.
3. Ciąg arytmetyczny.
4. Własności ciągu arytmetycznego.
5. Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego.
6. Ciąg arytmetyczny - rozwiązywanie zadań.
7. Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego do rozwiązywania zadań tekstowych.

Opracowanie L6

UNIWERSYTET SWPS

Uniwersytet SWPS
ul. Chodakowska 19/31, 03-815 Warszawa
tel. 22 517 96 00, faks 22 517 96 25
www.swps.pl

Temat: Ciągi liczbowe. Sposoby opisywania ciągów.

Instrukcja obsługi apletu ciagi01.

Ekran podzielony jest na trzy części. Środkowa zawiera treść zadania. Wzór ciągu należy wpisać w ramkę. Znak potęgowania to ^, znak mnożenia * możesz zastąpić spacją. Pamiętaj, że wzór $\frac{2n+1}{3n-2}$ musi mieć postać $(2n+1)/(3n-2)$ (zwróć uwagę na nawiasy). Wartość k możesz regulować suwakiem .

Po lewej stronie narysowany jest wykres ciągu. Przyciskami możesz przybliżać i oddalać widok. Pozwala to na dokładniejsze zaobserwowanie interesujących cię zależności. Możesz też przesuwać układ współrzędnych, chwytając myszą za interesujący cię fragment (przy wybranej ikonie „przemieszczaj obszar roboczy”  .

Prawa część ekranu to fragment arkusza, zawierający obliczone wyrazy ciągu. Pierwsza kolumna to numer wyrazu (indeks), druga – wartość wyrazu.

Zadanie 1. Oblicz trzy początkowe wyrazy każdego z ciągów. Wynik obliczeń możesz sprawdzić w arkuszu (po wpisaniu wzoru ciągu). Zwróć uwagę na wykres ciągu – określ jego monotoniczność. Wyniki przedstaw w tabeli:

$a_n = 2n^2 - 1$
$a_1 =$
$a_2 =$
$a_3 =$
Monotoniczność:
$b_n = (n-12)(n+5)$
$b_1 =$
$b_2 =$

$b_3 =$
Monotoniczność:
$c_n = \frac{3n+12}{n}$
$c_1 =$
$c_2 =$
$c_3 =$
Monotoniczność:

Czy po obliczeniu trzech kolejnych wyrazów można wyciągnąć wniosek o monotoniczności ciągu? Zwróć uwagę na drugi ciąg.

Zadanie 2. Na podstawie definicji ciągu rosnącego (malejącego) wykaż, który ciąg z zadnia 1 jest rosnący, który malejący, a który nie jest monotoniczny.

Temat: Własności ciągów liczbowych.

Ćwiczenie 1.

Ciąg opisany jest za pomocą wzoru na ogólny wyraz $c_n = 2n + n^2$. Oblicz $c_3, c_7, c_{n+1}, c_{n-1}$. Co oznaczają te symbole? Jaka jest różnica pomiędzy c_{n+1} a $c_n + 1$?

Zadanie 1. Które wyrazy ciągu $a_n = n^2 - 11n + 10$ są

a) dodatnie
b) większe od 10
c) ujemne
d) nieujemne
e) mniejsze od 3
f) równe zero
g) równe 22?

Wskazówka:

Liczby dodatnie, to liczby większe od zera. Liczby nieujemne, to liczby nie mniejsze niż zero (czyli większe lub równe zero).

Aplet ciag01 pozwoli ci na postawienie hipotezy – wyrazy, spełniające odpowiedni warunek zmieniają kolor (zarówno w arkuszu, jak i na wykresie). Zweryfikuj hipotezę, wykonując odpowiednie obliczenia – możesz skorzystać z podpowiedzi w środkowej części ekranu. Aby łatwo było zauważyć wyrazy równe zero, zaznacz obie opcje: mniejsze niż zero i większe niż zero. Wtedy wyrazy równe zero pozostaną czarne.

Ćwiczenie 2.

Zastanów się, dla jakiej liczby naturalnej n liczba $\frac{12}{n}$ jest też naturalna?

Zadanie 2. Czy w ciągu $d_n = n - 1 - \frac{6}{n+1}$ występują wyrazy całkowite? Czy występują wyrazy naturalne? Jeśli tak, to które? Używając apletu postaw hipotezę, a następnie ją uzasadnij. Pamiętaj, że do ramki trzeba wpisać wyrażenie $n - 1 - 6/(n + 1)$.

Zadanie 3. (zad. 17 z informatora maturalnego).

Ciąg (a_n) określony jest wzorem: $a_n = (-3)^n \cdot (9 - n^2)$ dla n>0. Wynika stąd, że

A. $a_3 = -81$ B. $a_3 = -27$ C. $a_3 = 0$ D. $a_3 > 0$

Temat: Ciąg arytmetyczny.

Wstęp.

Poniżej przedstawiono kilka przykładów ciągów:

1, 2, 3, 4, 5

3, 6, 9, 12, 15, …

7, 5, 3, 1, -1, -3, …

9; 7,5; 6; 4,5; 3;

Co łączy te wszystkie ciągi?

Wskazówka:

O ile różnią się kolejne wyrazy pierwszego ciągu? A kolejnych ciągów?

Ciąg, który ma przynajmniej trzy wyrazy i w którym różnica pomiędzy każdym kolejnym wyrazem jest stała, nazywamy ciągiem arytmetycznym.

Warunek „różnica pomiędzy każdym kolejnym wyrazem jest stała” możemy zapisać:

Dla dowolnego $n \in N^+$

$$a_{n+1} - a_n = r \ oraz \ r \ jest \ wielkością \ stałą.$$

Liczbę r nazywamy różnicą ciągu.

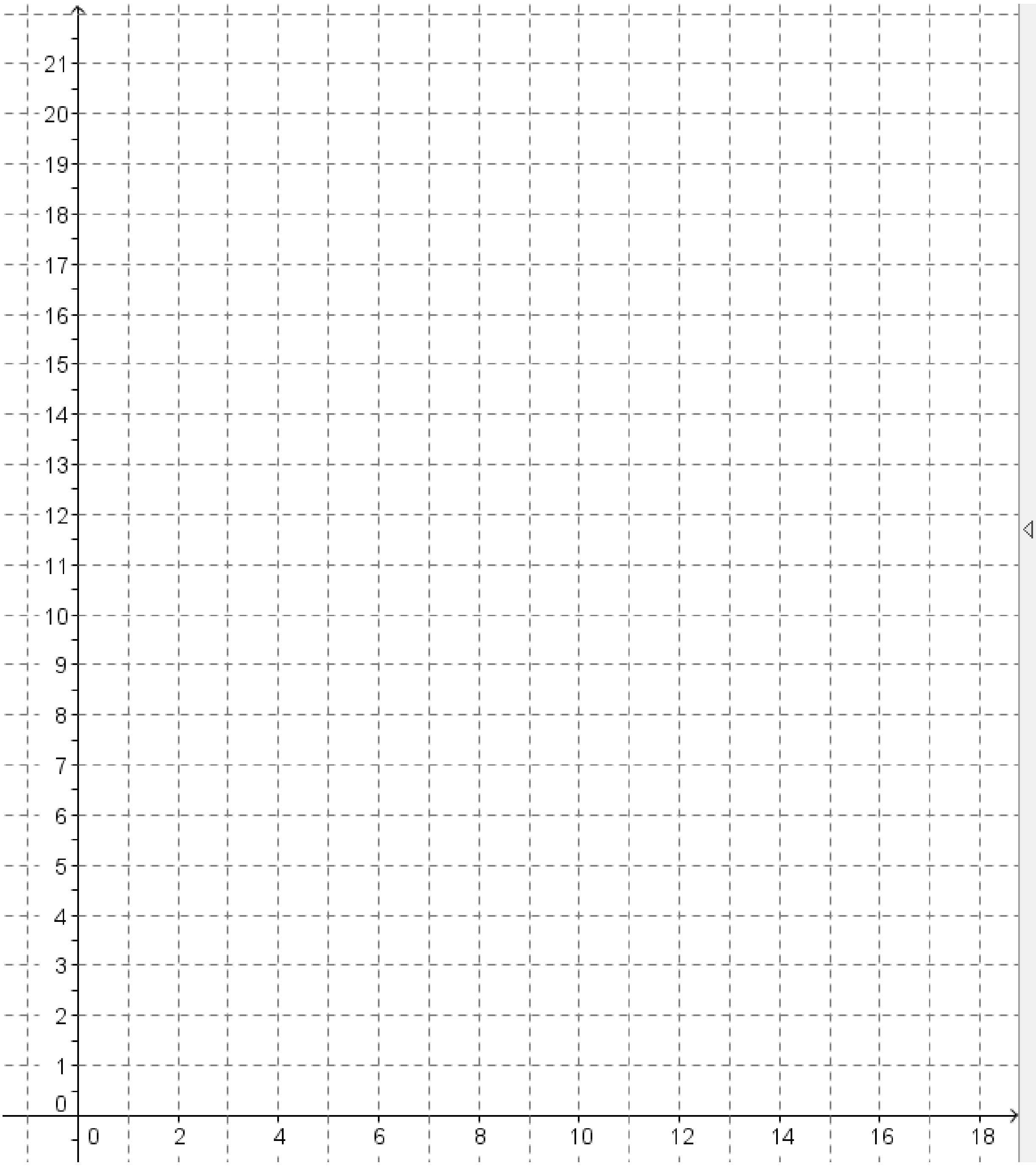
Zadanie 1. Wykonaj polecenia.

a) $b_1=11$, r = -2. Oblicz cztery kolejne wyrazy ciągu (b_n).

b) $d_5=15$; r=1,5. Oblicz cztery poprzednie wyrazy ciągu (d_n).

c) $t_3=5$, $t_7=21$. Oblicz wyrazy ciągu (t_n), pomiędzy trzecim a siódmym.

W układzie współrzędnych narysuj wykresy powyższych ciągów. Zaobserwuj prawidłowość. Czy można ją uogólnić na wszystkie ciągi arytmetyczne?



Zadanie 2. Oblicz trzy pierwsze wyrazy ciągów (a_n) i (c_n). Postaw hipotezę, który z nich jest ciągiem arytmetycznym, a który nie. Czy twoje wyniki wystarczą do rozstrzygnięcia, że ciąg nie jest arytmetyczny? A do rozstrzygnięcia, że jest arytmetyczny? Zweryfikuj swoją hipotezę za pomocą obliczeń na podstawie definicji ciągu arytmetycznego.

$$a_n = 3n - 2 \qquad\qquad c_n = n^2$$

Zadanie 3. W ciągu arytmetycznym (a_n): $a_1 = 3,\ r = 0{,}25$. Oblicz dziesiąty, setny i tysięczny wyraz tego ciągu.

Zadanie 4. Suma trzeciego i siódmego wyrazu ciągu arytmetycznego wynosi -4,4 a różnica wyrazu dziesiątego i drugiego 2,6. Wyznacz wzór na ogólny wyraz tego ciągu.

Temat: Własności ciągu arytmetycznego.

Zadanie 1. Wyznacz x, dla którego liczby x, 2x+1, x-3 są trzema pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Podaj wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

Zadanie 2. Pomiędzy liczby $3\sqrt{2} + 8$ oraz $8(\sqrt{2} - 1)$ wstaw 7 liczb tak, aby wszystkie razem tworzyły ciąg arytmetyczny.

Zadanie 3. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz pole tego trójkąta, jeżeli przeciwprostokątna jest długości 54cm.

Zadanie 4. Wykaż, że jeżeli kąty trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, to przynajmniej jeden z nich ma miarę 60°.

Zadanie 5. (Zad. 31 informator CKE (0 – 2p)). Liczby 2, x-3, 8 są w podanej kolejności pierwszym, drugim i czwartym wyrazem ciągu arytmetycznego. Oblicz x.

Zadanie 6. (Zad. 32 informator CKE (0 – 2p)). Wyrazami ciągu arytmetycznego (a_n) są kolejne liczby naturalne, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 2. Ponadto $a_3=12$. Oblicz a_{15}.

Zadanie 7. (Zad. 36 informator CKE (0 – 4p)). W ciągu arytmetycznym (a_n) dane są wyrazy: $a_3=4$, $a_6=19$. Ile wyrazów tego ciągu należy do przedziału (0, 200)?

Temat: Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego.

Przeczytaj uważnie i rozwiąż (samodzielnie lub w parach) dwa pierwsze zadania.
Rozwiązania wpisz w wyznaczone miejsce.

Zadanie 1. Oblicz sumę osiemnasto-wyrazowego ciągu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz wynosi -3, a ostatni -130

Zadanie 2. Oblicz sumę dwudziestu trzech wyrazów ciągu arytmetycznego, którego pierwszy wyraz wynosi 2 a różnica 4.

a_1= ………… n=………. a_n=………….

Zadanie 3. Suma dwóch pierwszych wyrazów dziewięciowyrazowego ciągu arytmetycznego wynosi 5,4, a suma dwóch ostatnich: -3. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

Zadanie 4. W ciągu arytmetycznym $a_1 \cdot a_2 = 3$ oraz $a_6 + a_7 = -16$. Oblicz:

a) sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu.
b) sumę wyrazów od dwudziestego do trzydziestego włącznie.
c) sumę pierwszych dwunastu wyrazów o indeksach parzystych.

Następnie wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

Poniższy fragment skryptu będziesz stosował do dwóch następnych lekcji:

Tematy: Ciąg arytmetyczny - rozwiązywanie zadań. oraz **Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego do rozwiązywania zadań tekstowych.**

Zadanie 1. Suma n wyrazów ciągu wyraża się wzorem $S_n = \frac{3n^2+5n}{2}$. Wyznacz wzór na ogólny wyraz ciągu. Wykaż, że jest to ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie:

W dowolnym ciągu (niekoniecznie arytmetycznym) sumę n wyrazów możemy przedstawić jako:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = S_n$$

Ponieważ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} = S_{n-1}$, możemy zapisać

$$S_{n-1} + a_n = S_n$$

Stąd

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

W naszym zadaniu $S_n = \frac{3n^2+5n}{2}$, czyli $S_{n-1} = \frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}$

$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n^2+5n}{2} - \frac{3(n-1)^2+5(n-1)}{2}$

Po wykonaniu obliczeń:

otrzymujemy wynik $a_n = \dots\dots\dots$

Aby wykazać, że ciąg jest arytmetyczny należy skorzystać z definicji ciągu arytmetycznego (patrz rozwiązanie zad. 2 z tematu Ciąg arytmetyczny).

Zadanie 2. Suma n wyrazów ciągu arytmetycznego wyraża się wzorem $S_n = n^2 + 8n$. Wyznacz wzór na ogólny wyraz ciągu.

Jest to zadanie bardzo podobne do poprzedniego. Różni się od niego tym, że o ciągu z góry wiemy, że jest arytmetyczny. Oczywiście możemy je rozwiązać poprzednim sposobem, ale można też skorzystać z własności ciągu arytmetycznego.

$S_1 = 1 + 8 \cdot 1 = 9$ oraz wiemy, że $S_1 = a_1$

Analogicznie $S_2 = 2^2 + 8 \cdot 2 = 20$ oraz $S_2 = a_1 + a_2$.

Wystarczy rozwiązać układ równań $\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_1 + a_2 = 20 \end{cases}$.

$r =$……………..

$a_n =$……………

Zadanie 3. Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych podzielnych przez 17.

Zadanie 4. Oblicz sumę wszystkich liczb trzycyfrowych podzielnych przez 6.

Zadanie 5. Ile liczb, które przy dzieleniu przez 5 dają resztę 3 musisz dodać, aby suma przekroczyła 1000?

Zadanie 6. W magazynie sklepu muzycznego było 600 płyt. W dniu premiery sprzedano 33 płyty, a każdego następnego dnia sprzedano o 6 sztuk więcej niż dnia poprzedniego.

a) Ile płyt sprzedano ósmego dnia?
b) W ciągu ilu dni od premiery sprzedano wszystkie płyty?

Zadanie 7. Za wykopanie pierwszego metra studni trzeba zapłacić 125 zł. Wykopanie każdego następnego metra jest o 35 zł droższe od wykopania poprzedniego.

a) Ile kosztuje wykopanie piątego metra studni, a ile – pięciometrowej studni?
b) Na jak głęboką studnię wystarczy kwota 2500 zł?

Zadanie 8. Wrzucasz do skarbonki 125zł, a w każdym następnym miesiącu o 20zł więcej niż w poprzednim. Ile miesięcy musisz oszczędzać, żeby kupić telefon za 1845zł?