



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 17

Ciągi:

8. Pojęcie ciągu geometrycznego. Wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego
9. Własności ciągu geometrycznego
10. Własności ciągu geometrycznego – zadania
11. Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
12. Rozwiązywanie zadań dotyczących ciągu geometrycznego
13. Procent składany
14. Procent składany - zadania

Opracowanie L3

Temat: Pojęcie ciągu geometrycznego. Wzór na wyraz ogólny ciągu geometrycznego

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik ciagi02
- Masz przed sobą aplet ilustrujący pierwsze wyrazy ciągu geometrycznego
- Suwakami możesz ustawiać wartości wyrazu pierwszego ciągu a_1 oraz ilorazu ciągu q . Po lewej stronie w Widoku Arkusza możesz obserwować kolejne wyrazy ciągu a po prawej stronie, w Widoku Grafiki znajduje się wykres danego ciągu.
- Obszar w Widoku grafiki możesz przesuwać, przybliżać i oddalać w celu lepszej obserwacji wykresu.

Zadanie 1. Odpowiedź na następujące pytania: Ilu rodziców ma każdy człowiek? Ilu dziadków ma każdy człowiek? Ilu pradziadków ma każdy człowiek?

Zadanie 2. Zapisz liczbę przodków w kolejnych pokoleniach w postaci ciągu liczbowego. Zilustruj ten ciąg w aplecie, przyjmując, że a_1 to wyraz pierwszy tego ciągu, a q to liczba przez którą należy pomnożyć każdy wyraz aby otrzymać następny. Ilu przodków miałeś w 16 pokoleniu wstecz?

DEFINICJA

Ciąg liczbowy (a_n) nazywamy ciągiem geometrycznym, jeżeli istnieje taka liczba q , że każdy wyraz ciągu, oprócz pierwszego, powstaje poprzez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez tę liczbę: $a_{n+1} = a_n \cdot q$ dla każdego $n \in N_+$. Liczbę q nazywamy ilorazem ciągu.

Zadanie 3. Uzupełnij tabelkę:

Początkowe wyrazy ciągu geometrycznego	a_1	q	Dwa kolejne wyrazy tego ciągu
1, 3, 9,...			
16, 8, 4,...			
-27, 9, -3,...			
7, 7, 7,...			
-8, 8, -8,...			

Sprawdź apletem czy poprawnie wykonałeś ćwiczenie.

Zadanie 4. Uzupełnij tabelkę dla ciągów geometrycznych:

a_1	q	a_2	a_3	a_4	a_5
-3	2				
$\frac{1}{81}$	-3				
$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$				

Jak powstaje każdy następny wyraz w ciągu geometrycznym?

Jak obliczyć dowolny wyraz ciągu geometrycznego mając dane a_1 i q ?

TWIERDZENIE

Wzór ogólny ciągu geometrycznego (a_n) o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q ma postać:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Zadanie 5. Oblicz dziewiąty wyraz ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = \sqrt{2}$ oraz $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

--

Zadanie 6. Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego, w którym $a_7 = 27$ i $q = -3$.

--

Zadanie 7. Wyznacz ciąg geometryczny, jeśli:

a) $a_3 = 3$ i $a_6 = 24$

--

b) $a_6 = -32$ i $a_{10} = -2$

--

Zadanie 8. Ciąg geometryczny dany jest wzorem: $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$. Uzupełnij tabelkę.

a_1	a_5	a_6	q

Temat: Własności ciągu geometrycznego

Uruchom aplet ciagi02.

Zadanie 1. Ustaw na suwakach podane wartości a_1 i q . Wypisz kilka pierwszych wyrazów tego ciągu, na ich podstawie oraz analizując wykres określ ich monotoniczność.

a_1	q	Początkowe wyrazy ciągu	Monotoniczność
3	2		
-2	$\frac{3}{2}$		
$\frac{3}{2}$	-2		
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$		
16	$\frac{1}{2}$		
-20	$\frac{1}{2}$		
-6	1		
12	1		
4	-1		
-14	-1		
10	0		
0	$3\frac{1}{2}$		

Zadanie 2. Uzupełnij twierdzenie:

<p>Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 > 0$ jest:</p> <p>rosnący, gdy</p> <p>malejący, gdy</p> <p>stały, gdy</p>	<p>Ciąg geometryczny (a_n) o pierwszym wyrazie $a_1 < 0$ jest:</p> <p>rosnący, gdy</p> <p>malejący, gdy</p> <p>stały, gdy</p>
--	--

TWIERDZENIE

Ciąg (a_n) o wyrazach różnych od zera jest ciągiem geometrycznym, jeśli dla każdego $n \geq 1$ iloraz dwóch kolejnych wyrazów $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest stały.

Zadanie 3. Ciąg (a_n) jest geometryczny. Uzupełnij:

a) $a_7 = -27$ oraz $a_8 = -243$, więc $q = \dots\dots\dots$

b) $a_{24} = 2\sqrt{3}$ oraz $a_{25} = 3\sqrt{2}$, więc $q = \dots\dots\dots$

Zadanie 4. Wykaż, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = -3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$ jest ciągiem geometrycznym. Określ jego monotoniczność.

$$a_{n+1} = \dots\dots\dots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots\dots\dots$$

$$q = \dots\dots\dots$$

Wniosek: $\dots\dots\dots$

Ustaw suwaki w aplecie tak aby zilustrować ten ciąg.

Zadanie 5. Uzasadnij, że ciąg o wzorze ogólnym $a_n = n^2 - n + 2$ nie jest geometryczny.

$$\frac{a_2}{a_1} = \dots\dots\dots \quad \frac{a_3}{a_2} = \dots\dots\dots \quad \frac{a_4}{a_3} = \dots\dots\dots$$

Wniosek: $\dots\dots\dots$

Temat: Własności ciągu geometrycznego – zadania

TWIERDZENIE

Liczby: a, b, c różne od zera, tworzą ciąg geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $b^2=ac$. Jeśli ponad to liczby a, b, c są dodatnie to, $b = \sqrt{ac}$ (liczbę \sqrt{ac} nazywamy średnią geometryczną liczb a i c).

Zadanie 1. Podane liczby tworzą ciąg geometryczny. Wyznacz x .

a) $\frac{1}{15}, x, 60$

b) $1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 2, x$

c) $x - 5, 6, -4 - 4x$

Zadanie 2. Liczby $25, x, y, 12\frac{4}{5}$ tworzą ciąg geometryczny. Znajdź liczby x i y .

Odp.

Zadanie 3. Pomiedzy liczby 81 i 16 wstaw trzy liczby tak, by razem tworzyły one pięć kolejnych wyrazów malejącego ciągu geometrycznego.

Odp.

Zadanie 4. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $2\frac{3}{4}$ a wyraz jedenasty jest równy zero. Oblicz a_{56} .

Odp.

Zadanie 5. Piąty wyraz ciągu geometrycznego (a_n) jest równy $2\sqrt{3}$, a wyraz jedenasty jest równy wyrazowi dwudziestemu. Oblicz a_{72} .

Odp.

Zadanie 6. W ciągu geometrycznym o pierwszym wyrazie równym 2, trzeci wyraz jest o 40 większy od drugiego. Znajdź wyraz ogólny tego ciągu.

Odp.

Zadanie 7. W ciągu geometrycznym $a_9 = \frac{7}{25}$ i $a_{13} = 175$. Oblicz a_{11} .

Odp.

Temat: Suma początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik ciagi03
- Masz przed sobą aplet ilustrujący sumę n kwadratów tworzących ciąg geometryczny
- Suwakami możesz ustawiać wartości wyrazu pierwszego ciągu, czyli pola pierwszego kwadratu oraz ilorazu ciągu q . Możesz również ustawić suwakiem liczbę n – czyli liczbę kwadratów.

Zadanie 1. Ustaw suwaki w aplecie: $a_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 1$. Zwiększaj wartość n i obserwuj pola kolejnych kwadratów. Jakie są między nimi zależności?

Zadanie 2. Oblicz sumę pól dwunastu kwadratów z poprzedniego zadania. Jak to zrobić najprościej, aby uniknąć żmudnego dodawania ułamków?

$$S_{12} = 16 + 8 + \dots + \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$$

$$2 \cdot S_{12} = \dots$$

$$2S_{12} - S_{12} = \dots$$

$$S_{12} = \dots$$

Zadanie 3. Wyznacz wartość wyrażenia

$$S_n = 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} + 3^n$$

$$3 \cdot S_n = \dots$$

$$3S_n - S_n = \dots$$

$$2S_n = 3 \cdot \dots$$

$$S_n = \dots$$

Zadanie 4. Wyprowadź wzór na n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $q \neq 1$.

$$a_1, a_2 = a_1q, a_3 = a_1q^2, \dots, a_{n-1} = a_1q^{n-2}, a_n = a_1q^{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$$

$$q \cdot S_n = \dots$$

$$S_n - qS_n = \dots$$

$$S_n(1 - q) = a_1 \dots$$

$$S_n = \dots$$

Zadanie 3. Zapisz wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie $q = 1$.

.....

TWIERDZENIE

Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wyraża się wzorem

$$S_n = \begin{cases} a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} & \text{gdy } q \neq 1 \\ a_1 n & \text{gdy } q = 1 \end{cases}$$

Zadanie 4. Oblicz sumę S_8 ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = 5$ oraz $q = -2$.

Zadanie 5. Oblicz sumę S_{10} ciągu geometrycznego (a_n) , w którym $a_1 = \frac{1}{81}$ i $a_2 = \frac{1}{27}$.

Zadanie 6. Oblicz sumę ośmiu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $a_n = \frac{9}{2^n}$.

Zadanie 7. Pola sześciu kwadratów (takich jak w aplecie) tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $\frac{3}{4}$. Suma tych pól jest równa $21\frac{7}{160}$. Oblicz pole największego kwadratu. Sprawdź poprawność swojego rozwiązania ilustracją w aplecie.

Odp.

Temat: Rozwiązywanie zadań dotyczących ciągu geometrycznego

Zadanie 1. Przeczytaj uważnie tekst: „Podanie głosi, że twórca szachów, uczonego Sissa-Nassir – gdy władca Indii, zachwycony nową grą, obiecał wynagrodzić go „wszystkim”, czegokolwiek zapragnie – zażądał zapłaty pozornie skromnej, chciał bowiem otrzymać tyle tylko zboża, ile przypadnie, gdy poprzez wszystkie 64 pola szachownicy podwajane będzie jedno małe ziarenko, złożone na pierwszym polu. To znaczy chciał otrzymać tyle ziaren, ile wypadnie z sumowania postępu geometrycznego, którego pierwszym wyrazem jest 1, ilorazem 2, a liczbą wyrazów 64” (Szczepan Jeleński, Lilavati).

a) Zapisz wzór określający liczbę ziarenek za n-te pole szachownicy

b) Oszacuj, ile ton zboża miałyby otrzymać Sissa-Nassir. Przyjmij, że 4 tony pszenicy to około 10^8 ziaren.

Odp.

Zadanie 2. Balon A wznosił się w pierwszej minucie lotu na wysokość 36 m. W każdej następnej minucie wznosił się dwa razy wolniej niż w minucie poprzedniej. Balon B wznosił się w pierwszej minucie na wysokość 27 m, a w każdej następnej minucie wznosił się o $\frac{1}{3}$ wolniej niż w minucie poprzedniej. Który z balonów znajdował się wyżej po sześciu minutach wznoszenia? (Matematyka 2, Nowa Era)

Odp.

Zadanie 3. Gumową piłkę upuszczono z 81 metrów. Za każdym razem, po odbiciu piłka wznosi się na $\frac{2}{3}$ wysokości, z której spadła. Znajdź największą wysokość piłki między 5 i 6 uderzeniem o podłoże.

Odp.

Ilustrację zadania możesz obejrzeć w Internecie:

<http://www.geogebraTube.org/student/m18713>

Zadanie 4. Najczęściej papier o gramaturze 100 g/m^2 ma grubość 0,1 mm. Bardzo duży arkusz takiego papieru składamy na pół, potem jeszcze raz na pół itd.

Uzupełnij tabelę

Liczba złożeń	1	2	3	4	5	10	20
Grubość w mm							

Zapisz wzór pozwalający obliczyć grubość złożonego arkusza po n złożeniach.

Czy w praktyce możliwe jest uzyskanie 15 złożeń?

Zadanie 5. Rozwiąż zadanie z podręcznika rosyjskiego matematyka L. Magnickiego z 1703 roku: „Pewien handlarz sprzedał konia za 156 rubli. Ale wieśniak nabywca wkrótce po tej sprzedaży rozmyślił się i począł molestować handlarza, żeby wziął konia z powrotem, a jemu oddał pieniądze, gdyż koń nie jest wart tak wielkiej sumy. Handlarz wówczas zaproponował mu inną transakcję: „Jeśli uważasz, że koń jest za drogi, to ci go daję darmo, a ty kup tylko ode mnie hufnale w jego podkowach (hufnali w każdej podkowie jest po 6). Zapłacisz mi tanio: za pierwszy hufnal połuszkę (połuszka = $\frac{1}{4}$ kopiejki), za drugi hufnal – 2 połuszki, za trzeci – kopiejkę itd.” Wieśniak kombinując sobie, że nie może wypaść chyba za wszystkie hufnale razem więcej niż jakie 10 rubli, chętnie zgodził się na taką propozycję. Czy wieśniak ten oszukał się i na ile rubli?”

Odp.

Temat: Procent składany

Zadanie 1. Pani Monika wpłaciła do banku 5000 zł na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Ile po roku:

wynosić będą odsetki?

wynosić będzie cały kapitał?

Uzupełnij wniosek:

Kapitał w wysokości K_0 , złożony w banku na rok przy oprocentowaniu rocznym w wysokości $p\%$, wynosi po roku

Zadanie 2. Pan Marek wpłacił do banku 3000 zł na lokatę oprocentowaną 5% w skali roku. Do jakiej kwoty wzrośnie kapitał pana Marka po pięciu latach?

Kapitał po roku	$K_1 =$
Kapitał po dwóch latach	$K_2 =$
Kapitał po trzech latach	$K_3 =$
Kapitał po czterech latach	$K_4 =$
Kapitał po pięciu latach	$K_5 =$

Uzupełnij:

Każdego roku do kapitału bank dopisuje 5% odsetek czyli co roku kapitał powiększa się razy.

DEFINICJA

Jeżeli w kolejnych latach odsetki dopisywane są do kapitału powiększonego o wcześniej zgromadzone odsetki, to mówi się, że kapitał został złożony na procent składany. Dopisywanie odsetek do kapitału nazywa się kapitalizacją.

WZÓR

Jeśli kapitał początkowy wynosi K_0 , a oprocentowanie jest równe $p\%$ w skali roku, to po n latach kapitał złożony na procent składany wynosi $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Zadanie 3. Oblicz jaką kwotę będziesz dysponować po n latach, jeśli złożysz w banku 2500 zł na procent składany przy oprocentowaniu rocznym p ?

$n = 6$	$p = 4,3\%$	$K_6 =$
$n = 7$	$p = 5,5\%$	$K_7 =$
$n = 7$	$p = 6\%$	$K_7 =$
$n = 10$	$p = 3,7\%$	$K_{10} =$

Zadanie 4. Przeanalizuj przykład, a następnie rozwiąż zadanie.

Przykład. Kapitał w wysokości 5000 zł złożono w banku na 6 lat. W pierwszym roku oprocentowanie wynosiło 5%, w trzech następnych 4%, a w ostatnich dwóch latach 6%. Kapitalizacja odsetek następowała co rok. Oblicz jaka kwota będzie na koncie po tych 6 latach. Jaka kwota byłaby na koncie gdyby od odsetek pobierany był co roku podatek w wysokości 19%?

Oszczędności po 6 latach:

$$K_6 = 5000 \cdot (1,05) \cdot (1,04)^3 \cdot (1,06)^2 \approx 6635,46 \text{ [zł]}$$

Gdyby odsetki pomniejszane były o 19%, to oszczędności po 6 latach:

$$K_6 = 5000 \cdot (1 + 0,05 \cdot 0,81) \cdot (1 + 0,04 \cdot 0,81)^3 \cdot (1 + 0,06 \cdot 0,81)^2$$

$$K_6 = 5000 \cdot (1,0405) \cdot (1,0324)^3 \cdot (1,0486)^2 \approx 6294,71 \text{ [zł]}$$

Kapitał w wysokości 4000 zł złożono w banku na 5 lat. W pierwszych dwóch latach oprocentowanie wynosiło 6%, w trzech następnych 7%. Kapitalizacja odsetek następowała co rok. Oblicz jaka kwota będzie na koncie po tych 5 latach. Jaka kwota byłaby na koncie gdyby od odsetek pobierany był co roku podatek w wysokości 19%?

Temat: Procent składany – zadania

Przy lokatach krótszych niż 1 rok bank kapitalizuje odsetki po każdym okresie trwania lokaty. Oprocentowanie lokat bankowych zawsze podawane jest w skali roku, także dla lokat, które trwają krócej niż rok.

Zadanie 1. Przeanalizuj rozwiązanie pierwszej części zadania i rozwiąż drugą.

Pan Kazimierz wpłacił 20000 złoty na 2-miesięczną lokatę. Oprocentowanie tej lokaty wynosi 4,5%. Jaki będzie kapitał pana Kazimierza po 8 miesiącach?

$$K_0 = 20000 \text{ zł} \quad p\% = \frac{2}{12} \cdot 4,5\% = 0,75\% \quad n = \frac{8}{12} : \frac{2}{12} = 4$$

$$K_0 = 20000 \cdot (1,0075)^4 \approx 20606,78 \text{ [zł]}$$

Jaki będzie kapitał pana Kazimierza po półtora roku?

WZÓR

Kapitał w wysokości K_0 , złożony w banku na n lat przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wynosi $K_{n \cdot m} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m \cdot 100}\right)^{m \cdot n}$.

Zadanie 2. Pani Lucyna ma 10000 zł na koncie, którego oprocentowanie w skali roku wynosi 2%, a kapitalizacja następuje co miesiąc. Ile zyska w ciągu trzech miesięcy, jeżeli przeniesie tę kwotę na trzymiesięczną lokatę terminową z oprocentowaniem rocznym 7%?