



---

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

# Skrypt 19

## Trygonometria:

9. Proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi
10. Zastosowanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi
11. Wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dany jest sinus lub cosinus
12. Wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dany jest sinus lub cosinus – zastosowanie w zadaniach
13. Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$
14. Zastosowanie definicji i wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$

### Opracowanie L3

## Temat: Proste zależności między funkcjami trygonometrycznymi.

### Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik trygonometria04
- Masz przed sobą aplet ilustrujący niektóre zależności między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego
- Suwakiem możesz zmieniać wielkość kąta ostrego  $\alpha$  w trójkącie prostokątnym.
- Przesuwając punkty A i C (zaznaczone na niebiesko) możesz zmieniać długość boku AC i położenie trójkąta.
- Przyciskami przechodzisz do wybranej zależności, przyciskiem WRÓĆ wracasz na początek.

**Zadanie 1.** W pliku trygonometria04 naciśnij przycisk Zależność 1. Ustaw suwak kolejno na wartości kąta  $\alpha$ :  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ . Jaką zależność dostrzegasz między kwadratami sinusa i cosinusa tych kątów? Sprawdź swoje przypuszczenia dla innych kątów.

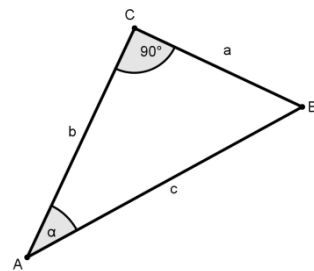
### TWIERDZENIE

Dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  prawdziwa jest zależność:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ .

**Zadanie 2.** Udowodnij twierdzenie korzystając z ilustracji i przypomnienia.

Przypomnienie:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \cos\alpha = \frac{b}{c}, a^2 + b^2 = c^2$$



c.n.p.

**Zadanie 3.** W pliku trygonometria04 naciśnij przycisk Zależność 2. Zmieniaj wartość kąta  $\alpha$  na suwaku i obserwuj zmiany. Jaka jest zależność między sinusem, cosinusem i tangensem kąta ostrego  $\alpha$ ?

**TWIERDZENIE**

Dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  prawdziwa jest zależność:  $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .

**Zadanie 4.** Udowodnij powyższe twierdzenie.

c.n.p

**Zadanie 5.** Sprawdź, czy istnieje kąt ostry  $\alpha$  taki, że:

$\sin\alpha = \frac{2}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{2}$	$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$	$tg\alpha = \sqrt{7}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{7}$	$tg\alpha = \frac{3}{5}$ i $\sin\alpha = \frac{4}{5}$
Odp.	Odp.	Odp.	Odp.

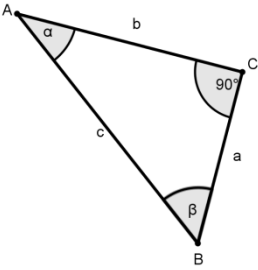
**Zadanie 6.** W pliku trygonometria04 naciśnij przycisk Zależność 3. Zmieniaj wartość kąta  $\alpha$  i obserwuj zmiany. Następnie zrób to samo dla Zależności 4. Jaka jest zależność między sinusem i cosinusem kątów  $\alpha$  i  $90^\circ - \alpha$ ?

## TWIERDZENIE

Dla dowolnego kąta ostrego  $\alpha$  prawdziwe są zależności:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \text{ oraz } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

**Zadanie 7.** Przeanalizuj dowód jednej z zależności, a następnie udowodnij drugą.

<p>Rozważmy trójkąt prostokątny ABC.</p>  <p>W tym trójkącie <math>\beta = 90^\circ - \alpha</math>.</p> <p>Można zauważyć, że:</p> $\sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{b}{c}$ <p>oraz</p> $\cos\alpha = \frac{b}{c}.$ <p>Czyli:</p> $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	<p>c.n.p.</p>
---	---------------

**Zadanie 8.** Oblicz:

$$\sqrt{\frac{\sin 47^\circ}{\cos 43^\circ}} - 5 =$$

## Temat: Zastosowanie zależności między funkcjami trygonometrycznymi.

**Zadanie 1.** Oblicz kąt ostry  $\alpha$ , jeśli  $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Zadanie 2.** Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami ostrymi pewnego trójkąta prostokątnego. Oblicz  $\cos\alpha$ , jeśli  $\sin\beta = \frac{2}{5}$ .

**Zadanie 3.** Oblicz:

$$\sin^2 23^\circ + \sin^2 67^\circ =$$

$$\frac{\sin 11^\circ \cos 11^\circ}{\sin 79^\circ \cos 79^\circ} =$$

**Zadanie 4.** Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami ostrymi pewnego trójkąta prostokątnego. Wyznacz miary tych kątów, jeżeli:

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{3}{4}$	$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
--	--	---

**Zadanie 5.** Przeanalizuj przykłady, a następnie wykonaj zadania.

Przykład.

Przekształć do najprostszej postaci:  $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$ .

$$(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

Przekształć do najprostszej postaci:  $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$ .

Przekształć do najprostszej postaci:  $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

Przykład.

Sprawdź tożsamość:  $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$ .

$$L = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = P$$

c.n.p.

Sprawdź tożsamość:  $\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1$ .

Sprawdź tożsamość:  $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

## Temat: Wyznaczanie wartości pozostałych funkcji kąta ostrego, gdy dany jest sinus lub cosinus

### Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik trygonometria05
- Masz przed sobą aplet ilustrujący sposób wyznaczania wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy dana jest jedna z nich.
- Przyciskami przechodzisz do wybranej opcji, przyciskiem WRÓĆ wracasz do strony startowej.
- Suwakami możesz zmieniać długości boków w trójkącie prostokątnym.
- Niebieskie wierzchołki trójkąta możesz przesuwać zmieniając jego położenie.
- Zaznaczając odpowiednie pola wyboru możesz sprawdzić poprawność wykonanych zadań.

**Zadanie 1.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ .

- a) W pliku trygonometria05 przejdź do opcji „Dany jest sinus kąta ostrego”. Ustaw suwaki tak, aby spełniona była równość z zadania. Czy istnieje tylko jeden sposób ustawienia suwaków?
- b) Oblicz długość boku b. Sprawdź czy twój wynik zgodny jest z tym w pliku.

- c) Wyznacz wartość cosinusa i tangensa kąta  $\alpha$  korzystając z ich definicji.

**Zadanie 2.** Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli  $\cos\alpha = \frac{3}{11}$ . Zilustruj zadanie w pliku trygonometria05, a po rozwiązaniu sprawdź poprawność rozwiązania.

**Zadanie 3.** Przeanalizuj inny sposób wyznaczania wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dana jest jedna z nich. Na jego podstawie rozwiąż podane zadania.

Przykład.

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli  $\sin\alpha = \frac{5}{14}$ .

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{5}{14}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{25}{196} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = \frac{171}{196}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{171}{196}} = \frac{\sqrt{171}}{14} = \frac{3\sqrt{19}}{14}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{5}{14}}{\frac{3\sqrt{19}}{14}} = \frac{5}{14} \cdot \frac{14}{3\sqrt{19}} = \frac{5\sqrt{19}}{57}$$

Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli  $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ .



Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli  $\cos\alpha = 0,8$ .

**Zadanie 4.** Wiedząc, że  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$ , oblicz  $\sin 15^\circ$  oraz  $\operatorname{tg} 15^\circ$ .

**Zadanie dodatkowe.** Przy pomocy pliku trygonometria05, oblicz wartości sinusa i cosinusa kąta  $\alpha$ , gdy dany jest  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$ .

**Temat: Wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy dany jest sinus lub cosinus – zastosowanie w zadaniach.**

**Zadanie 1.** Znajdź wartości sinusa, cosinusa i tangensa kąta ostrego  $\alpha$ , jeśli:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{2}{5}.$$

**Zadanie 2.** Wiedząc, że  $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ , oblicz  $\cos 36^\circ$  oraz  $\operatorname{tg} 36^\circ$ .

**Zadanie 3.** Kąt  $\alpha$  jest kątem ostrym oraz  $\cos \alpha = \frac{5}{12}$ . Oblicz wartość wyrażenia:

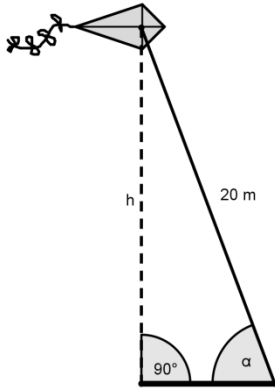
$$(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha) + \operatorname{tg} \alpha.$$

**Zadanie 4.** Kąty  $\alpha$  i  $\beta$  są kątami ostrymi pewnego trójkąta prostokątnego. Oblicz  $\operatorname{tg} \alpha$ , jeśli  $\sin \beta = \frac{5}{6}$ .

**Zadanie 5.** Przeanalizuj przykład, a następnie rozwiąż zadanie.

Przykład.

Na końcu naciągniętej linki o długości 20 m, zamocowany jest latawiec. Linka tworzy z poziomem kąt  $\alpha$ . Na jakiej wysokości znajduje się latawiec, jeśli  $\cos\alpha = \frac{9}{25}$ ?



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{9}{25}\right)^2 = 1 - \frac{81}{625} = \frac{544}{625}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{544}{625}} \approx 0,933$$

$$\frac{h}{20} = \sin\alpha$$

$$h = 20 \cdot \sin\alpha \approx 20 \cdot 0,933 \approx 18,7$$

Odp. Latawiec znajduje się na wysokości około 18,7 m.

Maksymalna długość drabiny na wozie strażackim to 30 m. Na jaką wysokość może sięgnąć drabina, jeśli jest zamocowana na wozie 2,6 m nad ziemią i może być podniesiona pod kątem, którego cosinus wynosi 0,3.

## Temat: Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów od $0^\circ$ do $180^\circ$ .

### Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz plik trygonometria06.
- Masz przed sobą aplet ilustrujący definicje i wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów od  $0^\circ$  do  $180^\circ$ .
- Punkt P możesz przesuwać tak, aby uzyskać wybrane współrzędne.
- Zaznaczając pola wyboru możesz zobaczyć sposób obliczania długości  $r$  i wartości funkcji trygonometrycznych kąta.

**Zadanie 1.** W pliku trygonometria06 przesuń punkt P tak, aby  $P = (3,4)$ . Zapisz wartości funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$ .

$\sin\alpha =$	$\cos\alpha =$	$\operatorname{tg}\alpha =$
----------------	----------------	-----------------------------

Sprawdź swoje wyniki zaznaczając pola wyboru.

Jaki jest związek funkcji trygonometrycznych kąta  $\alpha$  oraz współrzędnych punktu P i odległości punktu P od początku układu współrzędnych  $r$ ?

### DEFINICJA

Niech  $P = (x, y)$  będzie dowolnym punktem leżącym na ramieniu końcowym kąta  $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$ , różnym od początku układu współrzędnych oraz niech  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Wtedy:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} \quad \text{dla } x \neq 0$$

**Zadanie 2.** Do ramienia końcowego kąta  $\alpha$  należy punkt  $P = (-1, 2)$ . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Sprawdź poprawność obliczeń w pliku trygonometria06.

**Zadanie 3.** W pliku trygonometria06, przy zaznaczonych polach wyboru, ustaw kolejno  $P = (-1,2)$ ,  $P = (-2,4)$ ,  $P = (-3,6)$  i obserwuj zmiany w obliczeniach. Zapisz wniosek.

--

**Zadanie 4.** Uzupełnij tabelę, obserwując zmiany znaków funkcji trygonometrycznych dla różnych położenia punktu P w pliku trygonometria06.

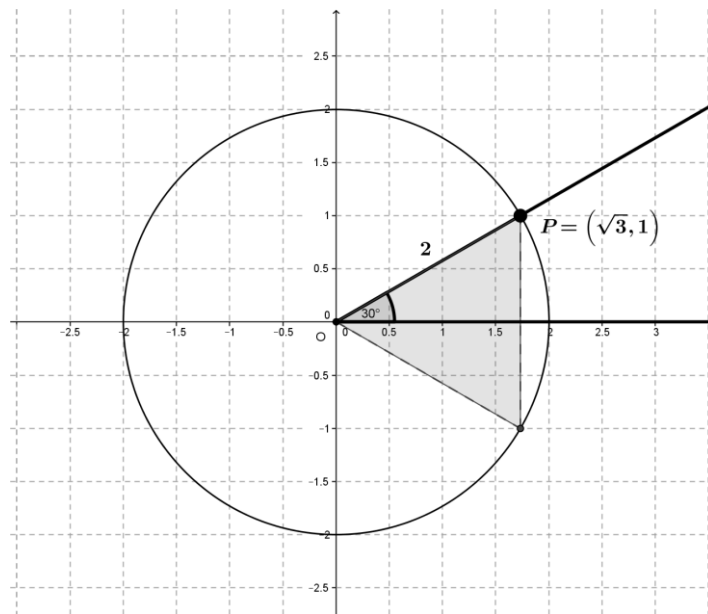
$\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$(0^\circ, 90^\circ)$	<i>dodatni</i>		
$(90^\circ, 180^\circ)$			<i>ujemny</i>

**Zadanie 5.** Uzupełnij tabelę korzystając z podpowiedzi pod nią.

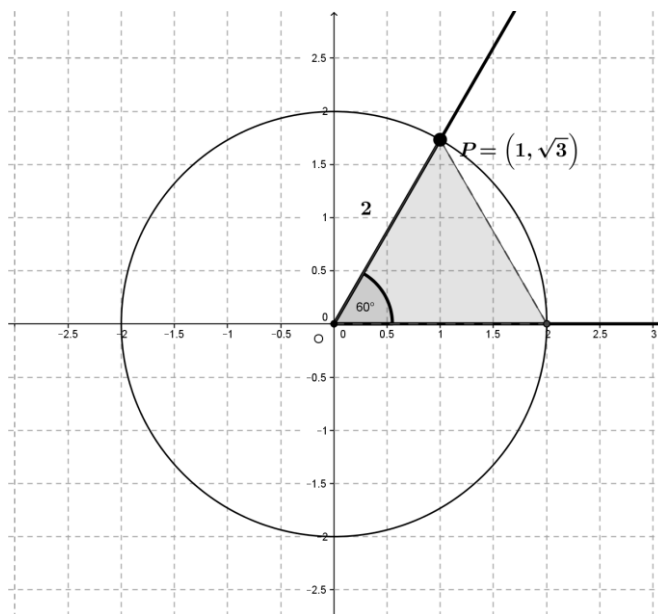
$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin\alpha$									
$\cos\alpha$									
$\operatorname{tg}\alpha$					X				

- Dla kąta  $0^\circ$ : wybierz w pliku trygonometria06 np.  $P = (4,0)$ . Podobnie wybierz punkt P dla kątów  $90^\circ$  i  $180^\circ$ .
- Dla kąta  $45^\circ$ : wybierz w pliku trygonometria06 np.  $P = (2,2)$ . Podobnie wybierz punkt dla kąta  $135^\circ$ .

- Dla kąta  $30^\circ$ : posłuż się rysunkiem:



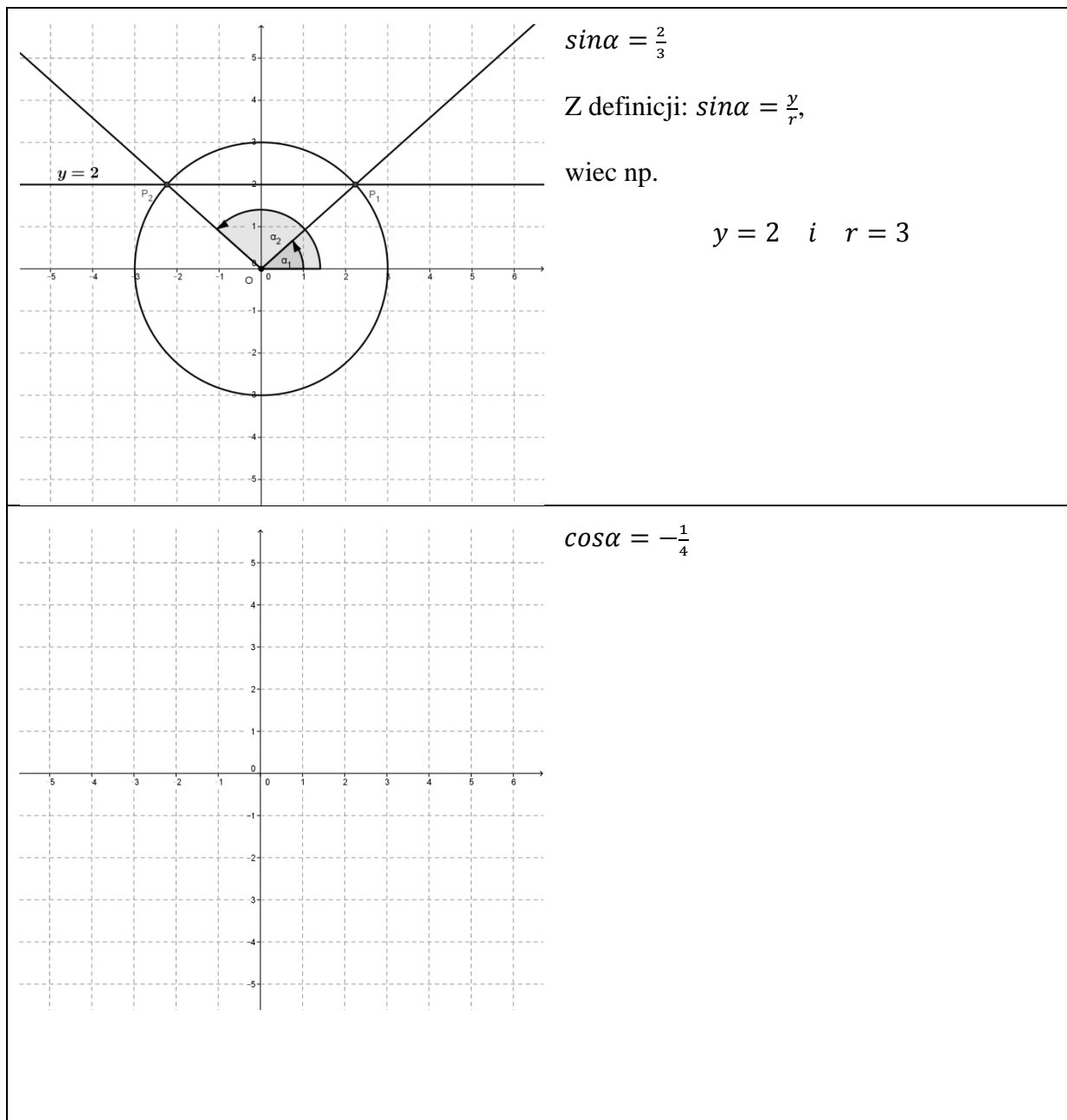
- Dla kąta  $150^\circ$ : na powyższym rysunku umieść kąt  $150^\circ$  wykorzystując narysowany okrąg i trójkąt równoboczny.
- Dla kąta  $60^\circ$ : posłuż się rysunkiem:

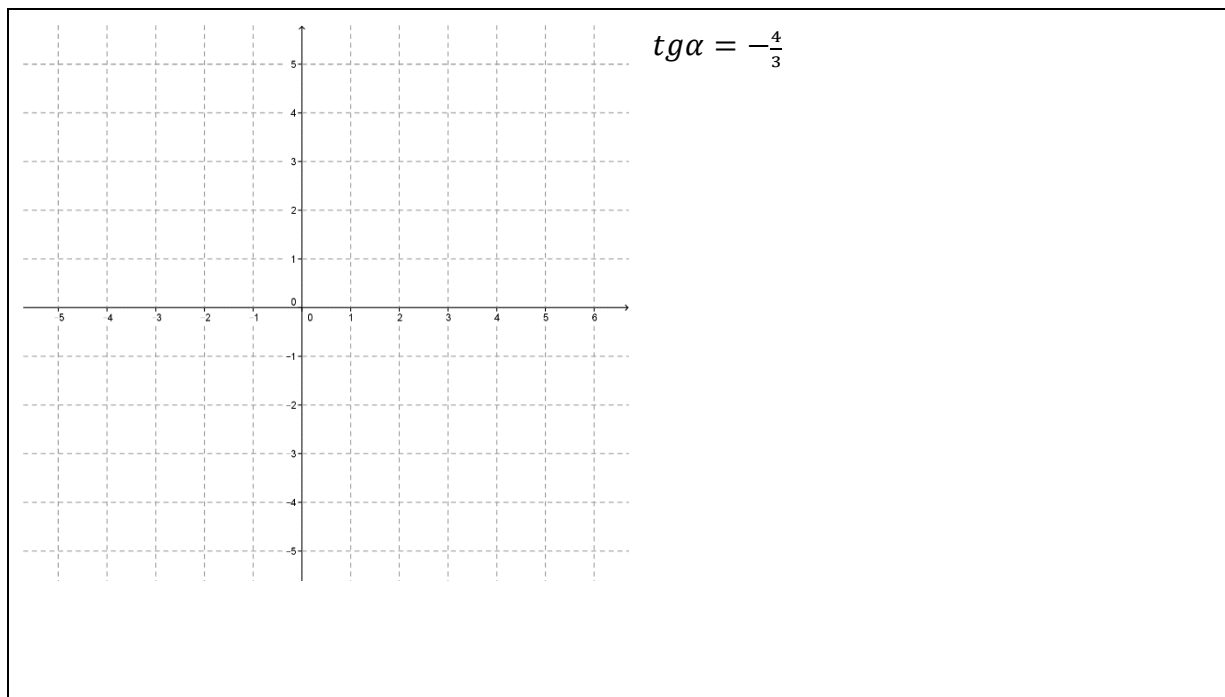


- Dla kąta  $120^\circ$ : na powyższym rysunku umieść kąt  $120^\circ$  wykorzystując narysowany okrąg i trójkąt równoboczny

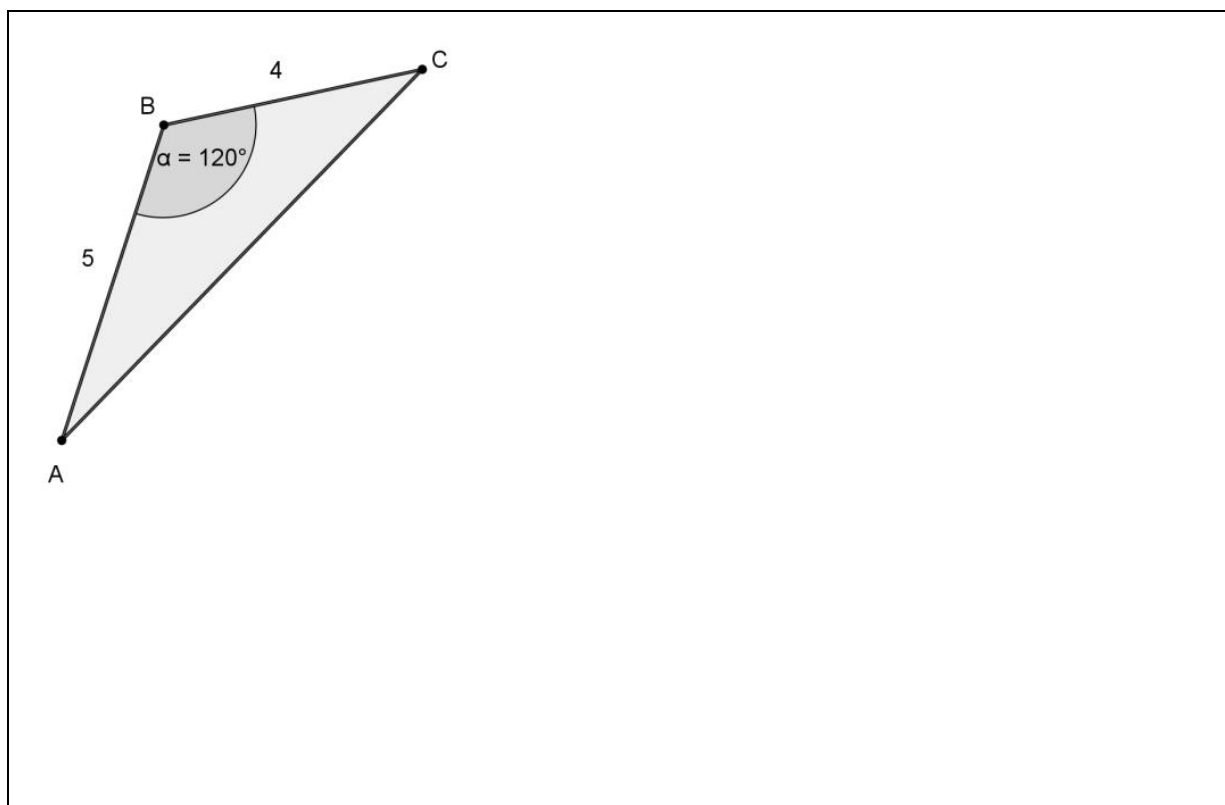
## Temat: Zastosowanie definicji i wartości funkcji sinus, cosinus i tangens kątów od $0^\circ$ do $180^\circ$ .

**Zadanie 1.** Narysuj końcowe ramię kąta  $\alpha \in \langle 0^\circ, 180^\circ \rangle$  i zaznacz ten kąt, wiedząc, że (zastanów się czy istnieje tylko jeden kąt spełniający ten warunek):



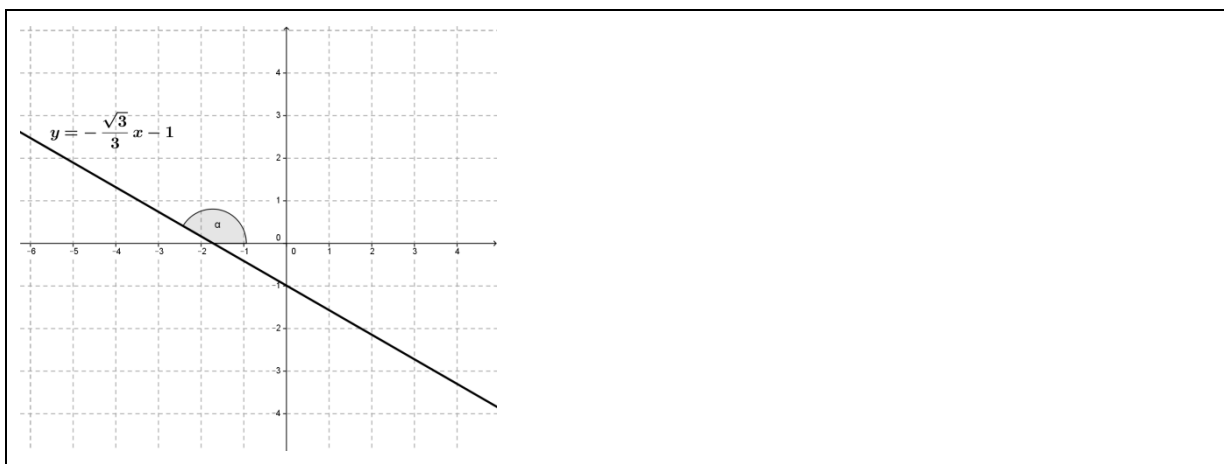


**Zadanie 2.** Korzystając z twierdzenia, że pole trójkąta jest równe połowie iloczynu długości dwóch boków i sinusa kąta zawartego między tymi bokami, oblicz pole trójkąta przedstawionego na rysunku.





**Zadanie 3.** Korzystając z informacji, że współczynnik kierunkowy  $a$  prostej  $y = ax + b$  jest równy tangensowi kąta  $\alpha$ , jaki ta prosta tworzy z osią  $OX$  ( $a = \operatorname{tg}\alpha$ ), wyznacz miarę kąta, który prosta  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 1$  tworzy z osią  $OX$ .



**Zadanie 4.** Do ramienia końcowego kąta  $\alpha$  należy punkt  $P = (-3, 2)$ . Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych tego kąta. Poprawność obliczeń sprawdź w pliku trygonometria06.

Sprawdź, czy dla obliczonych wartości zachodzą równości:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$  oraz  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ .

**Zadanie 5.** Oblicz  $\cos\alpha$  i  $\operatorname{tg}\alpha$ , jeśli  $\alpha \in (90^\circ, 180^\circ)$  i  $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ .