



---

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

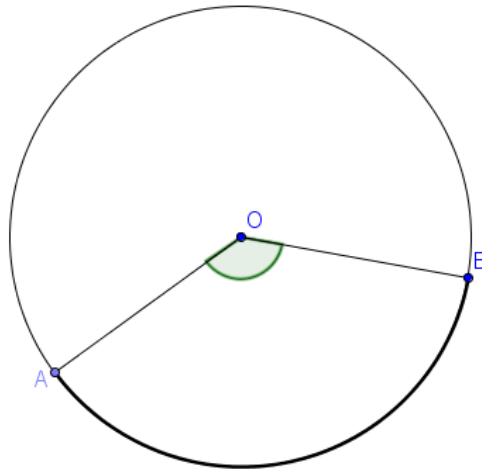
# Skrypt 20

## Planimetria:

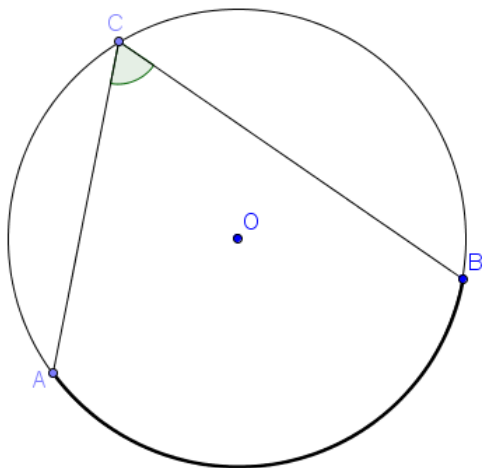
1. Kąty w kole - kąt środkowy i kąt wpisany.
2. Kąty środkowe i wpisane - rozwiązywanie zadań.
3. Wzajemne położenie prostej i okręgu.
4. Własności stycznej do okręgu.

## Opracowanie L6

**Temat: Kąty w kole – kąt środkowy i kąt wpisany.**



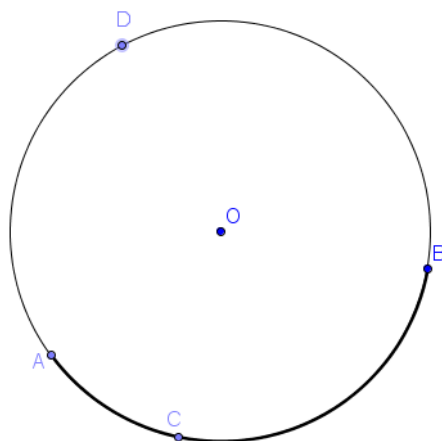
Kąt środkowy oparty na łuku AB to kąt, którego wierzchołek O leży w środku okręgu a ramionami są półproste  $OA^{\rightarrow}$  i  $OB^{\rightarrow}$ .



Kąt wpisany, oparty na łuku AB to kąt, którego wierzchołek C leży na okręgu (ale nie na łuku AB) a ramionami są półproste  $CA^{\rightarrow}$  i  $CB^{\rightarrow}$ .

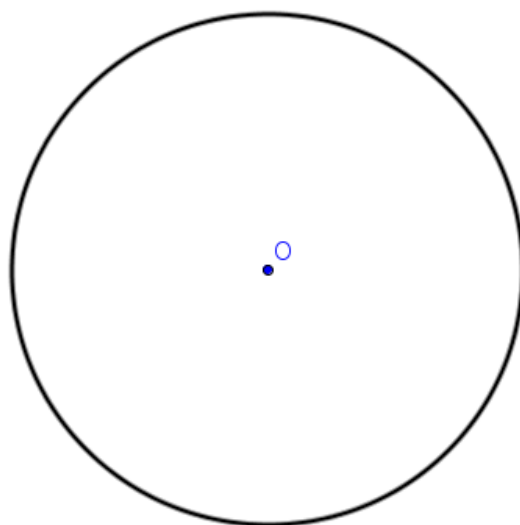
*Ćwiczenie 1.* Dorysuj na powyższym rysunku kilka kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku, co kąt ACB.

Czy można narysować kilka kątów środkowych, opartych na łuku AB? Dlaczego?



O łukach ACB i ADB mówimy, że się dopełniają do okręgu, bo mają wspólne końce i razem tworzą cały okrąg.

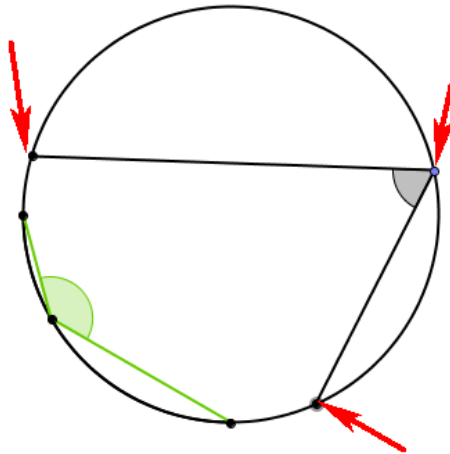
*Ćwiczenie 2.* Zaznacz na poniższym rysunku dwa łuki dopełniające się oraz narysuj po dwa dowolne kąty wpisane, oparte na tych łukach.



*Instrukcja obsługi apletu planimetria01.*

Aplet służy do tego, abyś dobrze zrozumiał(a) pojęcie kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku i kątów opartych na łukach, dopełniających się do okręgu.

Za pomocą suwaka możesz wybrać, czy chcesz budować kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, czy na łukach dopełniających się do okręgu. Przyciskiem losujesz kąty. Twoim zadaniem jest takie przemieszczanie po okręgu wyróżnionych punktów (patrz rysunek poniżej), aby czarny kąt stał się kątem opartym na tym samym łuku co zielony (lub na łukach dopełniających się, jeśli taką opcję wybrałeś(aś) suwakiem).



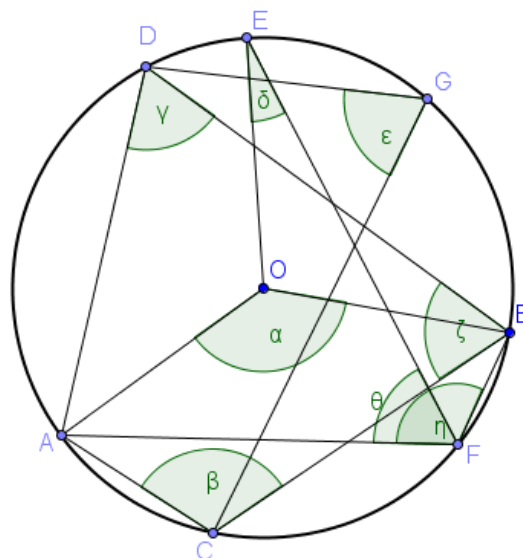
W momencie właściwego ustawienia punktów zmieniają one kolor. Jeśli poprawnie ustawisz wszystkie trzy, pojawi się napis „dobrze!” oraz zaznaczone zostaną właściwe łuki. Dla kątów opartych na tym samym łuku, będzie on czerwony, a dla kątów opartych na łukach dopełniających się do okręgu – zgodny z kolorem właściwego kąta.

### Zadanie 1.

Wykonaj losowanie i tak dopasuj czarny kąt, aby był oparty na tym samym łuku, co zielony. Czynność powtarzaj dotąd, aż uznasz, że dobrze rozumiesz, kiedy kąty są oparte na tym samym łuku. Następnie przesuń suwak i w ten sam sposób dopasowuj kąty oparte na łukach dopełniających się.

### Zadanie 2.

Na podstawie rysunku uzupełnij poniższe zdania tak, aby były prawdziwe:



1. Kąty  $\alpha$  i  $\gamma$  są/nie są oparte na tym samym łuku. Kąt  $\alpha$  jest kątem ....., a kąt  $\gamma$  - .....
2. Parą kątów wpisanych, opartych na łukach dopełniających się są kąty:
  - a.  $\gamma$  i  $\beta$  tak/nie
  - b.  $\alpha$  i  $\eta$  tak/nie
  - c.  $\delta$  i  $\theta$  tak/nie
3. Parą kątów wpisanych opartych na tym samym łuku są:
  - a.  $\eta$  i  $\beta$  tak/nie
  - b.  $\gamma$  i  $\delta$  tak/nie
  - c.  $\xi$  i  $\varepsilon$  tak/nie

Wymień inne pary kątów opartych na tym samym łuku oraz na łukach dopełniających się do okręgu (niekoniecznie zaznaczone i nazwane na rysunku).

Kąty, oparte na tych samych łukach: .....

Kąty, oparte na łukach dopełniających się: .....

Kąty środkowe: .....

Kąty wpisane: .....

**Zadanie 3.** Zadanie składa się z pięciu poleceń. Wnioski zapisuj w wyznaczonym miejscu, pod tekstem całego zadania.

1. Otwórz aplet *planimetria02*. Naciśnij przycisk „teoria”. Zaznacz pole wyboru „kąt wpisany”. Po lewej stronie widzisz kąt wpisany w okrąg. Przesuwaj wierzchołek kąta po okręgu. Zaobserwuj, jak zmienia się miara kąta. Następnie przesuń punkty na okręgu, zmieniając łuk, na którym oparty jest kąt. Zmieniaj położenie wierzchołka nowego kąta. Zaobserwuj, jak zmienia się miara tego kąta. Powtórz tę czynność kilka razy. Sformułuj wniosek 1.
2. Zaznacz pole wyboru „kąt środkowy oparty na tym samym łuku”. Powtórz czynności z punktu 1. Zaobserwuj i zapisz wniosek 2.
3. Zaznacz pole wyboru „kąt środkowy”. Zmieniaj długość łuku ( $l$ ), na którym oparty jest kąt. Zaobserwuj zależności pomiędzy wielkościami. Zapisz wniosek 3.
4. Zaznacz pole wyboru „kąt wpisany oparty na średnicy”. Zmieniając położenie wierzchołka oraz położenie średnicy zaobserwuj i sformułuj wniosek 4. Zastanów się, w jaki sposób uzasadnić prawdziwość tego wniosku.



5. Zaznacz pole wyboru „kąty wpisane oparte na łukach dopełniających się”. Zmieniając położenie wszystkich niebieskich punktów zmieniaj wierzchołki kątów oraz łuki, na których są one oparte. Zauważ, że czerwony kąt jest oparty na czerwonym łuku a czarny – na czarnym. Zaobserwuj i sformułuj kolejny wniosek. Zastanów się, jak go uzasadnić.



**Wniosek 1:** Miara różnych kątów wpisanych, opartych na tym samym łuku jest .....

**Wniosek 2:** Miara kąta środkowego jest .....  
od miary kąta wpisanego, opartego na tym samym łuku.

**Wniosek 3:** Jeżeli kąt środkowy  $\beta$  jest oparty na łuku długości  $l$ , to zachodzi związek:



**Wniosek 4:** Kąt wpisany oparty na średnicy .....

**Wniosek 5:** Suma miar kątów wpisanych opartych na łukach dopełniających się do okręgu .....

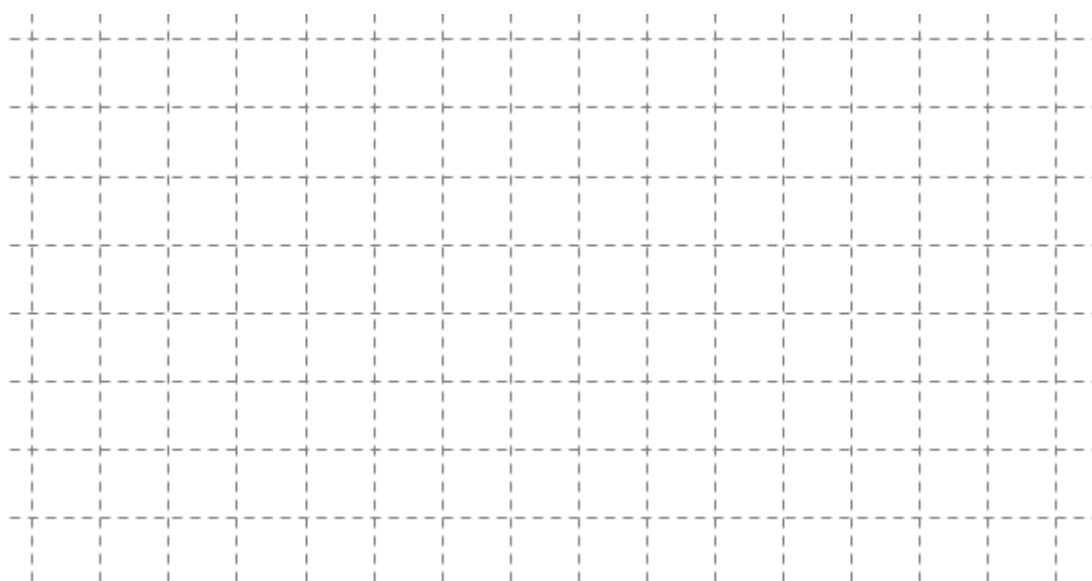
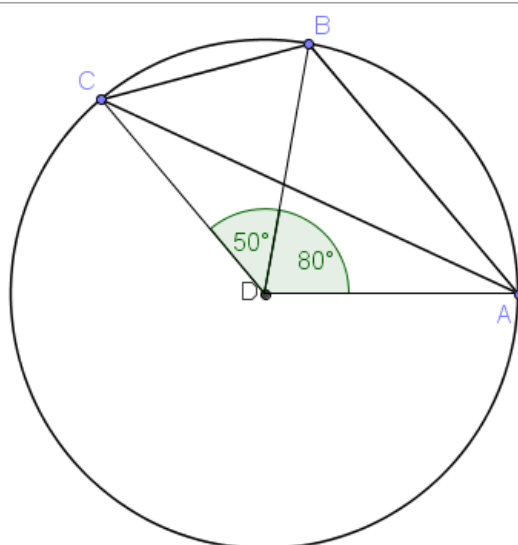
**Zadanie 4:** W aplikacji *planimetria02* wciśnij przycisk „Przykłady”.

Zaznacz pole wyboru „zad. 1”. Skorzystaj z wniosków, które sformułowałeś (sformułowałaś).

W razie potrzeby wykorzystaj wskazówkę.



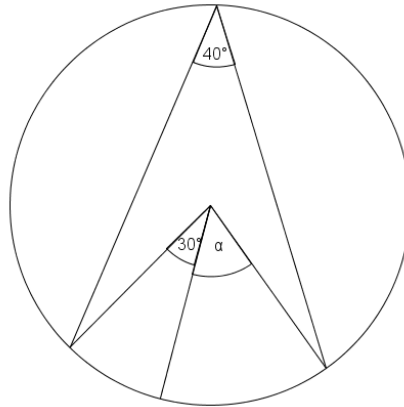
Zaznacz pole wyboru „zad. 2”. Skorzystaj z rysunku poniżej.



**Temat: Kąty w kole – rozwiązywanie zadań.**

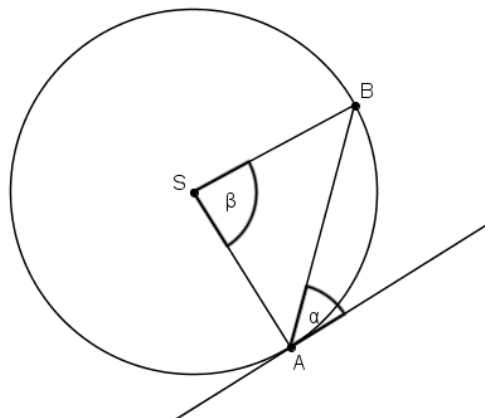
**Zadanie 1.** Poniżej znajdują się oryginalne zadania z informatora maturalnego oraz z arkuszy maturalnych z lat 2010 – 2013.

1. Zaznaczony na rysunku kąt  $\alpha$  jest równy:



- A.  $50^\circ$       B.  $40^\circ$       C.  $30^\circ$       D.  $10^\circ$

2. Kąt między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A (zobacz rysunek) ma miarę  $\alpha=62^\circ$ . Wówczas:



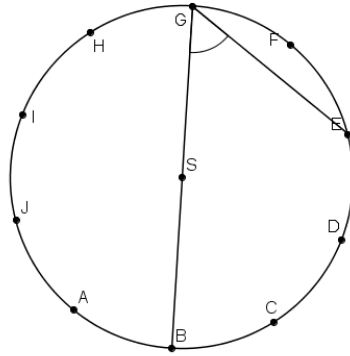
- B.  $\beta=118^\circ$       B.  $\beta=124^\circ$       C.  $\beta=138^\circ$       D.  $\beta=152^\circ$

3. Kąt środkowy i kąt wpisany są oparte na tym samym łuku. Suma ich miar jest równa  $180^\circ$ . Jaka jest miara kąta środkowego?

- C.  $60^\circ$       B.  $90^\circ$       C.  $120^\circ$       D.  $135^\circ$

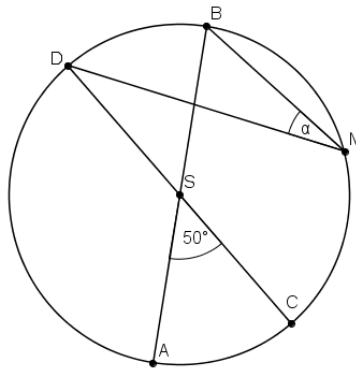
4. Punkty A, B, C, D, E, F, G, H, I, J dzielą okrąg o środku S na dziesięć równych łuków. Oblicz miarę kąta wpisanego BGE zaznaczonego na rysunku.





- D.  $54^\circ$       B.  $72^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $45^\circ$

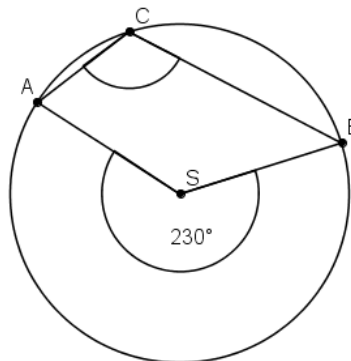
5. Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem  $50^\circ$  (tak jak na rysunku).



Miara kąta  $\alpha$  jest równa:

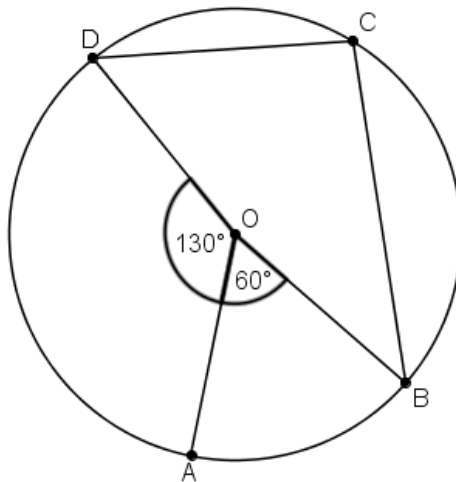
- E.  $25^\circ$       B.  $30^\circ$       C.  $40^\circ$       D.  $50^\circ$

6. Punkty A, B i C leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego ACB jest równa:



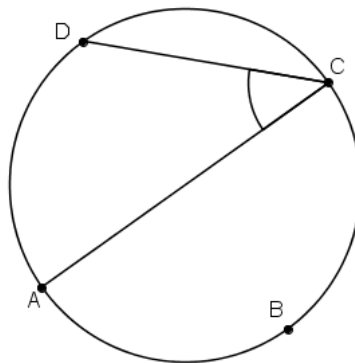
- F.  $65^\circ$       B.  $100^\circ$       C.  $115^\circ$       D.  $130^\circ$

7. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany BAD ma miarę



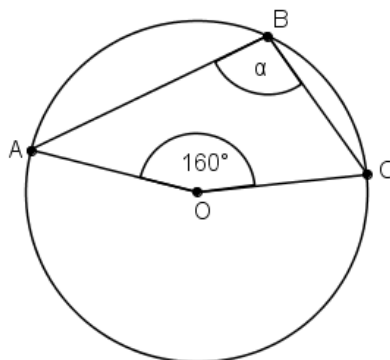
- G.  $150^\circ$       B.  $120^\circ$       C.  $115^\circ$       D.  $85^\circ$

8. Punkty A, B, C, D dzielą okrąg na 4 równe łuki. Miara zaznaczonego na rysunku kąta jest równa:



- H.  $90^\circ$       B.  $60^\circ$       C.  $45^\circ$       D.  $30^\circ$

9. Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany  $\alpha$  ma miarę



- I.  $80^\circ$       B.  $100^\circ$       C.  $110^\circ$       D.  $120^\circ$

### Temat: Wzajemne położenie prostej i okręgu.

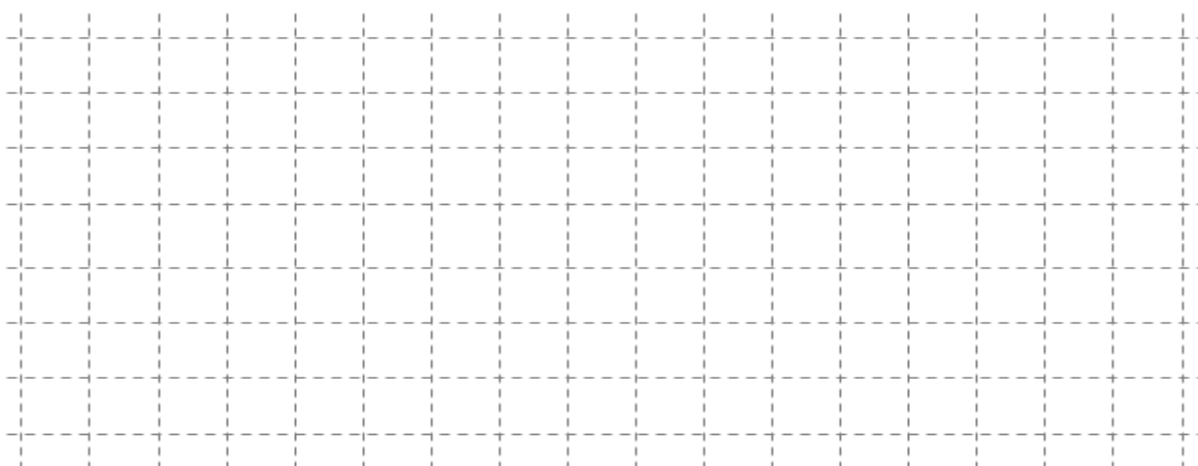
Otwórz aplet *planimetria03*. Zaznacz pole wyboru „wzajemne położenie prostej i okręgu”. Możesz zmieniać promień okręgu (za pomocą suwaka), przemieszczać okrąg oraz przemieszczać prostą (ciągnąc za środek okręgu lub punkt na prostej). Obserwuj, w jaki sposób prosta i okrąg mogą być położone względem siebie. Zapisz odpowiednie warunki – uzupełnij tabelę.

Brak punktów wspólnych	prosta rozłączna	
Jeden punkt wspólny	prosta styczna	
Dwa punkty wspólne	prosta sieczna	

Zwróć uwagę na miarę kąta pomiędzy styczną do okręgu a promieniem w punkcie styczności. Zaznacz pole wyboru „odcinki stycznych”. Zmieniając promień lub środek okręgu oraz punkt przecięcia stycznych zaobserwuj prawidłowość. Sformułuj i zapisz wniosek.



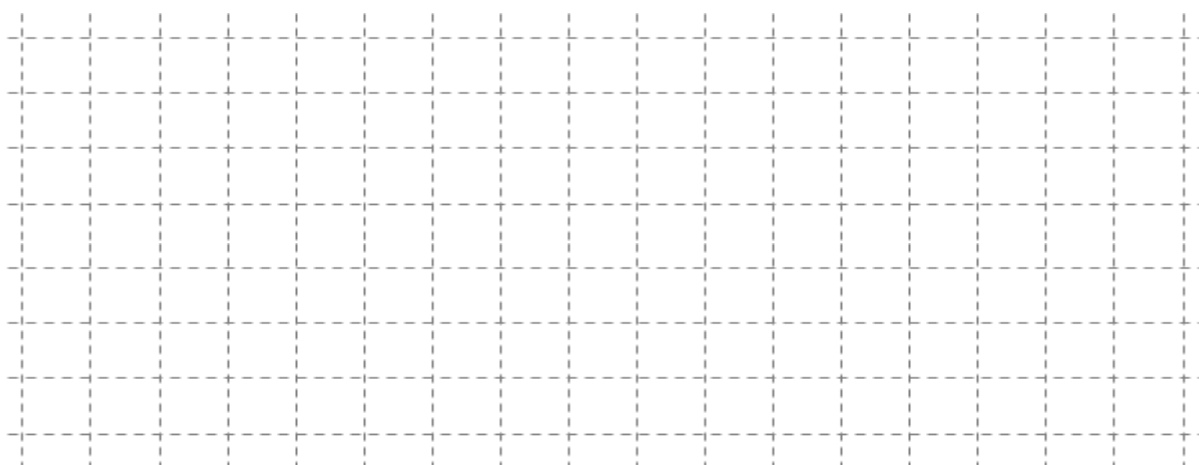
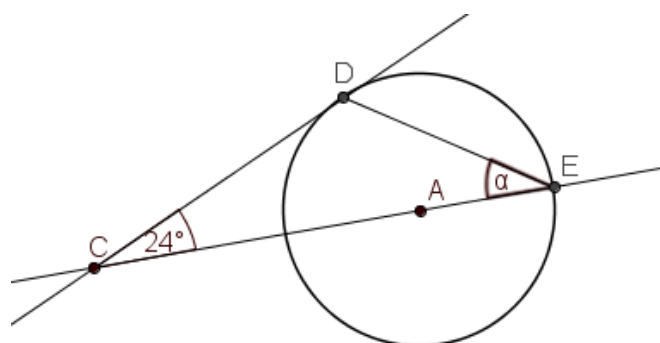
**Zadanie 1.** W trójkąt o bokach długości  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , wpisano okrąg o promieniu  $r$ . Wykaż, że pole tego trójkąta można wyrazić wzorem  $P = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$ .



**Zadanie 2.** W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości  $a$  i  $b$  oraz przeciwprostokątnej długości  $c$  wpisano okrąg. Uzasadnij, że promień tego okręgu ma długość  $r = \frac{a+b-c}{2}$ .



**Zadanie 3.** Oblicz miarę kąta  $\alpha$ .



**Zadanie 4.** Wiedząc, że  $|AC|=13$ ,  $|AD|=5$  i prosta  $GH$  jest styczna do okręgu, oblicz obwód trójkąta  $CHG$ .

