



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”

współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt dla ucznia

Planimetria:

5. Wzajemne położenie dwóch okręgów. Okręgi styczne.
6. Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem warunków styczności okręgów.
7. Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o trójkątach.
8. Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o czworokątach
9. Wielokąty – rozwiązywanie zadań.

Opracowanie L6

Poniższy fragment skryptu będziesz wykorzystywać na dwóch kolejnych lekcjach:

Temat: Wzajemne położenie dwóch okręgów. Okręgi styczne. oraz **Temat: Rozwiązywanie zadań z wykorzystaniem warunków styczności okręgów.**

Instrukcja obsługi apletu planimetria04.

Ekran podzielony jest na dwie części. Suwakami po lewej stronie możesz regulować promienie okręgów. Po prawej stronie (wskazówka) zaobserwujesz zależności jakie muszą być spełnione, aby okręgi były rozłączne, przecinały się lub były styczne.

Ćwiczenie 1. Uruchom aplet *planimetria04*. Ustaw promienie obu okręgów na 1. Następnie powoli zwiększaj promień pierwszego okręgu i obserwuj liczbę punktów wspólnych tych okręgów. Zauważ, przy jakich wartościach r_1 ulega ona zmianie. Wyniki obserwacji umieść w tabeli i wykonaj ponownie to ćwiczenie dla innej wartości r_2 :

liczba punktów wspólnych	$r_2=1$	$ O_1O_2 =4$		$r_2=...$	$ O_1O_2 =4$	
	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$
	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$
	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$
	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$
	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$
	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$	$r_1=.....$	$r_1+r_2=.....$	$ r_1-r_2 =.....$

Wnioski z obserwacji umieść w tabeli poniżej. Sprawdź za pomocą apletu ich słuszność (zahacz pole „wskazówka”).

Wzajemne położenie okręgów	Zaobserwowany związek
okręgi rozłączne zewnętrznie	
okręgi styczne zewnętrznie	
okręgi przecinające się	
okręgi styczne wewnętrznie	
okręgi rozłączne wewnętrznie	

Zadanie 1. Dane są dwa okręgi: pierwszy o środku w punkcie A i promieniu długości a $o_1(A,a)$ oraz drugi o środku w punkcie B i promieniu b $o_2(B,b)$. Uzupełnij tabelę:

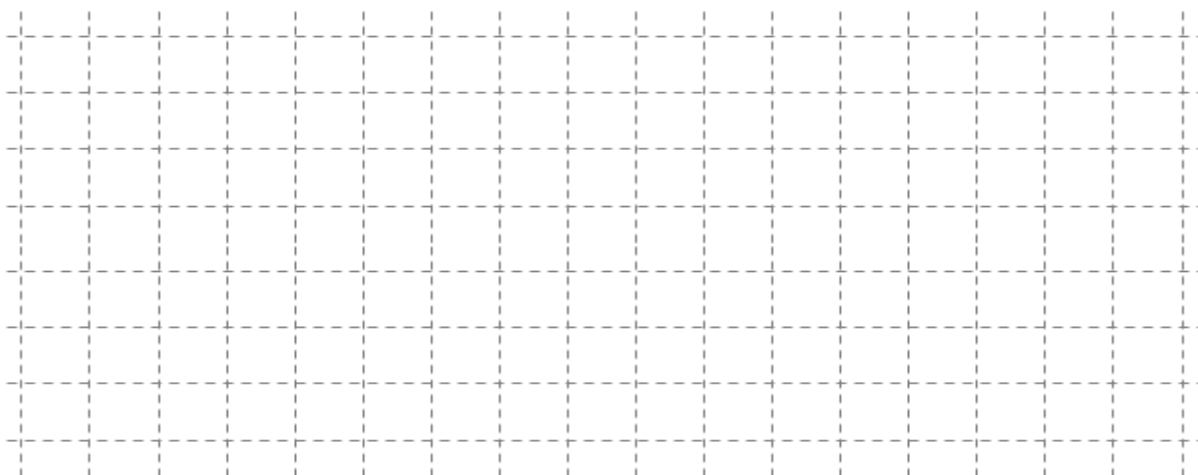
Wzajemne położenie okręgów	$ AB $	a	b
	2	3	4
styczne zewnętrznie		1	7
styczne wewnętrznie		1	7
	$\sqrt{3} + 2$	9	3
	$4\sqrt{5} - 3$	$3\sqrt{5} + 1$	$\sqrt{5} - 4$
	$1\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{14}{24}$
styczne zewnętrznie	8	3,15	

Zadanie 2. Dane są dwa okręgi o promieniach 10 i 15. Mniejszy okrąg przechodzi przez środek większego okręgu. Odległość między środkami tych okręgów jest równa

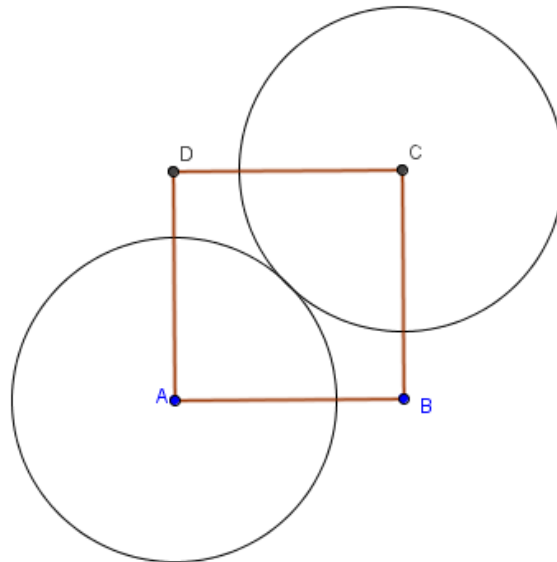
- A. 2,5 B. 5 C. 10 D. 12,5

Zadanie 3. Dane są dwa okręgi: jeden o promieniu długości 4, drugi o promieniu długości 6. Dla jakiej wartości parametru m okręgi te są styczne wewnętrznie a dla jakiej styczne zewnętrznie, jeżeli odległość pomiędzy środkami tych okręgów wynosi

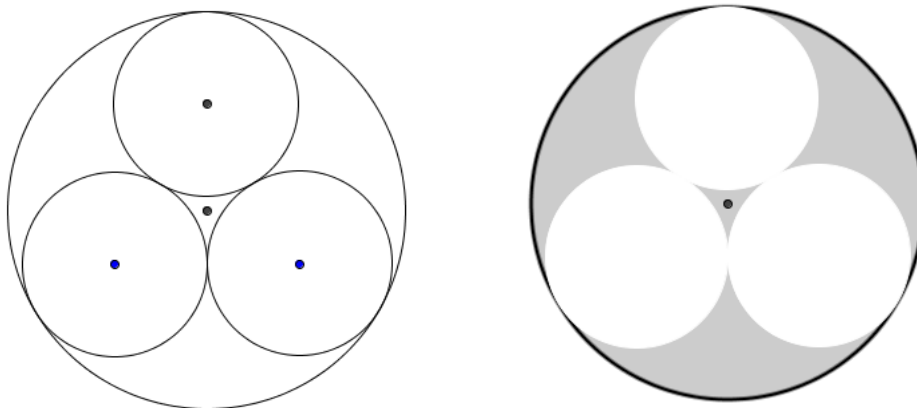
- a) $2m+1$
b) m^2-1



Zadanie 4. Na przeciwległych wierzchołkach kwadratu o boku długości 4 zbudowano jednakowe okręgi. Jaki jest promień tych okręgów, jeżeli są one styczne?



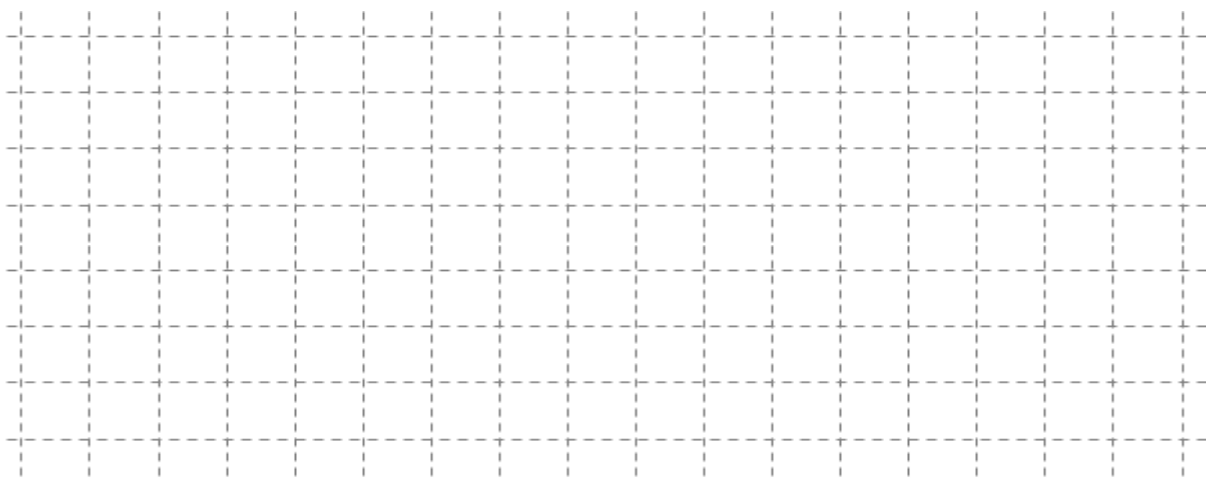
Zadanie 5. W okrąg wpisano trzy jednakowe mniejsze okręgi tak, jak na rysunku.

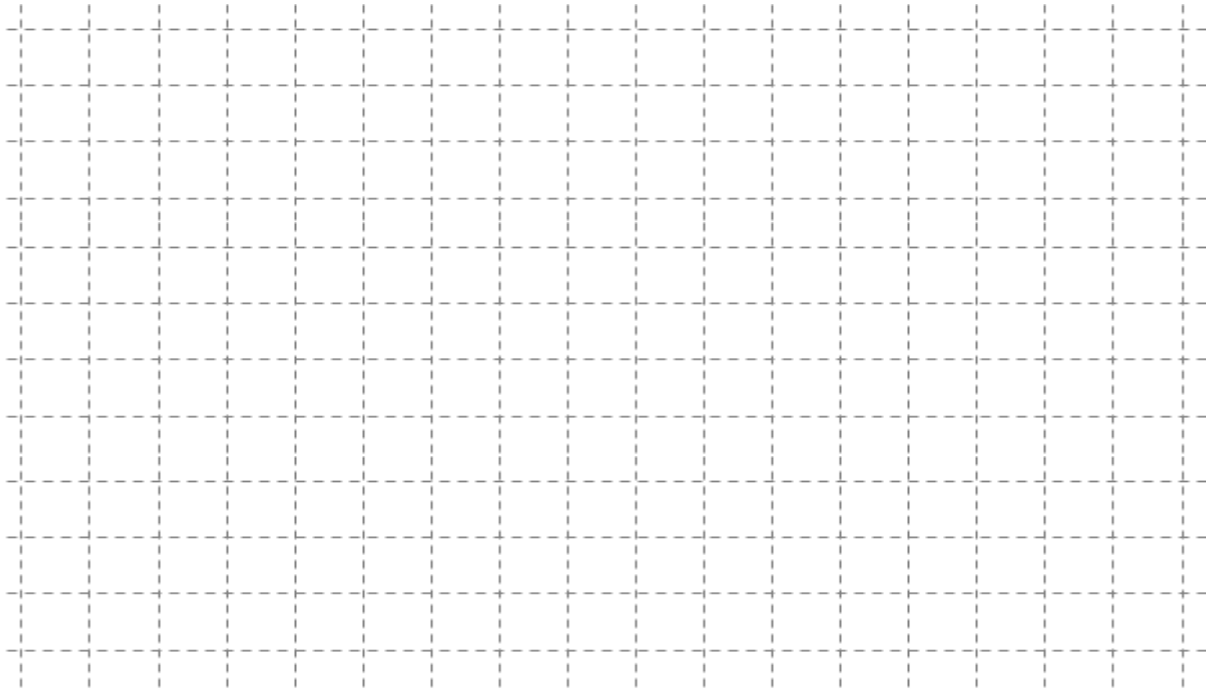


- Oblicz długość promienia dużego okręgu, jeśli małe okręgi mają promień długości 2.
- Jaki promień mają małe okręgi, jeśli promień dużego okręgu to 6?
- W każdym z powyższych przypadków oblicz pole zacieniowanego obszaru.

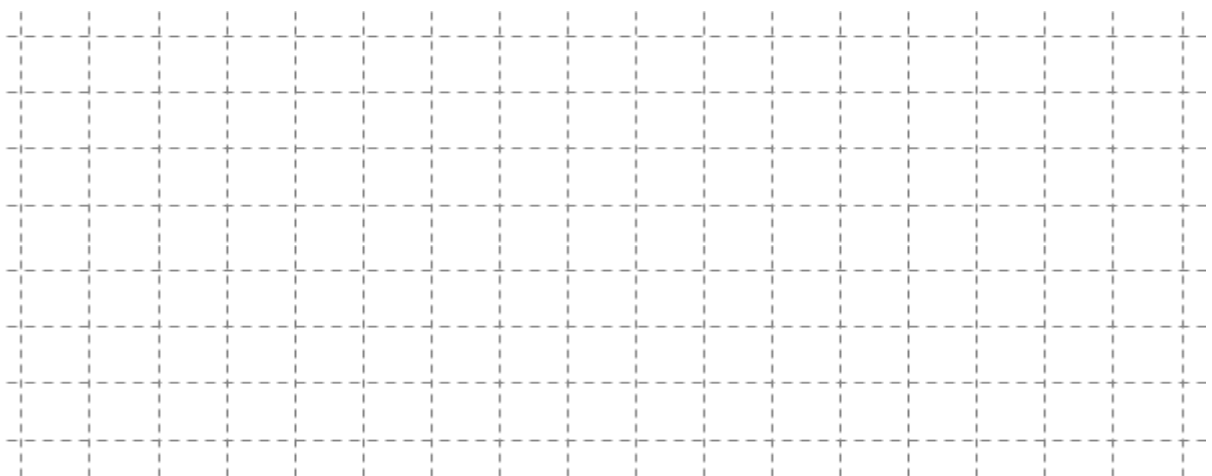
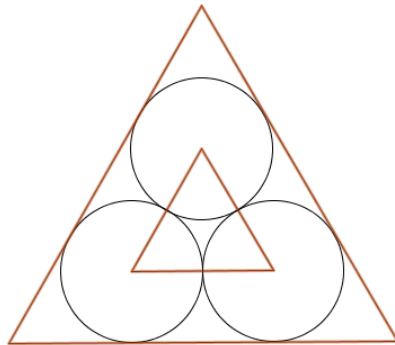


Zadanie 6. Wyobraź sobie, że w duży okrąg o promieniu 6 wpisano 4 małe jednakowe okręgi (analogicznie jak w zadaniu 4). Jaki będzie promień każdego z tych okręgów?





Zadanie 7. W trójkąt równoboczny wpisano trzy jednakowe okręgi (tak, jak na rysunku). Oblicz pole dużego trójkąta, jeśli pole małego trójkąta wynosi $9\sqrt{3}$.



Temat: Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o trójkątach.

Instrukcja obsługi apletu „*planimetria06*”.

Suwakami ustawiasz długości boków trójkąta. Z prawej strony ekranu możesz wyświetlić informacje dotyczące charakterystycznych prostych w trójkącie. Zaznaczenie wybranej opcji spowoduje również pokazanie tych prostych.

Ćwiczenie 1.

Uruchom aplet *planimetria06*. Ustaw długości boków trójkąta tak, żeby był on ostrokątny (np. 6, 7, 8). Zaznacz opcję „wysokość”. Na ekranie po lewej stronie zauważysz proste zawierające wysokości trójkąta, a po prawej – definicję wysokości. Następnie zmieniaj długości boków w ten sposób, aby otrzymać trójkąt prostokątny (jakie liczby należy dobrać?). Zauważ, jak wysokości i ortocentrum zmieniają swoje położenie.

Teraz zbuduj trójkąt rozwartokątny. Co zauważyłaś (zauważyłeś)?

Uzupełnij zdania, dotyczące wysokości trójkąta:

1. Wysokość w trójkącie jest to
2. W trójkącie ostrokątnym wszystkie wysokości leżą trójkąta.
Ortocentrum leży
3. W trójkącie prostokątnym
Ortocentrum leży
4. W trójkącie rozwartokątnym
Ortocentrum leży

Wyczyść pole wyboru „wysokość”, zaznacz „dwusieczna”. Zmieniaj długości boków trójkąta tak, jak dla wysokości. Zaobserwuj położenie punktu przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta.

Zaznacz pole „pokaż okrąg wpisany”. Na ekranie wyświetli się okrąg wpisany w trójkąt. Zwróć uwagę na fakt, że w trójkącie różnobocznym żaden z promieni EF, EG, EH nie zawiera się w dwusiecznej kąta. Czy zmieni się to, gdy trójkąt jest równoramienny? A gdy jest równoboczny? Przypomnij sobie zależność pomiędzy promieniem okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny a jego wysokością i na tej podstawie wyprowadź wzór na jego długość. Co wiesz o długości promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny? Wniosek zapisz poniżej.

1. Dwusieczna kąta to
2. Punkt przecięcia się dwusiecznych kątów wewnętrznych w trójkącie jest środkiem i leży trójkąta.
3. W trójkącie równoramiennym
4. W trójkącie równobocznym
5. Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny stanowi wysokości tego trójkąta, a jego długość wyraża się wzorem (a – długość boku trójkąta):
.....
6. Długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a , b i przeciwprostokątnej c wyraża się wzorem:
.....

Wyczyść pole wyboru „dwusieczna”, zaznacz „symetralna”. Zmieniając długości boków trójkąta obserwuj położenie punktu przecięcia się symetralnych w zależności od tego, czy trójkąt jest ostrokątny, prostokątny czy rozwartokątny.

Zaznacz opcję „pokaż okrąg opisany”. Ustaw trójkąt tak, żeby był prostokątny. Zauważ, że odcinek AL jest środkową w tym trójkącie (dlaczego?).

Uzupełnij zdania, dotyczące symetralnych boków:

- Symetralna boku trójkąta to
1. Środek okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym leży
... .., na trójkącie prostokątnym
a na trójkącie rozwartokątnym
 2. Promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym jest równy
 3. Długość środkowej poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego trójkąta prostokątnego jest równa

Zaznacz wszystkie trzy pola wyboru (wysokość, dwusieczna i symetralna). Dla większej przejrzystości nie wyświetlaj okręgów. Zaobserwuj, że w trójkącie różnobocznym wysokości, symetralne i dwusieczne nie pokrywają się. Sprawdź, jak jest w trójkącie równoramiennym, a jak w równobocznym.

Uzupełnij zdania:

1. W trójkącie dokładnie jedna wysokość jest dwusieczną kąta i jednocześnie symetralną boku.
2. W trójkącie wszystkie trzy wysokości są jednocześnie dwusiecznymi kątów i symetralnymi boków.
3. Z powyższych własności wynika często stosowana zależność: W trójkącie równoramiennym wysokość dzieli kąt pomiędzy równymi ramionami oraz dzieli podstawę

Temat: Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości o czworokątach.

Instrukcja obsługi apletu „planimetria07”.

Suwakami ustawiasz długości podstaw trapezu. Trapez możesz zmieniać również chwytając punkty A i D. Zaznaczenie odpowiedniej opcji powoduje wyświetlenie różnych własności trapezu.

Ćwiczenie 1. Uruchom aplet *planimetria07*. Zaznaczając odpowiednie opcje i przesuważąc punkty zmieniaj trapez w taki sposób, który umożliwi Ci wybranie właściwych stwierdzeń (skreśl niepotrzebne słowa tak, żeby uzyskać zdania prawdziwe lub uzupełnij).

W dowolnym trapezie (oznaczonym jak w aplecie):

1. przekątne są/nie są równe.
2. przekątne dzielą się/nie dzielą się na połowy.
3. przekątne są/nie są prostopadłe.
4. przekątne są/nie są dwusiecznymi kątów.
5. trójkąty ABD i ABC są/nie są przystające.
6. trójkąty ABD i ABC mają równe pola/nie mają równych pól.
7. trójkąty AED i BEC są/nie są przystające.
8. trójkąty AED i BEC mają równe pola/nie mają równych pól.
9. trójkąty ABE i CDE są/nie są podobne.
10. suma miar kątów leżących wynosi 180° .
11. długość odcinka, łączącego środki ramion jest
12. długość odcinka, łączącego środki przekątnych jest
13. Oba powyższe odcinki leżą/nie leżą na jednej prostej.

Ustaw trapez tak, żeby był równoramienny (przesuwaj jeden z wierzchołków). Uzupełnij zdanie oraz zapisz te stwierdzenia, które nie są prawdziwe dla dowolnego trapezu, a są prawdziwe dla trapezu równoramiennego.

W trapezie równoramiennym:

1. Wysokość, poprowadzona z wierzchołka będącego końcem krótszej podstawy dzieli dłuższą podstawę na dwa odcinki, z których jeden ma długość równą a drugi

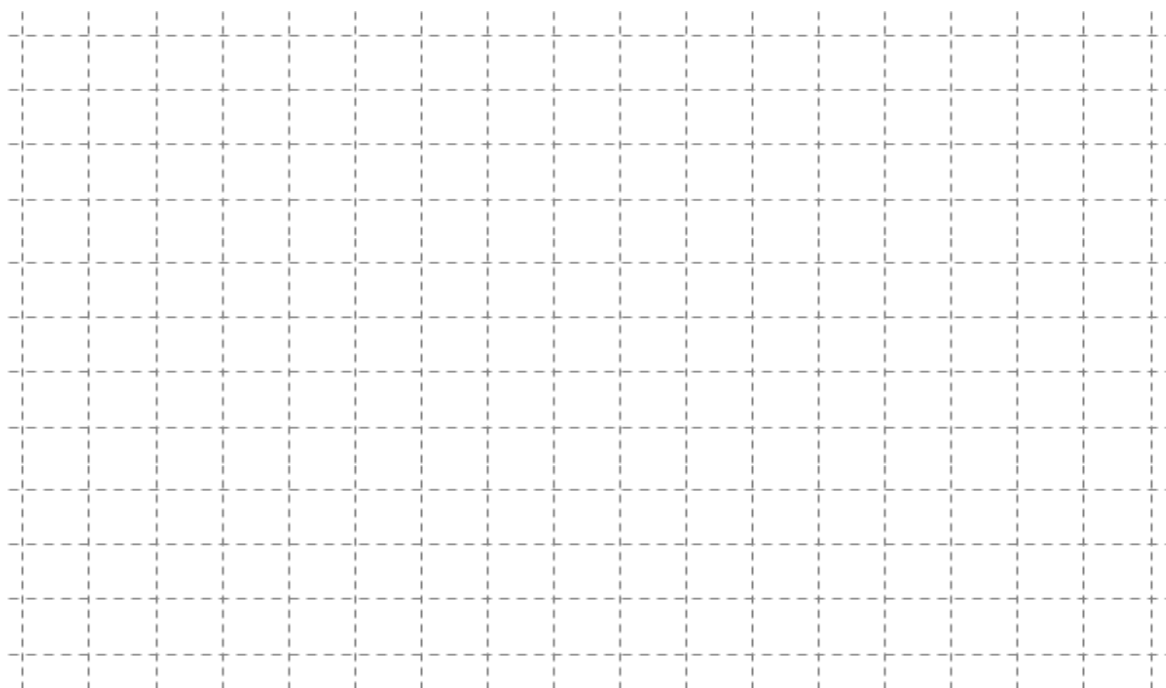
Ustaw długości podstaw trapezu tak, żeby stał się równoległobokiem (co wystarczy zrobić?).
Ponownie uzupełnij zdania.

W równoległoboku:

1. Przekątne są/nie są równe.
2. Przekątne dzielą się/nie dzielą się na połowy.
3. Przekątne są/nie są prostopadłe.
4. Przekątne są/nie są dwusiecznymi kątów.
5. Trójkąty ABD i ABC są/nie są przystające.
6. Trójkąty ABD i ABC mają równe pola/nie mają równych pól.
7. Trójkąty AED i BEC są/nie są przystające.
8. Trójkąty AED i BEC mają równe pola/nie mają równych pól.
9. Suma miar kątów leżących wynosi 180° .

Przesuń wierzchołek równoległoboku tak, żeby stał się rombem. Zapisz te zdania, które nie są prawdziwe dla dowolnego równoległoboku, a są prawdziwe dla rombu.

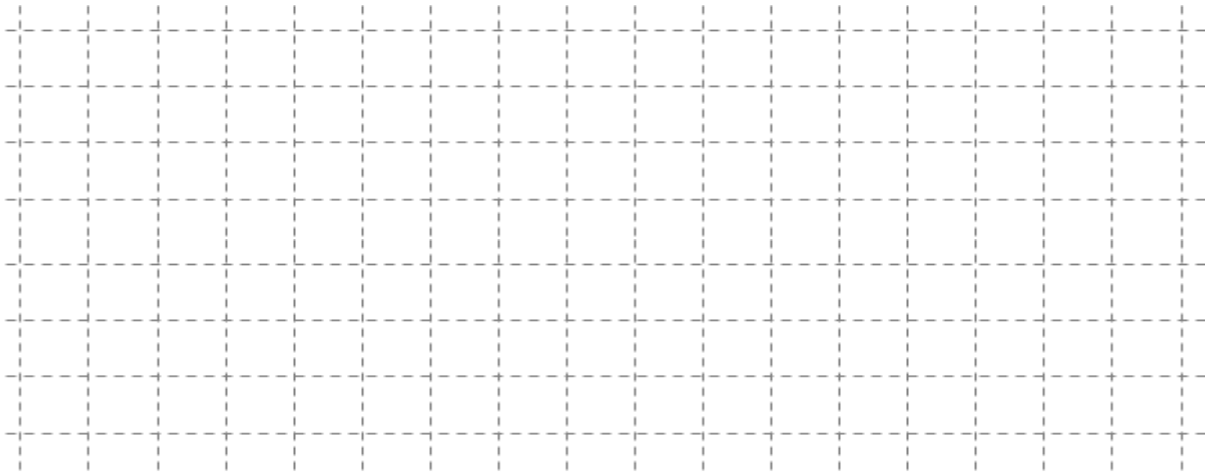
Dodatkowo w rombie:



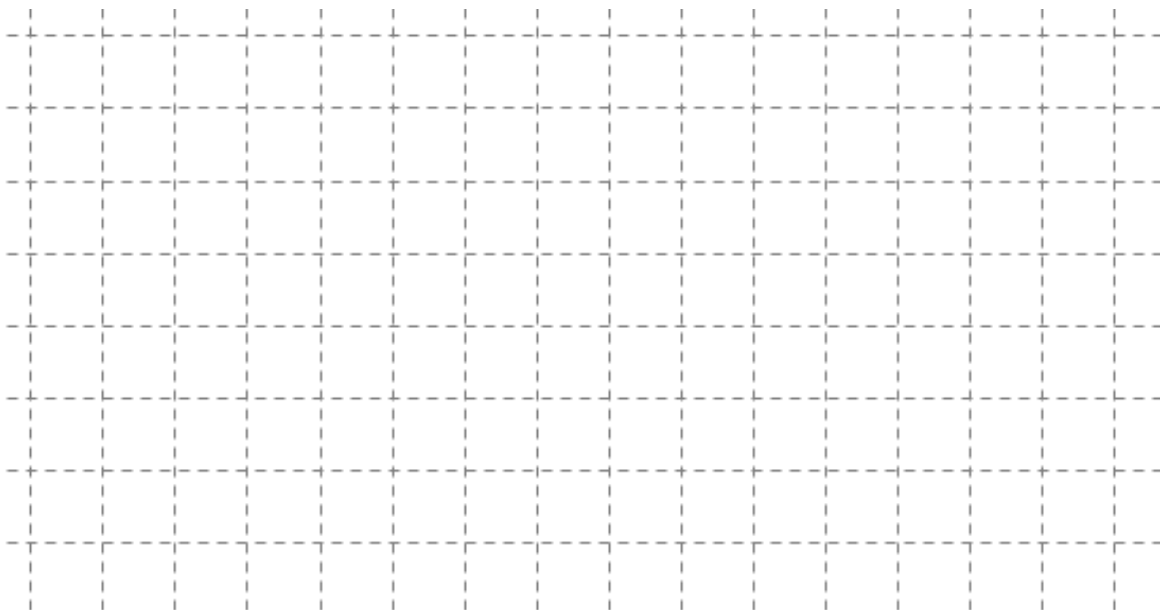
Temat: Wielokąty – rozwiązywanie zadań.

Zadania nr 1, 2 i 6 pochodzą (lub są modyfikacją) zadań ze zbioru „Matematyka. Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum” autorzy: Norbert Dróbka, Karol Szymański, WSiP, Warszawa 2002.

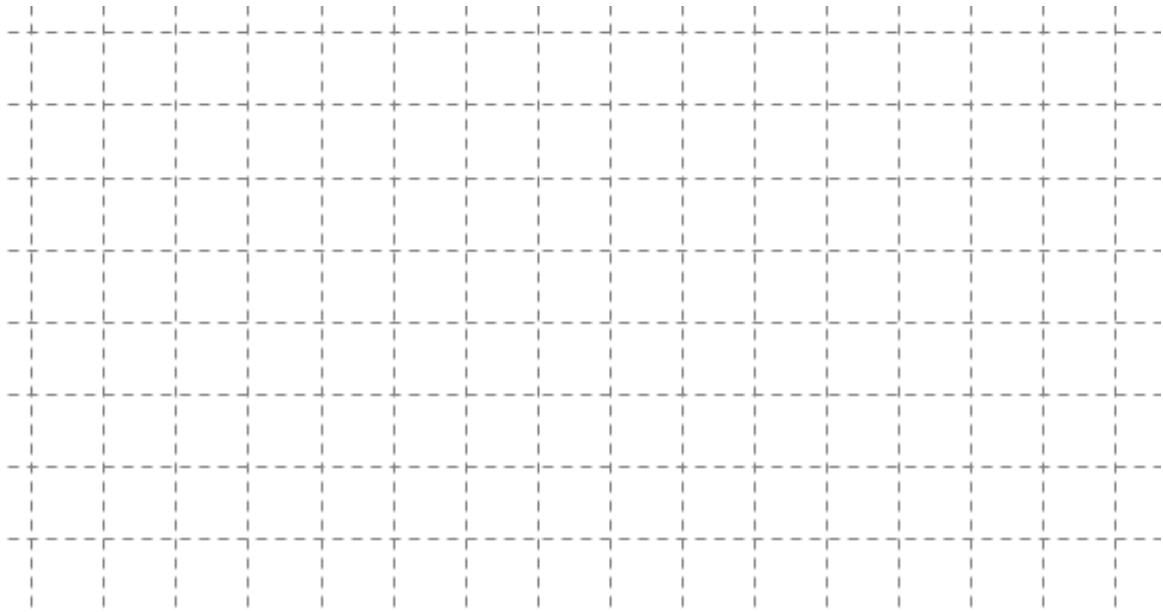
Zadanie 1. (Zad. 11.11 str. 125). Dwie środkowe trójkąta mają długości 12 i 9 i przecinają się pod kątem prostym. Oblicz długości boków tego trójkąta i długość trzeciej środkowej.



Zadanie 2. (12.5 str. 131). Najdłuższy bok trójkąta ma 12cm, a miary jego kątów są w stosunku 1:2:3. Oblicz pole tego trójkąta, długości jego wszystkich wysokości oraz długości jego środkowych.



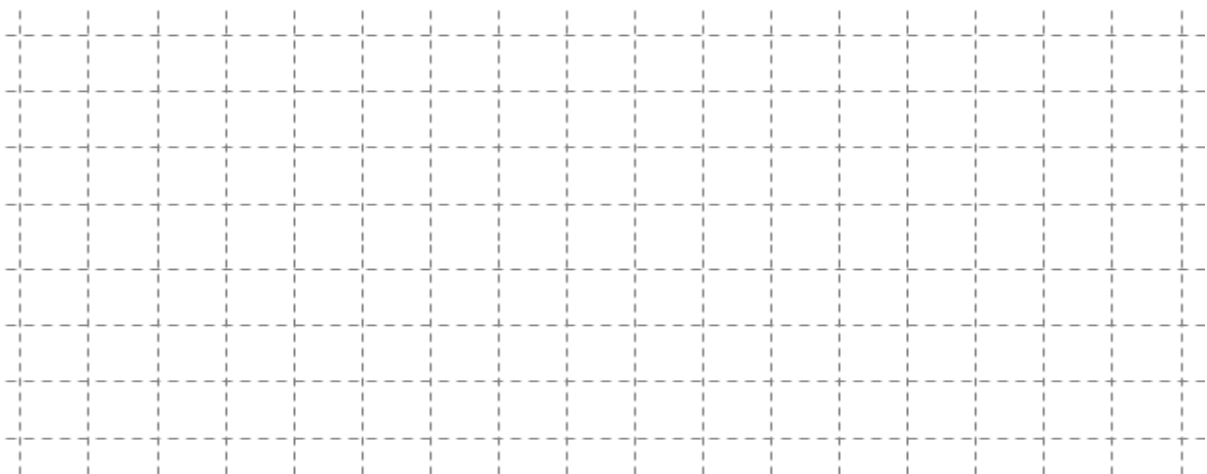
Zadanie 3. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt równoramienny o podstawie długości 10 i ramionach długości 13. Wskazówka: skorzystaj z zależności pomiędzy polem trójkąta i promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



Zadanie 4. Uzasadnij, że pole dowolnego wielokąta opisanego na okręgu o promieniu r wyraża się wzorem $P=pr$, gdzie p jest połową obwodu tego wielokąta.



Zadanie 5. W trapezie odcinek łączący środki boków ma długość 9, a odcinek łączący środki przekątnych ma długość 3. Wiedząc, że wysokość ma długość 4, oblicz pole i obwód tego trapezu.



Zadanie 6. (12.12 str. 132) W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie ma miarę 30° , a obwód trójkąta równy jest 10 cm. Oblicz pole tego trójkąta, długości jego wszystkich wysokości oraz długości jego środkowych.