



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 22

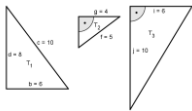
Planimetria

10. Trójkąty podobne, przypomnienie i usystematyzowanie wiadomości
11. Trójkąty podobne. Stosunek pól figur podobnych
12. Cechy podobieństwa trójkątów-zastosowanie wiadomości-planimetria
13. Zastosowanie trygonometrii-pole trójkąta, pole czworokąta
14. Zastosowanie trygonometrii w obliczeniach z planimetrii
15. Obliczenia w planimetrii z wykorzystaniem zależności trygonometrycznych
16. Zastosowanie trygonometrii w obliczeniach użytkowych-geodezja, architektura, geografia
17. Zastosowanie trygonometrii w zadaniach z kontekstem realistycznym
18. Zastosowanie trygonometrii w obliczeniach praktycznych

Opracowanie L7

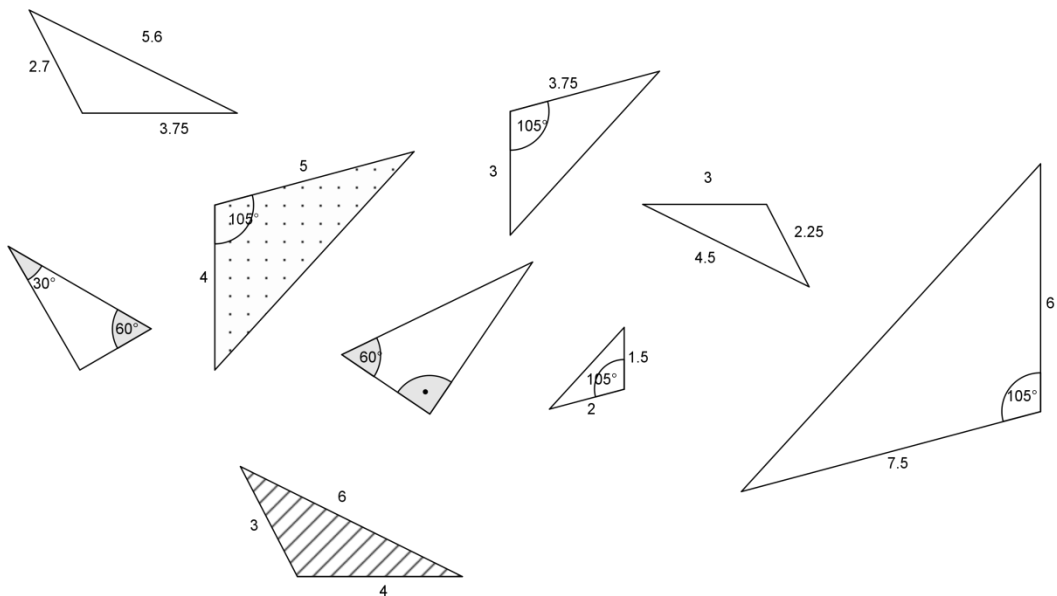
Temat: Trójkąty podobne, przypomnienie i usystematyzowanie wiadomości.

Zadanie 1: Dane są trzy trójkąty.

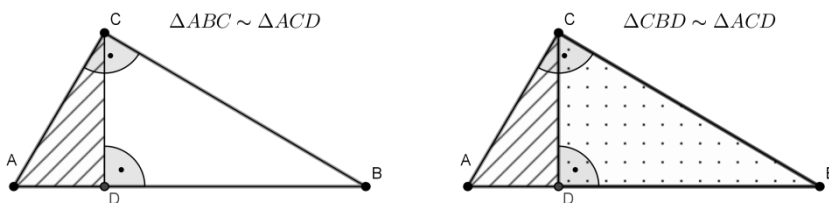


Odszukaj trójkąty, które są do siebie podobne. Podaj odpowiednią cechę podobieństwa.

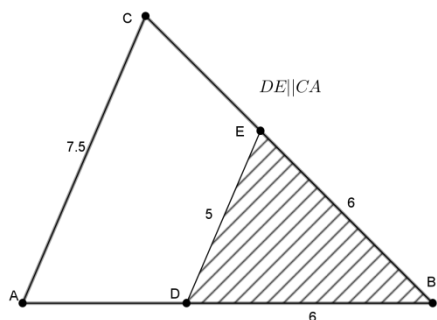
Zadanie 2: Znajdź trójkąty podobne i zamaluj je w taki sam sposób. Podaj odpowiednie cechy podobieństwa.



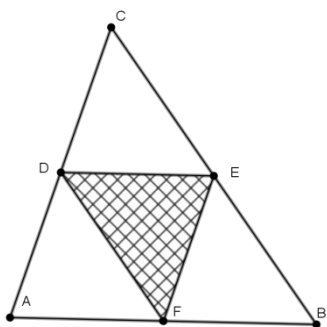
Zadanie 3: Uzasadnij podobieństwo wskazanych trójkątów:



Zadanie 4: Uzasadnij podobieństwo trójkątów $\triangle DBE \sim \triangle ABC$. Oblicz skalę podobieństwa. Oblicz obwód trójkąta ABC.



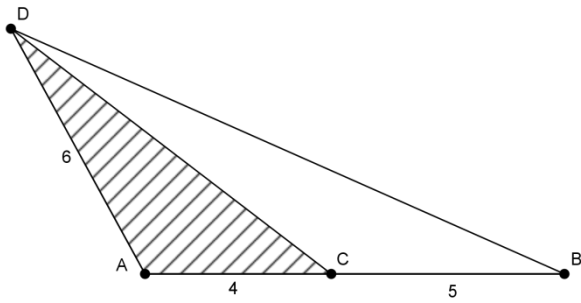
Zadanie 5:



W trójkącie ABC, punkty D, E, F to środki boków

- a) Uzasadnij, że $\triangle DFE \sim \triangle BCA$
- b) Oblicz skalę podobieństwa
- c) Pole $\triangle DFE = 18$, oblicz pole $\triangle ABC$

Zadanie 6: Uzasadnij, że trójkąt ABD jest podobny do trójkąta DCA. Oblicz skalę tego podobieństwa

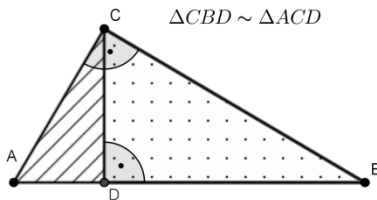


Zadanie 7: Trójkąt ABC o bokach długości 10, 12, 18 jest podobny do trójkąta KLM , którego najdłuższy bok ma długość $13\frac{1}{2}$. Oblicz skalę podobieństwa. Oblicz obwód trójkąta KLM .

Zadanie 8: Trójkąt ABC o bokach długości 5, 6, 9 jest podobny do trójkąta KLM , którego najkrótszy bok ma długość $6\frac{1}{4}$. Oblicz skalę podobieństwa. Oblicz obwód trójkąta KLM .

Temat: Trójkąty podobne. Stosunek pól figur podobnych.

Otwórz aplet planimetria08. W widoku grafiki znajduje się ilustracja graficzna zadania oraz pole wyboru do sprawdzenia, czy poprawnie wykazałeś podobieństwo wskazanych trójkątów. W drugim widoku grafiki jest lista czterech zadań do wyboru i przycisk służący zmianie danych w wybranym zadaniu. Przed Tobą w skrypcie są analogiczne cztery zadania do rozwiązania. Ćwiczenia w aplecie mają taki sam stopień trudności ale tam możesz sprawdzić, czy wszystko dobrze zrozumiałeś i losować nowe dane do tej samej treści zadania. Za każdym razem po zaznaczeniu odpowiedniego pola wyboru sprawdzisz Swoje rozwiązanie.

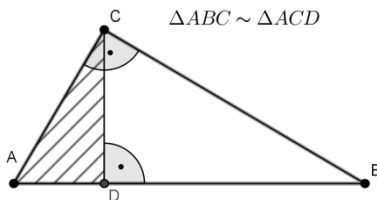


rys.1

Zadanie 1: W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną AB. Dane są $h = |CD| = 2\sqrt{3}$ oraz $|DB| = 6$ Oblicz:

a) długość odcinka $|AD|$

b) pole trójkąta ABC.

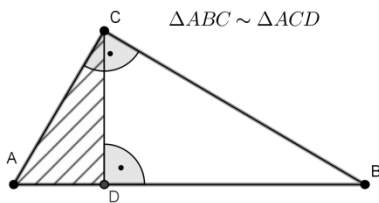


rys.2

Zadanie 2: W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną AB. Dane są: $|AC| = 2\sqrt{3}$ oraz $|CB| = 2\sqrt{6}$ Oblicz:

a) długość odcinka $|AD|$

b) skalę podobieństwa $\Delta ADC \sim \Delta ACB$



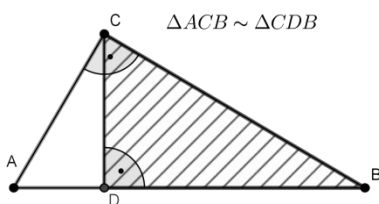
rys.3

Zadanie 3: W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest spodem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną AB. Dane są: $P_{ADC} = 5$ oraz $P_{ABC} = 25$, $|CD| = h = 2\sqrt{5}$. Oblicz:

a) skalę podobieństwa $\Delta ADC \sim \Delta ACB$

,

b) długość odcinka $|CB|$



rys.4

Zadanie 4: W trójkącie prostokątnym ABC punkt D jest spodem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną AB. Dane są: $P_{CDB} = 6\sqrt{3}$ oraz $\Delta ACB \sim \Delta CDB$ w skali $k = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Długość

$|CB| = 4\sqrt{3}$. Oblicz:

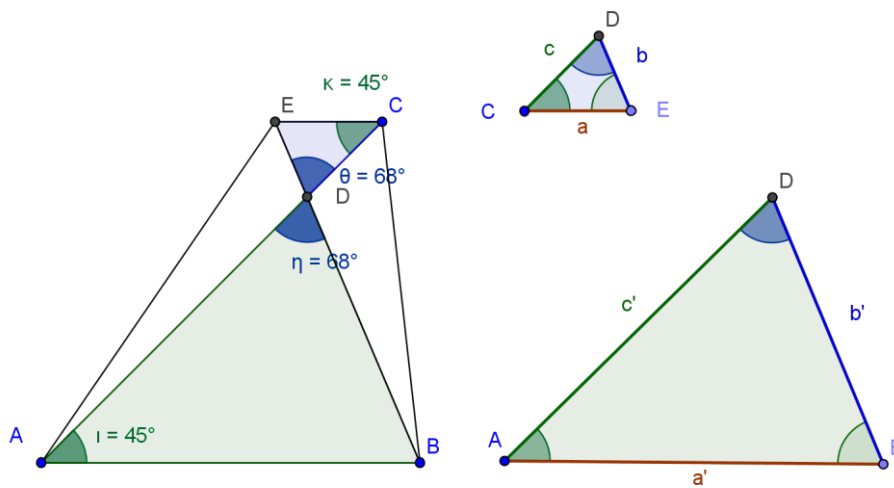
a) pole P_{ACB}

b) długość odcinka CA

Temat: Cechy podobieństwa trójkątów-zastosowanie wiadomości-planimetria.

Masz do dyspozycji aplet planimetria09 ilustrujący własności figur podobnych. Na stronie głównej znajdują się następujące przyciski:

- a) teoria - służy do zilustrowania zależności, które zachodzą w trójkątach podobnych (po podziale trapezu przez przekątną). Wyświetlany jest stosunek długości odpowiadających sobie boków, stosunek obwodów trójkątów podobnych i stosunek pól figur podobnych
- b) nowy przykład - służy do zmiany wymiarów trapezu
- c) zadania - służą do zmiany widoku z teorią na stronę z treścią zadań. Na tej stronie masz listę trzech zadań dotyczących podobieństwa trójkątów. Jeśli już wybierzesz numer zadania, możesz ćwiczyć to zadanie dla różnych zestawów danych (przycisk zmiana danych)



Zadanie 1: Dany jest trapez ABCE, w którym długości podstaw wynoszą $|AB| = 5$, $|EC| = \frac{5}{3}$

a) uzasadnij, że $\triangle DCE \sim \triangle DAB$

b) oblicz stosunek długości odcinków $\frac{|CD|}{|DA|}$

c) oblicz stosunek pól trójkątów $\frac{P_{DCE}}{P_{DAB}}$

Zadanie 2: Dany jest trapez ABCE, w którym przekątne przecinają się w punkcie D. Korzystając z faktu, że $\Delta DCE \sim \Delta DAB$, wykaż, że $|DA| \cdot |DE| = |DB| \cdot |DC|$

Zadanie 3: Dany jest trapez ABCE, w którym przekątne przecinają się w punkcie D. Przekątne dzielą trapez na cztery trójkąty. Ich pola wynoszą odpowiednio $P_{DCE} = 1.29$, $P_{ABD} = 7$

a) oblicz stosunek długości odcinków $\frac{|AD|}{|DC|}$

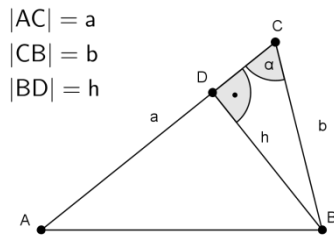
b^{***}) Wykaż, że $P_{AED} = P_{BCD}$

c^{***}) Oblicz stosunek pól $\frac{P_{DAE}}{P_{CDE}}$

d^{***}) Oblicz pole trapezu ABCE

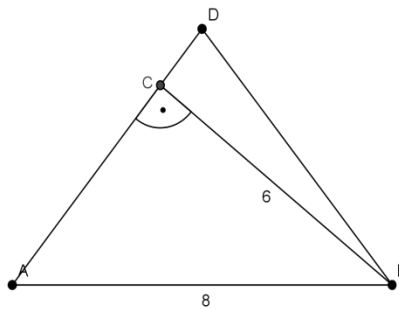
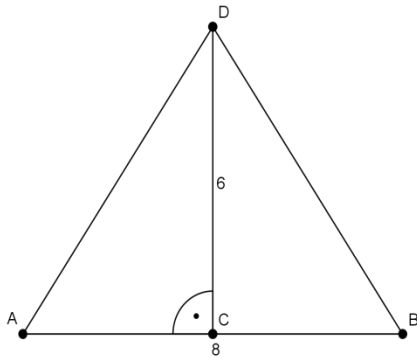
Temat: Zastosowanie trygonometrii-pole trójkąta, pole czworokąta.

zadanie 1: Uzasadnij wzór na pole trójkąta $P = \frac{1}{2}absin\alpha$. Oznaczenia jak na rysunku.

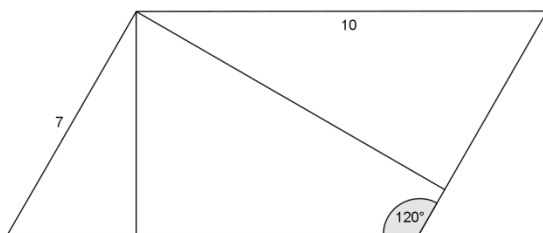


zadanie 2: Oblicz pole trójkąta równoramiennego, którego ramiona o długości 10, tworzą kąt o mierze 65° .

zadanie 3: Oblicz miary kątów w trójkącie równoramiennym o podstawie 8, i wysokości 6. Rozpatrz dwa przypadki.

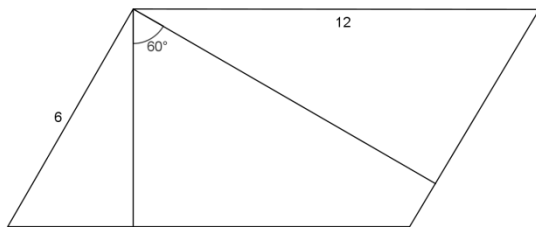


zadanie 4: Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 7 i 10, a jeden z jego kątów ma miarę 120° . Oblicz długości wysokości tego równoległoboku.

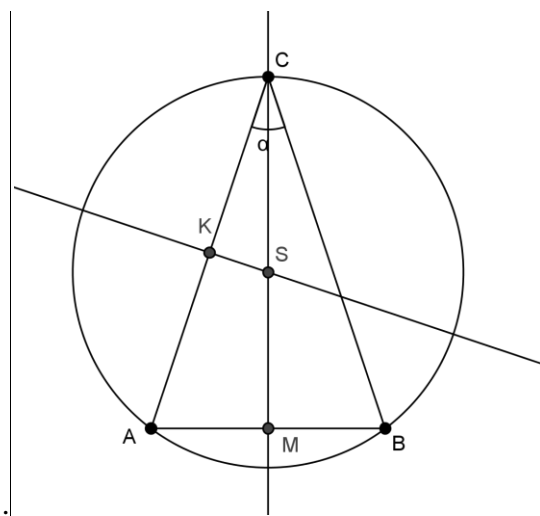


zadanie 5: Pole trójkąta równoramiennego wynosi 6cm^2 , a jego ramiona mają długość 4cm . Oblicz miary kątów tego trójkąta.

zadanie 6: Oblicz pole równoległoboku, którego boki mają długości 6 i 12 , a kąt między wysokościami poprowadzonymi z tego samego wierzchołka ma 60° .



zadanie 7** : Oblicz pole koła opisanego na trójkącie równoramiennym o ramionach długości 6 i kącie między nimi 70° . Środek okręgu opisanego na trójkącie leży na przecięciu symetrycznych boków.



Temat: Zastosowanie trygonometrii w obliczeniach z planimetrii.

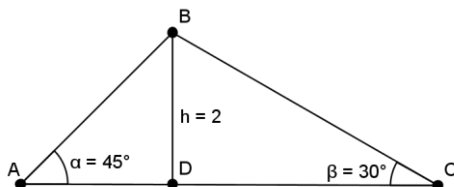
zadanie 1: W trójkącie prostokątnym najdłuższy bok ma 10, a najmniejszy kąt ma miarę 40° . Oblicz długość średniego boku. Oblicz pole tego trójkąta i długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną.

Zadanie 2: W trójkącie prostokątnym przyprostokątne mają długości 6 i 2. Wyznacz wartość wyrażenia $a = \sin\alpha + \cos\alpha$, oraz $h = \sin\alpha \cdot \cos\alpha$, gdzie α jest najmniejszym kątem ostrym tego trójkąta. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa ma długość a , zaś wysokość h .

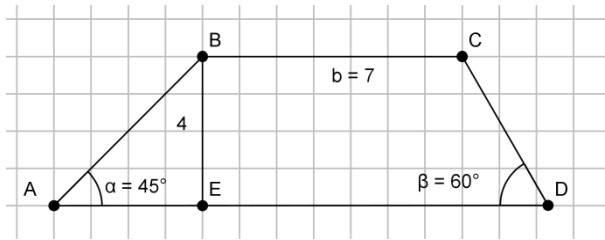
Zadanie 3: Samolot startuje z lotniska pod kątem 30° do poziomu. Oblicz na jakiej wysokości znajdzie się samolot po przebyciu 3km w linii prostej.

Zadanie 4: Tomek leżąc na łące w odległości 10m od drzewa widzi jego wierzchołek pod kątem 45° . Oblicz wysokość drzewa.

Zadanie 5: Oblicz pole i obwód trójkąta ABC, gdzie wysokość poprowadzona z wierzchołka B ma długość 2.



Zadanie 6: Oblicz pole i obwód trapezu



Zadanie 7: Boki równoległoboku mają długości 3cm i 6cm, a jego pole jest równe 12cm^2 . Oblicz miary kątów tego równoległoboku.

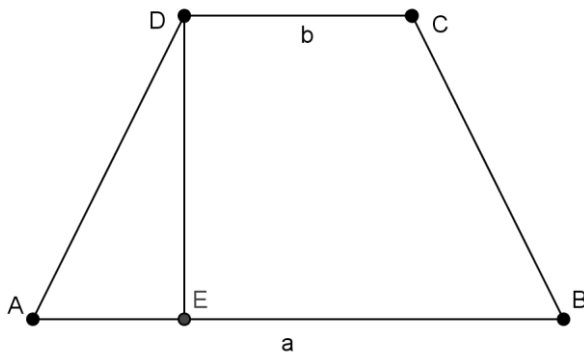
Zadanie 8: Oblicz pole i obwód prostokąta, którego przekątne o długości 12cm przecinają się pod kątem 30° .

Zadanie 9: Bok rombu ma długość 6cm, a jeden z jego kątów ma miarę 70° . Oblicz pole tego rombu i długości jego przekątnych

Temat: Obliczenia w planimetrii z wykorzystaniem zależności trygonometrycznych

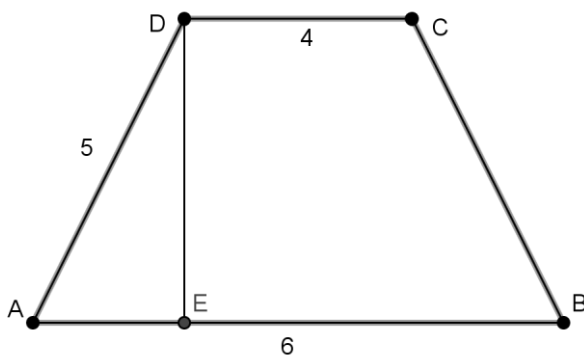
zadanie 1: Oblicz pole równoległoboku, którego przekątna o długości 12 tworzy kąt 30° z bokiem o długości 8.

zadanie 2: Dany jest trapez równoramienny o podstawach długości a i b . Uzasadnij, że $|AE| = \frac{a-b}{2}$,
 $|BE| = \frac{a+b}{2}$

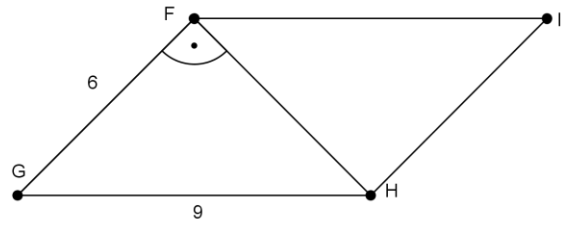
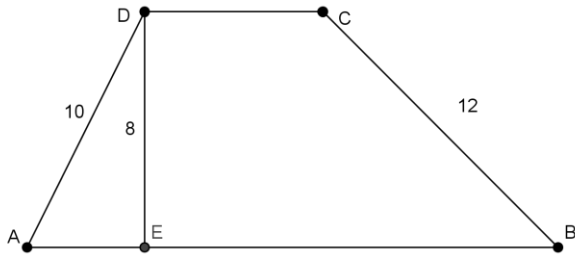


zadanie 3: W trapezie równoramiennym ABCD przekątna $|DB| = 12$, tworzy z podstawą AB kąt 60° . Oblicz pole trapezu.

zadanie 4: Oblicz miary kątów w trapezie równoramiennym ABCD, gdzie DE jest wysokością trapezu.

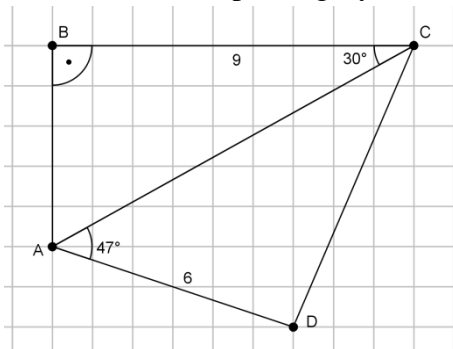


Zadanie 5: Oblicz miary kątów w narysowanych czworokątach



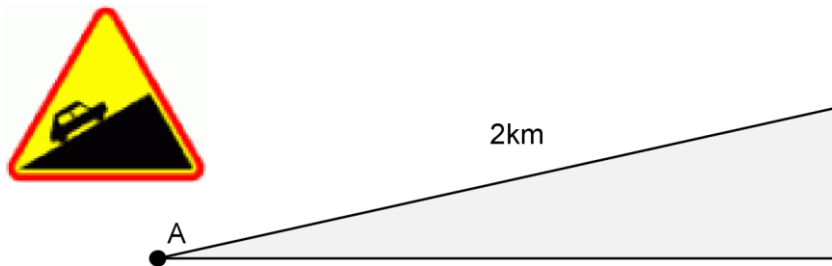
zadanie 6: Oblicz długość wysokości w trójkącie prostokątnym opuszczonej na przeciwprostokątną. Najmniejszy kąt w tym trójkącie ma miarę 35° , a dłuższa przyprostokątna ma długość 10.

zadanie 7: Oblicz pole figury



Temat: Zastosowanie trygonometrii w obliczeniach użytkowych-geodezja, architektura, geografia.

Zadanie 1: Pochylenie poziome trasy w transporcie drogowym opisuje różnicę wysokości pomiędzy dwoma punktami drogi kołowej odniesioną do odległości dzielącej te punkty. Nachylenie zwykle podaje się w %. Oblicz jaka jest różnica wysokości między szczytem wzniesienia a punktem A, jeśli pochylenie wynosi 8%.



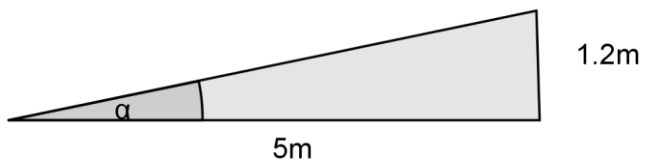
Zadanie 2: Oblicz pochyłość dla podjazdu o długości 80m i wysokości wzniesienia 2m. Jaki kąt tworzy to wzniesienie w stopniach.

Zadanie 3: Drabina długości 1.8m sięga na wysokość 1.7m. Jaki kąt tworzy drabina z podłożem?

Zadanie 4: Składana drabina po wysunięciu ma długość 5m. W jakiej odległości od pionowej ściany należy ustawić dolny koniec drabiny, aby górny jej koniec opierał się o ścianę na wysokości 4m od podłoża? Wyznacz miarę kąta, jaki tworzy drabina z podłożem.

Zadanie 5: Maszt ustawiony poziomo rzuca cień długości 100m. Oblicz wysokość tego masztu, jeżeli wiadomo, że kąt padania promieni słonecznych mierzony od poziomu ziemi ma miarę 30° .

Zadanie 6: Miara kąta α nachylenia podjazdu do poziomu powinna spełniać warunek $\alpha < 15^{\circ}$. Sprawdź, czy podjazd przedstawiony w przekroju poprzecznym na rysunku spełnia ten warunek.

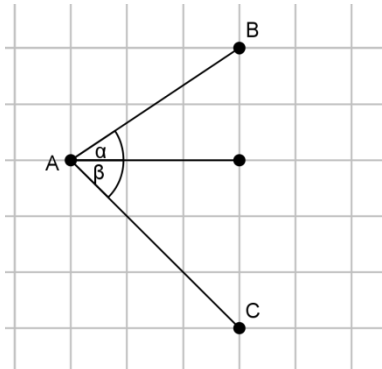


Temat: Zastosowanie trygonometrii w zadaniach z kontekstem realistycznym.

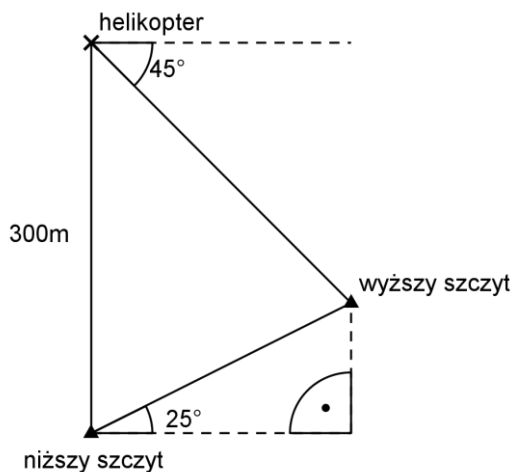
Określenia dotyczące widoczności obiektów

α -kąt elewacji

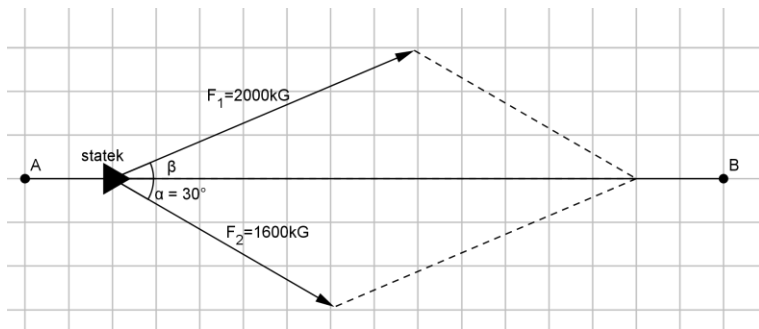
β -kąt depresji



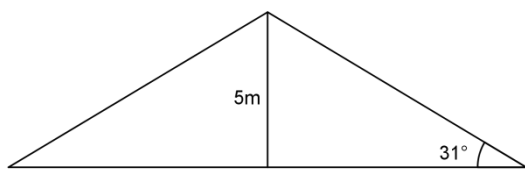
Zadanie 1: Helikopter przelatuje 300m nad wierzchołkiem góry o wysokości 1700m n.p.m. Drugi wyższy szczyt górski jest widoczny z helikoptera pod kątem depresji 45° , zaś z niższego szczytu pod kątem elewacji 25° . Oblicz odległość między dwoma szczytami oraz wysokość drugiego szczytu. (Przemysław Butrym, Matematyka w zadaniach praktycznych)



Zadanie 2: Dwa holowniki ciągną duży statek do portu. Większy z nich ma siłę uciągu $F_1 = 2000kG$, a mniejszy $F_2 = 1600kG$. Wiedząc, że statek ma się poruszać prosto wzdłuż linii AB, oblicz kąt β , jaki kierunek holownika pierwszego tworzy z linią AB, skoro $\alpha = 30^\circ$.



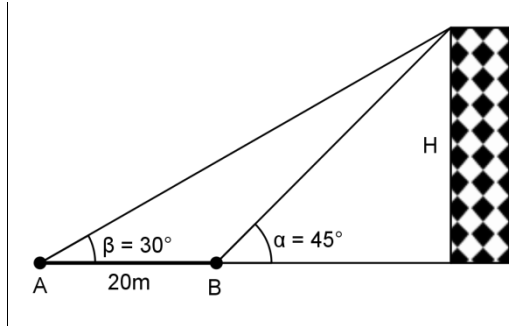
Zadanie 3: Na rysunku przedstawiono przekrój dachu o wysokości 5m i kącie nachylenia do poziomu 31° . Oblicz powierzchnię tego dachu, jeżeli jest on zbudowany z dwóch prostokątnych części o długości 20m. Wynik podaj z dokładnością do 1m^2 .



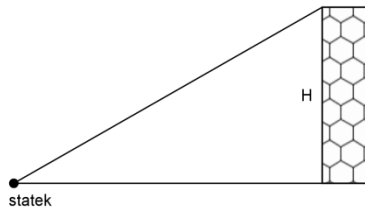
Zadanie 4: Krzywa wieża w Ząbkowicach Śląskich ma wysokość 34m i jest odchylona od pionu o 2m. O ile stopni od pionu odchylona jest wieża? Wynik podaj z dokładnością do 0.5° .

Temat: Zastosowanie trygonometrii w obliczeniach praktycznych.

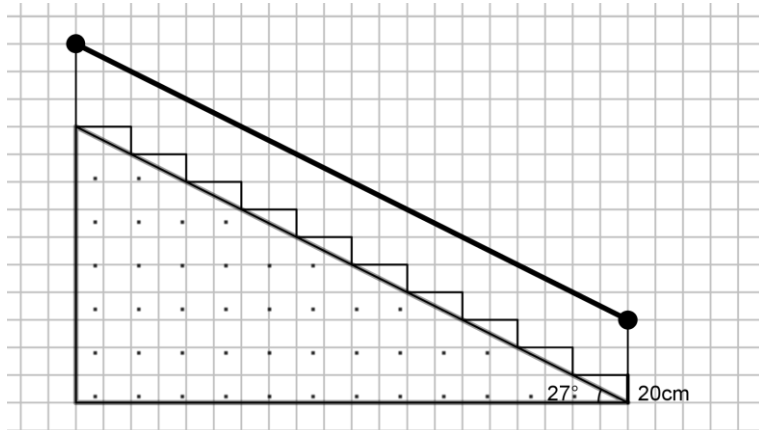
Zadanie 1: Oblicz wysokość wieży.



Zadanie 2: Ze szczytu latarni morskiej wysokości 80m , stojącej nad brzegiem morza, widać w danej chwili płynący statek pod kątem depresji o mierze 12° . Oblicz odległość statku od brzegu morza.



Zadanie 3: Oblicz długość poręczy wzdłuż schodów o przekroju poprzecznym na rysunku, jeżeli każdy stopień ma wysokość 20cm , a miara kąta nachylenia schodów do poziomu wynosi 27° .



Zadanie 4: Za wygodne uważa się schody, których stopnie mają wysokość 17cm, i głębokość (szerokość użyteczna) 28cm. Jaki jest kąt nachylenia takich schodów? Wynik podaj z dokładnością do 1° .

Zadanie 5: Kąt nachylenia podjazdu dla wózków nie może przekraczać 8° . Jaką co najmniej długość musi mieć podjazd dla wózków, jeżeli różnica poziomów wynosi 1m? Wynik podaj z dokładnością do 0.1m.

Zadanie 6: Latawiec jest przywiązany do napiętego sznurka długości 30m, nachyłego do podłoża pod kątem 55° . Na jakiej wysokości znajduje się latawiec? Wynik podaj z dokładnością do 0.1m