



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 26

Stereometria:

1. Przypomnienie wiadomości o graniastosłupach
2. Kąty między odcinkami w graniastosłupach
3. Kąty między odcinkami i płaszczyznami w graniastosłupach prawidłowych
4. Kąty między odcinkami i płaszczyznami w graniastosłupach nieprawidłowych
5. Kąty między ścianami w graniastosłupach
6. Zastosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków i miar kątów w graniastosłupach
7. Zastosowanie trygonometrii do obliczania pól graniastosłupów
8. Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości graniastosłupów

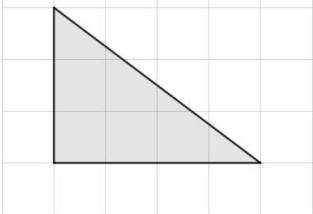
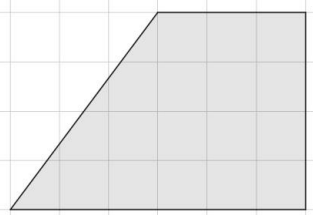
Opracowanie Jerzy Mil

Temat: Przypomnienie wiadomości o graniastosłupach

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria02*.
- Suwakiem n zmienisz kolejne widoki, cztery różne graniastosłupy o podstawie trójkąta:
 - graniastosłup I – rysunek: $n=1$, siatka: $n=2$,
 - graniastosłup II – rysunek: $n=3$, siatka: $n=4$,
 - graniastosłup III – rysunek: $n=5$, siatka: $n=6$,
 - graniastosłup IV – rysunek: $n=7$, siatka: $n=8$.
- Suwakiem a ustawisz długość krawędzi podstawy, a suwakiem h wysokość graniastosłupa
- Na rysunkach graniastosłupów ($n=1, 3, 5$) możesz obracać bryłę za pomocą suwaków:
 - α – wokół osi poziomej, β – wokół osi pionowej
 - suwaki s_α i s_β pozwalają na ustawienie szybkości automatycznej zmiany wartości suwaków α i β
- Określ co jest podstawą graniastosłupa, jaki kształt mają ściany boczne, czy graniastosłup jest prosty.

Zadanie 1. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupów o danej na rysunku podstawie i wysokości. Przyjmij $1\text{ kratka} = 1\text{ cm}$.

| Podstawa | Wysokość | Objętość | Pole powierzchni całkowitej |
|---|----------|----------|-----------------------------|
|  | 6cm | | |
|  | 2cm | | |

Zadanie 2. Uzupełnij tabelę.

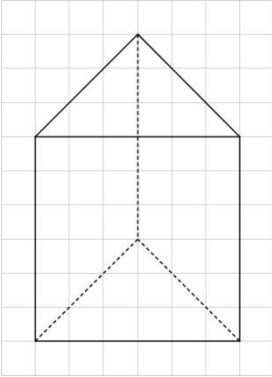
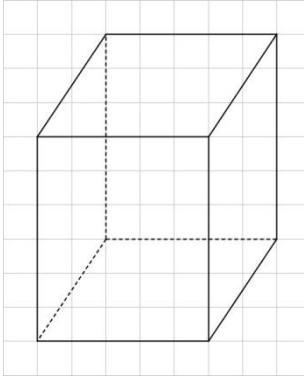
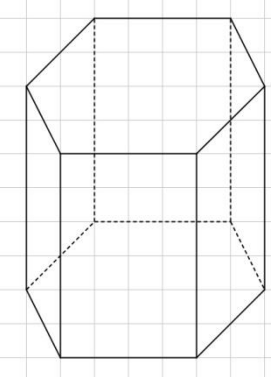
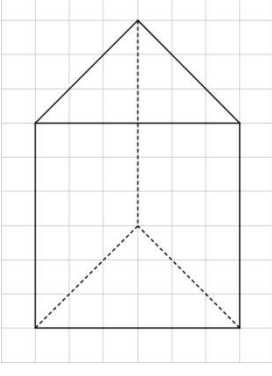
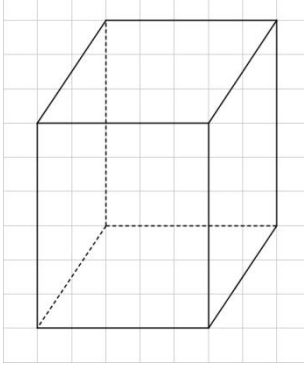
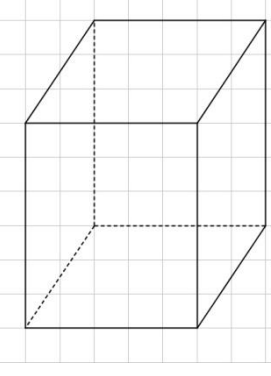
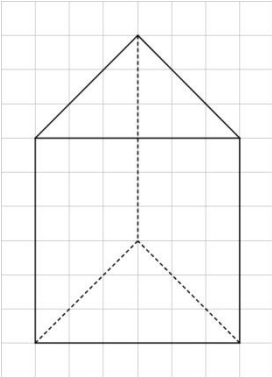
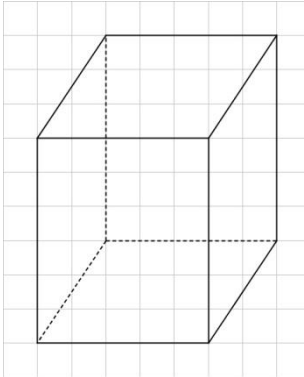
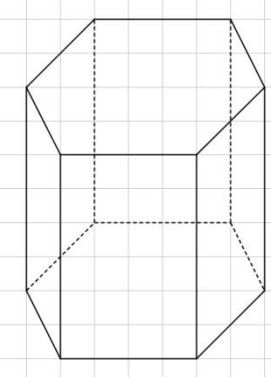
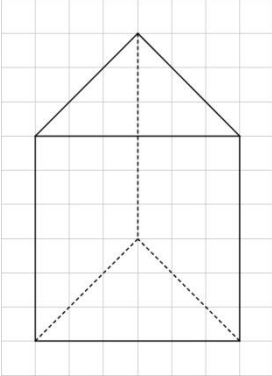
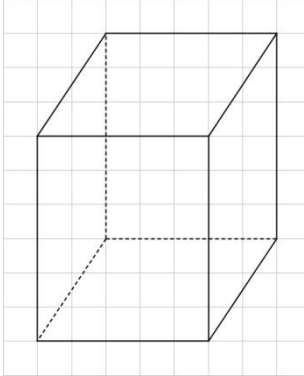
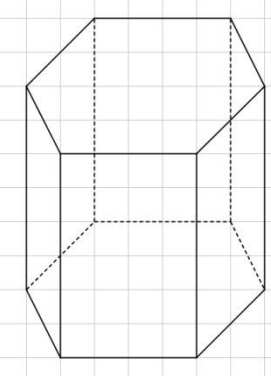
| Pole podstawy graniastosłupa | Pole powierzchni bocznej graniastosłupa | Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa |
|------------------------------|---|--|
| 6 cm^2 | 20 cm^2 | |
| 3 cm^2 | | 16 cm^2 |
| | 22 cm^2 | 36 cm^2 |

Zadanie 3. Uzupełnij tabelę

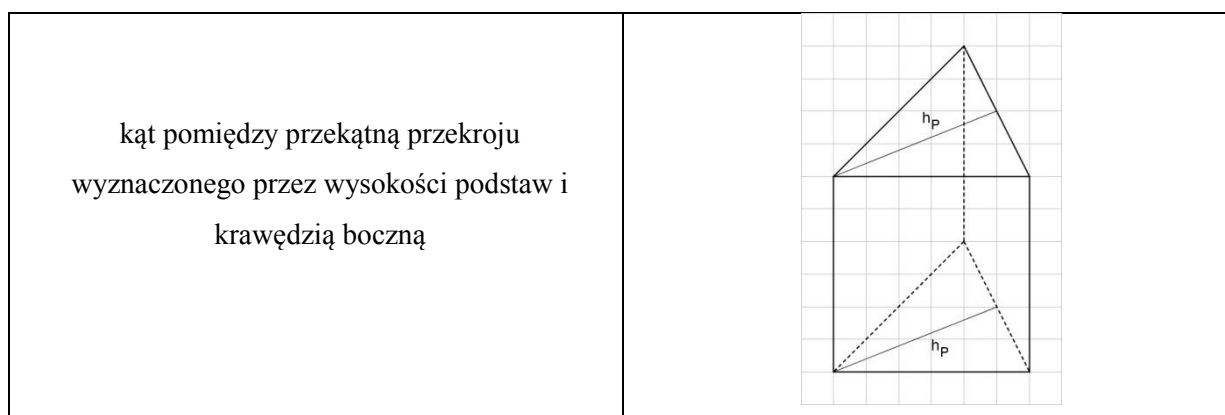
| Pole podstawy graniastosłupa | Wysokość graniastosłupa | Objętość graniastosłupa |
|------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 5 cm^2 | 8 cm | |
| 12 cm^2 | | 132 cm^3 |
| | 5cm | 30 cm^3 |

Temat: Kąty między odcinkami w graniastosłupach

Zadanie 1. Uzupełnij rysunki graniastosłupów zaznaczając jeden z podanych kątów.

| | | | |
|---|---|--|---|
| <p>kąt pomiędzy krawędziami podstawy</p> |  |  |  |
| <p>kąt pomiędzy krawędzią podstawy i krawędzią boczną</p> |  |  |  |
| <p>kąt pomiędzy krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej</p> |  |  |  |
| <p>kąt pomiędzy krawędzią boczną i przekątną ściany bocznej</p> |  |  |  |

Zadanie 2. Uzupełnij rysunek graniastosłupa trójkątnego o podany kąt.



Instrukcje obsługi apletów:

- Otwórz aplet *Stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka n kolejno na $n=2$, $n=4$ i $n=6$.
- Jaki kąt tworzą krawędź podstawy i krawędź boczna?
- Włącz pola wyboru: przekątna ściany bocznej (kolor czerwony), kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy (kolor zielony).
- Ustaw wartość suwaka n kolejno na $n=2$, $n=4$ i $n=6$.
- Co możesz powiedzieć o miarach zaznaczonych kątów?
- Otwórz aplet *Stereometria03*.
- Ustaw wartość suwaka n kolejno na $n=2$, $n=4$, $n=6$ i $n=8$.
- Jaki kąt tworzą krawędź podstawy i krawędź boczna?
- Uzupełnij zdanie 3a.
- Włącz pola wyboru: przekątna ściany bocznej (kolor granatowy), kąty pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy (kolor brązowy), kąty pomiędzy przekątnymi ścian bocznych i krawędziami bocznymi (kolor jasnofioletowy).
- Ustaw wartość suwaka n kolejno na $n=2$, $n=4$, $n=6$ i $n=8$.
- Uzupełnij zdanie 3b.

Zadanie 3. Uzupełnij poniższe zdania.

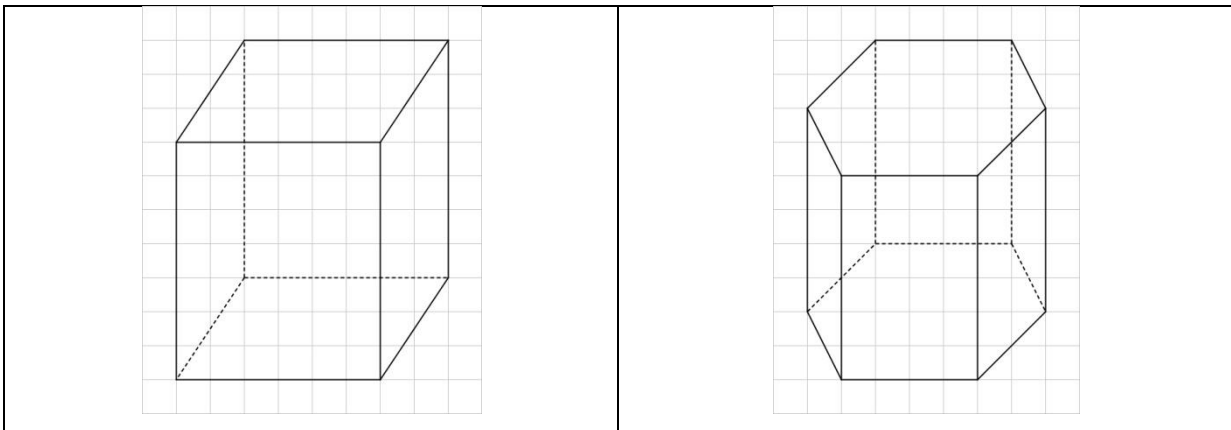
- a) W graniastosłupach prostych i prawidłowych krawędzie podstawy i krawędzie boczne tworzą kąty.....
- b) Jeżeli kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy ma miarę α , to kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią boczną ma miarę

Temat: Kąty między odcinkami i płaszczyznami w graniastoslupach prawidłowych

Zadanie 1. Uzupełnij zdania.

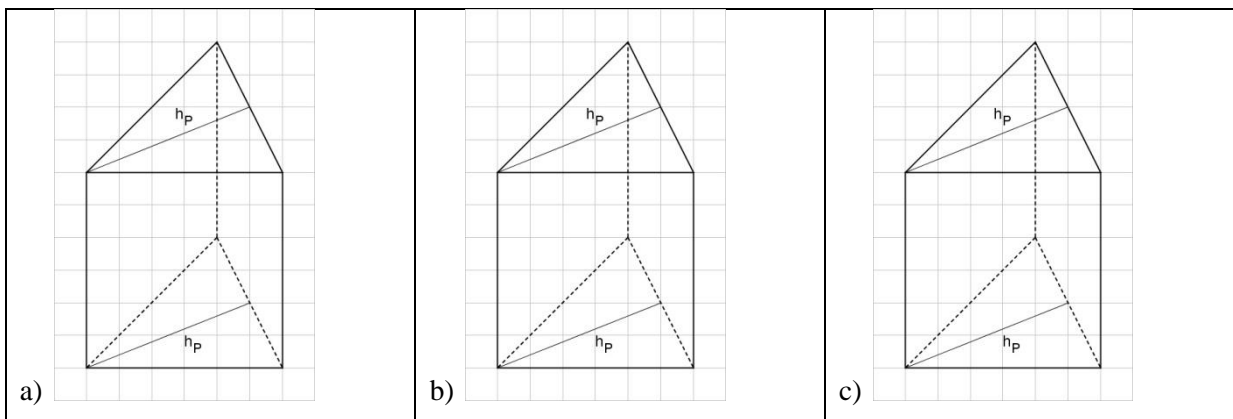
- a) Kąt nachylenia przekątnej graniastoslupa prawidłowego czworokątnego albo sześciokątnego do płaszczyzny podstawy to kąt pomiędzy przekątną graniastoslupa i
- b) Dany jest przekrój graniastoslupa prawidłowego trójkątnego wyznaczony przez wysokości podstaw. Kąt nachylenia przekątnej tego przekroju do płaszczyzny podstawy to kąt pomiędzy przekątną i

Zadanie 2. Uzupełnij rysunki graniastoslupów prawidłowych zaznaczając kąt nachylenia przekątnej graniastoslupa do płaszczyzny podstawy.



Zadanie 3. Uzupełnij rysunek graniastoslupa prawidłowego trójkątnego o przekątną przekroju wyznaczonego przez wysokości podstaw. Zaznacz podane kąty:

- kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy,
- kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny ściany bocznej,
- kąt nachylenie przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny sąsiedniej ściany bocznej.



Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$.
- Włącz pola wyboru: przekrój graniastosłupa, wysokości podstaw, wysokość graniastosłupa, przekątna przekroju, kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy, kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny ściany bocznej, kąt pomiędzy przekątną przekroju i krawędzią boczną.
- Uzupełnij zdanie 4a.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.
- Włącz pola wyboru: przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy, kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy oraz kąt pomiędzy przekątną graniastosłupa i krawędzią boczną.
- Jaki kąt tworzy przekątna podstawy z krawędzią boczną? Jaki związek łączy kąty α i γ ?
- Ustaw wartość suwaka $n=5$.
- Włącz pola wyboru przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy, kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy oraz kąt pomiędzy przekątną graniastosłupa i krawędzią boczną.
- Jaki kąt tworzy przekątna podstawy z krawędzią boczną? Jaki związek łączy kąty α i β ?
- Uzupełnij zdanie 4b.

Zadanie 4. Uzupełnij zdania.

- a) Dany jest przekrój graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wyznaczony przez wysokości podstaw. Jeżeli kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy ma miarę α , to kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny ściany bocznej ma miarę, a kąt pomiędzy przekątną przekroju i krawędzią boczną
- b) W graniastosłupie czworokątnym lub sześciokątnym suma miar kąta nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy oraz kąta pomiędzy przekątną i krawędzią boczną jest równa

Temat: Kąty między odcinkami i płaszczyznami w graniastoslupach nieprawidlowych

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria03*.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$, a potem zmieniaj jego wartość na 3, 5 oraz 7.
- Uzupełnij zdanie 1a. Możesz sobie pomóc ustawiając wartość suwaka $\alpha=0^\circ$.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$, a potem zmieniaj jego wartość na 3, 5 oraz 7.
- Włącz pola wyboru przekątna graniastoslupa, kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy oraz przekątna podstawy.
- Uzupełnij zdanie 1b.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$, a potem zmieniaj jego wartość na 3, 5 oraz 7.
- Włącz pola wyboru zawierające wyrażenie kąt pomiędzy krawędzią boczną i przekątną graniastoslupa.
- Uzupełnij zdanie 1c.

Zadanie 1. Uzupełnij zdania.

- a) W graniastoslupach prostych odcinkami prostopadłymi do płaszczyzny podstawy są
- b) Rzutem prostopadłym przekątnej graniastoslupa na płaszczyznę podstawy jest, więc kąt nachylenia przekątnej graniastoslupa do płaszczyzny podstawy jest kąt pomiędzy przekątną graniastoslupa i
- c) Jeżeli kąt pomiędzy przekątną graniastoslupa i krawędzią boczną ma miarę α , to kąt nachylenia tej przekątnej graniastoslupa do płaszczyzny podstawy ma miarę

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria03*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.
- Włącz pole wyboru przekątna graniastoslupa
- Włączaj kolejno pola wyboru rzut przekątnej graniastoslupa na płaszczyznę ściany I, II, III i IV oraz odpowiadające im pola wyboru kąt pomiędzy przekątną graniastoslupa i płaszczyznę ściany bocznej I, II, III i IV.
- Wykonaj zadanie 3a.

- Pozostaw włączone pola wyboru przekątna graniastosłupa, rzut przekątnej graniastosłupa na płaszczyznę ściany I, kąt pomiędzy przekątną graniastosłupa i płaszczyznę ściany bocznej I.
- Zmieniając wartość suwaków a, b, h i h_P ustal kiedy rzut przekątnej graniastosłupa na płaszczyznę ściany bocznej będzie przekątną ściany bocznej. Zweryfikuj uzyskany rezultat dla pozostałych ścian bocznych.
- Uzupełnij zdanie 2b.

Zadanie 2. Uzupełnij zdanie.

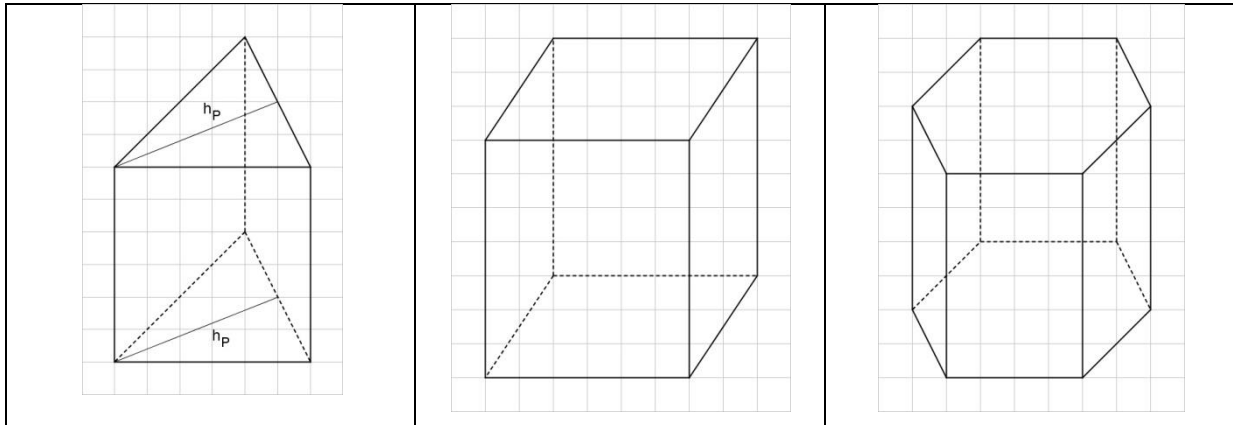
- a) Rzut przekątnej graniastosłupa prostego na płaszczyznę ściany bocznej (musi / nie musi) być przekątną ściany bocznej
- b) Rzut przekątnej graniastosłupa prostego czworokątnego na płaszczyznę ściany bocznej pokrywa się z przekątną ściany bocznej, gdy ten graniastosłup jest, wówczas kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny ściany bocznej pokrywa się z kątem pomiędzy

Zadanie 3. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb. Jego wysokość jest równa 6cm.

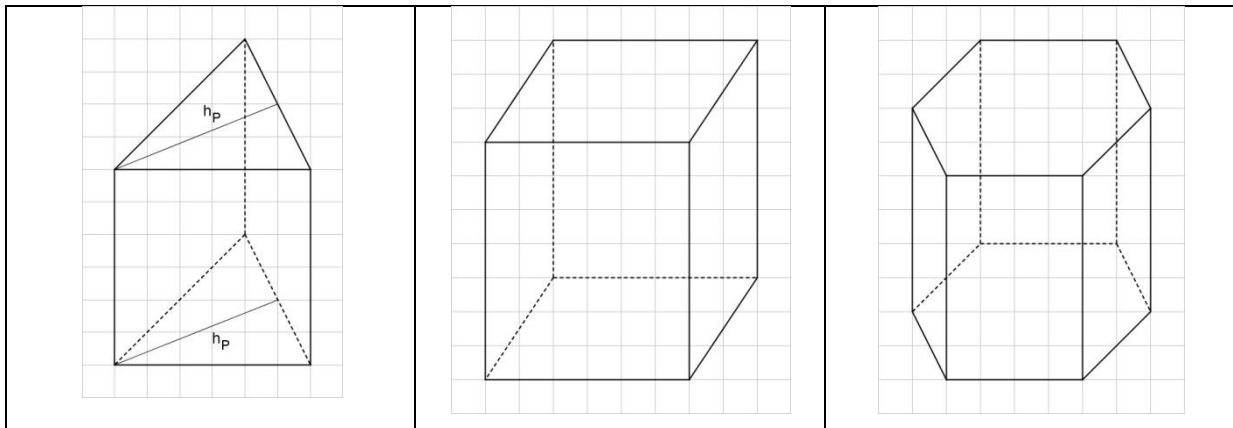
Oblicz objętość graniastosłupa, jeżeli przekątne tworzą z płaszczyzną podstawy kąty 45° i 30° .

Temat: Kąty między ścianami w graniastosłupach

Zadanie 1. Zaznacz na rysunkach graniastosłupów kąty między ścianami bocznymi.



Zadanie 2. Zaznacz na rysunkach graniastosłupów kąty między ścianami bocznymi i podstawami.



Zadanie 3. Uzupełnij zdania.

- Krawędzią kąta pomiędzy ścianą boczną i podstawą graniastosłupa prostego jest
- W graniastosłupach prostych ściany boczne tworzą z płaszczyzną podstawy kąt
- Krawędzią kąta pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznym graniastosłupa prostego jest, odcinkami do niej prostopadłymi są
- Kąt pomiędzy ścianami bocznymi w graniastosłupie prostym to kąt pomiędzy

Zadanie 4. Określ czy dla graniastosłupów nie będących graniastosłupami prostymi prawdziwe są zdania.

- Krawędzią kąta pomiędzy ścianą boczną i podstawą graniastosłupa jest krawędź podstawy. (Prawda / Fałsz)
- Ściany boczne tworzą z podstawą kąt prosty. (Prawda / Fałsz)

- c) Krawędzią kąta pomiędzy sąsiednimi ścianami bocznymi jest ich wspólna krawędź boczna. (Prawda / Fałsz)
- d) Krawędzie podstawy są prostopadłe do krawędzi bocznych. (Prawda / Fałsz)
- e) Kąt pomiędzy ścianami bocznymi jest równy kątowi pomiędzy krawędziami podstawy. (Prawda / Fałsz)

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków i miar kątów w graniastosłupach

Zadanie 1. Oblicz miarę kąta między krawędzią podstawy i przekątną ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy długości 3cm i wysokości równej 6cm.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=2$.
- Włącz pola wyboru przekątna ściany bocznej i kąt pomiędzy przekątną i krawędzią podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem długości krawędzi bocznej i krawędzi podstawy.
- Oblicz miarę zaznaczonego kąta.

Zadanie 2. Najdłuższa przekątna w graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym tworzy z krawędzią boczną kąt 40° i ma długość 6cm. Oblicz długość krawędzi podstawy i długość krawędzi bocznej graniastosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria02*.
- Ustaw wartość suwaka $n=5$.
- Włącz pola wyboru: przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy, kąt pomiędzy przekątną graniastosłupa i krawędzią boczną.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem przekątnej podstawy i przekątnej graniastosłupa. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=0^\circ$.
- Oblicz długość przekątnej podstawy, a następnie długość krawędzi podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem krawędzi bocznej i przekątnej graniastosłupa. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=0^\circ$.
- Oblicz długość krawędzi bocznej.

Zadanie 3. Graniastosłup prawidłowy czworokątny ma wysokość równą $12\sqrt{6}$ cm. Przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 60° . Oblicz długość krawędzi podstawy.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.

- Włącz pola wyboru: przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy i kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem przekątnej podstawy i krawędzi bocznej. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=0^\circ$.
- Oblicz przekątną podstawy, a następnie długość krawędzi podstawy

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania pól graniastosłupów

Zadanie 1. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy długości 2cm, jeżeli wiadomo, że najdłuższa przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 45° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=5$.
- Włącz pola wyboru: przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy i kąt nachylenia przekątnej do płaszczyzny podstawy.
- Oblicz długość przekątnej podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem długości krawędzi bocznej i przekątnej podstawy. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=0^\circ$
- Oblicz długość krawędzi bocznej, pole ściany bocznej i pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

Zadanie 2. Podstawą graniastosłupa o wysokości 24cm jest romb. Przekątne graniastosłupa tworzą z krawędziami bocznymi kąty 30° i 60° . Oblicz pole podstawy graniastosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria03*.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$.
- Włącz pola wyboru: pierwsza przekątna graniastosłupa, pierwsza przekątna podstawy i kąt pomiędzy pierwszą przekątną graniastosłupa i krawędzią boczną.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem długości przekątnej podstawy i krawędzi bocznej. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=90^\circ$.
- Oblicz długość odcinka p przyjmując, że zaznaczony kąt ma miarę 30° .
- Wyłącz w/w pola wyboru, a włącz pola wyboru: druga przekątna graniastosłupa, druga przekątna podstawy i kąt pomiędzy drugą przekątną graniastosłupa i krawędzią boczną.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem długości przekątnej podstawy i krawędzi bocznej. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=0^\circ$.
- Oblicz długość odcinka q przyjmując, że zaznaczony kąt ma miarę 60° , a następnie oblicz pole rombu o przekątnych p i q .

Zadanie 3. Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych równych 3cm i 4cm. Przekątna największej ze ścian bocznych tworzy z krawędzią podstawy kąt o mierze 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria02*.
- Ustaw wartość suwaka $n=2$, suwaka $a=3$ oraz suwaka $b=4$.
- Włącz pola wyboru: przekątne ścian bocznych i kąty pomiędzy przekątnymi ścian bocznych i krawędziami podstawy.
- Oblicz długość przeciwprostokątnej podstawy (tw. Pitagorasa) oraz pole podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną kąta β_2 będącą stosunkiem długości krawędzi bocznej i krawędzi podstawy (przeciwprostokątnej).
- Oblicz długość krawędzi bocznej, a następnie pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa.

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości graniastosłupów

Zadanie 1. Podstawami graniastosłupa jest trójkąty równoramienne o boku 4cm i wysokości opuszczonej na ten bok 3cm. Przekątna przekroju wyznaczonego przez wymienione wyżej wysokości podstaw tworzy ze ścianą boczną kąt 70° . Oblicz objętość graniastosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria02*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$, $a=4$ oraz $h_p=3$.
- Włącz pola wyboru: przekrój, wysokości podstaw, wysokość graniastosłupa, przekątna przekroju i kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny ściany bocznej.
- Oblicz pole podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem wysokości graniastosłupa i wysokości podstawy. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=90^\circ$.
- Oblicz wysokość graniastosłupa, a następnie jego objętość.

Zadanie 2. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 3cm. Przekątna graniastosłupa tworzy z płaszczyzną ściany bocznej kąt 30° . Oblicz objętość graniastosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.
- Włącz pola wyboru: przekątna graniastosłupa, przekątna ściany bocznej i kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny ściany bocznej.
- Oblicz pole podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem przekątnej ściany bocznej i krawędzi podstawy. Możesz w tym celu ustawić $\alpha=0^\circ$ i $\beta=135^\circ$.
- Oblicz przekątną ściany bocznej, a następnie wysokość graniastosłupa (tw. Pitagorasa) i objętość graniastosłupa.