



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt dla ucznia

Stereometria:

18. Przekroje sześcianu
19. Przekroje prostopadłościanu
20. Kąty między odcinkami i między odcinkami i płaszczyznami w walcach
21. Kąty między odcinkami i między odcinkami i płaszczyznami w stożkach
22. Zastosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków i miar kątów walców i stożków
23. Zastosowanie trygonometrii do obliczania pól walców i stożków
24. Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości walców i stożków

Opracowanie Jerzy Mil

Temat: Przekroje sześcianu

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria11*.
- Jeśli nie jest włączone, włącz pole wyboru sześcian.
- Zmieniaj wartość suwaków o , p oraz q i obserwuj jakie kształty przyjmuje przekrój sześcianu.

Uwaga: Możesz za każdym razem kliknąć przycisk Widok rzeczywisty przekroju, który pozwoli ci zobaczyć jaki kształt ma przekrój w rzeczywistości. Aby ponownie oglądać rzut bryły z zaznaczonym przekrojem, zmień wartości suwaków α i β .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria11*.
- Jeśli nie jest włączone, włącz pole wyboru sześcian.
- Włącz pole wyboru Z1a, zmieniaj wartość suwak q .
- Uzupełnij zadanie 1a.
- Włącz pole wyboru Z1b, zmieniaj wartość suwaka q .
- Uzupełnij zadanie 1b.
- Włącz pole wyboru Z1c, zmieniaj wartość suwaka q .
- Uzupełnij zadanie 1c.
- Włącz pole wyboru Z1d.
- Uzupełnij zadanie 1d.
- Włącz pole wyboru Z1e.
- Uzupełnij zadanie 1e.

Zadanie 1. Uzupełnij zdania.

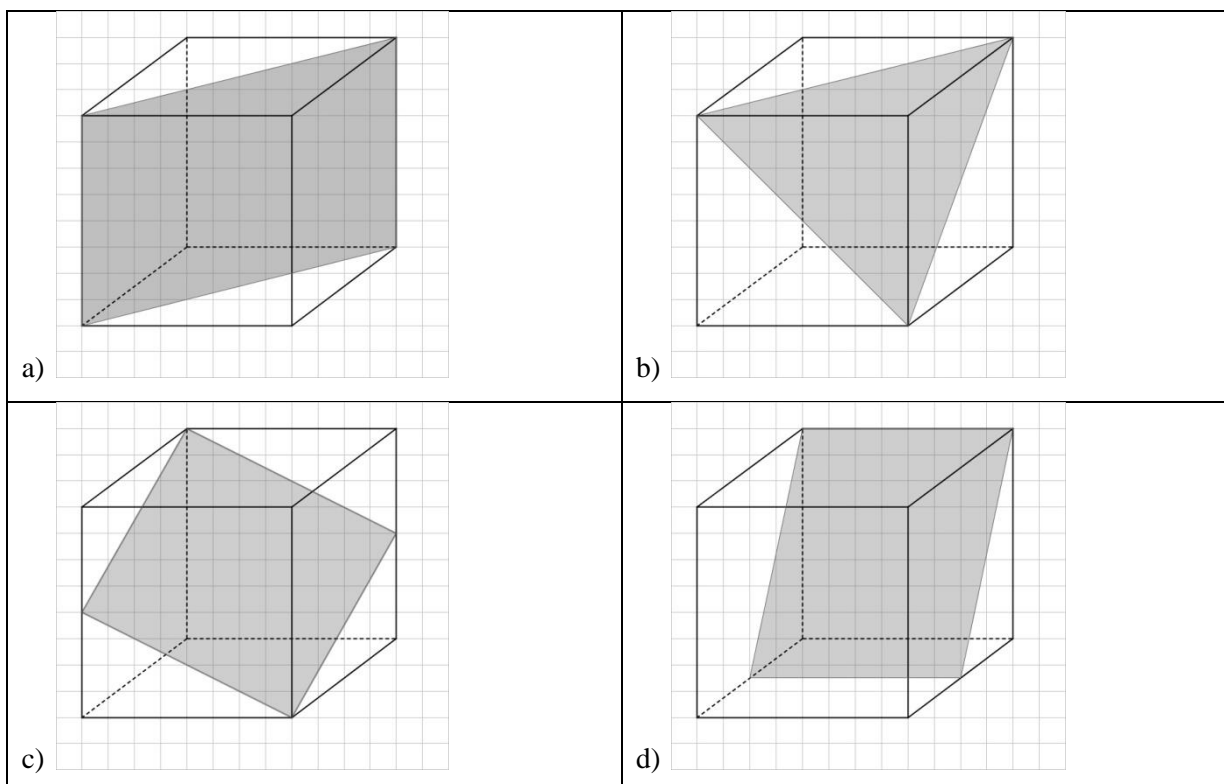
- a) Gdy płaszczyzna przekroju jest prostopadła do 4 równoległych krawędzi sześcianu, przekrój sześcianu jest
o boku równym
- b) Gdy płaszczyzna przekroju jest prostopadła do przekątnych przeciwległych ścian sześcianu przekrój sześcianu jest
Ma on największe pole, gdy jego bokami są
- c) Gdy płaszczyzna przekroju jest prostopadła do przekątnej sześcianu, przekrój sześcianu jest lub

- d) Gdy przekątną sześcianu przetniemy w $\frac{1}{3}$ jej długości, przekrój sześcianu będzie o boku równym
- e) Gdy przekątną sześcianu przetniemy w połowie jej długości, przekrój sześcianu będzie o boku równym

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria11*.
- Jeśli nie jest włączone, włącz pole wyboru sześcian.
- Włącz pole wyboru Z2a i wykorzystaj aplet jako ilustrację zadania 2a.
- Włącz pole wyboru Z2b i wykorzystaj aplet jako ilustrację zadania 2b.
- Włącz pole wyboru Z2c i wykorzystaj aplet jako ilustrację zadania 2c.
- Włącz pole wyboru Z2d i wykorzystaj aplet jako ilustrację zadania 2d.

Zadanie 2. Oblicz pola zacieniowanych przekrojów sześcianu, przyjmując, że jego krawędź jest równa 4cm.



Temat: Przekroje prostopadłościanu

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria11*.
- Jeśli nie jest włączone, włącz pole wyboru prostopadłościan.
- Zmieniaj wartości suwaków o , p i q . Obserwuj liczbę boków przekroju prostopadłościanu i uzupełnij zadanie 1a.
- Kliknij pole wyboru Z2b i zmieniaj wartość suwaka q . Uzupełnij zadanie 1b.
- Klikaj kolejno pola wyboru Z2c-1, Z2c-2 oraz Z2c-3. Wykorzystaj je jako ilustrację do zadania 2c. Oblicz pola przekrojów.

Uwaga: Możesz za każdym razem kliknąć przycisk Widok rzeczywisty przekroju, który pozwoli ci zobaczyć jaki kształt ma przekrój w rzeczywistości. Aby ponownie oglądać rzut bryły z zaznaczonym przekrojem, zmień wartości suwaków α i β .

Zadanie 1. Uzupełnij zdania.

- Przekrój prostopadłościanu może mieć od do boków.
- Jeżeli płaszczyzna przekroju jest prostopadła do przekątnej jednej ze ścian, przekrój jest
- Prostopadłościan ma krawędzie długości 1cm, 2cm i 3cm. Przekrój zawierający przekątne ściany o krawędziach 1cm i 2cm ma pole Przekrój zawierający przekątne ściany o krawędziach 1cm i 3cm ma pole Przekrój zawierający przekątne ściany o krawędziach 2cm i 3cm ma pole

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria11*.
- Jeśli nie jest włączone, włącz pole wyboru prostopadłościan.
- Kliknij pole wyboru Z2a i uzupełnij zadanie 2a.
- Kliknij pole wyboru Z2b, zmieniaj wartość suwaka m i uzupełnij zadanie 2b.
- Kliknij pole wyboru Z2c, zmieniaj wartość suwaka m i uzupełnij zadanie 2c.

Zadanie 2. Uzupełnij zdania przy założeniu, że podstawą prostopadłościanu jest kwadrat.

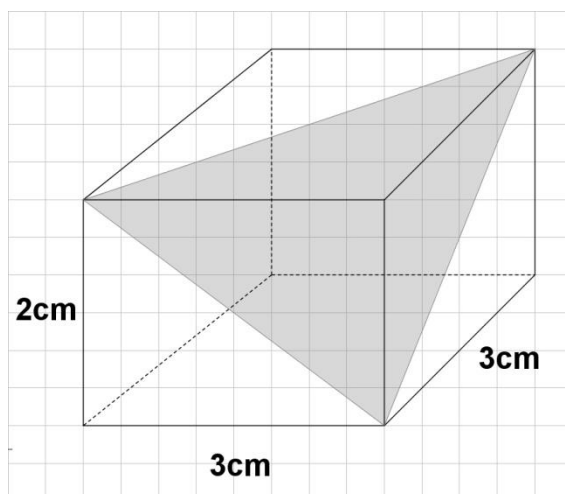
- Jeżeli płaszczyzna przekroju przechodzi przez przeciwległe wierzchołki prostopadłościanu i środki przeciwległych krawędzi bocznych, przekrój jest, którego przekątne są równe i

- b) Jeżeli płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy i przecina jedną z krawędzi bocznych, przekrój jest
- c) Jeżeli płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną jednej podstawy i przecina drugą podstawę, to przekrój jest

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria11*.
- Jeśli nie jest włączone, włącz pole wyboru prostopadłości.
- Kliknij pole wyboru Z3 i wykorzystaj aplet do ilustracji zadania 3.

Zadanie 3. Oblicz pole zacięwanego na rysunku przekroju prostopadłości.



Temat: Kąty między odcinkami i między odcinkami i płaszczyznami w walcach

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Średnica walca, Przekątna przekroju, Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy, Tworząca walca BC.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor różowy), która pozwoli ci obliczyć wysokość walca, w sytuacji, gdy znasz średnicę walca.
- Oblicz długość wysokość walca.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Przekrój osiowy, Średnica walca, Tworząca walca BC.
- Uzupełnij zadanie 1 a).
- Włącz pola wyboru Przekątna przekroju, Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy.
- Uzupełnij zadanie 1 b).
- Włącz pole wyboru Kąt między przekątną przekroju i tworzącą walca.
- Uzupełnij zadanie 1 c).

Zadanie 1. Uzupełnij zdania.

- a) Przekrój osiowy walca jest, którego jednym bokiem jest a drugim
- b) Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy tworzą następujące odcinki: i
- c) Suma miar kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego do płaszczyzny podstawy i kąt pomiędzy przekątną przekroju osiowego walca i tworzącą walca jest równa

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Średnica walca, Przekątna przekroju, Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy, Tworzącą walca BC.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor różowy), która pozwoli ci obliczyć wysokość walca (równą tworzącej BC), w sytuacji, gdy znasz przekątną przekroju d_p .

- Oblicz wysokość walca.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor różowy), która pozwoli ci obliczyć średnicę walca, w sytuacji, gdy znasz przekątną przekroju d_p .
- Oblicz średnicę walca, a następnie jego promień.

Zadanie 2.

Oblicz wysokość i promień walca, w którym przekątna przekroju osiowego ma długość 10cm i tworzy z płaszczyzną podstawy walca kąt 40° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Wysokość walca, Promień walca, Odcinek łączący brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy, Kąt między odcinkiem łączącym brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy i płaszczyzną podstawy.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor granatowy), która pozwoli ci obliczyć wysokość walca w sytuacji, gdy znasz promień walca.
- Oblicz wysokość walca.

Zadanie 3.

Oblicz wysokość walca o promieniu 5cm, w którym odcinek łączący środek jednej podstawy z brzegiem drugiej podstawy tworzy z wysokością kąt 25° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Średnica walca, Przekątna przekroju, Tworząca walca BC, Kąt między przekątną przekroju i tworzącą walca.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor niebieski), która pozwoli ci obliczyć średnicę walca w sytuacji gdy znasz jego wysokość (równą tworzącej BC).
- Oblicz średnicę walca, a potem jego promień.
- Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca.

Zadanie 4.

Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej walca o wysokości 8cm, w którym przekątna przekroju osiowego tworzy z tworzącą walca kąt 60° .

Temat: Kąty między odcinkami i między odcinkami i płaszczyznami w stożkach

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Tworząca stożka BW, Promień stożka, Kąt między tworzącą i wysokością.
- Określ jaka funkcja trygonometryczna pozwoli ci obliczyć miarę zaznaczonego kąta (kolor błękitny) w sytuacji, gdy znasz długość r oraz h .
- Oblicz miarę kąta AWS.
- Włącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka.
- Jaką częścią kąta rozwarcia stożka jest kąt AWS? Skorzystaj z tego, by obliczyć kąt rozwarcia stożka.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Przekrój osiowy, Tworząca stożka AW, Tworząca stożka BW, Średnica stożka.
- Uzupełnij zadanie 1a).
- Włącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka.
- Uzupełnij zadanie 1 b).
- Włącz pola wyboru Kąt między tworzącą AW i płaszczyzną podstawy oraz Promień stożka. Wyłącz pole wyboru Średnica stożka.
- Uzupełnij zadanie 1c).
- Włącz pole wyboru Kąt między tworzącą i wysokością, Wysokość stożka. Wyłącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka.
- Uzupełnij zadanie 1 d).
- Włącz pola wyboru Średnica stożka, Kąt rozwarcia stożka, Kąt między tworzącą AW i płaszczyzną podstawy, Kąt między płaszczyzną BW i płaszczyzną podstawy. Wyłącz pola wyboru Kąt między tworzącą i wysokością, Wysokość stożka, Promień stożka.
- Uzupełnij zadania 1e) i 1 f).

Zadanie 1. Uzupełnij zdania.

- a) Przekrój osiowy stożka jest,
którego podstawą jest a ramieniem
.....

- b) Kąt rozwarcia stożka to kąt między
- c) Kąt nachylenia tworzącej do płaszczyzny podstawy stożka wyznaczają odcinki
- d) Jeżeli tworząca stożka tworzy z wysokością kąt o mierze 34° , to ta sama tworząca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze
- e) Jeżeli kąt rozwarcia stożka jest równy 46° , to tworząca stożka tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze
- f) Jeżeli kąt nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy jest równy 72° , to kąt rozwarcia stożka ma miarę

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Tworząca stożka AW, Wysokość stożka, Promień stożka, Kąt między tworzącą AW i płaszczyzną podstawy.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor pomarańczowy), która pozwala ci obliczyć promień stożka, gdy znasz tworzącą.
- Oblicz promień stożka.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor pomarańczowy), która pozwala ci obliczyć wysokość stożka, gdy znasz tworzącą.
- Oblicz wysokość stożka.

Zadanie 2.

Tworząca stożka ma długość 20cm i tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 50° . Oblicz wysokość i promień stożka.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Promień stożka, Tworząca stożka AW, Tworząca stożka BW, Kąt rozwarcia stożka, Kąt między tworzącą i wysokością.
- Oblicz miarę kąta między tworzącą i wysokością.
- Wyłącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor błękitny), która pozwoli ci obliczyć wysokość stożka, gdy znasz jego promień.
- Oblicz wysokość stożka, a następnie jego objętość.

Zadanie 3.

Oblicz objętość stożka o promieniu 4cm i kącie rozwarcia 36° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Promień stożka, Tworząca stożka AW, Kąt między tworzącą i wysokością.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor błękitny), która pozwoli ci obliczyć promień stożka, gdy znasz jego wysokość.
- Oblicz promień stożka.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor błękitny), która pozwoli ci obliczyć tworzącą stożka, gdy znasz jego wysokość.
- Oblicz tworzącą stożka, a następnie jego pole powierzchni bocznej.

Zadanie 4.

Oblicz pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 15cm, w którym tworząca tworzy z wysokością kąt 10° .

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków i miar kątów walców i stożków

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Przekrój osiowy, Tworząca walca BC, Średnica walca, Przekątna przekroju, Kąt między przekątną przekroju i tworzącą walca.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem średnicy walca i przekątnej przekroju osiowego.
- Oblicz średnicę walca.

Zadanie 1. Oblicz średnicę walca wiedząc, że przekątna przekroju osiowego o długości 8cm tworzy z tworzącą walca kąt 40° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Promień stożka, Kąt między tworzącą i wysokością.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem promienia i tworzącej stożka.
- Oblicz miarę kąta pomiędzy tworzącą i wysokością.
- Wyłącz pole wyboru Kąt między tworzącą i wysokością, a włącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka.
- Oblicz miarę kąta rozwarcia stożka.

Zadanie 2. Jak jest kąt rozwarcia stożka o promieniu 3cm i tworzącej 5cm?

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Wysokość walca O_1O_2 , Promień walca, Odcinek łączący brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy oraz Kąt między odcinkiem łączącym brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy i płaszczyzną podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem wysokości walca i jego promienia.
- Oblicz wysokość walca.

Zadanie 3. Oblicz wysokość walca o promieniu 4cm, jeżeli odcinek łączący brzeg jednej podstawy ze środkiem drugiej podstawy tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° .

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania pól walców i stożków

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Tworząca stożka BW, Promień stożka, Kąt rozwarcia stożka.
- Oblicz kąt pomiędzy tworzącą stożka i wysokością.
- Wyłącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka, a włącz Kąt pomiędzy tworzącą i wysokością.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem promienia stożka i jego wysokości.
- Oblicz promień stożka.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem wysokości stożka i długości jego tworzącej.
- Oblicz długość tworzącej, a następnie pole powierzchni całkowitej stożka.

Zadanie 1. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka o wysokości 15cm, jeżeli kąt rozwarcia stożka jest równy 100° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Przekrój osiowy, Tworząca walca BC, Średnica walca, Przekątna przekroju, Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem średnicy walca i przekątnej przekroju.
- Oblicz średnicę walca, a następnie jego promień.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem tworzącej BC (równej wysokości walca) i przekątnej przekroju.
- Oblicz wysokość walca, a następnie jego pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 2. Oblicz pole powierzchni całkowitej walca, jeżeli przekątna przekroju osiowego ma długość 24cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Promień stożka, Kąt pomiędzy tworzącą AW i płaszczyzną podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będącą stosunkiem promienia stożka i jego tworzącej.

- Oblicz promień stożka, a następnie jego pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 3. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka, jeżeli jego tworząca ma długość 6cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 64° .

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości walców i stożków

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Przekrój osiowy, Tworząca walca BC, Średnica walca, Przekątna przekroju, Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będąca stosunkiem tworzącej BC (równej wysokości walca) i średnicy walca.
- Oblicz wysokość walca, jego promień i objętość.

Zadanie 1. Oblicz objętość walca o średnicy 6cm, jeżeli przekątna przekroju osiowego walca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 25° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Promień stożka, Kąt między tworzącą i wysokością.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będąca stosunkiem wysokości stożka i jego promienia.
- Oblicz wysokość stożka, a następnie jego objętość.

Zadanie 2. Oblicz objętość stożka o promieniu 4cm, jeżeli kąt pomiędzy tworzącą i wysokością stożka jest równy 20° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *Stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Wysokość walca O_1O_2 , Promień walca, Odcinek łączący brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy, Kąt między odcinkiem łączącym brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy i wysokością walca.
- Wybierz funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta będąca stosunkiem promienia walca i jego wysokości.
- Oblicz promień walca, a następnie jego objętość.

Zadanie 3. Oblicz objętość walca o wysokości 20cm, jeżeli kąt pomiędzy odcinkiem łączącym brzeg jednej podstawy ze środkiem drugiej i wysokością walca jest równy 60° .