



---

Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”  
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

# Skrypt 32

## Przygotowanie do matury

### Równania i nierówności

6. Równania i nierówności - powtórzenie
7. Rozwiązywanie równań i nierówności – zadania z treścią
8. Rozwiązywanie równań i nierówności – proste zasady

**Opracowanie: L1**

## Temat: Równania i nierówności - powtórzenie

Przy rozwiązywaniu równań, posłużymy się dwiema metodami: metodą sprawdzenia czy dana liczba jest rozwiązaniem równania oraz rozwiązując dane równanie.

# Karta pracy

Otwórz aplet *matura02*.

### Zadanie 1

1. Rozwiąż zadanie prezentowane na pierwszej stronie testu, wypełniając tę Kartę pracy. Rozwiąż metodą „sprawdzając odpowiedzi” oraz „rozwiązując równanie”.
2. Oceń przed rozwiązaniem, którą metodą rozwiążesz zadanie szybciej. Rozwiąż zadanie samodzielnie, a następnie sprawdź rozwiązania prezentowane obiema metodami.

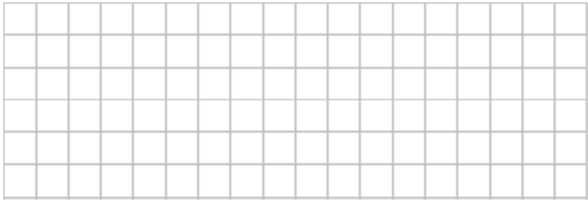

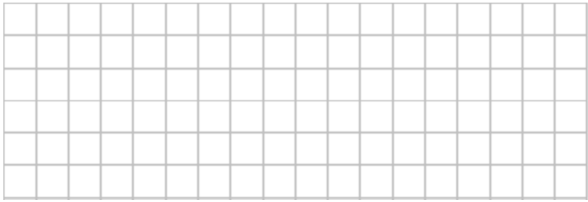
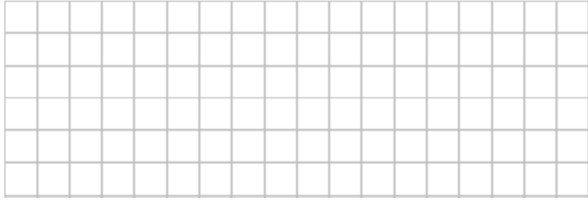
Rozwiązaniem równania  $\frac{5x+4}{2x-2} = 4$  jest liczba:

A. 4

B. 1

C.  $-\frac{4}{5}$

D. 0

$x = 4$ $\frac{5 \cdot \underline{\quad} + 4}{2 \cdot \underline{\quad} - 2} \stackrel{?}{=} 4$ 	$x = 1$ $\frac{5 \cdot \underline{\quad} + 4}{2 \cdot \underline{\quad} - 2} \stackrel{?}{=} 4$ 
$x = -\frac{4}{5}$ $\frac{5 \cdot (\underline{\quad}) + 4}{2 \cdot (\underline{\quad}) - 2} \stackrel{?}{=} 4$ 	$x = 0$ $\frac{5 \cdot \underline{\quad} + 4}{2 \cdot \underline{\quad} - 2} \stackrel{?}{=} 4$ 







## Temat: Rozwiązywanie równań i nierówności – proste zasady

### Przykład 1

Przekształcanie wzoru i rozwiązywanie równania mają ze sobą wiele wspólnego.

Wyznaczanie x ze wzoru	Równanie liniowe	Równanie wymierne
1) Jeśli w mianownikach ułamków występują niewiadome, piszemy założenia		
$\frac{a(x+1)}{b} = c + x$ <p>Założenie: <math>b \neq 0</math></p>	$\frac{x+1}{3} + \frac{5x}{3} = \frac{3(x+4)}{2}$	$\frac{x+1}{2x+3} = 2$ <p>Założenie: <math>x \neq 1,5</math></p>
2) Pozbywamy się ułamków		
$\frac{a(x+1)}{b} = c + x \cdot b$ <p>Każdy składnik widoczny we wzorze mnożymy przez <math>b</math>.</p> $a(x+1) = bc + bx$	$\frac{x+1}{3} + \frac{5x}{3} = \frac{3(x+4)}{2} \cdot 6$ <p>Każdy składnik równania mnożymy przez 6.</p> $2(x+1) + 2 \cdot 5x = 3 \cdot 3(x+4)$	$\frac{x+1}{2x+3} = 2 \cdot (2x+3)$ <p>Każdy składnik równania mnożymy przez <math>(2x+3)</math>.</p> $x+1 = 2(2x+3)$
3) Usuwamy nawiasy		
$ax + a = bc + bx$	$2x + 2 + 10x = 9x + 36$	$x + 1 = 4x + 6$
4) Porządkujemy równanie		
$ax - bx = bc - a$	$2x + 10x - 9x = 36 - 2$	$x - 4x = 6 - 1$
5) Redukujemy wyrazy podobne		
$(a - b)x = bc - a$	$3x = 34$	$-3x = 5$
6) Wyznaczamy x i uzgadniamy wynik z założeniami		
$(a - b)x = bc - a \cdot (a - b)$ <p>Przy założeniu: <math>(a - b) \neq 0</math></p> $x = \frac{bc - a}{a - b}$	$3x = 34 \cdot 3$ $x = 11 \frac{1}{3}$	$-3x = 5 \cdot (-3)$ $x = -1 \frac{2}{3}$ <p>(odp. zgodna z założeniem)</p>

## Przykład 2

Niezależnie od wyboru metody rozwiązywania równania, przekształcanie prowadzące do wyniku, musi być zgodne z zasadami:

1. Do obu stron równania można dodać takie samo wyrażenie. Od obu stron równania można odjąć takie samo wyrażenie. Inaczej: można przenosić wyrazy z jednej strony równania na drugą zmieniając znak wyrazu na przeciwny.
2. Obie strony równania można pomnożyć przez takie samo wyrażenie różne od 0. Obie strony równania można podzielić przez takie samo wyrażenie różne od 0.
3. Każdy ułamek można skrócić dzieląc licznik i mianownik przez to samo wyrażenie różne od 0. Każdy ułamek można rozszerzyć, mnożąc licznik i mianownik przez to samo wyrażenie różne od 0.
4. Iloczyn jest wtedy równy 0, kiedy przynajmniej jeden z czynników jest równy 0.
5. Iloraz jest wtedy równy 0, kiedy dzielna (licznik ułamka) jest równy 0.
6. Przez 0 nie można dzielić (mianownik ułamka nie może być równy 0).

Rozwiązanie równania prezentujące powyższe zasady:

$$\frac{x+7}{x-3} + \frac{2x+4}{x+2} = 5$$

- 1) Piszemy założenia:  $x-3 \neq 0$  i  $x+2 \neq 0$   
 $x \neq 3$  i  $x \neq -2$

- 2) Obie strony równania mnożymy przez  $(x-3)$ :

$$\frac{x+7}{x-3} + \frac{2x+4}{x+2} = 5 / \cdot (x-3)$$

$$x+7 + \frac{(2x+4)(x-3)}{x+2} = 5(x-3)$$

- Obie strony równania mnożymy przez  $(x+2)$ :

$$x+7 + \frac{(2x+4)(x-3)}{x+2} = 5(x-3) / \cdot (x+2)$$

$$(x+7)(x+2) + (2x+4)(x-3) = 5(x-3)(x+2)$$

- 3) Usuwamy nawiasy wykonując odpowiednio mnożenie sum algebraicznych:

$$x^2 + 2x + 7x + 14 + 2x^2 - 6x + 4x - 12 = 5x^2 + 10x - 15x - 30$$





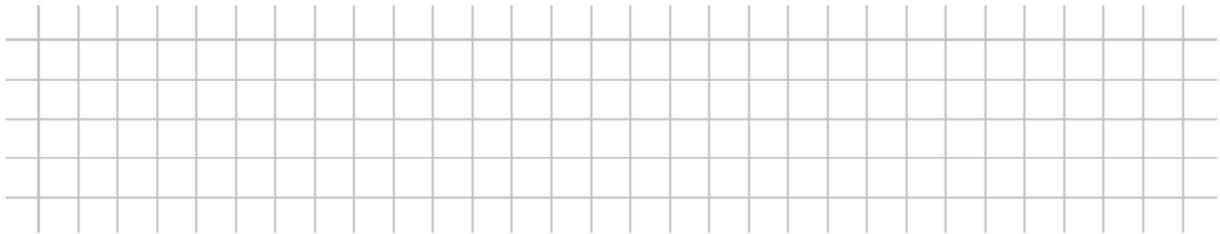
## Zadanie 2

Równanie wymierne prezentowane w Przykładzie 2 zostało sprowadzone do postaci równania kwadratowego:  $-x^2 + 6x + 16 = 0$ .

- a) Przedstaw to równanie w postaci iloczynowej.

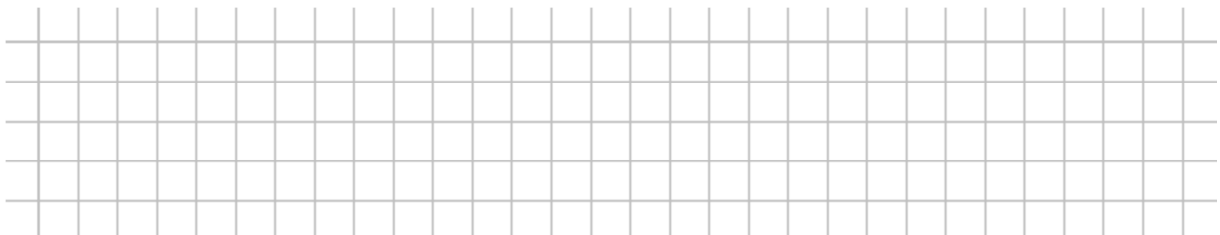


- b) Rozwiąż powyższe równanie posługując się zasadą: Iloczyn jest wtedy równy 0, kiedy jeden z czynników jest równy 0.



- c) Równanie wymierne prezentowane w Przykładzie 2 zostało przekształcone do postaci równania kwadratowego  $-x^2 + 6x + 16 = 0$ . Dlaczego rozwiązanie równania kwadratowego  $-x^2 + 6x + 16 = 0$  różni się od rozwiązania równania

$$\frac{x+7}{x-3} + \frac{2x+4}{x+2} = 5?$$



- d) Rozwiąż równanie:  $\frac{5x+10}{x+2} = 5x$



### Przykład 3

Przekształcając równanie wymierne można odwołać się do zasad działania na ułamkach:

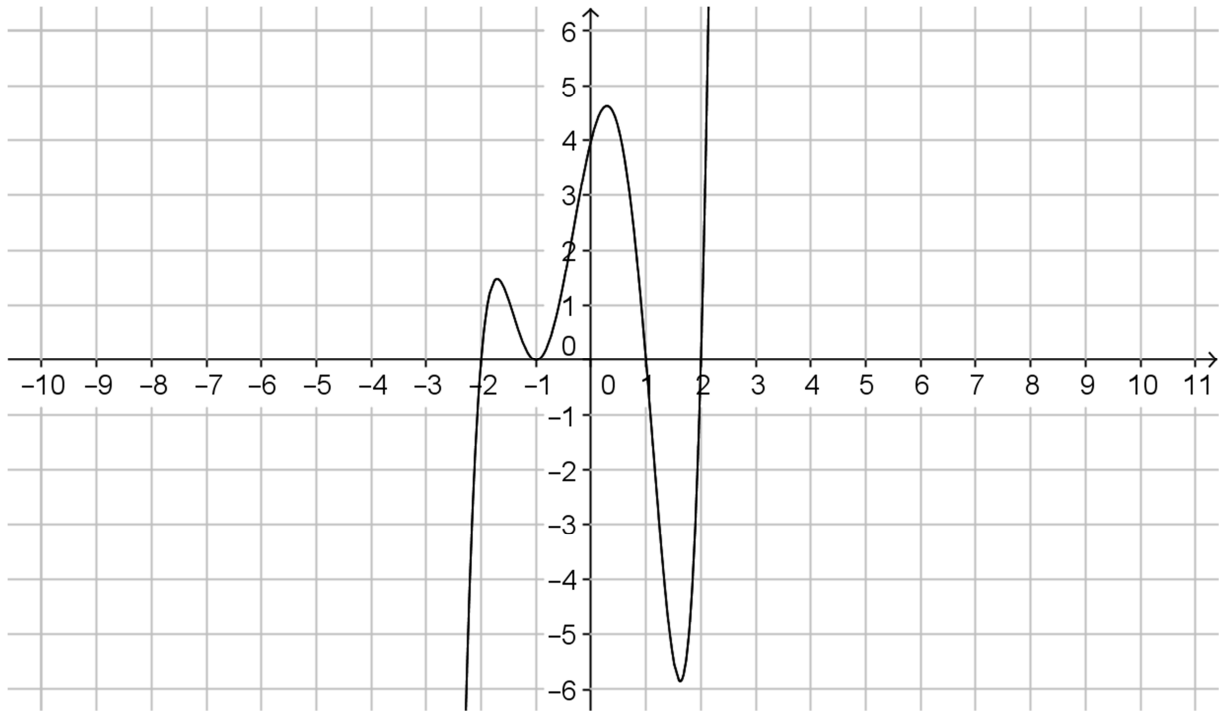
Ułamki zwykłe	Równanie wymierne
$\frac{7}{10} + \frac{2}{3} = \dots$	$\frac{3}{x+1} + \frac{4}{x-2} = 0$  Założenia: $x \neq -1 \wedge x \neq 2$
Przed wykonaniem dodawania, sprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika rozszerzając je:	
Rozszerzamy ułamki poprzez pomnożenie licznika i mianownika pierwszego ułamka przez 3 oraz licznika i mianownika drugiego ułamka przez 10:  $\frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \dots$  $\frac{21}{30} + \frac{20}{30} = \dots$	Rozszerzamy ułamki poprzez pomnożenie licznika i mianownika pierwszego ułamka przez $(x-2)$ oraz licznika i mianownika drugiego ułamka przez $(x+1)$ :  $\frac{3 \cdot (x-2)}{(x+1)(x-2)} + \frac{4(x+1)}{(x-2)(x+1)} = 0$
Dodajemy ułamki przepisując mianownik i dodając liczniki:	
$\frac{41}{30} = \dots$	$\frac{3 \cdot (x-2) + 4(x+1)}{(x+1)(x-2)} = 0$  Wyrażenie z lewej strony będzie równe 0, jeśli licznik ułamka przyjmie wartość 0.  $3 \cdot (x-2) + 4(x+1) = 0$  $3x - 6 + 4x + 4 = 0$  $3x + 4x = 6 - 4$  $7x = 2$  $x = \frac{2}{7}$  (wynik zgodny z założeniem)





Ćw. 3.

Poniżej znajduje się wykres funkcji:  $f(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$



a) Rozwiąż równanie:  $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$


b) Po rozłożeniu powyższego równania na czynniki, otrzymamy:

A.  $(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = 0$

B.  $(x+2)(x+1)^2(x-1)(x-2) = 0$

C.  $(x+2)(x+1)(x-1)^2(x-2) = 0$

D.  $(x+2)(x^2+1)(x-1)(x-2) = 0$

c) Oceń prawdziwość zdań:

A. Liczby $-2, -1, 1, 2$ są jedynymi pierwiastkami tego równania.	P / F
B. Poza liczbami $-2, -1, 1, 2$ jest jeszcze jeden pierwiastek równania, ponieważ równanie jest 5 stopnia.	P / F
C. Liczba $4$ również jest pierwiastkiem tego równania.	P / F