



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 33

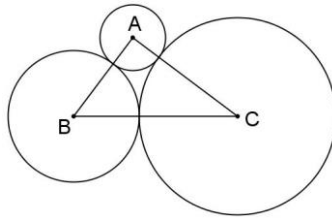
Powtórzenie do matury:

34. Kąty w kole, styczne do okręgu – powtórzenie wiadomości.
35. Podobieństwo trójkątów – powtórzenie.
36. Zastosowanie trygonometrii do obliczania pól i obwodów figur – powtórzenie.
37. Graniastosłupy i ostrosłupy – powtórzenie wiadomości.
38. Zastosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków i miar kątów w graniastosłupach i ostrosłupach.
39. Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupów.
40. Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości i pola powierzchni ostrosłupów.
41. Walec i stożek – przypomnienie wiadomości.
42. Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości i pola powierzchni walców i stożków.

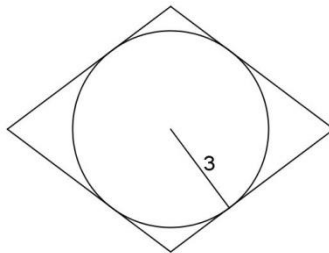
Opracowanie Jerzy Mil

Temat: Kąty w kole, styczne do okręgu – powtórzenie.

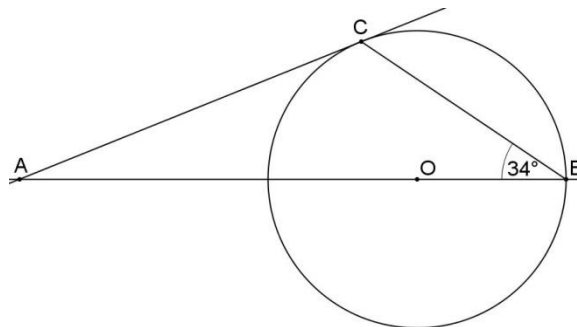
Zadanie 1. Okręgi o promieniach 1, 2 i 3 są parami styczne. Oblicz obwód i pole trójkąta wyznaczonego przez środki okręgów.



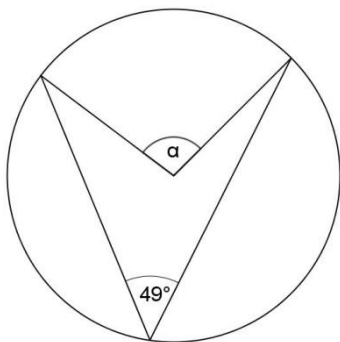
Zadanie 2. W romb o polu 37,5 wpisano okrąg o promieniu 3. Oblicz obwód rombu.



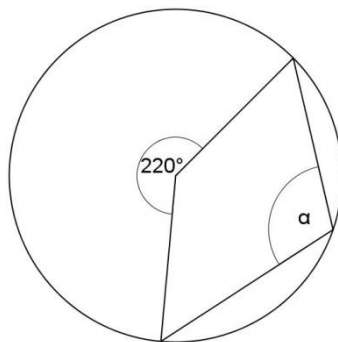
Zadanie 3. Prosta AC jest styczna do okręgu (patrz rysunek poniżej). Oblicz miarę kątów $\angle BAC$ i $\angle ACB$.



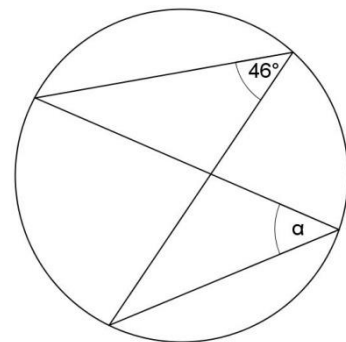
Zadanie 4. Oblicz miarę kąta α .



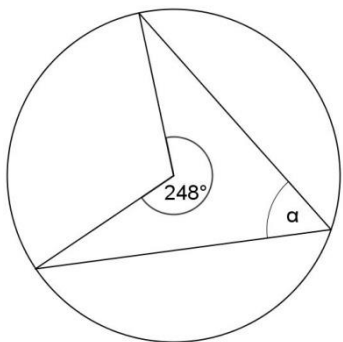
a) $\alpha = \dots\dots\dots$



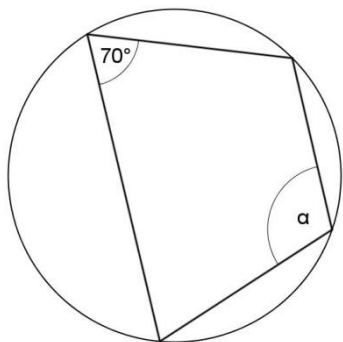
b) $\alpha = \dots\dots\dots$



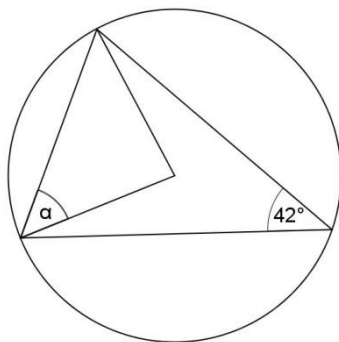
c) $\alpha = \dots\dots\dots$



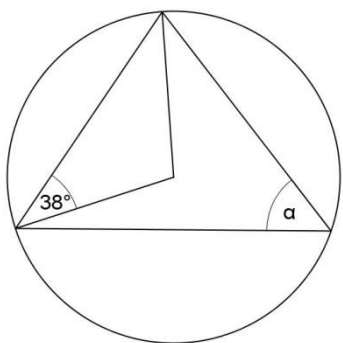
d) $\alpha = \dots\dots\dots$



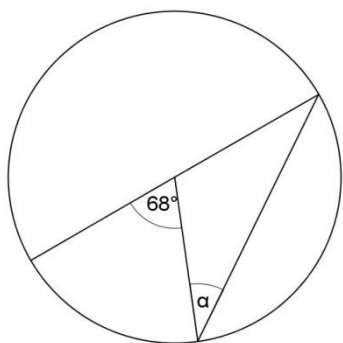
e) $\alpha = \dots\dots\dots$



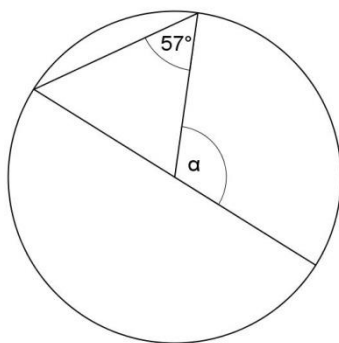
f) $\alpha = \dots\dots\dots$



g) $\alpha = \dots\dots\dots$

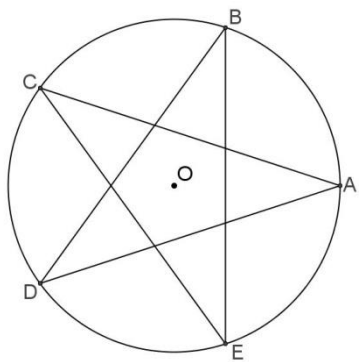


h) $\alpha = \dots\dots\dots$

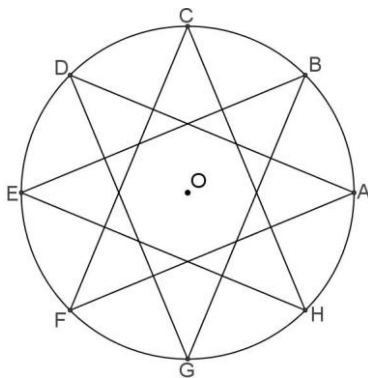


i) $\alpha = \dots\dots\dots$

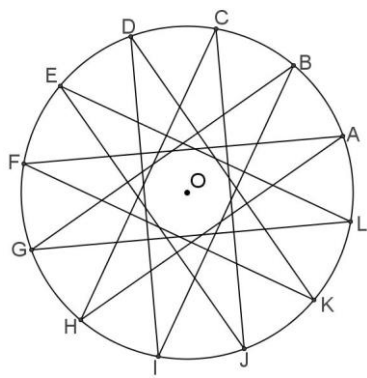
Zadanie 5. Punkty na okręgach dzielą je na łuki o takiej samej długości. Oblicz miary podanych kątów.



a) $\angle BDA = \dots\dots\dots$



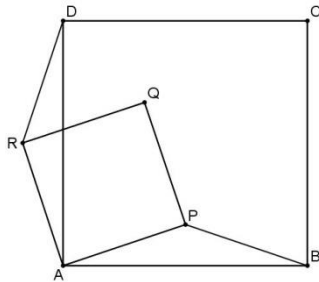
b) $\angle DAF = \dots\dots\dots$



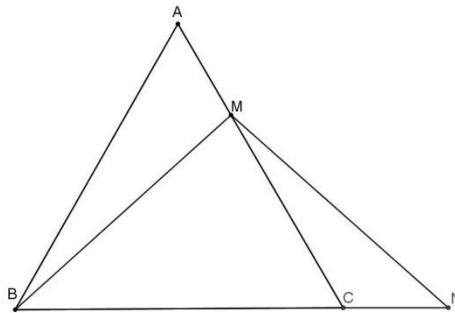
c) $\angle BID = \dots\dots\dots$

Temat: Podobieństwo trójkątów – powtórzenie.

Zadanie 1. Czworokąty ABCD i APQR są kwadratami. Udowodnij, że $|BP| = |DR|$. (Zadania maturalne CKE)

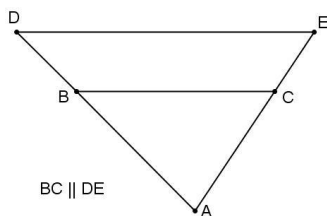


Zadanie 2. Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$. (Matura próbna marzec 2012).

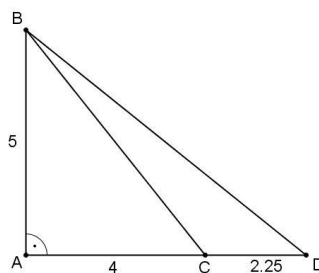


Zadanie 3. Uzasadnij podobieństwo podanych trójkątów.

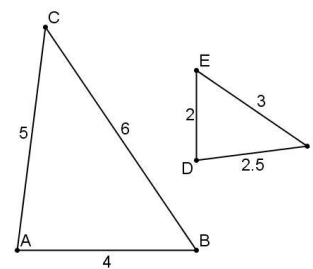
a) $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$



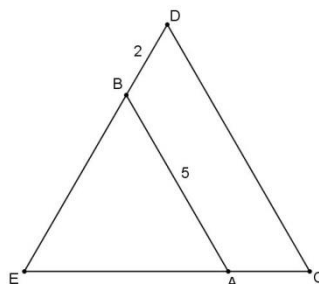
b) $\triangle ABC$ i $\triangle ABD$



c) $\triangle ABC$ i $\triangle DEF$



Zadanie 4. Odcinki AB i CD są równoległe, trójkąt ABE jest równoboczny i $|AB| = 5$ oraz $|BD| = 2$ (zobacz rysunek). Oblicz obwód czworokąta ABDC.



Zadanie 5. Działka na planie o skali 1:1000 ma powierzchnię 2cm^2 . Jaka jest powierzchnia działki w rzeczywistości?

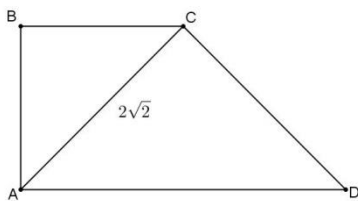
Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania pól i obwodów figur – powtórzenie.

Zadanie 1. Oblicz pole:

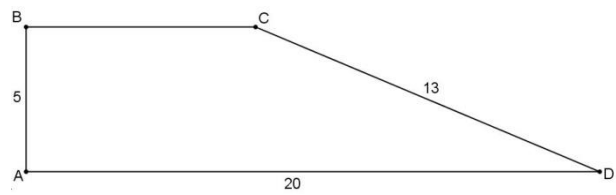
- trójkąta równobocznego o boku 4,
- trójkąta równoramiennego o ramieniu 13 i wysokości opuszczonej na podstawę równej 12,
- trójkąta o bokach 5, 7, 8.

Zadanie 2. Oblicz obwód trapezów przedstawionych na rysunku.

a)



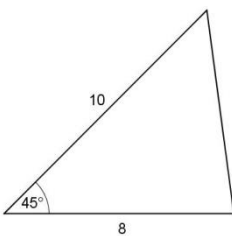
b)



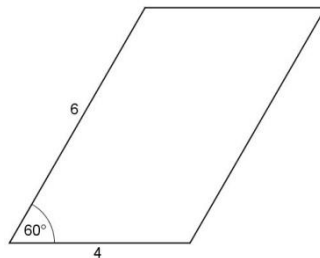
Zadanie 3. W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

Zadanie 4. Oblicz pola i obwoły figur przedstawionych na rysunkach.

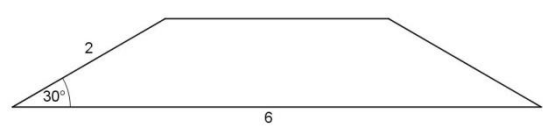
a)



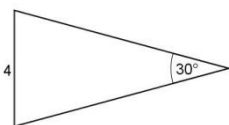
b)



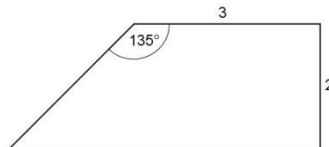
c)



d)



e)



f)



Temat: Graniastosłupy i ostrosłupy – powtórzenie wiadomości.

Zadanie 1. Uzupełnij tabelę.

Bryła	Podstawa	Liczba wierzchołków	Liczba krawędzi	Liczba ścian
graniastosłup			15	
		20		
ostrosłup			16	
				7

Zadanie 2. Krawędzie boczne ostrosłupa prawidłowego pięciokątnego są dwa razy dłuższe niż krawędzie podstawy. Oblicz długość krawędzi podstawy i krawędzi bocznej, jeżeli suma długości wszystkich krawędzi jest równa 60cm.

Zadanie 3. Objętość sześcianu jest równa 64. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego sześcianu.

Zadanie 4. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10, a krawędź podstawy $4\sqrt{2}$. Oblicz wysokość graniastosłupa i jego pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 5. Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, jeżeli krawędź podstawy ma długość 4, a krawędź boczna $2\sqrt{5}$.

Zadanie 6. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości $5\sqrt{3}$, jeżeli krawędź boczna ma długość 10.

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania długości odcinków i miar kątów w graniastosłupach i ostrosłupach.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.
- Włącz pola wyboru przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy, kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć przekątną graniastosłupa w sytuacji, gdy znasz jego wysokość.
- Oblicz przekątną graniastosłupa.

Zadanie 1. Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6, a kąt nachylenia jego przekątnej do płaszczyzny podstawy jest równy 60° . Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=2$.
- Włącz pola wyboru przekątna ściany bocznej i kąt pomiędzy przekątną ściany bocznej i krawędzią podstawy.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość graniastosłupa w sytuacji, gdy znasz długość krawędzi podstawy.
- Oblicz wysokość graniastosłupa.

Zadanie 2. Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt 40° . Oblicz wysokość graniastosłupa, jeżeli krawędź podstawy ma długość 10.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria04*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.
- Włącz pola wyboru wysokość ostrosłupa i kąt pomiędzy płaszczyzną podstawy i płaszczyzną ściany bocznej.
- Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego lub tw. Pitagorasa oblicz wysokość ostrosłupa.
- Oblicz długość krawędzi podstawy ostrosłupa wiedząc, że odcinek AC jest przekątną kwadratu.

- Korzystając z tw. Pitagorasa oblicz wysokość ściany bocznej.
- Oblicz sinus zaznaczonego kąta.

Zadanie 3. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDW o podstawie ABCD i wierzchołku W trójkąt ACW jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria04*.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$.
- Włącz pola wyboru wysokość ostrosłupa, kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy oraz kąt pomiędzy płaszczyzną podstawy i płaszczyzną ściany bocznej
- Oblicz pole jednej ściany bocznej.
- Znając tangens granatowego kąta i pole ściany bocznej oblicz długość krawędzi podstawy i wysokość ściany bocznej.
- Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego lub tw. Pitagorasa oblicz wysokość podstawy, a następnie długość odcinka DS.
- Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy (kąt jasnoniebieski).

Zadanie 4. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe 24, a kąt płaski ściany bocznej przy podstawie ma miarę α i $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Wyznacz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości i pola powierzchni graniastosłupów.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=3$.
- Włącz pola wyboru przekątna graniastosłupa, przekątna podstawy, kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość graniastosłupa w sytuacji, gdy znasz przekątną podstawy.
- Oblicz wysokość graniastosłupa, potem jego pole podstawy (kwadrat o danej przekątnej), a na koniec objętość graniastosłupa.

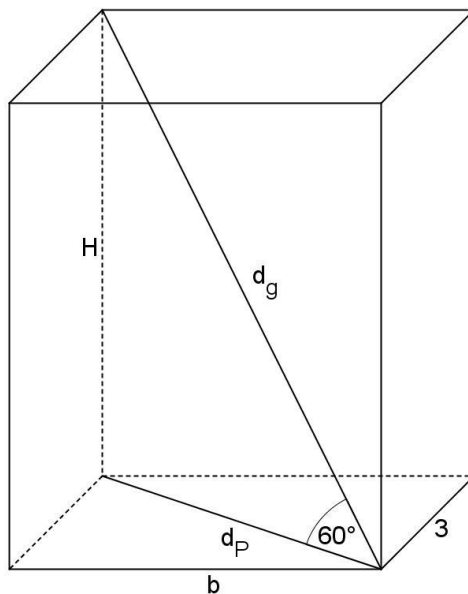
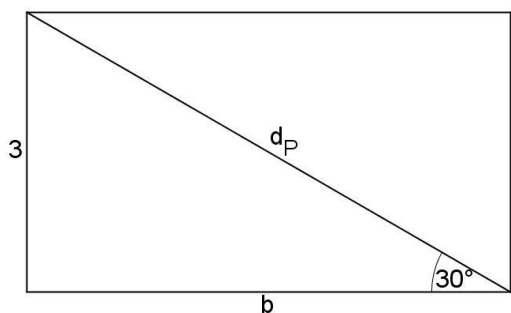
Zadanie 1. W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym ABCDEFGH. Wyznacz objętość bryły wiedząc, że $DB=52\sqrt{2}$ i kąt DBH ma miarę 60° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria01*.
- Ustaw wartość suwaka $n=1$.
- Włącz pola wyboru wysokości podstaw, przekątna ściany bocznej, odcinek łączący wierzchołek graniastosłupa ze środkiem krawędzi 2. podstawy, kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny sąsiedniej ściany bocznej.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość podstawy, gdy znasz miarę kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny sąsiedniej ściany bocznej i długość przekątnej ściany bocznej.
- Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego lub tw. Pitagorasa oblicz długość krawędzi podstawy graniastosłupa.
- Korzystając z tw. Pitagorasa oblicz wysokość graniastosłupa.
- Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa

Zadanie 2. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątna ściany bocznej tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt 30° i ma długość 18. Oblicz pole powierzchni bocznej graniastosłupa.

Zadanie 3. Podstawą graniastoslupa ABCDEFGH jest prostokąt ABCD, którego krótszy bok ma długość 3. Przekątna prostokąta ABCD tworzy z jego dłuższym bokiem kąt 30° . Przekątna HB graniastoslupa tworzy z płaszczyzną jego podstawy kąt 60° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastoslupa. Skorzystaj z poniższych rysunków.



Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości i pola powierzchni ostrosłupów.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria04*.
- Ustaw wartość suwaka $n=5$.
- Włącz pola wyboru wysokość ostrosłupa, kąt między wysokością ostrosłupa i krawędzią boczną, kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy oraz kąt pomiędzy płaszczyzną podstawy i płaszczyzną ściany bocznej.
- Wyznacz długość odcinka AS.
- Określ funkcję trygonometryczną fioletowego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość ostrosłupa, gdy znasz długość odcinka AS.
- Korzystając ze wzoru na wysokość trójkąta równobocznego lub tw. Pitagorasa oblicz długość odcinka GS.
- Korzystając z tw. Pitagorasa oblicz wysokość ściany bocznej, a potem pole powierzchni bocznej ostrosłupa.

Zadanie 1. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6, a kąt pomiędzy krawędzią boczną i wysokością ostrosłupa ma miarę 60° .

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria07*.
- Ustaw jednakową wartość suwaków a i b.
- Włącz pola wyboru wysokość ostrosłupa, kąt między płaszczyzną podstawy i płaszczyzną ściany bocznej BCW.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość podstawy, gdy znasz wysokość ostrosłupa.
- Oblicz wysokość podstawy, a następnie pole podstawy.
- Oblicz objętość ostrosłupa.

Zadanie 2. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC (kąt prosty przy wierzchołku A). Krawędź AW jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, a ściana BCW tworzy z nią kąt 45° . Wysokość ostrosłupa ma długość 12. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria05*.
- Ustaw wartość suwaków $a=5$ i $b=2$.

- Włącz pola wyboru wysokość ostrosłupa, kąt między płaszczyzną podstawy i krawędzią boczną BW.
- Korzystając z tw. Pitagorasa oblicz długość odcinka BS.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość ostrosłupa, gdy znasz długość odcinka BS.
- Korzystając z tw. Pitagorasa oblicz długość odcinków $AW=DW$ oraz $BW=CW$.
- Kliknij przycisk Siatka.
- Oblicz pole ściany ADW.
- Oblicz pole ścian ABW i CDW, korzystając z faktu, że są to trójkąty prostokątne.
- Oblicz pole ściany BCW, korzystając z faktu, że jest to trójkąt równoramienny. (Możesz wykorzystać tw. Pitagorasa do obliczenia wysokości trójkąta, lub wzór Herona na pole trójkąta o znanych bokach).
- Oblicz pole podstawy ostrosłupa, a następnie pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 3. Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o bokach 2 i 5. Spodek wierzchołka ostrosłupa leży w połowie krótszego boku. Dłuższe krawędzie tworzą z płaszczyzną podstawy kąt 45° . Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Temat: Walec i stożek – przypomnienie wiadomości.

Zadanie 1. Pole powierzchni bocznej walca, którego podstawa ma średnicę 4 jest równe 8π .
Oblicz wysokość walca.

Zadanie 2. Przekrój osiowy walca jest kwadratem o boku długości 6. Oblicz objętość walca.

Zadanie 3. Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku długości 6. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Zadanie 4. Objętość walca, w którym wysokość jest trzykrotnie dłuższa od promienia podstawy, jest równa 24π . Oblicz długość promienia walca.

Zadanie 5. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość $\sqrt{19}$, a wysokość walca jest równa $\sqrt{15}$. Oblicz promień walca.

Zadanie 6. Tworząca stożka jest równa 5 cm, a średnica podstawy jest równa 6 cm. Oblicz objętość stożka.

Zadanie 7. Powierzchnia boczna stożka po rozwinięciu na płaszczyznę jest ćwiartką koła o promieniu 8 cm. Oblicz wysokość tego stożka.

Temat: Zastosowanie trygonometrii do obliczania objętości i pola powierzchni walców i stożków.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Przekrój osiowy, Tworząca walca BC, Średnica walca, Przekątna przekroju osiowego, Kąt nachylenia przekątnej przekroju do płaszczyzny podstawy.
- Oblicz średnicę walca.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć tworzącą walca (równą wysokości walca), gdy znasz jego średnicę.
- Oblicz pole powierzchni bocznej walca.

Zadanie 1. Przekątna przekroju osiowego walca tworzy z płaszczyzną podstawy kąt 30° . Oblicz pole powierzchni bocznej walca, jeżeli jego promień ma długość 3.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Promień stożka, Kąt między tworzącą AW i płaszczyzną podstawy.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć promień stożka, gdy znasz jego wysokość.
- Oblicz promień stożka.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć tworzącą stożka, gdy znasz jego wysokość.
- Oblicz tworzącą stożka, a następnie pole powierzchni bocznej stożka.

Zadanie 2. Promień stożka tworzy z tworzącą kąt 30° , a wysokość stożka jest równa 6. Oblicz pole powierzchni bocznej stożka.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria12*.
- Włącz pola wyboru Wysokość walca O_1O_2 , Promień walca, Odcinek łączący brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy, Kąt między odcinkiem łączącym brzeg podstawy ze środkiem drugiej podstawy i wysokością walca.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć wysokość walca, gdy znasz długość odcinka AO_2 , który jest równy tworzącej stożka wpisanego w walec.
- Oblicz wysokość walca.

- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta, która pozwoli ci obliczyć promień walca, gdy znasz długość odcinka AO_2 .
- Oblicz promień walca, a następnie jego objętość.

Zadanie 3. W walec wpisano stożek o tworzącej 20 i kącie pomiędzy tworzącą i wysokością 60° . Oblicz objętość walca.

Instrukcja obsługi apletu:

- Otwórz aplet *stereometria13*.
- Włącz pola wyboru Wysokość stożka, Tworząca stożka AW, Tworząca stożka BW, Promień stożka, Kąt rozwarcia stożka, Kąt między tworzącą i wysokością.
- Oblicz miarę kąta między tworzącą i wysokością.
- Wyłącz pole wyboru Kąt rozwarcia stożka.
- Określ funkcję trygonometryczną zaznaczonego kąta (kolor błękitny), która pozwoli ci obliczyć promień stożka, gdy znasz jego tworzącą.
- Oblicz promień stożka, a następnie pole powierzchni całkowitej stożka.

Zadanie 4. Kąt rozwarcia stożka ma miarę 80° . Tworząca ma długość 50. Oblicz pole powierzchni całkowitej stożka.