



Projekt „Innowacyjny program nauczania matematyki dla liceów ogólnokształcących”
współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Skrypt 18

Trygonometria

1. Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym
2. Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym – wykorzystanie w zadaniach
3. Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym – wykorzystanie w zadaniach cz. 2
4. Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60°
5. Obliczanie długości odcinków w trójkącie prostokątnym – wykorzystanie tablic lub kalkulatora
7. Obliczanie miary kąta ostrego gdy znana jest wartość jego funkcji trygonometrycznych

Opracowanie: L1

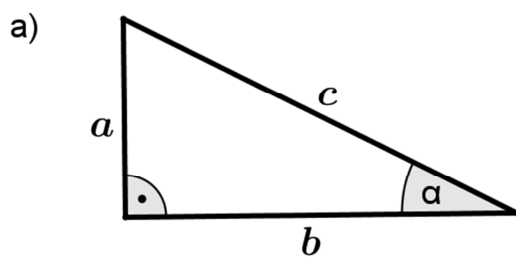
Temat: Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym.

Praca z wykorzystaniem apletu *trygonometria01*.

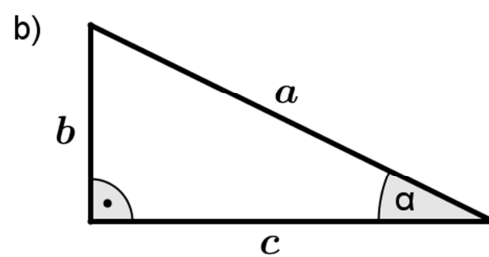
1. Otwórz plik *trygonometria01*.
2. Zapoznaj się z definicjami funkcji trygonometrycznych – naciskaj po kolei przyciski $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.
3. Przejdź do ćwiczenia 1 (naciśnij Ćwiczenie 1). Określaj z definicji funkcje trygonometryczne zgodnie z treścią poleceń.
4. Przejdź do ćwiczenia 2 – określaj zależność między wskazanymi wielkościami w trójkącie.

Karta pracy

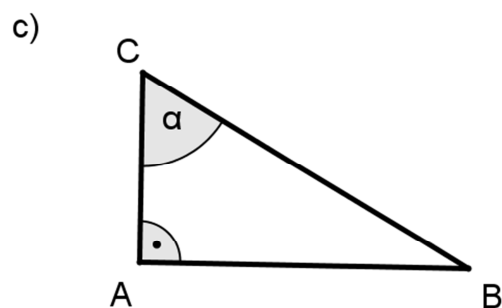
Zadanie 1: Określ funkcje sinus, cosinus, tangens wskazanych kątów ostrych trójkątów prostokątnych.



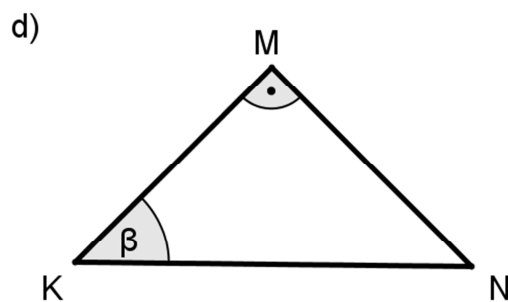
Odp: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$



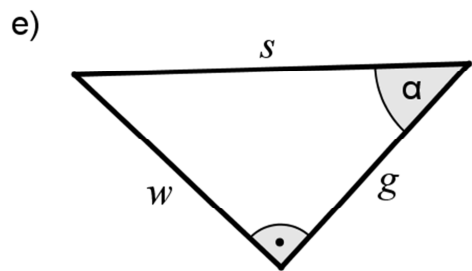
Odp: $\sin\alpha = \frac{b}{a}$, $\cos\alpha = \frac{c}{a}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{c}$



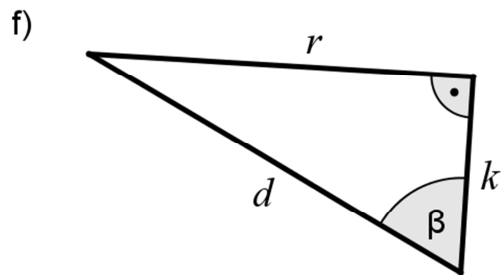
Odp: $\sin\alpha = \frac{|AB|}{|BC|}$, $\cos\alpha = \frac{|AC|}{|BC|}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$



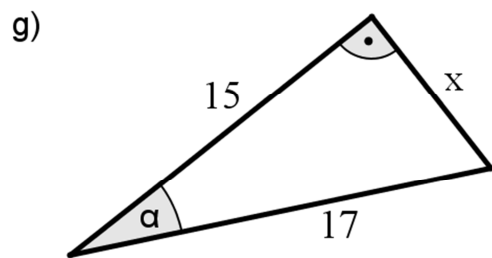
Odp:



Odp: $\sin \alpha = \frac{w}{s}$, $\cos \alpha =$

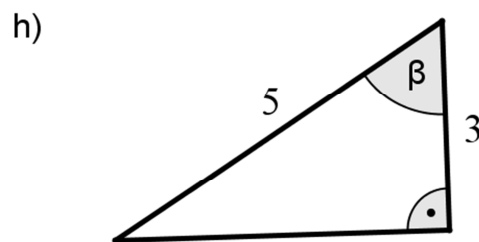


Odp:



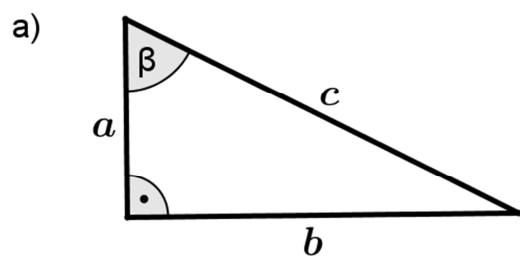
$x = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$

Odp: $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \alpha =$

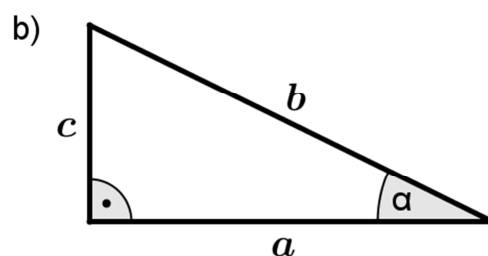


Odp:

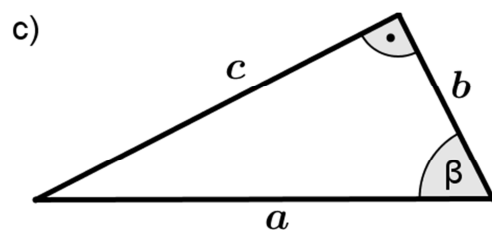
Zadanie 2: Uzupełnij według wzoru.



Odp: $\cos \beta = \frac{a}{c}$, = $\frac{b}{a}$

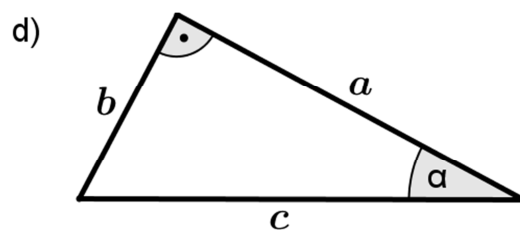


Odp: = $\frac{c}{a}$ = $\frac{c}{b}$



Odp: = $\frac{c}{b}$ = $\frac{b}{a}$

~~= $\frac{a}{c}$~~ = $\frac{c}{a}$



Odp: = $\frac{a}{c}$ = $\frac{c}{b}$

= $\frac{b}{a}$ = $\frac{b}{c}$

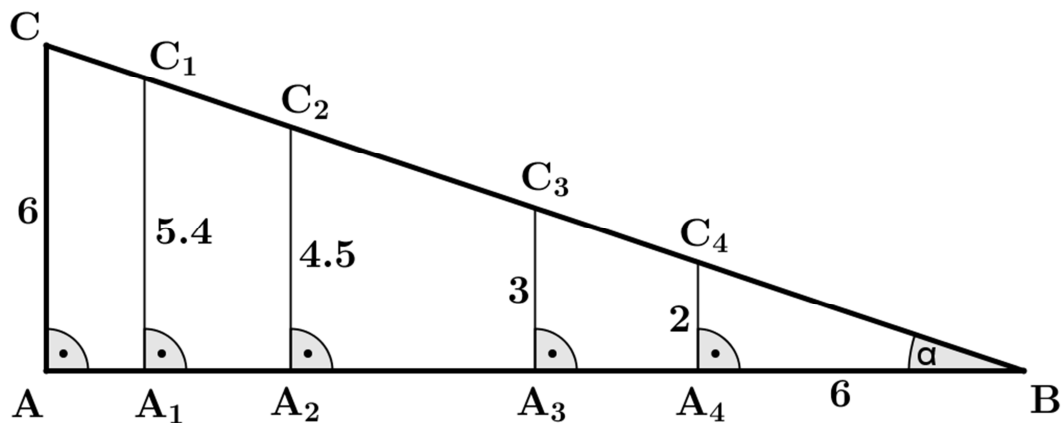
Praca z wykorzystaniem apletu *trygonometria01*.

5. Naciśnij przycisk Zauważ, że... . Poruszaj wierzchołkami trójkąta i zwróć uwagę na to, kiedy wartości funkcji trygonometrycznych sinus, cosinus czy tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym zmieniają się, a kiedy pozostają niezmienione (Własność 1).

Karta pracy

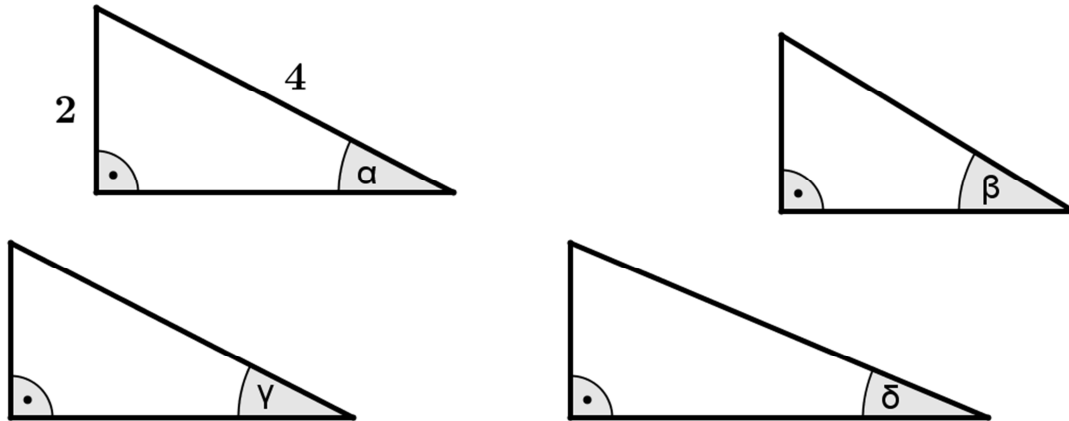
Zadanie 3: Uzupełnij tabelę:

- oblicz długości odcinków potrzebnych do wyznaczenia tangensa kąta α w każdym z trójkątów prostokątnych według poniższego rysunku
- podaj wartości funkcji tangens kąta α we wszystkich tych trójkątach

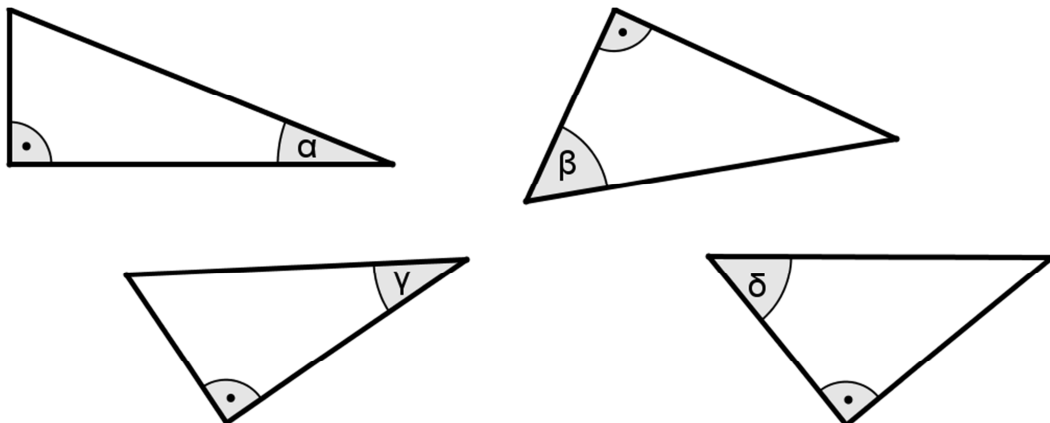


ΔA_3BC_3	ΔA_2BC_2	ΔA_1BC_1	ΔABC
$\frac{ C_3A_3 }{ A_3B } = \frac{ C_4A_4 }{ A_4B }$	$\frac{ C_2A_2 }{ A_2B } = \frac{ C_4A_4 }{ A_4B }$	$\frac{ C_1A_1 }{ A_1B } = \frac{ C_4A_4 }{ A_4B }$	$\frac{ CA }{ AB } =$
$\frac{3}{ A_3B } = \frac{2}{6}$	$\frac{4.5}{ A_2B } = \frac{2}{6}$	$\frac{5.4}{ A_1B } =$	
$ A_3B = 9$	$ A_2B =$		
$\text{tg}\alpha = \frac{ C_3A_3 }{ A_3B } = \frac{3}{9}$	$\text{tg}\alpha = \frac{ C_2A_2 }{ A_2B } =$	$\text{tg}\alpha = \frac{ C_1A_1 }{ A_1B } =$	$\text{tg}\alpha = \frac{ CA }{ AB } =$
$\text{tg}\alpha =$	$\text{tg}\alpha =$	$\text{tg}\alpha =$	$\text{tg}\alpha =$

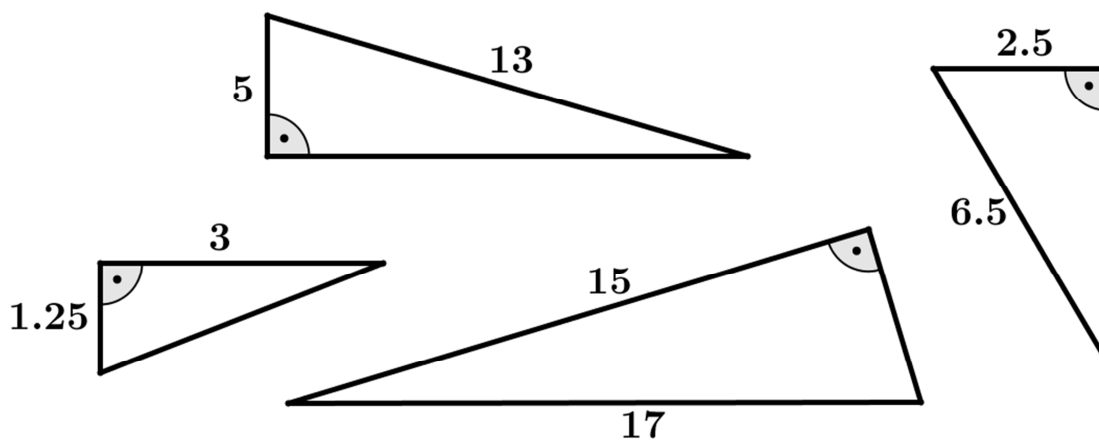
Zadanie 4: Zapisz przy bokach kolejnych trójkątów takie długości (inne dla każdego trójkąta), aby sinus wskazanego kąta w każdym z nich był taki sam, jak $\sin\alpha$.



Zadanie 5: Zapisz przy bokach poniższych trójkątów takie długości (inne dla każdego trójkąta), aby tangens wskazanego kąta w każdym z nich wynosił $\frac{1}{3}$.



Zadanie 6: Skreśl ten trójkąt, który ma inne kąty od pozostałych.



Temat: Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym – wykorzystanie w zadaniach.

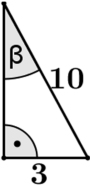
Praca z wykorzystaniem apletu *trygonometria01*.

- Otwórz plik *trygonometria01*. Przejdź do strony Zauważ, że...
- Poruszaj wierzchołkami trójkąta i zanim zaznaczysz opcję Własność spróbuj określić jakie wartości przyjmują poszczególne funkcje trygonometryczne. Kolejne własności odkryjesz naciskając zielone strzałki.

Karta pracy

Zadanie 1: Spośród wymienionych wartości funkcji trygonometrycznych skreśl te, które na pewno nie mogą być wynikami obliczeń dotyczących kątów ostrych trójkąta prostokątnego.

Dla pozostałych wartości narysuj trójkąty prostokątne z odpowiednimi długościami boków.

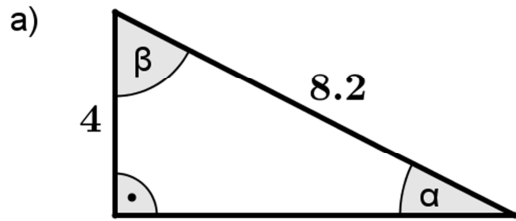
$\sin\beta = 0.3$	$\cos\beta = 0.8$	$\operatorname{tg}\beta = 1$	$\sin\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha = -4$	$\sin\beta = -\frac{1}{4}$	$\sin\alpha = \frac{4}{3}$
						
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$	$\cos\alpha = 1.1$	$\operatorname{tg}\beta = -\frac{5}{3}$	$\operatorname{tg}\alpha = 10$	$\sin\alpha = \frac{7}{8}$	$\sin\alpha = \frac{9}{8}$	$\cos\alpha = 0$

Pamiętaj: długości boków w trójkącie nie są ani ujemne, ani równe 0, a przyprostokątne w trójkącie prostokątnym są krótsze od przeciwprostokątnej.

Zadanie 2: α i β są kątami ostrymi w trójkącie prostokątnym. Uzupełnij tabelę.

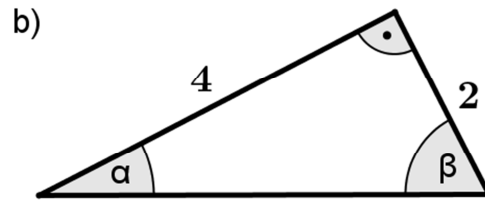
a)	$\sin\alpha = \frac{7}{8}$	b)	$\sin\beta = \frac{1}{2}$	c)	$\cos\alpha = \frac{3}{4}$	d)	$\cos\beta = \frac{5}{7}$	e)	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{9}$
	$\cos\beta =$		$\cos\alpha =$		$\sin\beta =$		$\sin\alpha =$		$\operatorname{tg}\beta =$

Zadanie 3: Na podstawie danych na rysunku oblicz wartości wskazanych funkcji trygonometrycznych. Wyniki zaokrąglij do części dziesiętysięcznych.



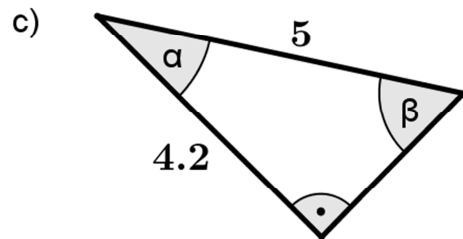
$\sin \alpha =$

$\cos \beta =$



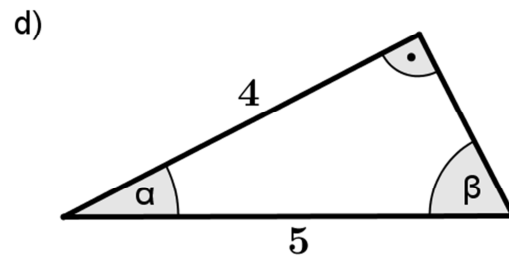
$\operatorname{tg} \alpha =$

$\operatorname{tg} \beta =$



$\cos \alpha =$

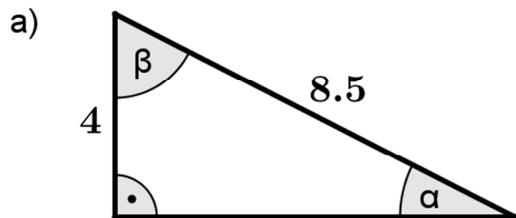
$\sin \beta =$



$\sin \alpha =$

$\cos \beta =$

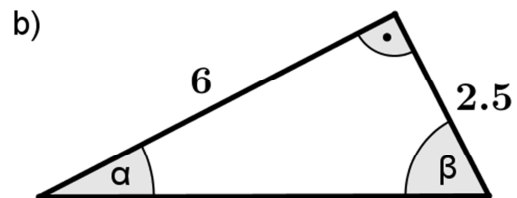
Zadanie 4: Skorzystaj z twierdzenia Pitagorasa i oblicz długość nieznanego boku trójkąta. Oblicz wartości wskazanych funkcji trygonometrycznych. Wyniki zaokrąglij do części dziesiętysięcznych.



$\operatorname{tg} \alpha =$

$\sin \beta =$

$\cos \alpha =$



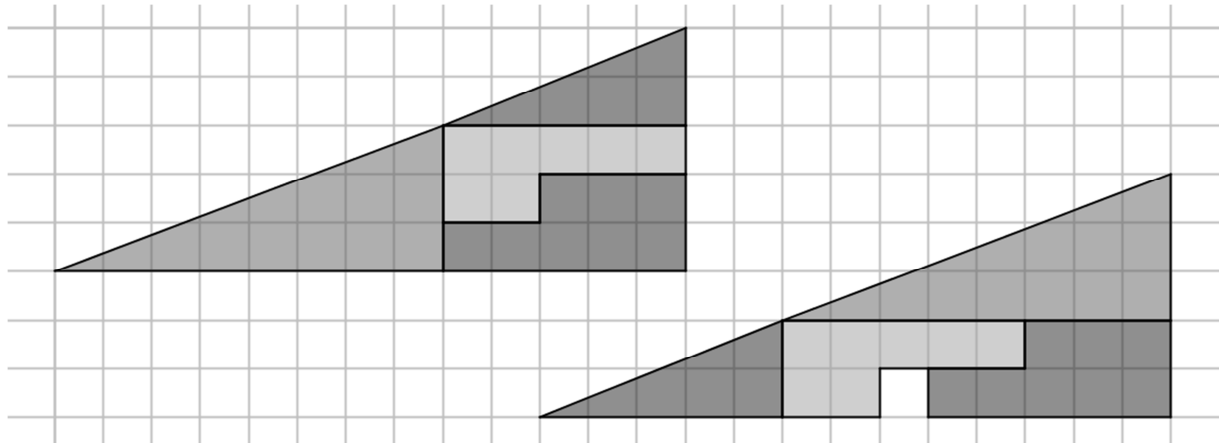
$\sin \alpha =$

$\operatorname{tg} \alpha =$

$\operatorname{tg} \beta =$

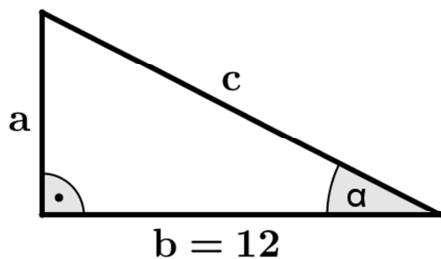
Temat: Definicje i wartości funkcji sinus, cosinus, tangens kątów ostrych w trójkącie prostokątnym – wykorzystanie w zadaniach cz. 2.

Zadanie 1: Gdzie podział się jeden kwadracik?

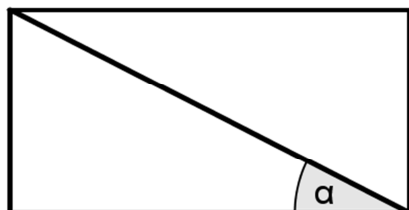


Powyższe trójkąty są zbudowane z tych samych elementów. Zgodnie ze wzorem na pole trójkąta, pola obydwu powinny być równe $32,5 [j^2]$. Tymczasem w drugim trójkącie brakuje jednej jednostki. Jak to wyjaśnisz?

Zadanie 2: Oblicz a i c wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 0,45$. Wyniki zaokrąglij do 0,01.



Zadanie 3: Przekątna prostokąta ma długość 4. Oblicz pole prostokąta wiedząc, że sinus kąta nachylenia przekątnej do dłuższego boku wynosi 0,3.



Temat: Wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60° .

Praca z wykorzystaniem apletu *trygonometria02*.

1. Otwórz plik *trygonometria02*.
2. Na pierwszej stronie znajduje się wyprowadzenie wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60° . (Przechodzenie pomiędzy stroną z wartościami funkcji trygonometrycznych a następną stroną - z zadaniami - poprzez naciśnięcie ramki z tematem.)

Ustaw suwak na $\alpha = 30^\circ$. Zwróć uwagę na opis wybranych odcinków trójkąta równobocznego (wykorzystany tu jest wzór na wysokość trójkąta równobocznego o boku długości a). Oblicz $\sin 30^\circ$. Sprawdź swoje obliczenia zaznaczając pole wyboru $\sin 30^\circ$. Postępuj podobnie dla pozostałych wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30° , 45° , 60° .

3. Zaznacz pole wyboru Tabela – tu masz zestawienie wszystkich wyprowadzonych wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30° , 45° , 60° . Będziesz mieć do niej dostęp również w trakcie rozwiązywania zadań (poprzez zaznaczenie pola wyboru).
4. Przejdź do zadań – naciśnij ramkę z tematem. Rozwiązuj kolejne zadania, a poprawność swoich rozwiązań sprawdzaj poprzez rozwinięcie rozwiązania za pomocą suwaków Rozwiązanie.

Aby rozwiązać każde z prezentowanych zadań, zapisz najpierw zależność pomiędzy wskazanym kątem ostrym, długością boku, którą właśnie chcesz wyliczyć i długością boku danego z wykorzystaniem odpowiedniej funkcji trygonometrycznej. Zamień funkcję danego kąta ostrego na wartość – zgodnie z Tabelą. Przekształć otrzymane wyrażenie, aby obliczyć długość boku. Postępuj podobnie z drugim nieznanym bokiem trójkąta.

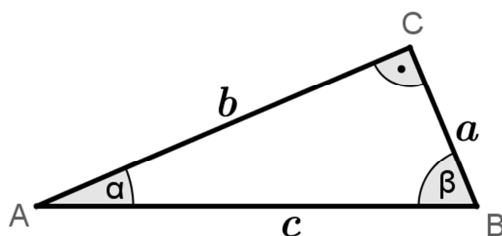
5. Do tej pory wszystkie obliczenia dotyczyły poszukiwania długości boków. Czy z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych można obliczyć miarę kąta? Naciśnij ramkę z napisem Obliczanie długości boków. Napis w ramce zmieni się na Obliczanie miar kątów. Postępuj podobnie jak w przypadku zadań dotyczących obliczania długości boków – losuj kolejne zadania, a poprawność swoich obliczeń sprawdzaj z użyciem suwaków. Pomocniczo możesz poruszać wierzchołkiem C trójkąta, aby dane zadania zgadzały się z kształtem trójkąta. W trakcie rozwiązywania zadań korzystaj z Tabeli.

Temat: Obliczanie długości odcinków w trójkącie prostokątnym – wykorzystanie tablic lub kalkulatora.

Praca z wykorzystaniem apletu *trygonometria03*.

1. Otwórz plik *trygonometria03*.
2. Do rozwiązania są zadania, których treść po części zależy od kształtu i wielkości trójkąta. Poruszaj wierzchołkami trójkąta, aby stworzyć nową sytuację obliczeniową i naciśnij przycisk Następny przykład.
3. Rozwiąż zadanie:
 - zapisz zależność wiążącą wielkości dane i wielkość do obliczenia;
 - skorzystaj z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych – naciskając strzałki nawigacyjne góra/dół przewiniesz tablicę do strony, na której odczytasz odpowiednią wartość funkcji trygonometrycznej;
 - sprawdź się poprzez naciśnięcie ramki Odczytaj tablicę – zostaną zaznaczone czerwonym kolorem nazwy kolumn, miara kąta i wartość funkcji trygonometrycznej;
 - zapisz przekształcenia i obliczenia.
4. Poprawność swoich obliczeń sprawdź używając suwaka Rozwiązanie.

Przykład: W trójkącie ABC dane są: $b = 4\text{cm}$, $\alpha = 23^\circ$. Oblicz długość boku c .



W treści zadania dany jest kąt α . Dla kąta α mamy: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Ponieważ kąt α ma miarę 23° ,

zapisujemy: $\cos 23^\circ = \frac{b}{c}$ i dalej: $\cos 23^\circ = \frac{4}{c}$. Odczytujemy z tablic wartości funkcji

trygonometrycznych: $\cos 23^\circ \approx 0,9205$. Podstawiamy otrzymując: $0,9205 \approx \frac{4}{c}$. Następnie

przekształcamy: $c \approx \frac{4}{0,9205}$ i otrzymujemy: $c \approx 4,3\text{cm}$.

Karta pracy

Zadanie 1: Podaj przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych. Skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin 23^\circ \approx$

b) $\sin 15^\circ \approx$

c) $\sin 49^\circ \approx$

d) $\operatorname{tg} 23^\circ \approx$

e) $\operatorname{tg} 83^\circ \approx$

f) $\operatorname{tg} 65^\circ \approx$

Zadanie 2: Podaj przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych. Skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

a) $\cos 52^\circ \approx$

b) $\cos 27^\circ \approx$

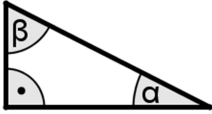
c) $\cos 74^\circ \approx$

d) $\operatorname{tg} 2^\circ \approx$

e) $\sin 33^\circ \approx$

f) $\cos 45^\circ \approx$

Zadanie 3: Dla danego kąta α bądź danego kąta β podaj przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych. Skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

a) $\alpha = 26^\circ$ $\sin \alpha \approx$	b) $\alpha = 15^\circ$ $\cos \alpha \approx$	c) $\alpha = 15^\circ$ $\operatorname{tg} \alpha \approx$
d) $\beta = 18^\circ$ $\sin \beta \approx$	e) $\beta = 50^\circ$ $\cos \beta \approx$	f) $\beta = 37^\circ$ $\operatorname{tg} \beta \approx$
g) $\alpha = 26^\circ$ $\sin \alpha \approx$ $\cos \alpha \approx$ $\operatorname{tg} \alpha \approx$	h) $\beta = 75^\circ$ $\sin \beta \approx$ $\cos \beta \approx$ $\operatorname{tg} \beta \approx$	i) $\alpha = 22^\circ$  $\sin \alpha \approx$ $\cos \beta \approx$

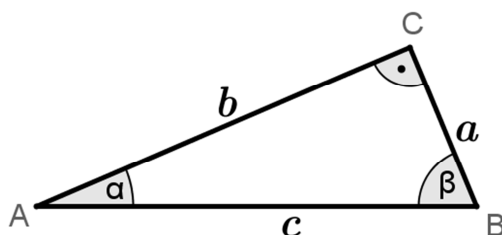
Wskazówka: Odczytując wartości funkcji trygonometrycznych z tablic zwracaj uwagę jedynie na funkcję trygonometryczną czy to jest sinus, cosinus, czy tangens, oraz na miarę kąta. Nie jest istotne czy ten kąt w zadaniu nazywa się α , czy β . Na czas odczytywania wartości funkcji trygonometrycznej z tablicy, kąt otrzymuje nową nazwę. Sinus i tangens odczytywany jest dla kąta α – odczytaj miarę kąta z lewej strony, a cosinus dla kąta β – odczytaj miarę kąta z prawej strony. Za każdym razem sprawdzaj nazwy kolumn.

Temat: Obliczanie miary kąta ostrego gdy znana jest wartość jego funkcji trygonometrycznych.

Praca z wykorzystaniem apletu *trygonometria03*.

1. Otwórz plik *trygonometria03*. Przejdź do strony Obliczanie miary kąta w trójkącie poprzez naciśnięcie ramki z tematem Obliczanie długości boku trójkąta. Ukaże się aktualny temat: Obliczanie miary kąta w trójkącie.
2. Podobnie, jak przy poprzedniej stronie, do rozwiązywania są zadania, których treść po części zależy od kształtu i wielkości trójkąta. Poruszaj wierzchołkami trójkąta, aby stworzyć nową sytuację obliczeniową i naciśnij przycisk Następny przykład.
3. Rozwiąż zadanie:
 - zapisz zależność wiążącą wielkości dane i wielkość do obliczenia;
 - podstaw dane z zadania i uprość wyrażenie stosując zaokrąglenie do 0,0001.
 - skorzystaj z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych – naciskając strzałki nawigacyjne góra/dół przewiniesz tablicę do strony, na której odczytasz odpowiednią miarę kąta;
 - sprawdź się poprzez naciśnięcie ramki Odczytaj tablicę – zostaną zaznaczone czerwonym kolorem nazwy kolumn, wartość funkcji trygonometrycznej i miara kąta;
 - zapisz przekształcenia i obliczenia.
4. Poprawność swoich obliczeń sprawdź używając suwaka Rozwiązanie.

Przykład: W trójkącie ABC dane są: $b = 8\text{cm}$, $c = 9\text{cm}$. Oblicz miarę kąta α .



Zależność pomiędzy długością boku b , długością boku c i kątem α , to: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Podstawiamy dane: $\cos\alpha = \frac{8}{9}$, stąd $\cos\alpha \approx 0,8889$. Odszukujemy w tablicy wartości funkcji trygonometrycznych w kolumnie wartości funkcji cosinus liczbę najbliższą 0,8889. Odczytujemy: $\cos 27^\circ \approx 0,8910$. Odpowiedź: $\alpha \approx 27^\circ$.

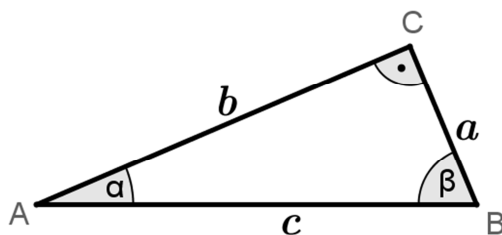
Karta pracy

Zadanie 1: Podaj przybliżoną miarę kąta ostrego, dla której funkcja trygonometryczna przyjmuje daną wartość. Skorzystaj z tablic wartości funkcji trygonometrycznych.

a) $\sin\alpha = 0,95$ $\alpha \approx$	b) $\sin\alpha = 0,24$ $\alpha \approx$	c) $\operatorname{tg}\alpha = 0,14$ $\alpha \approx$
d) $\cos\alpha = 0,95$ $\alpha \approx$	e) $\cos\alpha = 0,24$ $\alpha \approx$	f) $\operatorname{tg}\beta = 0,14$ $\beta \approx$
g) $\sin\beta = 0,5$ $\beta =$	h) $\operatorname{tg}\beta = 1$ $\beta =$	i) $\cos\beta = 0,5$ $\beta =$

Wskazówka: w tablicy wartości funkcji trygonometrycznych wartości dla kątów ostrych są przybliżone poza trzema wyjątkami: $\sin 30^\circ = 0,5$; $\cos 60^\circ = 0,5$; $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$.

Przykład: W trójkącie ABC dane są: $a = 4\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$. Oblicz miarę kąta α .



Zależność pomiędzy długością boku a , długością boku c i kątem α , to: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.

Podstawiamy dane: $\sin\alpha = \frac{4}{8}$, stąd $\sin\alpha = 0,5$. Odczytujemy z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych: $\sin\alpha = 0,5$ dla $\alpha = 30^\circ$. Odpowiedź: $\alpha = 30^\circ$

Zadanie 2: W trójkącie ABC dane są: $a = 4\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$. Oblicz miarę kąta β .

