KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

ptm rok zał. 1919

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wespół w zespół
z Matematyką
bez Granic

Materiały edukacyjne

dla uczestnika Projektu

Podręcznik I

Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury I

I klasa szkoły ponadgimnazjalnej

Materiały edukacyjne dystrybuowane są bezpłatnie

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOPKA REDAKCYJNA

Podręcznik **„Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury I”** dla klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej powstał w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu **„Wespół w zespół z Matematyką bez Granic”** współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego (umowa o dofinansowanie projektu w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki nr UDA-POKL.03.03.04-00-165/09).

Podręcznik został opracowany przez zespół doświadczonych nauczycieli matematyki uczestniczących w projekcie pod kierunkiem dr Krystyny Białek - nauczyciela akademickiego Wydziału Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego, członka Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Redakcja:
Krystyna Białek, specjalista ds. obsługi merytorycznej projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic”, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski

Autorzy i recenzenci materiałów edukacyjnych:
Iwona Derendarz, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Helena Ewert-Fechner, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Anna Rybak, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Tłumaczenie:
Magdalena Kułakowska, język niemiecki, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Anna Kuzio, język angielski, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Elżbieta Marańska-Napadło, język włoski i francuski, Żagań
Monika Muszalska, język francuski, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Wioletta Sosnowska, język hiszpański, Zespół Szkół Tekstylno - Handlowych, Żagań

Doradztwo metodyczne:
Alicja Kozak-Wnuczek, Samorządowy Ośrodek Doskonalenia i Doradztwa, Zielona Góra

Recenzenci:
Dorota Krassowska, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski
Wojciech Saleniuk, Katolickie Liceum Ogólnokształcące, Żary

Projekt okładki:
Klara Keler

Spis treści

I. Wprowadzenie

Materiały edukacyjne pod tytułem **„Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury I”** opracowano w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Podręcznik „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury I” stanowi część pierwszą materiałów edukacyjnych adresowanych do uczniów pierwszej klasy szkoły ponadgimnazjalnej uczestniczących w zajęciach pozalekcyjnych z matematyki w ramach Projektu realizowanego w latach 2009 – 2012 w szkołach ponadgimnazjalnych z województw: kujawsko – pomorskiego, lubuskiego i zachodniopomorskiego.

Projekt „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” wpisuje się w ponadregionalny program rozwijania umiejętności uczniów w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem nauk matematyczno – przyrodniczych i języków obcych.

Celem projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” jest podnoszenie kompetencji kluczowych uczniów ze szkół podstawowych, gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych w zakresie kształtowania umiejętności opisywania w języku matematyki otaczającego świata, stawiania hipotez i ich weryfikowania, rozwiązywania problemów w twórczy sposób, integracji zespołu klasowego, skutecznego porozumiewania się w różnych sytuacjach, efektywnego współdziałania w zespole oraz interdyscyplinarnego spojrzenia na otaczającą nas rzeczywistość z uwzględnieniem znajomości języków obych.

Podręcznik „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury I” zawiera siedem pakietów edukacyjnych zgodnych z podstawą programową kształcenia ogólnego dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych oraz standardów egzaminacyjnych. Materiały edukacyjne zawarte w podręczniku mają być źródłem do wzbogacenia treści omawianych w ramowym programie nauczania z zakresu matematyki realizowanych na zajęciach lekcyjnych w szkołach, z których pochodzą uczestnicy Projektu, rozszerzenia ich i usystematyzowania wiedzy.

Zaproponowany podział na 7 bloków tematycznych został dokonany w oparciu o podręcznik: Cewe A., Krawczyk M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R., "Matematyka w otaczającym nas świecie Podręcznik dla klasy 1”, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2008.

Podział jest zgodny z Podstawą programową kształcenia ogólnego dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych, których ukończenie umożliwia uzyskanie świadectwa dojrzałości po zdaniu egzaminu maturalnego.

Pakiety edukacyjne zawarte w podręczniku „**Wespół w Zespół z Matematyką bez Granic do matury I**” będą realizowane na zajęciach pozalekcyjnych w szkołach, z których pochodzą uczestnicy Projektu, pod kierunkiem nauczyciela nauczającego matematyki w danej klasie.

Materiały podane w **każdym** pakiecie edukacyjnym zaplanowano do realizacji na cztery godziny lekcyjne - zajęć pozalekcyjnych zwanych - **„Spotkaniami zespołów MbG**”.

Zajęcia te mogą być realizowane w dwojaki sposób:
„Spotkanie 1 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Ćwiczenia otwierające".
„Spotkanie 2 zespołów MbG" – 2 godziny lekcyjne – „Rozwiążmy razem".
„Spotkanie 3 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Zajęcia podsumowujące".
bądź:
„Spotkanie 1 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Ćwiczenia otwierające".
„Spotkanie 2 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Rozwiążmy razem".
„Spotkanie 3 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Rozwiążmy razem".
„Spotkanie 4 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Zajęcia podsumowujące".

Każde „Spotkanie Zespołów MbG" zawiera następujące stałe elementy:

- planowanie i podział zadań, realizacja założonych planów,
- rozwiązywanie zestawu zadań - rozwiązanie zestawu zadań przez zespoły zadaniowe, w tym jednego zadania w języku obcym,
- udokumentowanie pracy zespołów,
- podsumowanie i ocena.

Realizacja każdego pakietu edukacyjnego rozpocznie się jedną godziną lekcyjną przygotowań kształtujących pożądane umiejętności (wskazane przez Autorów Pakietu) pod kierunkiem nauczyciela. **„Ćwiczenia otwierające"** odbywają się zgodnie z terminarzem obowiązującym w danym pakiecie i są przeprowadzane przez nauczycieli matematyki w danej klasie w siedzibach szkół, z których pochodzą uczestnicy Projektu. Zadania z „Ćwiczeń otwierających" są treningiem do rozwiązywania zestawu „Rozwiążmy razem". Rozwiązane zadania przez zespoły uczniów z każdego zestawu zadań „Rozwiążmy razem" sprawdza nauczyciel matematyki uczestniczący w Projekcie i ocenia je według otrzymanego klucza w danym pakiecie. **Arkusze rozwiązań zestawu zadań „Rozwiążmy razem" stanowią każdorazowo załącznik do raportu z realizacji danego pakietu edukacyjnego**.

Pierwsze zadanie podawane jest w języku obcym (angielskim, francuskim, niemieckim, hiszpańskim i włoskim). Należy je przetłumaczyć, rozwiązać i podać rozwiązanie w wybranym języku obcym. W rozwiązaniu zestawu zadań „Rozwiążmy razem" uczestniczy cała klasa (np. pracując w odpowiednio dobranych grupach). Czas na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut. Oceniana jest również strona graficzna i estetyka przedstawionych rozwiązań. Uczniowie mogą korzystać za słowników językowych, przyborów geometrycznych, nożyczek, kredek i flamastrów.

Zakres współpracy z nauczycielami uczestniczącymi w projekcie „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic":

- Zaplanowanie terminów zajęć pozalekcyjnych.
- Realizacja pakietów edukacyjnych zgodnie z wytycznymi Projektodawcy.
- Przygotowanie raportu z realizacji każdego pakietu edukacyjnego:
  - podanie terminów, w których odbyły się zajęcia;
  - odnotowanie frekwencji;
  - uwagi dotyczące realizacji zajęć;
  - dane dotyczące zestawu „Rozwiążmy razem".
- Przesłanie raportu wraz z listą obecności uczniów na zajęciach oraz arkuszami rozwiązań zestawu „Rozwiążmy razem" na adres Punktu Konsultacyjnego Projektu.
- Aktualizacja stanu osobowego zespołu klasowego.
- Współdziałanie w zakresie monitoringu i ewaluacji dotyczącej realizacji Projektu.

II. Cele edukacyjne zajęć pozalekcyjnych z zakresu matematyki

Zakładamy, że przeprowadzenie zajęć w ramach Projektu:

- Wspomoże i wzmocni proces edukacyjny, jakiemu podlegają uczniowie szkół podstawowych, gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych.
- Ugruntuje wiedzę wyniesioną przez uczniów z lekcji matematyki.
- Wspomoże kształcenie języka obcego, wzbogaci słownictwo o terminologię matematyczną.
- Pokaże zastosowania pojęć i teoretycznych problemów do rozwiązywania zagadnień praktycznych.
- Pozwoli zdjąć matematykę z piedestału niedoścignionej Królowej Nauk.
- Wzbudzi wśród młodzieży i dzieci aktywne postawy wobec pojawiających się problemów.
- Nieustępliwość i upór w rozwiązywaniu zadań.
- Wyrobi umiejętność współpracy i dzielenia się obowiązkami w grupie.

Cele szczegółowe każdego pakietu edukacyjnego umieszczone są przy poszczególnych pakietach.

III. Warunki organizacyjne zajęć w ramach Projektu

1. Warunki organizacji zajęć

- Zgoda grupy młodzieży (klasy) i nauczyciela na uczestnictwo w Projekcie przez okres 3 lat.
- Akceptacja i zobowiązanie do pomocy ze strony Rodziców i Dyrekcji Szkoły w trakcie organizacji i prowadzenia zajęć.
- Zapewnienie w planie zajęć szkolnych stałych godzin na prowadzenie spotkań.
- Możliwość wykorzystania szkolnych materiałów biurowych, opłat pocztowych, dostępu do Internetu, drukarki, kopiarki w miejscu pracy.

2. Adresaci zajęć pozalekcyjnych

Zgodnie z założeniami Projektu, zajęcia pozalekcyjne przeznaczone są dla uczniów klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej, którzy chcą utrwalić, poszerzyć wiedzę oraz rozwijać i udoskonalić swoje umiejętności w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem matematyki i języków obcych, jak również chcą odnieść sukces na egzaminie maturalnym z matematyki.

3. Wymagania wstępne

Uczeń rozpoczynający uczestnictwo w Projekcie powinien:

- Przeprowadzać nieskomplikowane rozumowania matematyczne.
- Posługiwać się własnościami liczb i działań oraz własnościami figur przy rozwiązywaniu zadań.
- Posługiwać się kalkulatorem przy rozwiązywaniu typowych zadań.
- Dostrzegać, wykorzystywać i interpretować zależności funkcyjne.
- Interpretować związki wyrażone za pomocą wzorów, wykresów, schematów, diagramów, tabel.
- Prezentować z użyciem języka matematyki wyniki badań prostych zagadnień.
- Znać elementy przynajmniej jednego języka nowożytnego – czytać ze zrozumieniem wyrazy i proste zdania.

4. Sylwetka uczestnika zajęć po pierwszym roku realizacji Projektu

Zakładamy, że prowadzenie zajęć w ramach Projektu wpłynie na uzyskanie u uczniów następujących cech:

- Aktywnej postawy wobec pojawiających się problemów, nieustępliwość i upór w rozwiązywaniu zadań.
- Umiejętność przejrzystego przedstawiania rozumowania i uzasadniania odpowiedzi.
- Umiejętność uzasadniania własnego stanowiska, argumentowania i przekonywania.
- Umiejętność pracy w zespole.
- Doskonalenie umiejętności działania zespołowego poprzez dzielenie pracy i podejmowanie różnych funkcji w zespole w zależności od zaistniałych potrzeb.
- Nabywanie umiejętności doboru właściwych metod i narzędzi matematycznych do rozwiązywania sytuacji problemowych.
- Podniesienie kompetencji matematycznych uczniów uczestniczących w zajęciach.
- Kształcenie znajomości języka obcego, wzbogacanie słownictwa o terminologię matematyczną.
- Doskonalenie umiejętności organizacyjnych i współdziałania w zespole klasowym niezbędnych do udziału w Międzynarodowym Konkursie „Matematyka bez Granic".

5. Czas trwania zajęć w ramach realizacji Projektu

Czas trwania zajęć uzależniony jest od organizacji roku szkolnego i składa się z trzech etapów. Każdy etap obejmuje jeden rok nauki szkolnej i polega na realizacji siedmiu pakietów edukacyjnych w wymiarze 28 godzin lekcyjnych (po 4 godziny na jeden pakiet).

6. Plan zajęć

Zajęcia pozalekcyjne (pierwszy rok realizacji Projektu) obejmują realizację 7 kolejno następujących po sobie pakietów edukacyjnych (7 czterogodzinnych Spotkań Zespołów „MbG").

IV. Metody i formy uczenia się

W czasie zajęć główną formą pracy jest praca w grupach. Można też zastosować takie metody jak dyskusja, metoda ćwiczeniowa i burza mózgów.
W czasie indywidualnej pracy z podręcznikiem uczeń może skorzystać z następujących porad doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań.

- Przeczytaj zadanie kilkukrotnie.
- Jeżeli zadanie dotyczy konkretnej sytuacji, postaraj się wyobrazić sobie tę sytuację. Możesz wykonać rysunek do zadania.
- Ustal, co jest niewiadomą w zadaniu i co wystarczy wiedzieć, by tę niewiadomą ustalić.
- Wyodrębnij dane z zadania i ustal, czego możesz się na podstawie tych danych dowiedzieć.
- Ułóż plan rozwiązania i wykonaj go.
- Sprawdź, czy Twoje rozwiązanie jest poprawne.

V. Pakiety edukacyjne

Pakiet M-1.1 „Wokół twierdzenia Talesa”

- Twierdzenie Talesa.
- Podobieństwo figur.

Pakiet M-1.2 „Czy logiczne jest logiczne”

- Łamigłówki logiczne.
- Zbiory, działania na zbiorach.

Pakiet M-1.3 „Liczę, więc jestem”

- Liczby rzeczywiste, potęgi, liczby trójkątne, algorytm Euklidesa, dzielenie z resztą.
- Wyrażenia algebraiczne, średnie.

Pakiet M-1.4 „Wektor! Do nogi!”

- Wektory na płaszczyźnie.

Pakiet M-1.5 „Sinus, kosinus, daj Boże trzy minus...”

- Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym.

Pakiet M-1.6 „Wartości! Nie bądź aż tak bezwzględna!”

- Równania, nierówności stopnia pierwszego z jedną niewiadomą.
- Wartość bezwzględna.

Pakiet M-1.7 „Na układy nie ma rady”

- Równania, nierówności.
- Układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.
- Równania, nierówności, układy równań stopnia pierwszego z dwiema niewiadomymi.

Pakiet M-1.1 „Wokół twierdzenia Talesa”

I. Treści merytoryczne:

- twierdzenia Talesa,
- twierdzenia Pitagorasa,
- cechy podobieństwa trójkątów,
- podobieństwo i jego własności (stosunek pól i obwodów figur podobnych),
- konstrukcja odcinka x spełniającego warunek $x^2 = ab$ $x^2 = ab$,
- kąt wpisany oparty na średnicy.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię,
- nabywanie umiejętności wykorzystywania twierdzenia Talesa w konstrukcjach i rozwiązaniach problemów,
- kształcenie umiejętności zauważania trójkątów podobnych na płaszczyźnie i w przestrzeni,
- nabywanie umiejętności prawidłowego układania proporcji wynikających z podobieństwa trójkątów,
- nabywanie umiejętności wykorzystywania podobieństwa trójkątów w dowodzeniu.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.]Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G. – *Matematyka 2*, Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, Nowa Era, Warszawa 2003
[2.]Karpiński M., Lech J., *Geometria*, *Zbiór zadań dla klasy II*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1994
[3.]Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic*, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003, Nowy Sącz 2003
[4.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/zad_2006.html

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

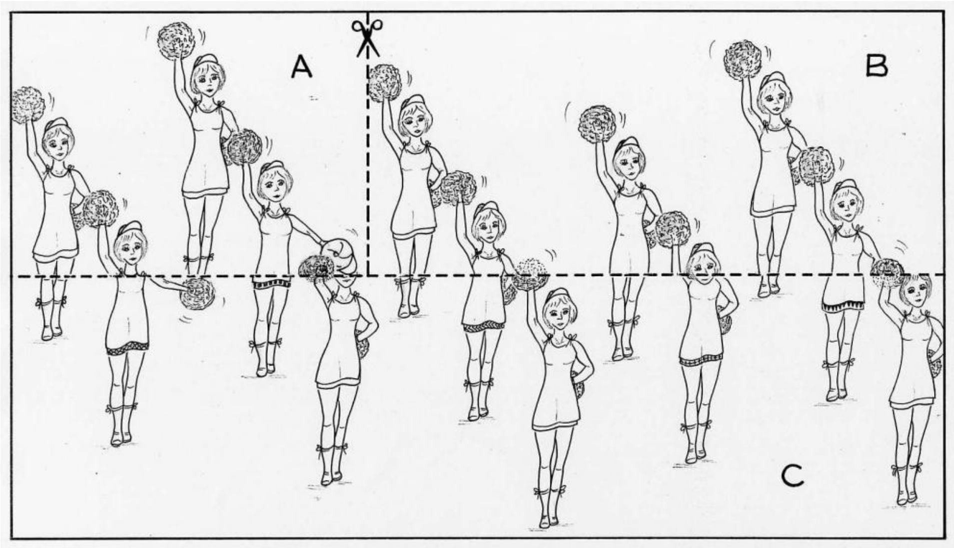
Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem"

[1] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G., *Matematyka 2*, Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, Nowa Era, Warszawa 2003
[2] Łomnicki A., Treliński G., *Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1986
[3] Karpiński M., Lech J., *Geometria, Zbiór zadań dla klasy II*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1994
[4] Karpiński M., Lech J., *Geometria, Zbiór zadań dla klasy III i IV*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1994
[5] Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” – „Wokół twierdzenia Talesa”



Ragazze warm-up Bonus con pompon (7 punti)

Ritagliate la figura allegata secondo i tratti punteggiati; poi, scambiate le parti A e B. Incollate, quindi, sul foglio risposta la nuova rappresentazione del gruppo. Con questa manipolazione si potrebbe pretendere di provare che 13 = 12, ma, naturalmente, in questa “dimostrazione” c’è un errore. Individuate l’errore ed illustrate con precisione in che cosa consiste l’inganno.

Bonus zum Aufwärmen (7 Punkte)

Schneidet das beiliegende Bild entlang der gestrichelten Linie aus. Vertauscht anschließend A und B. Klebt dieses neue Gruppenbild uf das Lösungsblatt. Durch diese Manipulation möchte man beweisen, dass13 = 12 ist. Aber natürlich steckt irgendwo ein Fehler in diesem „Beweis“. Findet den Fehler und erklärt genau worin der Trick besteht.

Bonus pour l’échauffement (7 puntos)

Découper la figure ci-… suivant les pointillés, puis échanger les pièces notées A et B. Coller la nouvelle vue du groupe sur la feuille-réponse. Par cette manipulation on prétend prouver que 13 = 12, mais il y a, bien sûr, un défaut dans cette "démonstration". Trouver ce défaut et expliquer précisément en quoi consiste la supercherie.

Bonus to warm-up (7 points)

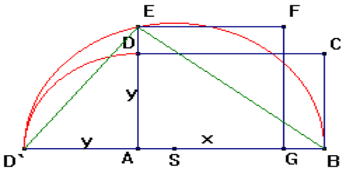
Cut out the figure attached along the dotted lines. Then swap piece A with piece B. Stick the new view of the group on your worksheet. This re-arrangement claims to prove that 13 = 12, but of course, this “demonstration” is wrong. Find the fault and explain precisely what the trick is.

Bono para calentamiento (7 puntos)

Recorta la figura adjunta a lo largo de las líneas punteadas. A continuación, cambiar una pieza. B. pieza con palanca la nueva visión del grupo en la hoja de cálculo Esta nueva disposición pretende demostrar que 13 = 12, pero por supuesto, esta "demostración" es erróneo. Encuentra el fallo y explicar con precisión lo que el truco es.

Zadanie 1. Kwadratura (3 punkty)

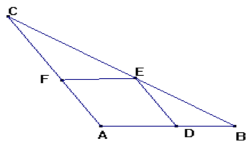
Kwadratura prostokąta to konstrukcja - tylko przy pomocy cyrkla i linijki kwadratu o polu równym polu prostokąta. Oto metoda Euklidesa kwadratury prostokąta ABCD o bokach AB = x i AD = y. Na prostej zawierającej bok │AB│ prostokąta odłóż odcinek │AD'│ równy odcinkowi. │AD│. Punkt E leży na półokręgu o średnicy BD' i na prostej AD. Zbuduj kwadrat AGFE.



Rysunek 1 – Kwadratura

Pokaż, że przedstawione na rysunku 1[1] prostokąt ABCD i kwadrat AGFE mają takie same pola.

Zadanie 2. Romb w trójkącie (8 punktów)



Rysunek 2 - Romb w trójkącie

W trójkąt ABC wpisano romb $ADEF$ (*rysunek 2*)[2].

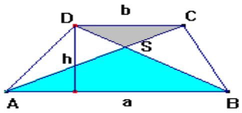
Wykaż,że:

$|AD| = \sqrt{|BC||FC|}$ (3 punkty) $\frac{1}{|AD|} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$ (5 punktów)

[1] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

[2] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

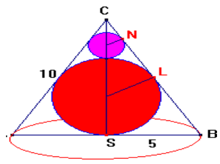
Zadanie 3. Pola w trapezie (5 punktów)



Rysunek 3 - Pola w trapezie

Dany jest trapez ABCD (*Rysunek 3*)[3]. Przekątne trapezu przecinają się w punkcie S. Pole trójkąta CDS jest równe 1[4], a pole trójkąta ABS jest równe 4. Oblicz pole trapezu.

Zadanie 4. Kule w stożku (6 punktów)



Rysunek 4 - Kule w stożku

Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym.
Długość boku tego trójkąta jest równa 10.
Wpisano w niego 2 kule, tak jak na rysunku 4.
Oblicz promienie tych kul.

[3] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[4] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” –„Wokół twierdzenia Talesa”

Bonus na rozgrzewkę Dziewczęta z pomponami (7 punktów)

Na rysunku widać 13 dziewcząt z pomponami. Rozetnij rysunek wzdłuż linii przerywanych. Następnie zamień miejscami elementy A i B.
Teraz na rysunku widzisz 12 dziewcząt. Udowodniliśmy, że 13 = 12!!
Ale przecież wiesz, że 12≠13. Zatem znajdź błąd i wyjaśnij dokładnie, na czym on polega.

Zadanie na rozgrzewkę Pom-pom girls (7 punktów) Rozwiązanie:

Na obrazku powstałym po przełożeniu części A i B policzyć można 12 dziewcząt, podczas gdy na rysunku początkowym widać ich 13. Można by, więc pomyśleć, że 13 = 12. Dokładniejsze oględziny pozwalają zauważyć, że:
Każda dziewczynka z obrazka 1 ma jakiś defekt :
Pierwsza nie ma nogi,
Druga nie ma ramion,
itp...
Każdej brakuje 1/13 części postaci.
Przełożenie części A, B i C powoduje powstanie 12 dziewczynek w pełnej postaci, ponieważ mamy 13 „postaci” po $\frac{12}{13}$ dziewczynki. Skąd równość: $13 \cdot \frac{12}{13} = 12$.
Nic nie stracono, ani nic nie stworzono!

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Rozcięcie rysunku	1
C	Prawidłowe złożenie rysunku	2
D	Uzupełnienie równości: 12 = 13	1
E	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

Il compito di riscaldare Pom-pom girls (7 punti)

Soluzione:
Nella immagine formata sul rapporto tra A e B può contare 12 ragazze, mentre la figura 13 mostra il primo 13. Si potrebbe, in modo da pensare che 13 = 12. Esame più approfondito si può osservare che: Ogni ragazza nella foto 1 ha un difetto: Il primo non ha gambe, Il secondo non ha le braccia, ecc ... Ogni mancanti 1/13 del modulo. Rapporto tra A, B e C i risultati in un 12 ragazze in forma completa, come abbiamo 13 "a" in 12/13 ragazze. Dove uguaglianza: 13*(12/13)=12. Nulla è stato perso, e nulla è stato creato!

Punteggio

Azione	Fasi soluzioni	Punti
A	Una traduzione in polacco di	1
B	Tagliare figura	1
C	Figura corretta presentazione delle due	2
D	Supplemento uguaglianza 12 = 13	1
E	Salvare la soluzione in una lingua straniera	2

Die Aufgabe, um sich aufzuwärmen Pom-pom girls (7 Punkte)

Lösung:
In das Bild auf das Verhältnis der A-und B gebildet zählen können 12 Mädchen, während die Abbildung zeigt den Anfang des 13. Sie könnten, so zu denken, dass 13 = 12
Weitere detaillierte Prüfung können wir beobachten, dass:
Jedes Mädchen auf dem Bild 1 hat einen Defekt:
Der erste hat keine Beine,
Die zweite nicht Arme,
etc. ..
Jedes fehlende 1/13 des Formulars. Verhältnis von A, B und C führt zu einer 12 Mädchen in vollständiger Form, wie wir 13 "a" in 12/13. Mädchen zu haben 13*(12/13)=12.
Wo Gleichheit:.Nichts war verloren, und nichts wurde erstellt!

Wertung

Aktion	Stages Lösungen	Punkte
A	Ein polnischer Übersetzung von	1
B	Rip Abbildung	1
C	Richtig Einreichung Abbildung	2
D	Supplement Gleichheit 12 = 13	1
E	Speichern Sie die Lösung in einer Fremdsprache	2

La tâche de réchauffer Pom-pom girls (7 points)

Solution:
Dans l'image formée sur le rapport entre A et B peut compter 12 filles, tandis que le chiffre indique le début 13. Vous pourriez, si l'on pense que 13 = 12
Un examen plus détaillé de ce que nous pouvons observer:
Toutes les filles à l'image 1 a un défaut:
Le premier n'a pas de jambes,
Le second n'a pas de bras,
etc ..
Chaque manquant 1/13 de la forme. Ratio de A, B et C entraîne une période de 12 filles en forme complète, que nous avons 13 «a» 12/13 chez les filles. Où l'égalité: 13*(12/13)=12
Rien n'était perdu, et rien n'a été créé!

Points

Action	Solutions Stages	Points
A	Une traduction polonaise sur	1
B	Cooper la figure	1
C	La figure correcte soumettre deux	2
D	L'égalité Supplément 12 = 13	1
E	Enregistrez la solution dans une langue étrangère	2

The task to warm up Pom-pom girls (7 points)

Solution:
In the image formed on the ratio of the A and B can count 12 girls, while the figure shows the early 13th. You might, so to think that 13 = 12. More detailed examination of we can observe that: Every girl in the picture 1 has a defect:
The first does not have legs,
The second does not have arms,
etc. ..
Each missing 1/13 of the form. Ratio of A, B and C results in a 12 girls in complete form, as we have 13 "a" 12/13 in girls. Where equality: 13*12/13=12.
Nothing was lost, and nothing was created!

Scoring

Action	Stages solutions	Points
A	Polish translation of	1
B	Cut figure	1
C	Correct submitting Figure	2
D	Supplement equality 12 = 13	1
E	Save the solution in a foreign language	2

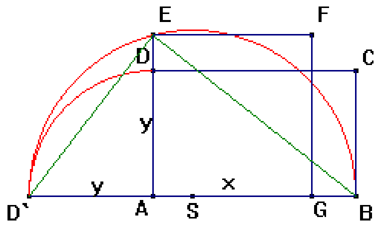
La tarea de calentar Pom-pom girls (7 puntos)

Solución:
En la imagen formada sobre la relación entre la A y B pueden contar 12 niñas, mientras que la figura 13 muestra el temprano. Es posible, por lo que creo que 13 = 12
Un examen más detallado del que podemos observar que:
Todas las chicas en la foto 1 tiene un defecto:
El primero no tiene piernas,
El segundo no tiene brazos,
etc ...
Cada falta 1/13 de la forma.
Relación entre A, B y C resulta en un 12 niñas en forma completa,
ya que tenemos 13 "a" 12/13 en las niñas. Donde la igualdad:.13*12/13=12
Nada se pierde, nada se crea y se!

Puntaje

Acción	Etapas soluciones	Puntos
A	Una traducción polaca de	1
B	Cortar figura	1
C	Correcta presentación de la figura	2
D	Igualdad Suplemento 12 = 13	1
E	Guarde la solución en una lengua extranjera	2

Zadanie 1. Kwadratura (3 punkty)



Rysunek 5 – Kwadratura prostokąta

Przyjmujemy oznaczenia (jak na rysunku 5)[5]

$|AD| = |AD^{'}| = y$ oraz $|AB| = x$; $P_{pr.ABCD} = x \cdot y$; $P_{kw.AEFG} = |AE|^2$

Dowód:

▽ Zauważmy, że:

$\Delta AD`E \sim \Delta AEB\ (kk)$

zatem $\frac{|AE|}{y} = \frac{x}{|AE|}$,

stąd $|AE|^2 = x \cdot y$,

co oznacza, że $P_{\square AEFG} = P_{\square ABCD}$ ▲

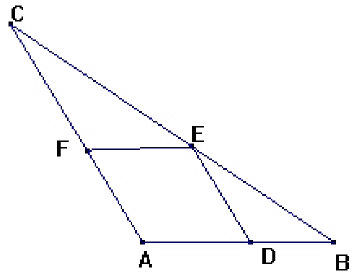
Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów	1
B	Wskazanie odcinków równych	1
C	Zapisanie odpowiedniej proporcji i przekształcenie jej do tezy zadania	1

[5] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 2. Romb w trójkącie (8 punktów)

Zadanie 2a



Rysunek 6 – Romb w trójkącie – zadanie 2a

Czworokąt ADEF *(rysunek 6)*[6] jest rombem,

zatem: $|AD| = |FE| = |ED| = |FA|$ (*)

Dowód:

▽ Zauważmy, że $\Delta FEC \sim \Delta DBE$ *(kk);* więc $\dfrac{|FE|}{|FC|} = \dfrac{|DB|}{|DE|}$.

Uwzględniając *(*)* otrzymujemy, że $\dfrac{|AD|}{|FC|} = \dfrac{|DB|}{|AD|}$,

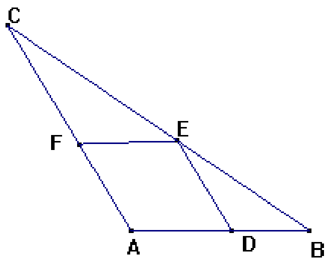
zatem $|AD|^2 = |FC| \cdot |DB|$ ▲

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów	1
B	Zapisanie odpowiedniej proporcji	1
C	Podstawienie odcinków równych długości i przekształcenie proporcji do tezy zadania	1

[6] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 2b



Rysunek 7 – Romb w trójkącie – zadanie 2b

Czworokąt ADEF *(rysunek 7)*[7] jest rombem, zatem: $|AD| = |FE| = |ED| = |FA|$ (**)

Dowód:

▽ Zauważmy, że ΔFEC ~ ΔABC (kk), stąd:

$\frac{|CF|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, ale $\frac{|CF|}{|AD|} + 1 = \frac{|AC|}{|AB|} + 1$,

więc $\frac{|CF| + |AD|}{|AD|} = \frac{|AC| + |AB|}{|AB|}$

Na mocy (**) mamy:

$|CF| + |AD| = |CF| + |FA| = |AC|$, skąd $\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|AC| + |AB|}{|AB|}$

Obie strony tej równości mnożymy przez $\frac{1}{|AC|}$, więc:

$$\frac{|AC|}{|AD|} \cdot \frac{1}{|AC|} = \frac{|AC| + |AB|}{|AB|} \cdot \frac{1}{|AC|} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{|AC| + |AB|}{|AB| \cdot |AC|} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{|AC|}{|AB| \cdot |AC|} + \frac{|AB|}{|AB| \cdot |AC|}$$

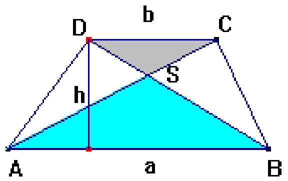
czyli $\frac{1}{AD} = \frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|AC|}$. ▲

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów	1
B	Zapisanie odpowiedniej proporcji	1
C	Utworzenie przejścia rachunkowego do tezy zadania, po 1 punkcie na krok	3

[7] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 3. Pola w trapezie (5 punktów)



Rysunek 8[8] – Trójkąty w trapezie

Dane i oznaczenia:

Trapez ABCD, w którym:

$P -$ *pole trapezu ABCD* | $|AB| = a$ | $P_{\Delta CDS} = 1 = P_1$

$\overline{|AC|} \cap \overline{|BD|} = \{S\}$ | $|CD| = b$ | $P_{\Delta ABS} = 4 = P_2$

Szukane:

$P = ?$.

Rozwiązanie:

▽ ΔCDS ~ ΔABS (kk) w skali s.

Stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa, czyli:

$\frac{P_1}{P_2} = \frac{1}{4} = s^2$ stąd $s^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$

Ponieważ: $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{b}{a} = s$, zatem $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$

stąd $b = \frac{1}{2}a$

$P = \frac{(a+b)}{2}h$, czyli $\frac{a + \frac{1}{2}a}{2} \cdot h = \frac{\frac{3}{2}a}{2} \cdot h$

Zatem

$P = \frac{3ah}{4}$, ale $P_{\Delta ABS} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{2}{3}h = \frac{1}{3}ah = 4$, więc $ah = 12$ i pole trapezu: $P = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ ▲

Odpowiedź:

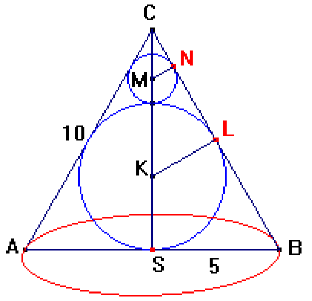
Pole trapezu jest równe 9.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów	1
B	Wyznaczenie skali podobieństwa	1
C	Zapisanie pola trapezu za pomocą długości jednej podstawy i wysokości trapezu	1
D	Wyznaczenie pola jednego z trójkątów	1
E	Wykorzystanie tych związków do wyliczenia pola trapezu	1

[8] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 4. Kule w stożku (6 punktów)



Rysunek 9 – Przekrój stożka z kulami

Dane i oznaczenia: *(Rysunek 9)*[9]

$\triangle$ABC jest równoboczny:

$$|AB| = |BC| = |AC| = 10$$

$$|SC| = 5\sqrt{3}$$ - wysokość w $\triangle$;

$$|KS| = |KL| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$ - promień okręgu wpisanego w $\triangle$równoboczny;

Oblicz:

$|MN|$ - promień mniejszej kuli;

$|KL|$ - promień większej kuli

Rozwiązanie:

$\triangledown$ ΔSBC ~ ΔKLC ~ ΔMNC (kk), stąd

$\frac{|SB|}{|BC|} = \frac{|Kl|}{|CK|} = \frac{|MN|}{|CM|}$, ale $|CM| = |SC| - 2\cdot|KS| - |MN|$, zatem $\frac{5}{10} = \frac{|MN|}{5\sqrt{3} - \frac{10\sqrt{3}}{3} - |MN|}$,

więc $10\cdot|MN| = 5\cdot\left(\frac{5\sqrt{3}}{3} - |MN|\right)$ czyli $15|MN| = \frac{25\sqrt{3}}{3}$ stąd $|MN| = \frac{5\sqrt{3}}{9}$

Odpowiedź:

Promienie kul są równe $5\sqrt{3}$ oraz $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ $\blacktriangle$

Punktacja

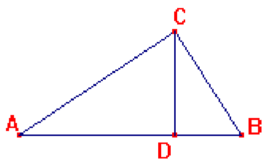
Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wyznaczenie wysokości stożka	1
B	Wyznaczenie promienia większej kuli	1
C	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów	1
D	Zapisanie odpowiedniego związku między bokami trójkątów podobnych	2
E	Wyznaczenie długości promienia małej kuli	1

[9] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” – „Wokół twierdzenia Talesa”

Zadanie 1 [10]

- Przetłumacz treść zadania na język polski;
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku



Rysunek 10 – Trójkąt prostokątny

Exercise 1. The catheti and the hypotenuse... (3 points)

Prove that in the right-angled triangle the length of each leg is the geometric mean of its perpendicular bisector and the length of the hypotenuse.

$$|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|} \text{ i } |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$

Aufgabe 1. Katheten - und Hypotenusen… (3 Punkte)

Beweise, dass in einem rechteckigen Dreieck die Länge jeder Kathete ein geometrischer Mittelwert der Länge ihrer senkrechten Projektion auf die Hypotenuse und auf die Länge der Hypotenuse ist.

$$|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|} \text{ i } |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$

Devoir nr 1. Cathète et hypoténuse… (3 points)

Démontre que dans le triangle rectangle chaque cathète est moyenne géométrique entre son projeté orthagonal sur l’hypoténuse et l’hypoténuse entière.

$$|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|} \text{ i } |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$

Compito 1. Cateied ipotenuse … (3 punti)

Prova che nel triangolo rettangolo la lunghezza di ogni cateo è una media geometrica della lunghezza della sua proiezione ortogonale sull’ipotenusa e della lunghezza dell’ipotenusa.

$$|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|} \text{ i } |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$

Problema 1. Catetos e hipotenusas… (3 puntos)

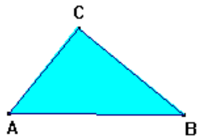
Demuestra que en el triángulo rectángulo la longitud de cada cateto es la media geométrica de la longitud de su proyección sobre la hipotenusa y la longitud de la hipotenusa.

$$|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|} \text{ i } |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$

[10] Zaczerpnięto z [2]; strona 160; nr 43b

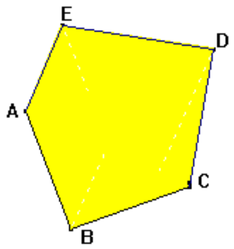
Zadanie 2. Kwadratura? (5 punktów)[11]

Zbuduj kwadrat, którego pole jest równe polu danego:
a) Trójkąta



Rysunek 11[12] – Trójkąt do kwadratury

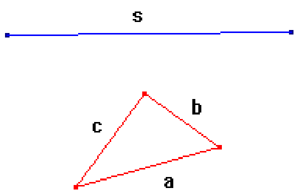
b) Pięciokąta



Rysunek 12[13] – Pięciokąt do kwadratury

Zadanie 3. Wykapany… trójkąt (2 punkty)[14]

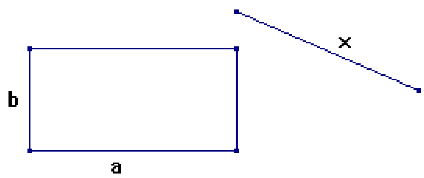
Zbuduj trójkąt o danym obwodzie s, podobny do danego trójkąta.



Rysunek 13[15] – Trójkąt i odcinek

Zadanie 4. Wykapany… prostokąt (3 punkty)[16]

Zbuduj prostokąt podobny do danego prostokąta, którego jednym z boków jest dany odcinek x.

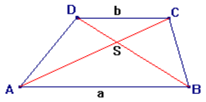


Rysunek 14[17] – Prostokąt i odcinek do „wykapanego prostokąta"

[11] Zaczerpnięto z [2]; strona 160; nr 47b, 47c
[12] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[13] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[14] Zaczerpnięto z [2]; strona 161; nr 51
[15] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[16] Zaczerpnięto z [2]; strona 161; nr 52
[17] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 5. Narzędzie i… (3 punkty)[18]

W trapezie poprowadzono przekątne dzieląc go na 4 trójkąty.



Rysunek 15[19] – Narzędzie i…

Wykaż, że:

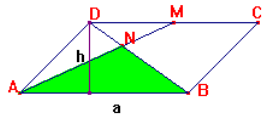
Pole ΔABD = Pole ΔABC Pole ΔASD = Pole ΔBSC ΔABS ~ ΔDCS

Zadanie 6. …jego zastosowanie (5 punktów)[20]

Dany jest trapez ABCD. Pole ΔCDS jest równe 2, a pole ΔABS jest równe 8.
Jaką częścią pola trapezu są pola trójkątów ABS, CDS, ASD, CSB?

Zadanie 7. Mała analogia (3 punkty)[21]

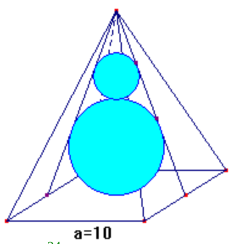
Punkt M jest środkiem boku CD równoległoboku ABCD.
Jaką część pola równoległoboku stanowi pole ΔABN?



Rysunek 16[22] – Równoległobok – mała analogia

Zadanie 8. Bałwanek w piramidzie (6 punktów) [23]

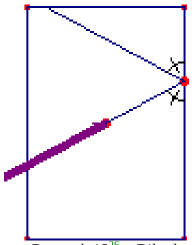
Na dwóch kulach stycznych zewnętrznie opisano ostrosłup prawidłowy, czworokątny o krawędzi podstawy długości 10 i wysokości 12.
Jakie są promienie tych kul?



Rysunek 17[24] – Bałwanek w piramidzie

[18] Zaczerpnięto z [3]; strona 353; przykład 2
[19] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[20] Zaczerpnięto z [3]; strona 408; zmieniono zadanie na bazie zadania 30
[21] Zaczerpnięto z [4]; strona 30; nr 86
[22] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[23] Zaczerpnięto z [5]; strona 76; nr 287
[24] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 9. Bilard (5 punktów) [25]

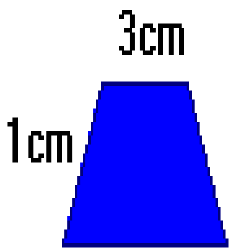


Rysunek 18[26] - Bilard

Na rysunku (rysunek 18) pokazano jak kula bilardowa odbija się od bandy.
Stół jest prostokątem o wymiarach $1{,}4m \times 2{,}8m$. W jego środku umieszczamy kulę.
Kula powinna zostać tak uderzona, aby odbiła się po kolei od trzech band i wpadła do jednego z czterech otworów, które znajdują się w rogach stołu.
Narysuj na arkuszu rozwiązań stół bilardowy w skali 1:40.
Skonstruuj drogę kuli pozostawiając wszystkie linie pomocnicze!

Zadanie 10. Problem nakrętki (5 punktów)[27]

Większość nakrętek do butelek ma kształt stożka ściętego. W nakrętce przedstawionej na rysunku 14 mniejsza średnica wynosi 3cm. Bok nakrętki ma szerokość 1cm. Jeśli potoczymy nakrętkę po stole, to zakreśli ona pierścień kołowy, którego wewnętrzny promień wynosi 30cm.



Rysunek 19[28] – Przekrój nakrętki

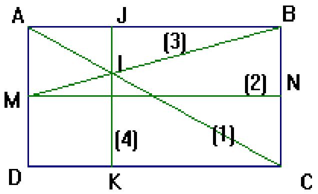
Rysunek 20 – Toczenie nakrętki

Oblicz większą średnicę nakrętki

[25] Zaczerpnięto z [1]; strona 83; nr 6
[26] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[27] Zaczerpnięto z [1]; strona 84; nr 12
[28] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 11. Trzecia część (5 punktów)[29]

Oto metoda, która pozwala znaleźć 1/3 długości przekątnej prostokątnej kartki papieru tylko przez jej zginanie.



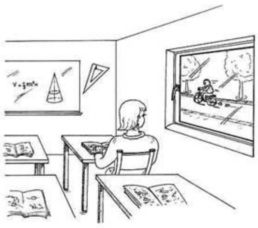
Rysunek 21[30] – Trzecia część przekątnej prostokąta

Zaginaj kolejno kartkę:

- wzdłuż przekątnej (1)
- wzdłuż osi symetrii (2)
- wzdłuż linii (3) jak pokazano na rysunku
- wzdłuż linii (4) jak pokazano na rysunku

Linia czwartego zagięcia daje 1/3 długości.
Uzasadnij poprawność tej metody.

Zadanie 12. Marzycielstwo (5 punktów)[31]



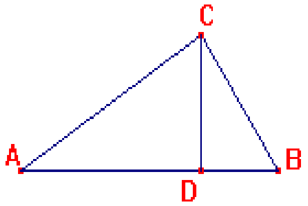
Powoli kończy się lekcja. Zazie patrzy przez okno i dokładnie przez dwie sekundy widzi swego kolegę Prospera przejeżdżającego na motorze.
Zazie siedzi w odległości 1m od okna o szerokości 1m.
Ulica przebiega równolegle do fasady szkoły, w odległości 25m od niej.
Zazie zastanawia się: Czy Prosper przekroczył dopuszczalną na tej ulicy prędkość 50km/h?
Odpowiedz na pytanie Zazie. Uzasadnij swoją odpowiedź odpowiednimi obliczeniami.

[29] Zaczerpnięto z [1]; strona 110; nr 3
[30] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[31] Zaczerpnięto z [1]; strona 135; nr 12

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Rozwiążmy razem" – „Wokół twierdzenia Talesa"

Zadanie 1. Przy- i przeciwprostokątne (3 punkty)

Udowodnij, że w trójkącie prostokątnym długość każdej przyprostokątnej jest średnią geometryczną długości swojego rzutu prostopadłego na przeciwprostokątną i długości przeciwprostokątnej.
Szkic rozwiązania



Rysunek 22 – Trójkąt prostokątny

Dane:

ΔABC prostokątny: (rysunek 22)[32]

$|\sphericalangle ACB| = 90^0$;

odcinek $\overline{CD}$ jest wysokością trójkąta

Wykaż, że:

$$|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|} \text{ oraz } |BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$

Dowód:

▽ Z podobieństwa trójkątów: $\Delta ADC \sim \Delta ABC$ *(kk)* otrzymujemy:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$$

analogicznie z podobieństwa trójkątów: ΔBDC i ΔABC *(kk)* otrzymamy, że:

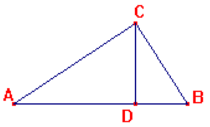
$|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$ ▲

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów z uzasadnieniem	1
B	Zapisanie proporcji	1
B	Sformułowanie wniosku(przekształcenie proporcji)	1

[32] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Exercise 1. The catheti and the hypotenuse... (3 points)



Picture 22 – Triangle

Date: ΔABC;

$|\sphericalangle ACB| = 90^0$. Indicate that: $|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ and $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$

Proof: ▽The similarity of triangles:

ΔADC ~ ΔABC (kk) is:

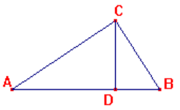
$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$, to $|AC|^2 = |AD| \cdot |AB|$ skąd $|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$;

by analogy with the similarity of triangles: ΔBDCand ΔABC (kk) are: $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$ ▲

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	The justified indication of the similarity of triangles	1
B	Taking down the ration	1
C	The gording of the conclusion (conversion ratio)	1

Aufgabe 1. Katheten und Hypotenusen (3 Punkte)



Zeichnung 22 – rechteckiger Dreieck

Angaben: ΔABC rechteckig, $|\sphericalangle ACB| = 90^0$.

Beweise, dass: $|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ und $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$.

Beweis: ▽Aus Ähnlichkeit von Dreiecken: ΔADC ~ ΔABC (kk) bekommen wir:

$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$

analog aus Ähnlichkeit von Dreiecken: ΔBDC i ΔABC (kk) bekommen wir, dass: $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$ ▲

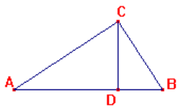
Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Feststellung der Ähnlichkeit von Dreiecken mit Begründung	1
B	Einschreiben von Proportionen	1
C	Formulierung des Schlusses(Transformation von Proportionen)	1

Exercice nr 1. Cathètes Et Hypoténuses... (3 points)

Données: ΔABC rectangle; $|\sphericalangle ACB| = 90^0$

Démontre quo $|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ et $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$



Dessin 22 - triangle rectangle

Démonstration: ▽de la similitude des triangles ΔADC ~ ΔABC (kk) on obtient : $\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ réciproquement de la similitude des triangles ΔBDC i ΔABC (kk) on obtient que: $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$ ▲

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Constatation de la similitude des triangles avec démonstration	1
B	Noter les proportions	1
C	Formuler la déduction (transformer les proportions)	1

Esercizio 1. Cateti Ed Ipotenuse... (3 punti)

Dati: ΔABC rettangolo $|\sphericalangle ACB| = 90^0$

Dimostra che: $|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ nonché $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$

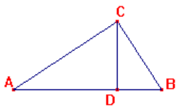


Fig. 22 – Triangolo rettangolo

Dimostrazione:

▽ Dalla similitudine dei triangoli: ΔADC ~ ΔABC (kk) riceviamo:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$$

analogicamente dalla similitudine dei triangoli: ΔBDC e ΔABC (kk) otterremo, che:

$$|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$$ ▲

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Affermazione di similitudine dei triangoli con la dimostrazione	1
B	Scrittura delle proporzioni	1
C	Formulare la deduzione (trasformazione della proporzione)	1

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

ptm rok zał. 1919

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Tarea 1. Los Catetos Y Las Hipotenusas (3 puntos)

DATOS: ΔABC rectángulo; $|\sphericalangle ACB| = 90^0$.

Demuestra que: $|AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ y $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$

Comprobación: ▽ De la semejanza de triángulos: ΔADC ~ ΔABC (kk) sacamos:

$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow |AC|^2 = |AD| \cdot |AB| \Rightarrow |AC| = \sqrt{|AD| \cdot |AB|}$ analógicamente, de la semejanza de triángulos: ΔBDC i ΔABC (kk) sacamos, que: $|BC| = \sqrt{|BD| \cdot |AB|}$ ▲

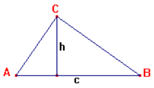
Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Constatación de la semejanza de triángulos con justificación	1
B	Demonstración de las proporciones	1
C	Formación de la conclusión (transformación de la proporción)	1
D	Presentación de la respuesta y su traducción en la lengua extranjera	1

Komentarz [W1]:

Zadanie 2. Kwadratura? (5 punktów)

2a) Dane i oznaczenia: *(rysunek 23[33])*



Rysunek 23 – Trójkąt do kwadratury

x - bok szukanego kwadratu, wtedy x^2 to jego pole

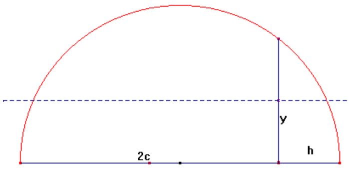
$P_{\Delta ABC} = \frac{ch}{2}$ zatem $x^2 = \frac{ch}{2}$, stąd $x = \sqrt{\frac{ch}{2}} = \frac{\sqrt{2ch}}{2}$

Rysuję półokrąg o średnicy długości: 2c + h.

Odcinek jest $\overline{y}$ prostopadły do średnicy i wystawiony w punkcie wspólnym odcinków $\overline{2c}$ oraz $\overline{h}$.

Mamy, więc: $y^2 = 2x$, czyli $y = \sqrt{2ch}$ zatem $y = 2x$.

Szukany kwadrat, to kwadrat o boku $\overline{x}$ gdzie $x = \frac{1}{2}y$.



Rysunek 24 – Konstrukcja odcinka,
którego długość równa jest długości boku kwadratu

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Zapisanie związku m. polami trójkąta i kwadratu	1
B	Wyznaczenie y i zbudowanie kwadratu o boku y/2	1

[33] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

2b)

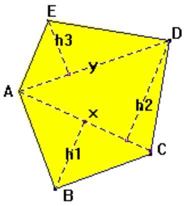
Dany pięciokąt ABCDE *(Rysunek 25*[34]*)* dzielimy na trójkąty:

$\triangle ABC$; $\triangle ACD$ i $\triangle ADE$

Niech pole pięciokąta wynosi P

Wtedy P = $P_{\triangle ABC} + P_{\triangle ACD} + P_{\triangle ADE}$

Stąd $P = \frac{1}{2}(xh_1 + xh_2 + yh_3) = ab + ac + ad = a(b + c + d)$



Rysunek 25 – Pięciokąt do kwadratury

Pole pięciokąta jest równe polu prostokąta o bokach długości:

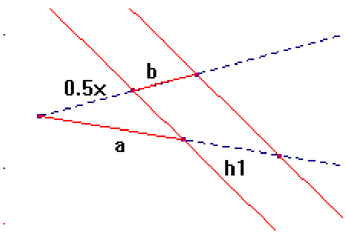
a oraz $(b + c + d)$.

Obieramy dowolny odcinek $\overline{a}$ .Wyznaczamy odcinek $\overline{b}$ spełniający warunek:

$\frac{1}{2}xh_1 = ab$, $\frac{1}{2}xh_1 = ab \Big| \cdot \frac{1}{a \cdot h_1}$. Mamy

$\frac{x}{2a} = \frac{b}{h_1}$, to $\frac{\frac{x}{2}}{a} = \frac{b}{h_1}$ skąd $b = \frac{0{,}5x \cdot h_1}{a}$.

Konstrukcję odcinka $\overline{b}$ ilustruje rysunek 26[35]



Rysunek 26 – Konstrukcja odcinka $\overline{b}$

Postępując analogicznie konstruujemy:

Odcinek $\overline{c}$, spełniający warunek: $\frac{1}{2}xh_2 = ac$.

Z równości $\frac{1}{2}xh_2 = ac$ otrzymujemy $c = \frac{0{,}5x \cdot h_2}{a}$.

Następnie $\overline{d}$, spełniający warunek: $\frac{1}{2}xy = ad$.

z równości $\frac{1}{2}xy = ad$ wyznaczamy $d = \frac{0{,}5y \cdot h_3}{a}$.

Pole danego pięciokąta jest równe polu prostokąta o jednym boku a i drugim równym sumie $(b + c + d)$, zatem pole szukanego kwadratu jest równe $a \cdot (b + c + d)$. Niech bok szukanego kwadratu wynosi z, wtedy P□ = z^2 i

P□ = $a \cdot (b + c + d)$ stąd $z^2 = a \cdot (b + c + d)$.

Konstruujemy odcinek $\overline{z}$ spełniający ten warunek - konstrukcja analogiczna jak w 1a)

Następnie budujemy kwadrat o boku długości z.

Punktacja:

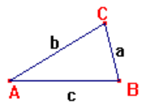
Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Zapisanie związku m. polami pięciokąta i kwadratu	1
B	Zamiana pola pięciokąta na pole prostokąta	1
C	Konstrukcja zmieniająca pole prostokąta w pole kwadratu	1

[34] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

[35] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

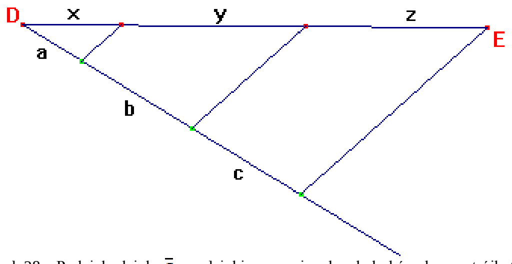
Zadanie 3. Wykapany… trójkąt (2 punkty)

Dane: $\triangle ABC$; Odcinek $\bar{s}$.



Rysunek 27 – Dany trójkąt

Dany odcinek $\bar{s} = \overline{DE}$ dzielimy proporcjonalnie do boków trójkąta ABC.



Rysunek 28 – Podział odcinka $\bar{s}$ na odcinki proporcjonalne do boków danego trójkąta.

Następnie konstruujemy trójkąt, którego bokami są otrzymane odcinki: $\bar{x}; \bar{y}; \bar{z}$.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Zastosowanie twierdzenia Talesa do podziału odcinka s	1
B	Zbudowanie trójkąta o uzyskanych bokach	1

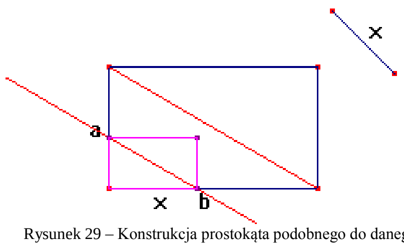
Zadanie 4. Wykapany… prostokąt (3 punkty)

Dane:

Prostokąt o bokach długości a i b oraz odcinek $\bar{x}$.

Polecenie:

Zbuduj prostokąt, podobny do danego prostokąta, którego jednym z boków jest dany $\bar{x}$. Szkic konstrukcji jest przedstawiony na rysunku 29[36]



Rysunek 29 – Konstrukcja prostokąta podobnego do danego

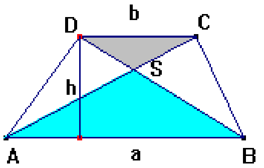
Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Skonstruowanie prostokąta spełniającego warunki zadania	3

[36] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 5. Narzędzie i… (3 punkty)

Dane:



Rysunek 30[37] – Związki w trapezie

Trapez ABCD, w którym:

$|AB| = a$; $|DC| = b$;

wysokość wynosi h

oraz $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$

Dowody:

▽ $P_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}ah = P_{\triangle ABC}$▲

▽ $P_{\triangle ASD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABS} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABS} = P_{\triangle BSC}$▲

▽ $\Delta ABS \sim \Delta CDS$ (kk) ▲

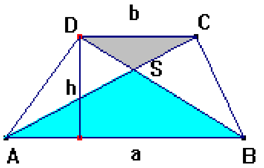
Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wykazanie równości pól a)	1
B	Wykazanie równości pól b)	1
C	Uzasadnienie podobieństwa trójkątów	1

[37] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 6. …jego zastosowanie (5 punktów)

Dane: Trapez ABCD,



Rysunek 31[38] – Trapez i trójkąty

$|AB| = a$; $|DC| = b$; wysokość wynosi h

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$

$P_{\triangle CDS} = 2 = P_1$ oraz $P_{\triangle ABS} = 8 = P_2$

$\Delta ABS \sim \Delta CDS$ (kk) w skali s.

Stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa,

Zatem $s^2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{8}{2} = 4\, s^2 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{8}{2} = 4$, więc $s = 2\, s = 2$

$P_{ABS} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} h = \frac{ah}{3} 8$, więc $ah = 24$;

$P_{ASD} = P_{BSC} = \frac{1}{ah} - 8 = 12 - 8 = 4$; $P_{ABCD} = 8 + 4 + 4 + 2 = 18$.

Zatem:

$P_{\Delta ABS}$ to

$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$ pola trapezu.

$P_{\Delta ASD} = P_{\Delta BSC}$ to

$\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ pola trapezu’

$P\Delta_{ASD} = P_{\Delta BSC}$ to $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$ pola trapezu.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
1	Stwierdzenie podobieństw trójkątów i uzasadnienie go	1
2	Wskazanie skali podobieństwa	1
3	Wyznaczenie pól trójkątów składowych	2
4	Obliczenie pola trapezu	1

[38] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 7. Mała analogia? (3 punkty)

Dane:

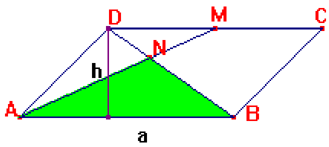
Równoległobok ABCD, w którym:

$|\overline{AB}| = a$; wysokość jest równa h

Punkt M jest środkiem $\overline{CD}$ oraz $\overline{AM} \cap \overline{BD} = \{N\}$

Szukane:

Jaką część pola równoległoboku stanowi pole ΔABN?



Rysunek 32[39] – Równoległobok do małej analogii

Rozwiązanie:

Z podobieństwa ΔABN ~ ΔMDN (kk)wynika,

że $s = \frac{|AB|}{|DM|} = 2.$

$P_{ABCD} = ah;$

$P_{ABN} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} ah = \frac{1}{3} P_{ABCD}$

Odpowiedź:

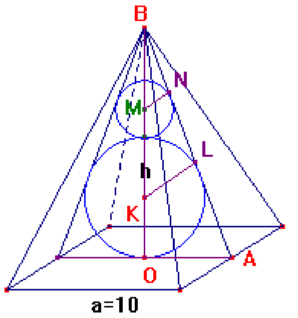
Pole trójkąta ABN stanowi $\frac{1}{3}$ pola równoległoboku.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Stwierdzenie podobieństw trójkątów i uzasadnienie go	1
B	Wyznaczenie pola trójkąta	1
C	Sformułowanie odpowiedzi	1

[39] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 8. Bałwanek w piramidzie (6 punktów)



Rysunek 33[40] – Kule zewnętrznie styczne wpisane w ostrosłup prawidłowy czworokątny

Dane: (Oznaczenia jak na rysunku 33)

Ostrosłup prawidłowy czworokątny. Dwie kule styczne zewnętrznie wpisane w ten czworościan;

Wysokość ostrosłupa: $|\overline{BO}| = h = 12$; długość krawędzi podstawy czworościanu a =10

Oblicz

promienie tych kul: $|MN| = ?$ $|KL| = ?$

Rozwiązanie:

▽ △AOB jest prostokątny; $|OA| = \frac{1}{2}a = 5$

Zatem z twierdzenia Pitagorasa: $|AB|^2 = |OA|^2 + |BO|^2$. Stąd $|AB|^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, $|AB| = 13$

Z podobieństwa trójkątów $\Delta OAB \sim \Delta KLB \sim \Delta MNB$ *(kk)* otrzymujemy:

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|KL|}{|BK|},\ \text{ale } |BK| = |BO| - |KL| = 12 - |KL|,\ \text{zatem } \frac{5}{13} = \frac{|KL|}{12 - |KL|},\ \text{stąd } |KL| = \frac{10}{3}$$

$$\frac{|OA|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|BM|},\ \text{ale } |BM| = |BO| - 2\cdot|KL| - |MN|,\ \text{zatem } \frac{5}{13} = \frac{|MN|}{12 - \frac{20}{3} - |MN|},$$

$$\text{stąd } |MN| = \frac{40}{27}$$

Odpowiedź:

Promienie kul wynoszą: $|KL| = \frac{10}{3}$ natomiast $|MN| = \frac{40}{27}$ ▲

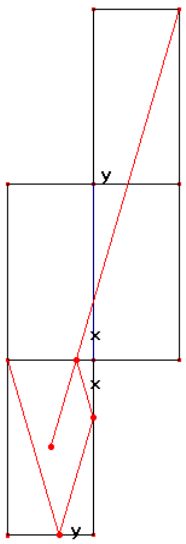
Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wykonanie rysunku z zaznaczonym przekrojem i oznaczeniami	1
B	Obliczenie potrzebnych odcinków	1
C	Uzasadnienie podobieństwa trójkątów	1
D	Zapisanie proporcji wynikającej z podobieństwa	1
E	Wyznaczenie promienia większej kuli	1
F	Powtórzenie rozumowania dla mniejszej kuli	1

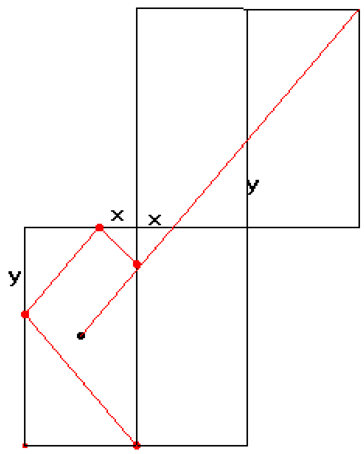
[40] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 9. Bilard (5 punktów)

Rysunki 34[41] i 35[42] pokazują dwa rozwiązania. Pozostałe rozwiązania są symetryczne.



Rysunek 34 – Bilard - jedno z rozwiązań



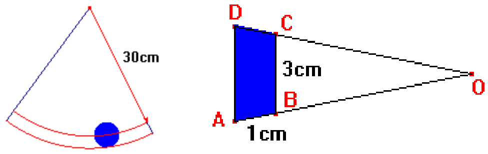
Rysunek 35 – Bilard drugie z rozwiązań

Punktacja :

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wykonanie konstrukcji	4
B	Staranny rysunek z zachowaną skalą	1

[41] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[42] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 10. Problem nakrętki (5 punktów)



Rysunek 36[43] – Problem nakrętki

Dane:

$|OB| = 30\ cm$

$|AB| = 1\ cm$

$|BC| = 3\ cm$

Szukane:

$|AD| = ?$

Rozwiązanie:

▽ Z danych zadania mamy $|OA| = |OB| + |BA| = 31$

Z twierdzenia Talesa:

$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|AD|}{|BC|}$, więc $\frac{31}{30} = \frac{|AD|}{3}$

Zatem: $|AD| = 3{,}1\ cm$

Odpowiedź:

Większa średnica nakrętki jest równa *3,1 cm* ▲

Punktacja :

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wykonanie rysunku zgodnego z sytuacją w zadaniu i oznaczeniami	2
B	Obliczenie potrzebnych odcinków	1
C	Zapisanie proporcji wynikającej z twierdzenia Talesa	1
D	Wyznaczenie długości odcinka	1

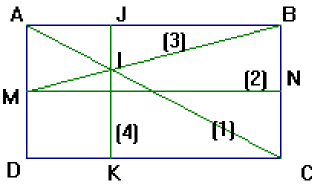
Zadanie 11. Trzecia część (5 punktów)

▽ Przyjmując oznaczenia jak na rysunku 37[44] i stosując twierdzenie Talesa dla ΔAIM i ΔCIB otrzymujemy:

$\frac{|AI|}{|IC|} = \frac{|AM|}{|CB|} = \frac{1}{2}$, zatem $|IC| = 2|AI|$ oraz $|AC| = 3|AI|$

W ΔAIJ i ΔACB mamy:

$|AJ| = \frac{1}{3}|AB|$ oraz $|AI| = \frac{1}{3}|AC|$ ▲



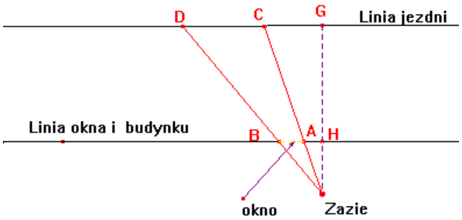
Rysunek 37 – Trzecia część przekątnej prostokąta

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wykonanie rysunku zgodnego z sytuacją w zadaniu i oznaczeniami	1
B	Zapisanie proporcji wynikających z twierdzenia Talesa	1
C	Obliczenie stosunków potrzebnych odcinków	1
D	Wyznaczenie długości odcinka AJ=1/3AB	1

[43] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[44] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 12. Marzycielstwo (5 punktów)



Rysunek 38 – Problem Zazie

Dane:

Oznaczenia jak na rysunku 38[45]

$|ZH| = 1\,m$ - odległość Zazie od okna

$|HG| = 25\,m$ - odległość jezdni od szkoły

$|AB| = 1\,m$ - szerokość okna

t = 2s - czas obserwacji = czas trwania ruchu Prospera

Rozstrzygnij:

Czy Prosper przekroczył dozwoloną prędkość $50\frac{km}{h}$?

Rozwiązanie:

▽ $|DC|$ - droga, jaką przebył Prosper w ciągu 2s.

Zauważmy, że $\frac{|DC|}{|AB|} = \frac{|ZG|}{|ZH|}$ stąd $\frac{|DC|}{1} = \frac{1+25}{1}$, zatem $|DC| = 26cm.$

Prosper w ciągu 2s przebył drogę 26m, zatem poruszał się z prędkością:

$$v = \frac{|DC|}{t} = \frac{26\,m}{2\,s} = 13\,m/s = 0{,}013 \cdot 3{,}6\,km/h \approx 46{,}8\,km/h$$

Odpowiedź:

Prosper nie przekroczył dozwolonej prędkości 50 km/h, ponieważ poruszał się z prędkością: 46,8 km/h ▲

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wykonanie rysunku zgodnego z sytuacją w zadaniu i oznaczeniami	1
B	Zapisanie proporcji wynikających z twierdzenia Talesa	1
C	Obliczenie długości potrzebnego odcinka	1
D	Zamiana, ujednolicenie mian	1
E	Wyznaczenie długości odcinka AJ=1/3AB	1

[45] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Pakiet M-1.2 „Czy logiczne jest logiczne?”

I. Treści merytoryczne:

- działania na zbiorach (suma, iloczyn, różnica, różnica symetryczna),
- moc zbioru,
- obliczenia procentowe.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności logicznego myślenia,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności analizy i syntezy,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności stosowania reguł wnioskowania,
- kształcenie umiejętności doboru modelu i narzędzia matematycznego do sytuacji problemowej,
- kształcenie umiejętności oceny wiarygodności danych.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.]Pawłowski H., Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum Linia 1 ponadstandardowa, Wydawnictwo OPERON, Gdynia 2003
[2.]Rams S., Rams T., Matematyka bez granic, część I, Nowy Sącz 2003
[3.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/zad_2005.html

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1.]Bogusz L., Zarzycki P., Zieliński J., *Łamigłówki Logiczne tom 2*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2007

[2.]Gulgowski L., *Matematyka dla ambitnych*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2000

[3.]Pawłowski H., *Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum Linia 1 ponadstandardowa*, Wydawnictwo OPERON, Gdynia 2003

[4.]Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic*, część I, Nowy Sącz 2003

[5.]Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

[6.]Red. Zieliński S., *Matematyka Zeszyt 1,* Instytut Kształcenia Nauczycieli, Zielona Góra 1986

[7.]http://www.edusektor.net/matematyka-ciek/242-kryminalne-zagadki-matematyczne.html

[8.]http://www.edusektor.net/matematyka-ciek/274-zagadka-matematyczna-z-trojktami.html

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" - „Czy logiczne jest logiczne"

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Bonus – Aufgabe zur Erwärmung Tauscht eure Plätze (7 Punkte)

In einem Klassenzimmer stehen in 5 Reihen jeweils 5 Einzeltische. Der Lehrer möchte, dass seine 25 Schüler die Plätze tauschen, indem sich jeder entweder auf den Platz davor, dahinter, rechts oder links setzt. Peter weiß, dass sein Lehrer die Schüler gerne reinlegt. Er stellt sich die Tische wie ein Schachbrett vor, abwechselnd weiß und schwarz. „ Was Sie verlangen, geht gar nicht! "ruft er plötzlich. "Und ich kann es Ihnen beweisen!". Schreibt die Begründung von Peter auf, die zeigt, dass ein solches Vorhaben unmöglich ist. Esercizi di apertura

Bonus – per riscaldare Cambiate il posto (7 punti)

In una classe ci sono 5 file ciascuna con 5 tavoli. Il professore chiede ai suoi 25 studenti di spostarsi seguendo l'indicazione: "ognuno si sieda davanti o dietro o a destra o a sinistra del posto che sta occupando". Piero sa che il prof scherza volentieri. Immagina che i tavoli siano alternativamente di due colori, come nella scacchiera. "Ciò che ci chiede è impossibile" replica "ed io posso provarlo". Riprodurre il ragionamento per mezzo del quale Piero riesce a dimostrare l'impossibilità di un tale movimento.

Bonus – pour échauffement Changez de place (7 points)

Dans une classe, il y a 5 rangées de 5 tables individuelles. Le professeur demande à ses 25 élèves de changer de place en respectant la consigne suivante chacun prendra soit la place de devant ou derrière celle qu'il occupait, soit celle à sa droite ou à sa gauche. Pierre sait que son professeur aime plaisanter. Il imagine que les tables sont alternativement de 2 couleurs, comme les cases d'un damier... "¡ Ce que vous nous demandez est impossible!" s'écrie-t-il alors "et je peux vous le prouver".Ecrire le raisonnement de Pierre qui démontre l'impossibilité d'un tel mouvement

Warm-up Bonus Task - Change your SEAT (7 points)

In a classroom there are 5 rows of 5 Individual tables. The teacher asks his 25 pupils to change seats obeying the following order: each pupil will either take the seat in front or behind the seat he occupies or take the one on his right or left.Peter knows that his teacher often plays jokes. He imagines that the tables have two colours alternately, just like the squares of a checkerboard. "What you ask us to do is impossible, he then exclaimed, and I can prove it!"
Write Peter's thought process, which proves that such a movement is impossible.

Tarea Bonus – ejercicios de iniciación ¡Cambiad de lugar! (7 puntos)

En la clase hay 5 filas de 5 mesas individuales. El profesor quiere que 25 alumnos cambien de sitio de la manera siguiente: cada alumno puede sentarse detrás o delante de la mesa que ocupa o cambiarse de mesa, una a la derecha o a la izquierda. Piotr sabe que su profesor bromea a menudo. Se imaginó que las mesas tienen dos colores alternativamente, como el tablero de ajedrez y llamó: "¡lo que tenemos que hacer es imposible y puedo demostrarlo!   " Escribe cómo Piotr probará que este movimiento es imposible.

Zadanie 1. Diagram Venna z błędem (3 punkty) [46]

Na Bardzo Ważną Konferencję zjechało się aż 1000 uczestników.
Sprawozdawca podał, że wśród nich:
674 władało językiem angielskim, 653 - językiem rosyjskim,
638 - językiem francuskim, 461 – rosyjskim i francuskim,
352 - rosyjskim i angielskim, 382 - angielskim i francuskim,
zaś 250 osób wszystkimi trzema językami.
Jednak obecny na sali matematyk stwierdził, że jest to niemożliwe. Czy miał rację?

Zadanie 2. Monety (3 punkty) [47]

Osiem złotych monet zewnętrznie wygląda jednakowo. Jedna z nich jest fałszywa i lżejsza od pozostałych. Wykryj fałszywą monetę dwukrotnie używając szalkowej wagi bez odważników.

Zadanie 3. Maskarada (3 punkty) [48]

Piotr, Paweł i Jan przygotowują się do balu karnawałowego. Dysponują trzema strojami: pirata, ducha i clowna po jednym dla każdego. Paweł mówi: „Jeśli Jan przebierze się za clowna, to ja ubiorę strój pirata, ale jeśli Jan przebierze się za pirata, to ja będę duchem". Piotr stwierdza: „Jeżeli Paweł nie przebierze się za clowna, to ja będę duchem". Jakie są przebrania każdego z nich?

Zadanie 4. Sudoku (3 punkty) [49]

Uzupełnij tabelę tak, aby w każdym wierszu, kolumnie i w każdym z dziewięciu wyróżnionych kwadratów występowały wszystkie cyfry od 1 do 9 włącznie.

9							2	
5					7	8		
		6			4	1		
3					6	5		
		8			2	3		
		7		8				
8					3	2		
	2	3			5	9		
6			1					7

[46] *Zadanie własne Anny Rybak*
[47] *Zaczerpnięto z* [1] *- Zadanie 6.11; strona 20*
[48] *Zaczerpnięto z [2] – zadanie 11 strona 13*
[49] *Zadanie własne Anny Rybak*

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” – „Czy logiczne jest logiczne?”

Zadanie Bonus – na rozgrzewkę Zmieńcie miejsce (7 punktów)

W klasie jest 5 rzędów po 5 indywidualnych stolików. Nauczyciel chce żeby 25 uczniów zmieniło miejsca w następujący sposób: każdy uczeń może usiąść przy stoliku z przodu lub z tyłu stolika, który zajmuje, albo przesiąść o jeden stolik w prawo lub lewo. Piotr wie, że jego nauczyciel często żartuje. Wyobraził sobie, że stoliki mają dwa kolory na przemian, tak jak pola na szachownicy. Wówczas zawołał: „To, co Pan nam każe zrobić jest niemożliwe do wykonania, i mogę to udowodnić!” Napisz jak Piotr, wykaże, że taki ruch jest niemożliwy.

Rozwiązanie:
Piotr wyobraził sobie szachownicę o 13 polach czarnych i 12 białych.


[50]

Wykonując polecenie nauczyciela, każdy uczeń powinien przejść na pole o kolorze innym niż to, na którym w danej chwili się znajduje. Jednak nie ma wystarczającej ilości pól białych, aby 13 uczniów, zajmujących pola czarne, mogło się na nie przemieścić. Taki ruch jest, więc niemożliwy.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wyobrażenie sobie szachownicy	1
C	Ustalenie, że pól białych jest mniej	2
D	Wniosek	1
E	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

Bonus – Aufgabe zur Erwärmung Tauscht eure Plätze (7 Punkte)

Peter hat sich ein Schachbrett mit 13 schwarzen und 12 weißen Feldern vorgestellt. Um der Empfehlung des Lehrers nachzugehen, sollte jeder Schüler auf ein Feld von einer anderen Farbe wie das Feld, auf dem er sich jetzt befindet, gehen. Es gibt jedoch keine ausreichende Menge von weißen Feldern, so dass sich die 13 Schüler aus schwarzen Feldern darauf verlagern könnten. Solch ein Zug ist unmöglich.

Punktwertung

Tätigkeitsnummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	1
B	Vorstellung eines Schachbrettes	1
C	Feststellen, dass es weniger weiße Felder gibt	2
D	Schlussfolgerung	1
E	Lösungsnotierung in einer fremden Sprache	2

[50] *Szachownica wykonana w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*

Esercizio Bonus – per riscaldare Cambiate il posto (7 punti)

Piero ha immaginato una scacchiera di 13 campi neri e 12 campi bianchi. Eseguendo la disposizione del professore, ogni studente dovrebbe spostarsi sul campo diverso da quello sul quale si trova in questo momento. Eppure i campi bianchi non sono sufficienti per rendere possibile ai 13 studenti, che occupano i campi neri, che ci si spostino. Tale movimento è dunque impossibile.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in lingua polacca	1
B	rappresentazione di una scacchiera	1
C	Stabilire che il numero dei posti bianchi è inferiore	1
D	Conclusione	1
E	Scrivere la soluzione in lingua straniera	1

Bonus - pour entrainement Changez de place (7 points)

Pierre a imaginé un darmier avec 13 cases noires et 12 blanches. En réalisant la demande du professeur, chaque élève doit passer à la case de la couleur diffèrente que la couleur de celle sur laquelle il se trouve dans un moment donné.Pourtant, il n'y a pas assez de cases blanches afin que 13 élèves, occupant les cases noires, puissent s'y déplacer. Un tel mouvement est alors impossible.

Pointage:

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	S'imaginer le darmier	1
C	Etablir qu'il y a moins de cases blanches	2
D	Conclusion	1
E	Ecrire la solution en langue étrangère	2

Tarea Bonus – ejercicios de iniciación ¡Cambiad de lugar! (7 puntos)

Piotr se imaginó El tablero de ajedrez de 13 casillas blancas y 12 negras. Siguiendo la orden del profesor, cada alumno debería desplazarse a una casilla de un color diferente al que se halla en ese momento. Pero no hay bastantes números de casillas blancas para los 13 alumnos que están en las casillas negras, para que puedan cambiarse de sitio. Entonces este desplazamiento es imposible.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Imaginarse el tablero de ajedrez	1
C	Establecer que Hay menos casillas blancas que negras.	2
D	Conclusión	1
E	Escribir la solución en un idioma extranjero.	2

Warm-up Bonus Task Change your SEAT (7 points)

Peter imagined the chessboard consisting of 13 boxes that are black and 12 boxes that are white. Following teacher's instruction, each student should go to the field of color other than that which his/her game pawn is located presently. However, there are not enough white boxes, so 13 students involved in the black box could not move on. Therefore, this move is impossible.

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wyobrażenie sobie szachownicy	1
C	Ustalenie, że pól białych jest mniej	2
D	Wniosek	1
E	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

Zadanie 1. Diagram Venna z błędem (3 punkty)

Wprowadzamy oznaczenia:

E - przestrzeń; zbiór uczestników konferencji

A – zbiór osób władających językiem angielskim

F - zbiór osób władających językiem francuskim

R - zbiór osób władających językiem rosyjskim

Stąd:

$A \cap R$ - oznacza zbiór osób władających językiem angielskim i rosyjskim

$A \cap F$ - oznacza zbiór osób władających językiem angielskim i francuskim

$R \cap F$ - oznacza zbiór osób władających językiem rosyjskim i francuskim

$I = A \cap F \cap R$ - oznacza zbiór osób władających wszystkimi trzema językami

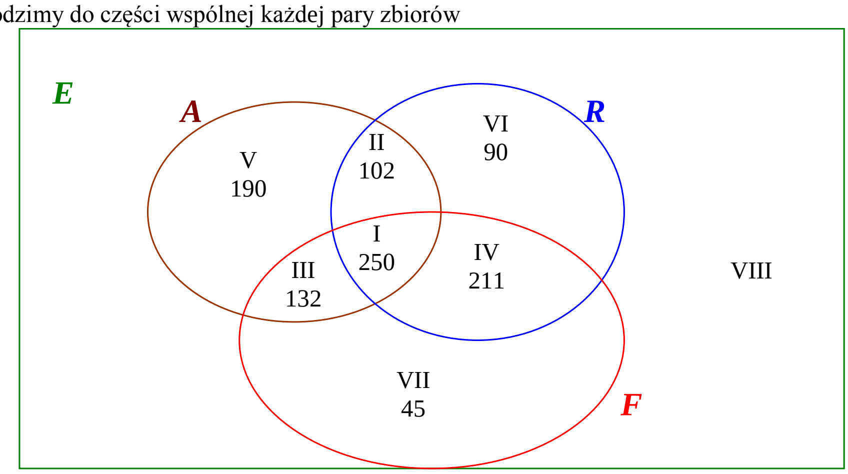
Niech $\overline{\overline{E}}$ oznacza liczebność zbioru E, wtedy zgodnie z treścią zadania:

$\overline{\overline{E}} = 1000$; $\overline{\overline{A}} = 674$; $\overline{\overline{F}} = 638$; $\overline{\overline{R}} = 653$

$\overline{\overline{A \cap R}} = 352$; $\overline{\overline{A \cap F}} = 382$; $\overline{\overline{R \cap F}} = 461$; $\overline{\overline{A \cap F \cap R}} = 250$

Rozwiązanie przedstawione jest na poniższym diagramie:[51]:

Uwaga: uzupełnianie diagramu zaczynamy od części wspólnej trzech zbiorów, następnie przechodzimy do części wspólnej każdej pary zbiorów



$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{A \cap R}} - \overline{\overline{A \cap F \cap R}} = 352 - 250 = 102$; $\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{A \cap F}} - \overline{\overline{A \cap F \cap R}} = 382 - 250 = 132$

$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{R \cap F}} - \overline{\overline{A \cap F \cap R}} = 461 - 250 = 211$; $\overline{\overline{V}} = 674 - (102 + 250 + 132) = 190$

$\overline{\overline{VI}} = 653 - (102 + 250 + 211) = 90$; $\overline{\overline{VII}} = 638 - (132 + 250 + 211) = 45$

$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 1000 - (190 + 102 + 90 + 132 + 250 + 211 + 45)$

$\overline{\overline{VIII}} = 1000 - 1020 = -20$.

Odpowiedź: Przedstawione dane zawierają błąd, bo liczebność zbioru nie może być ujemna

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Narysowanie wypełnionego diagramu	2
B	Obliczenia i odpowiedź	1

[51] *Diagram wykonany w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*

Zadanie 2. Monety (5 punktów)

Kładziemy na każdą z szalek wagi po trzy monety, a dwie pozostawiamy na uboczu. Jeśli waga jest w równowadze, to fałszywą monetę mamy wśród odłożonych monet. W drugim ważeniu tych monet wykrywamy fałszywą. Jeśli w pierwszym ważeniu waga nie jest w równowadze, to w drugim ważeniu kładziemy na każdą z szalek po jednej monecie z trójki monet, która okazała się po pierwszym ważeniu lżejsza. Wtedy albo w drugim ważeniu waga jest w równowadze (i fałszywą monetą jest ta odłożona moneta z rozpatrywanej trójki), albo nie jest – i fałszywą monetą jest lżejsza.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Pierwsze ważenie	1
B	Ważenie II, gdy w I ważeniu jest równowaga	1
C	Ważenie II, gdy w I ważeniu nie ma równowagi	1

Zadanie 3. Maskarada (3 punkty)

Oznaczmy zdania:
„Jeśli Jan przebierze się za clowna, to ja ubiorę strój pirata” – I wypowiedź Pawła
„Jeśli Jan przebierze się za pirata, to ja będę duchem” – II wypowiedź Pawła
„Jeśli Paweł nie przebierze się za clowna, to ja będę duchem” – wypowiedź Piotra
Rozważmy wszystkie możliwe przebrania :

Jan	Piotr	Paweł	Sprzeczność
duch	clown	pirat	Sprzeczność, bo zgodnie ze zdaniem 3 Piotr powinien być duchem
duch	pirat	clown	Brak sprzeczności z wypowiedziami
pirat	duch	clown	Sprzeczność, bo zgodnie ze zdaniem 2, Paweł powinien być duchem
pirat	clown	duch	Sprzeczność, bo zgodnie ze zdaniem 3 Piotr powinien być duchem
clown	pirat	duch	Sprzeczność, bo zgodnie ze zdaniem 1 Paweł powinien być piratem
clown	duch	pirat	Brak sprzeczności z wypowiedziami

Odpowiedź: Są dwa rozwiązania:
Jan jest duchem, Piotr piratem a Paweł clownem
lub Jan jest clownem, Piotr duchem a Paweł piratem.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Jedno rozwiązanie	1
B	Drugie rozwiązanie	1
C	Udzielenie odpowiedzi	1

Zadanie 4. Sudoku (3 punkty)

Sposoby rozwiązywania sudoku:
Rozwiązywanie sudoku nie wymaga wykonywania żadnych matematycznych działań, niezbędna jest natomiast cierpliwość, spostrzegawczość oraz umiejętność logicznego myślenia. Istnieje wiele sposobów rozwiązywania sudoku - każdy gracz może stworzyć własny schemat rozwiązywania łamigłówki.

Metoda eliminacji cyfr:

Polega ona na wyszukiwaniu w całym diagramie Sudoku wszystkich właściwych miejsc, w które można wpisać jedną z cyfr, by w ten sposób wyeliminować ją z dalszej gry. Zgodnie z zasadami gry, każda cytra od 1 do 9 może się znaleźć tylko raz w jakimś rzędzie, kolumnie czy małym kwadracie 3x3 kratki. Łącznie, więc w całym diagramie Sudoku każda z cyfr występuje dokładnie 9 razy. Spróbuj znaleźć te 9 miejsc kolejno dla każdej z cyfr. Możesz wyszukiwać właściwe miejsca najpierw dla 1, potem 2, następnie 3 itd. Możesz też, co jest bardziej praktyczne, rozpocząć od wpisywania cyfr, których pierwotnie ujawniono najwięcej.

Dopełnianie:

Polega ono na uzupełnianiu tych rzędów, kolumn czy małych kwadratów w diagramie sudoku, w których pozostało najmniej pustych kratek. Sposób ten najlepiej stosować, gdy udało nam się już, chociaż częściowo uzupełnić diagram sudoku. Dopełniając rzędy, kolumny czy też małe kwadraty wpierw sprawdzamy, jakich cyfr nam w nich brakuje a następnie staramy się je uzupełnić.

Metoda kratkowa:

Polega ona na wyszukiwaniu właściwej cyfry do konkretnej kratki w diagramie sudoku. Z zasad gry wynika, że wpisanie cyfry w jakiejś kratce powoduje, że cyfra ta nie może się pojawić w żadnym innym miejscu w rzędzie, kolumnie czy małym kwadracie, do których ta kratka przynależy.
Inaczej mówiąc, jeśli zauważyliśmy, że w pobliżu jakiejś kratki znajduje się osiem różnych cyfr, to w tej kratce musi znaleźć się ta dziewiąta - brakująca. Najlepiej jest wyszukiwać cyfr w kratkach, na przecięciu rzędów i kolumn, w których wpisanych jest dużo cyfr.

Metoda przypisanych par:

Polega ona na znalezieniu takiej pary cyfr, która może być wpisana tylko do dwóch kratek w jakimś rzędzie, kolumnie lub małym kwadracie.
Ponieważ cyfry te można umieścić tylko w dwóch kratkach, są one niejako przypisane do tych właśnie kratek. Kratki te uznajemy zaś za zajęte, przez co wykluczamy możliwość umieszczenia w nich innych cyfr. W sposobie tym naszym celem jest znalezienie, przybliżonego miejsca wpisania jakiejś pary cyfr, gdyż jak się okazuje nawet taka informacja może być przydatna przy rozwiązywaniu sudoku. Stosowanie tego sposobu wiąże się z koniecznością wpisywania do pustych kratek diagramu sudoku cyfr, które mogą się w nich znaleźć. Najlepiej robić to ołówkiem, aby w razie potrzeby można je było łatwo wymazać.

Metoda identycznych par:

Polega ona na odnalezieniu w jakimś rzędzie, kolumnie lub małym kwadracie dwóch kratek, w które można wpisać tylko dwie takie same cyfry. Jeżeli nam się to uda, śmiało możemy wykluczyć te cyfry z pozostałych pustych kratek w tym rzędzie, kolumnie czy małym kwadracie.
Stosowanie tego sposobu wiąże się także z koniecznością wpisywania w poszczególne kratki diagramu sudoku cyfr, jakie mogą się w nich znaleźć.
Poniżej propozycja kolejnych kroków wypełniania sudoku:

1^0

Wypełnianie zaczynamy od kolumny G: brakujące w niej cyfry, to 6; 7; 4 w G9 – nie możemy wstawić ani 6 ani 7, ponieważ te cyfry już występują w wierszu 9, zatem do G9 wpisujemy cyfrę 4; w G6 musimy wpisać 6, ponieważ 7 już występuje w wierszu 6 w G1 wpisujemy brakującą w kolumnie G cyfrę 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9						7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6			7		8		6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6			1			4		7

2^0

W H9 musi być 3, ponieważ w wierszu 7 i 8 już jest 3
Analogicznie do E9 należy wpisać 2, ponieważ w wierszu 7 i 8 już jest 2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9						7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6			7		8		6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6			1	2		4	3	7

3^0

8 musi być w F9, bo nie może być wpisana ani do B9 ani do C9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9						7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6			7		8		6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6			1	2	8	4	3	7

4^0

Cyfry brakujące w kolumnie F to 9 i 1, natomiast puste są kratki: F1 i F6. Do F1 nie możemy wpisać 9, bo jest już w A1, zatem do F1 wpisujemy 1 a 9 do F6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9					1	7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6			7		8	9	6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6			1	2	8	4	3	7

5^0

W wierszach 4 i 5 występuje już cyfra 3, zatem pozostaje dla niej kratka D6

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9					1	7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6			7	3	8	9	6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6			1	2	8	4	3	7

6^0

Cyfrę 5 należy wpisać w B6, ponieważ kratki A6, H6 oraz I6 są niedozwolone dla 5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9					1	7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6		5	7	3	8	9	6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6			1	2	8	4	3	7

7^0

W wierszu 9 brakuje cyfr 5 i 9, natomiast puste są kratki B9 i C9. Cyfra 5 już występuje w kolumnie B, zatem może być wpisana tylko do C9, natomiast do B9 należy wpisać cyfrę 9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9					1	7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5			8			2	3		
6		5	7	3	8	9	6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

8^0

Cyfra 6 występuje w kolumnach A i C oraz w wierszach 4 i 6, więc pozostaje dla niej kratka B5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9					1	7	2	
2	5					7	8		
3			6			4	1		
4	3					6	5		
5		6	8			2	3		
6		5	7	3	8	9	6		
7	8					3	2		
8		2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

9^0

W kolumnie C wolne są kratki:
C1; C2; C4; C7. Brakujące cyfry to: 1; 2; 4; 9.
W kolumnach A i B cyfra 9 już jest wpisana, zatem pozostaje dla niej kratka C4; Cyfry 2 nie można wpisać do C1 oraz do C7, zatem pozostaje dla niej kratka C2. Cyfry 1 nie można wpisać do C1, więc musi być wpisana do C7 natomiast do C1 wpisujemy 4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9		4			1	7	2	
2	5		2			7	8		
3			6			4	1		
4	3		9			6	5		
5		6	8			2	3		
6		5	7	3	8	9	6		
7	8		1			3	2		
8		2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

10^0

W kolumnie A puste są kratki:
A3; A5; A6; A8. Brakujące cyfry to: 1; 2; 4; 7.
Cyfry 2 nie można wpisać do kratek: A3; A5; A8 zatem musi być wpisana do A6. Cyfry 1 nie można wpisać do kratek: A3; A8 więc musi być wpisana do A5.
Cyfry 4 nie można wpisać do A3 zatem trzeba ją wpisać do kratki A8, zatem do A3 wpisujemy 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9		4			1	7	2	
2	5		2			7	8		
3	7		6			4	1		
4	3		9			6	5		
5	1	6	8			2	3		
6	2	5	7	3	8	9	6		
7	8		1			3	2		
8	4	2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

11^0

W kwadracie A4 – C6 do pustej kratki B4 wpisujemy brakującą cyfrę 4; natomiast w kwadracie A7 – C9 do pustej kratki B7 wpisujemy brakującą cyfrę 7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9		4			1	7	2	
2	5		2			7	8		
3	7		6			4	1		
4	3	4	9			6	5		
5	1	6	8			2	3		
6	2	5	7	3	8	9	6		
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

12^0

Zaznaczam wiersze i kolumny, w których występuje cyfra 2. W kwadracie: D1 – F3 dla cyfry 2 zostaje tylko kratka D3; natomiast w kwadracie: G4 – I6 dla cyfry 2 jest tylko kratka I4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9		4			1	7	2	
2	5		2			7	8		
3	7		6	2		4	1		
4	3	4	9			6	5		2
5	1	6	8			2	3		
6	2	5	7	3	8	9	6		
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

13^0 Zaznaczam wiersze i kolumny, w których występuje cyfra 1. W kwadracie: A1 – C3 dla 1 została kratka B2, natomiast w kwadracie: D4 – F6 kratka E4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9		4			1	7	2	
2	5	1	2			7	8		
3	7		6	2		4	1		
4	3	4	9		1	6	5		2
5	1	6	8			2	3		
6	2	5	7	3	8	9	6		
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3			5	9		
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

14^0 W kolumnie D dla cyfry 8 została tylko kratka D1, natomiast w wierszu 4 kratka H4, stąd w wierszu 8 tylko I8 oraz w wierszu 3 - pole B3. w kwadracie A1 – C3 brakującą cyfrę 3 wpisujemy do kratki B1

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	3	4	8		1	7	2	
2	5	1	2			7	8		
3	7	8	6	2		4	1		
4	3	4	9		1	6	5	8	2
5	1	6	8			2	3		
6	2	5	7	3	8	9	6		
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3			5	9		8
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

15^0 W wierszu 4 do pustej kratki D4 wpisujemy brakującą cyfrę 7, teraz w kwadracie: D7 – F9 dla 7 została kratka E8, a w G4 – I6 pole H2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	3	4	8		1	7	2	
2	5	1	2			7	8		
3	7	8	6	2		4	1		
4	3	4	9	7	1	6	5	8	2
5	1	6	8			2	3	7	
6	2	5	7	3	8	9	6		
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3		7	5	9		8
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

16^0 W wierszu 8 brakuje cyfry 1, którą można wpisać tylko do H8, więc dla 6 zostaje D8, zatem w wierszu 6 cyfrę 1 można wpisać tylko do I6, a brakującą 4 do H6, teraz w kwadracie: G4 – I6 brakującą 9 wpisujemy do I5

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	3	4	8		1	7	2	
2	5	1	2			7	8		
3	7	8	6	2		4	1		
4	3	4	9	7	1	6	5	8	2
5	1	6	8			2	3	7	9
6	2	5	7	3	8	9	6	4	1
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3	6	7	5	9	1	8
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

17^0 W kwadracie G1 – I3 cyfrę 4 można wpisać tylko do I2, a cyfrę 3 do I3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	3	4	8		1	7	2	
2	5	1	2			7	8		4
3	7	8	6	2		4	1		3
4	3	4	9	7	1	6	5	8	2
5	1	6	8			2	3	7	9
6	2	5	7	3	8	9	6	4	1
7	8	7	1			3	2		
8	4	2	3	6	7	5	9	1	8
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

18^0 W wierszu 2 cyfrę 3 można wpisać tylko do E2, teraz cyfrę 6 tylko do H2 a do D2 – 9. Stąd w kwadracie G7 – I9 cyfrę 6 wpisujemy do I7, a cyfrę 5 do H7, następnie w kwadracie G1 – I3 cyfrę 5 możemy wpisać tylko do I1, a 9 do H3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	3	4	8		1	7	2	5
2	5	1	2	9	3	7	8	6	4
3	7	8	6	2		4	1	9	3
4	3	4	9	7	1	6	5	8	2
5	1	6	8			2	3	7	9
6	2	5	7	3	8	9	6	4	1
7	8	7	1			3	2	5	6
8	4	2	3	6	7	5	9	1	8
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

19^0

W wierszu 1 brakuje cyfry 6, wpisujemy ją do E1; w wierszu 3 do E3 wpisujemy cyfrę 5.
W wierszu 5 brakujące cyfry 4 i 5 wpisujemy odpowiednio do E5 i D5, natomiast w wierszu 7 do D7 wpisujemy 4, a do E7 – 9

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	9	3	4	8	6	1	7	2	5
2	5	1	2	9	3	7	8	6	4
3	7	8	6	2	5	4	1	9	3
4	3	4	9	7	1	6	5	8	2
5	1	6	8	5	4	2	3	7	9
6	2	5	7	3	8	9	6	4	1
7	8	7	1	4	9	3	2	5	6
8	4	2	3	6	7	5	9	1	8
9	6	9	5	1	2	8	4	3	7

Uzupełniony diagram:

	9	3	4	8	6	1	7	2	5
	5	1	2	9	3	7	8	6	4
	7	8	6	2	5	4	1	9	3
	3	4	9	7	1	6	5	8	2
	1	6	8	5	4	2	3	7	9
	2	5	7	3	8	9	6	4	1
	8	7	1	4	9	3	2	5	6
	4	2	3	6	7	5	9	1	8
	6	9	5	1	2	8	4	3	7

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
1	Wypełnienie sudoku	3

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" – „Czy logiczne jest logiczne?"

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Compito 1. Al Casting, Avanti! (5 punti) [52]

In una certa agenzia artistica ci sono registrati 300 attori. In questo gruppo ci sono

100 alti	23 di loro sono alti e non hanno capelli	14 sono calvi e occhi azzurri	5 alti e occhi azzurri non hanno capelli
80 calvi	16 sono alti e hanno occhi azzurri	25 occhi azzuri	

Il regista che si rivolge a questa agenzia, avrà la chance di trovare un attore basso a occhi azzurri e con i cappelli sulla testa? I signori che non hanno nessuna di queste caratteristiche rappresentano più o meno del 40% di tutto gruppo?

Devoir 1. Allez au casting! (5 punti)

Dans une agence artistique sont inscrits 300 acteurs. Dans ce groupe, il y en a

100 qui sont grands	23 d'entre eux sont grands et sans cheveux
80 chauves	16 grands et aux yeux bleus
25 aux yeux bleus	14 chauves et aux yeux bleus,
5 grands hommes aux yeux bleus sont sans cheveux	

Est-ce que le metteur en scène s'adressant à cette agence aura de la chance d'y trouver un acteur petit, aux yeux bleus et avec cheveux sur la tête ? Est-ce que les hommes ne possédant aucune de ces qualités constituent plus ou moins de 40% de l'ensemble du groupe ?

Exercise 1. Go to the casting (5 points)

300 actors have been registered in some artistic agency. In this group there are

100 tall ones	23 of them are tall and bald
80 bald	16 are tall and have blue eyes
25 are blue-eyed	14 are blue-eyed and bald
5 tall blue-eyed men are bald	

Is the director likely to find in the agency a short blue-eyed actor with hair on his head?
Do the men, possessing none of these characteristics, constitute more or less than 40% of the entire group?

Tarea 1. ¡Va a un casting! (5 puntos)

En una agencia artística están registrados 300 actores. En este grupo hay :

100 personas grandes	23 de ellos son grandes y no tienen pelo
80 calvos	16 son grandes con ojos azules
25 con ojos azules	14 son calvos con ojos azules
5 hombres grandes con ojos azules no tienen pelo.	

¿Piensas que el director podrá encontrar en esta agencia un actor bajo con ojos azules y con el pelo?
¿Los hombres de este grupo que no tienen ningún de estos rasgos constituyen más o menos 40% de todo el grupo?

[52] Zadanie własne Anny Rybak

Aufgabe 1. Marsch auf den casting! (5 Punkte)

In einer Künstleragentur sind 300 Schauspieler registriert. In dieser Gruppe gibt es

100 Große	23 von ihnen sind groß und haben kein Haar mehr
80 Kahle	16 sind groß und haben blaue Augen
25 Blauäugige	14 sind kahl und blauäugig
5 große blauäugige Herren haben keine Haare mehr.	

Hat ein Regisseur, der sich bei dieser Agentur meldet, eine Chance, einen kleinen, blauäugigen Schauspieler mit Haaren auf dem Kopf zu finden? Machen die Herren, die keines von diesen Merkmalen haben, mehr oder weniger als 40% der ganzen Gruppe aus?

Zadanie 2. Kulki (3 punkty)[53]

Mam w kieszeni pewną liczbę barwnych szklanych kulek.
Jeśli na ślepo wyciągnę jedną z nich, będzie to kulka czerwona, zielona lub żółta.
Jeśli wyciągnę z kieszeni dwie kulki, może mi się zdarzyć pięć różnych układów barw.
Jeśli wyciągnę z kieszeni trzy kulki, może mi się zdarzyć sześć różnych układów barw.
Ile kulek mam w kieszeni?

Zadanie 3. Euromat (6 punktów)[54]

Automat wymiany banknotów przyjmuje banknoty o nominale: 100 euro, 50 euro, 20 euro i 10 euro. Wprowadzane banknoty wymieniane są następująco:
100 euro na: 1 banknot 50 euro, 1 banknot 20 euro, 2 banknoty po 10 euro i 2 po 5 euro
50 euro na: 1 banknot 20 euro, 2 banknoty po 10 euro i 2 po 5 euro
20 euro na: 1 banknot 10 euro, 2 banknoty po 5 euro
10 euro na: 2 banknoty po 5 euro
Na początku napełnia się automat banknotami o nominałach 50, 20, 10 i 5 euro i to tak, że łącznie może być przeprowadzonych dokładnie 100 operacji wymiany, niezależnie od tego, który z 4 rodzajów wymiany zostanie wybrany.
Po przeprowadzeniu przez automat 100 operacji wymiany, ponownie bada się jego całkowitą zawartość. Zawiera on 20 banknotów o nominale 100 euro, 130 banknotów o nominale 50 euro, 40 banknotów o nominale 20 euro i 70 banknotów o nominale 10 euro.
Ile banknotów każdego rodzaju zostało wprowadzonych do automatu podczas 100 operacji wymiany? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 4. Sudoku (3 punkty)[55]

Uzupełnij tabelę tak, aby w każdym wierszu, kolumnie i w każdym z dziewięciu wyróżnionych kwadratów występowały wszystkie cyfry od 1 do 9 włącznie

	7			9			1	
2					3			5
8								
								8
5					8			3
	9		6				7	
		7			2		9	
	4						2	
	6		7			5		

[53] Zaczerpnięto z [1] - zadanie 127, strona 72
[54] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 12; strona 94
[55] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 5. Master mind (5 punktów) [56]

Gra MASTER MIND polega na odgadnięciu ciągu znaków (liter, kolorowych pionków, lub – jak w tym przypadku – cyfr) na podstawie informacji o liczbie „trafień”. Oto sposób oznaczania trafień w tym zadaniu:
Litera c oznacza znak na właściwym miejscu (takim, jak w odgadywanym ciągu),
Litera b – znak na niewłaściwym miejscu.
Jeżeli na przykład rozwiązaniem byłby ciąg 1155, a w zadaniu wystąpiłby ciąg 5815, to przy nim byłyby litery b b c, utworzone następująco: Najpierw liczymy cyfry na właściwych miejscach: na ostatnim miejscu jest „5”, piszemy „c” i zaznaczamy piątkę w obu ciągach (drugi raz już jej nie liczymy). Liczymy cyfry na niewłaściwych miejscach (spośród niezaznaczonych): jest jedna piątka – zaznaczamy ją w obu ciągach i piszemy „b”, oraz jedna jedynka – robimy tak samo.
Spośród pozostałych cyfr nie ma już takiej, która występowałaby w obu ciągach.
Zadanie polega na odgadnięciu ciągu pięciu cyfr.

6	8	6	8	9	-	b		
1	5	0	4	8	-	c	b	
1	3	5	7	1	-	c	b	
1	2	2	5	6	-	c	b	
0	2	0	2	4	-	c	b	
9	0	2	3	5	-	b	b	b
8	3	7	2	4	-	b	b	b
1	2	9	0	7	-	c	c	b

[56] Zaczerpnięto z [1] - zadanie 154; strona 84

Zadanie 6. Niech żyją sofizmaty!!! (5 punktów) [57]

Sofizmat należy rozumieć jako fałszywy dowód, rozumowanie mające pozory poprawności logicznej, a zawierające błędy logiczne, rozmyślnie utajone przez przeprowadzającego to rozumowanie, zwłaszcza w celu przekonania o czymś, czytelnika lub słuchacza.

Przykład:

Prawdziwa jest równość:	$-6=-6$
Czyli:	$4-10=9-15$
Do obu stron dodajemy $\frac{25}{4}$	$4-10+\frac{25}{4}=9-15+\frac{25}{4}$
Obie strony stanowią kwadraty dwóch różnic:	$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$
Z obu stron wyciągamy pierwiastek kwadratowy:	$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$
Do obu stron dodajemy $\frac{5}{2}$, wówczas:	$2=3$

W podanym przykładzie błąd polega na tym, że z równości kwadratów liczb nie wynika równość tych liczb.

A teraz zadanie dla Ciebie: Gdzie jest błąd w poniższym rozumowaniu?

Przypuśćmy, że	$a>b$
Wówczas istnieje taka liczba c, że	$a-b=c$
Stąd otrzymujemy równość	$a=b+c$
Mnożymy obie strony tej nierówności przez $a-b$	$a^2-ab=ab+ac-b^2-bc$
Skąd	$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc$
Więc	$a(a-b-c)=b(a-b-c)$
Czyli	$a=b$
Choć założyliśmy, że	$a>b$

Zadanie 7. Nie Wszystko Złoto, Co Się Świeci (3 punkty) [58]

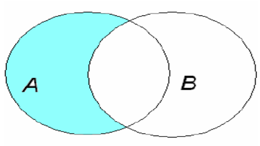
Wśród piętnastu monet zewnętrznie jednakowych jedna jest fałszywa i różni się ciężarem od pozostałych. Za pomocą dwukrotnego użycia szalkowej wagi bez odważników wykryj, czy moneta fałszywa jest lżejsza czy cięższa.

[57] Zaczerpnięto z [3]
[58] Zaczerpnięto z [4] – zadanie 6.12 Strona 20

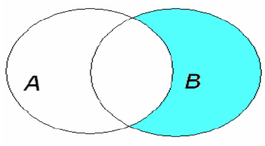
Zadanie 8. Różnica symetryczna (5 punktów) [59]

Różnicą symetryczna zbiorów A i B nazywamy sumę zbiorów

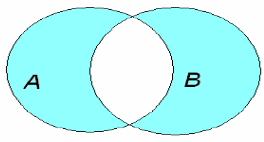
$$A \div B \overset{z\ definicji}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$



$A \setminus B$



$B \setminus A$



$A \div B$

Sprawdź na diagramie, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość:

$$A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Mając dane zbiory: A={x, y, z, t}; B={y, p, s, t}; C={z, s, k, t},
wyznacz: $(A \div B) \div C$ oraz $A \div (B \div C)$.
Co zauważyłeś? Sprawdź swoje spostrzeżenia na diagramie.

Zadanie 9. Wyjątek obala hipotezę (2 punkty) [60]

W historii matematyki znane są przykłady hipotez, które autorom tych hipotez wydawały się prawdziwe, a w rzeczywistości okazywały się nieprawdziwe. Nierzadko hipotezy te stawiane były przez matematyków uznawanych za genialnych. W XVII wieku niemiecki matematyk G. W. Leibniz udowodnił, że dla każdej liczby naturalnej n:

$n^3 - n$ jest podzielna przez 3, $n^5 - n$ jest podzielna przez 5, $n^7 - n$ jest podzielna przez 7.

Postawiona hipoteza, że liczba $n^k - n$ jest podzielna przez **k** dla dowolnej nieparzystej liczby naturalnej **k** , okazała się fałszywą. Liczba $2^9 - 2 = 510$ nie jest podzielna przez 9. Ciekawą własność zauważoną przez Eulera mają liczby postaci $n^2 + n + 41$. Wstawiając w miejsce **n** kolejne liczby 0,1,2,3,4,…otrzymujemy za każdym razem liczbę pierwszą. Nasuwa się hipoteza, że wszystkie liczby postaci $n^2 + n + 41$ są liczbami pierwszymi. Aby potwierdzić tę hipotezę należałoby ją udowodnić. Aby ją obalić, wystarczy podać kontrprzykład.
Otóż liczba $41^2 + 41 + 41$ (dla n = 41) jest liczbą złożoną (podzielną przez 41)
Teraz zadanie dla Ciebie:
Liczby 11, 111, 1111 nie są podzielne przez 7.
Czy prawdą jest, że żadna z liczb postaci 111…11, w której zapisie występują same jedynki, nie jest podzielna przez 7?
Odpowiedź uzasadnij.

[59] Zaczerpnięto z [4] – zadanie 2.15 i 2.20, Strona 29
[60] Zaczerpnięto z [5] – 2 przykłady +zadanie 9.1, Strona 26

Zadanie 10. Zadanie ze smokiem (5 punktów) [61]

Smok ma 2000 głów.
Rycerz może ściąć jednym cięciem miecza: 33 głowy lub 21 głów lub 17 głów lub 1 głowę. Smokowi dorastają wówczas odpowiednio 48, 0, 14 lub 349 głów.
Smok zostanie zabity, gdy wszystkie głowy będą ścięte. Czy rycerz może zabić smoka?

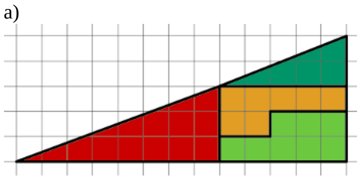
Zadanie 11. Zadanie dla przyszłych policjantów (4 punkty) [62]

Oto zadanie matematyczno-kryminalne (przydatne dla przyszłych policjantów):
W pewnym polskim mieście działają dwie korporacje taksówkowe: Czarna Wołga i Błękitna Nysa. Kierowcy pierwszej firmy – jak sama nazwa wskazuje – zawsze jeżdżą czarnymi autami, pracownicy drugiej - niebieskimi. Czarne taksówki stanowią 85%, a niebieskie 15% całego taboru. Pewnej nocy w wypadku zginął pieszy. Potrąciła go rozpędzona taksówka, a kierowca zbiegł z miejsca wypadku, nie próbując udzielić pomocy ofierze. Jedynym świadkiem zajścia był starszy człowiek, który akurat widział tę scenę przez okno. Sąd przeprowadził badania wiarygodności zeznań świadka w warunkach analogicznych do tych, w których miał miejsce wypadek. Ocenił, że mężczyzna jest wiarygodny w 80%, tzn. w 4 przypadkach na 5 prawidłowo rozpoznawał kolory taksówek (to ważne, gdyż w nocy oba mogą wyglądać identycznie). Staruszek zeznał, że sprawcą feralnego zajścia był kierowca niebieskiego auta. Czy można polegać tylko na zeznaniach staruszka?

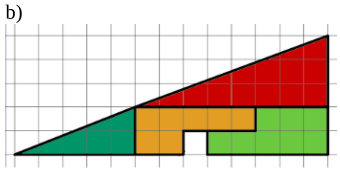
Zadanie 12. Znikający kwadrat (4 punkty) [63]

Zagadka matematyczna z trójkątami.
Oto pytanie: Dlaczego poniżej na rysunku b), widnieje jeden pusty kwadrat?

a)



b)



[61] Zaczerpnięto z [6] – zadanie 76, strona 10
[62] Zaczerpnięto z [7]
[63] Zaczerpnięto z [8]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" – „Czy logiczne jest logiczne?"

Zadanie 1. Na casting marsz! (5 punktów)

W pewnej agencji artystycznej jest zarejestrowanych 300 aktorów. W tej grupie jest:

100 wysokich	23 z nich jest wysokich i nie ma włosów
80 łysych	16 jest wysokich i ma niebieskie oczy
25 niebieskookich	14 to łysi niebieskoocy
5 wysokich niebieskookich panów nie ma włosów.	

Czy reżyser zgłaszający się do tej agencji ma szanse znaleźć niskiego niebieskookiego aktora z włosami na głowie?
Czy panowie nie mający żadnej z tych cech stanowią więcej czy mniej niż 40% całej grupy?

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia:

E - przestrzeń; zbiór zarejestrowanych aktorów,
W – zbiór wysokich aktorów,
Ł - zbiór łysych aktorów,
N - zbiór niebieskookich aktorów,

$W \cap Ł$ - oznacza zbiór aktorów wysokich i bez włosów,
$W \cap N$ - oznacza zbiór aktorów wysokich i niebieskookich,
$Ł \cap N$ - oznacza zbiór aktorów łysych niebieskookich,
I = $W \cap Ł \cap N$ - oznacza zbiór panów wysokich niebieskookich bez włosów.

Niech $\overline{\overline{E}}$ oznacza liczebność zbioru E, wtedy zgodnie z treścią zadania:

$$\overline{\overline{E}} = 300;\ \overline{\overline{W}} = 100;\ \overline{\overline{Ł}} = 80;\ \overline{\overline{N}} = 25;$$

$$\overline{\overline{W \cap Ł}} = 23;$$

$$\overline{\overline{W \cap N}} = 16;$$

$$\overline{\overline{Ł \cap N}} = 14;$$

$$\overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 5 = \overline{\overline{I}}$$

$$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{W \cap Ł}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 23 - 5 = 18;$$

$$\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{W \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 16 - 5 = 11$$

$$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{Ł \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 14 - 5 = 9;$$

$$\overline{\overline{V}} = 100 - (18 + 5 + 11) = 66$$

$$\overline{\overline{VI}} = 80 - (18 + 5 + 9) = 48;$$

$$\overline{\overline{VII}} = 25 - (11 + 5 + 9) = 0$$

$$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 300 - (5 + 18 + 11 + 9 + 66 + 0)$$

zatem $\overline{\overline{VIII}} = 300 - 157 = 143$

Czy reżyser zgłaszający się do tej agencji ma szanse znaleźć niskiego niebieskookiego aktora z włosami na głowie?

Aktor o poszukiwanych własnościach należy do zbioru V, ale $\overline{\overline{V}} = 0$, czyli $V = \varnothing$

Odpowiedź:

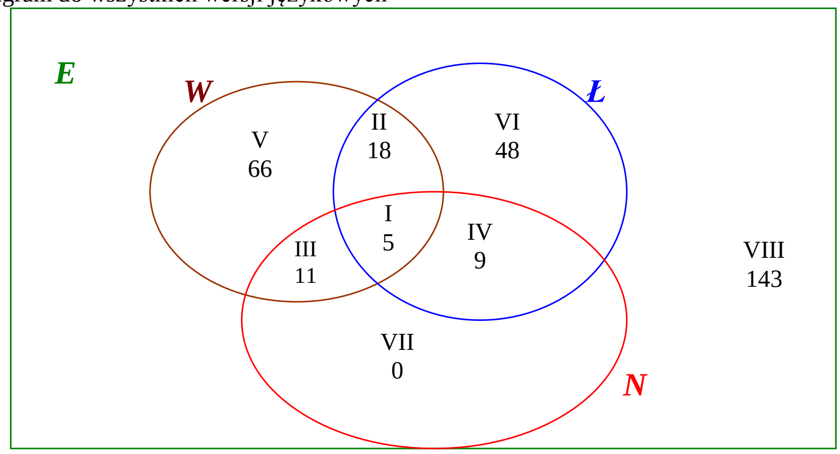
Reżyser nie znajdzie takich aktorów.

Aktorzy niemający żadnej z tych cech stanowią $\frac{143}{300} = 0{,}47666666\,6666667$ całej populacji, czyli około 48% grupy.

Rozwiązanie przedstawione jest na poniższym diagramie:

Uwaga: Uzupełnianie diagramu zaczynamy od części wspólnej trzech zbiorów, następnie przechodzimy do części wspólnej każdych dwóch.

Diagram do wszystkich wersji językowych[64]



Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Przetłumaczenie	1
B	Narysowanie wypełnionego diagramu	2
C	Obliczenie procentu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

[64] *Diagram wykonany w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*

Esercizio. 1 Al Casting, Avanti! (5 punti)

Introduciamo le identificazioni:

E – area; l'insieme degli attori registrati
W – l'insieme degli attori alti
Ł – l'insieme degli attori calvi
N – l'insieme degli attori dagli occhi azzurri

$W \cap Ł$ - significa l'insieme degli attori altie senza capelli
$W \cap N$ - significa l'insieme degli attori alti e dagli occhi azzurri
$Ł \cap N$ - significa l'insieme degli attori calvi e dagli occhi azzurri
I = $W \cap Ł \cap N$ - significa l'insieme dei signori alti dagli occhi azzurri e senza capelli

Che $\overline{\overline{E}}$ significhi il quantitativo dell'insieme E, allora in accordo con il contenuto dell' esercizio:

$$\overline{\overline{E}} = 300;\ \overline{\overline{W}} = 100;\ \overline{\overline{Ł}} = 80;\ \overline{\overline{N}} = 25;$$
$$\overline{\overline{W \cap Ł}} = 23;$$
$$\overline{\overline{W \cap N}} = 16;$$
$$\overline{\overline{Ł \cap N}} = 14;$$
$$\overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 5 = \overline{\overline{I}}$$

La soluzione viene prezentata sul diagramma qui sotto:

Diagram

$$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{W \cap Ł}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 23 - 5 = 18;$$
$$\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{W \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 16 - 5 = 11$$
$$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{Ł \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 14 - 5 = 9;$$
$$\overline{\overline{V}} = 100 - (18 + 5 + 11) = 66$$
$$\overline{\overline{VI}} = 80 - (18 + 5 + 9) = 48;$$
$$\overline{\overline{VII}} = 25 - (11 + 5 + 9) = 0$$
$$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 300 - (5 + 18 + 11 + 9 + 66 + 0) \Rightarrow$$
$$\overline{\overline{VIII}} = 300 - 157 = 143$$

Nota: Il completamento del diagramma viene iniziato dalla parte comune di tre insiemi, in seguito passiamo alla parte comune di ogni due. Il regista che si rivolge a questa agenzia, avrà la chance di trovare un attore basso dagli occhi azzurri e con i cappelli sulla testa?

L'attore che abbia delle caratteristiche richercate appartiene all'insieme V, ma $\overline{\overline{V}} = 0$, ossia $V = \varnothing$
Risposta: Il registra non troverà tali attori. Gli attori che non Hanno nessuna di queste caratteristiche rappresentano $\frac{143}{300} = 0{,}47666666\ 6666667$ di tutta la popolazione, cioè circa 48% del gruppo.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione	1
B	Disegno del diagram ma compilato	2
C	Cacolo della precentuale	1
D	Risposta	1

Exercice 1. Allez au casting (5 points)

On introduit les signes:

E - espace; l'ensemble d'acteurs inscrits

W – l'ensemble d'acteurs grands

Ł - l'ensemble d'acteurs chauves

N - l'ensemble d'acteurs aux yeux bleus

$W \cap Ł$ - signifie l'ensemble d'acteurs grands et sans cheveux

$W \cap N$ - signifie l'ensemble d'acteurs grands et aux yeux bleus

$Ł \cap N$ - signifie l'ensemble d'acteurs chauves et aux yeux bleus

I = $W \cap Ł \cap N$ - signifie l'ensemble de grands hommes aux yeux bleus sans cheveux

Soit $\overline{\overline{E}}$ signifie la quantité de l'ensemble E, alors conformement au texte de l'exercice:

$$\overline{\overline{E}} = 300;\ \overline{\overline{W}} = 100;\ \overline{\overline{Ł}} = 80;\ \overline{\overline{N}} = 25;$$
$$\overline{\overline{W \cap Ł}} = 23;$$
$$\overline{\overline{W \cap N}} = 16;$$
$$\overline{\overline{Ł \cap N}} = 14;$$
$$\overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 5 = \overline{\overline{I}}$$

La solution est presentée au diagramme ci-dessous:

$$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{W \cap Ł}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 23 - 5 = 18;$$
$$\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{W \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 16 - 5 = 11$$
$$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{Ł \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 14 - 5 = 9;$$
$$\overline{\overline{V}} = 100 - (18 + 5 + 11) = 66$$
$$\overline{\overline{VI}} = 80 - (18 + 5 + 9) = 48;$$
$$\overline{\overline{VII}} = 25 - (11 + 5 + 9) = 0$$
$$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 300 - (5 + 18 + 11 + 9 + 66 + 0) \Rightarrow \overline{\overline{VIII}} = 300 - 157 = 143$$

Attention: on commence le remplissage du diagramme de la partie commune de trois ensembles, ensuite on passe à la partie commune de chacun de tous les deux..

Est-ce que le metteur en scène s'adressant à cette agence aura de la chance d'y trouver un acteur petit, aux yeux bleus et avec cheveux sur la tête ?

L'acteur aux qualités recherchées appartient à l'ensemble V, mais $\overline{\overline{V}} = 0$, alors $V = \varnothing$

Réponse: Le metteur en scène ne trouvera pas de tels acteurs. Les acteurs sans aucune de ces qualités constituent $\frac{143}{300} = 0{,}47666666\ 6666667$ de toue la population alors environ 48% du groupe.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Interpretation	1
B	Dessin du diagramme rempli	2
C	Calcul du pourcentage	1
E	Réponse	1

Exercise 1. Go to the casting (5 points)

Symbols:

E - environment; the set of recorded actors
W – the set of all actors
Ł – the set of bald actors
N – the set of blue-eyed actors

$W \cap Ł$ - the set of tall and bald actors
$W \cap N$ - the set of tall and blue-eyed actors
$Ł \cap N$ - the set of bald blue-eyed actors
I = $W \cap Ł \cap N$ - the set of tall blue-eyed bald actors

Let $\overline{\overline{E}}$ be the number of sets in E, then according to the task description:

$$\overline{\overline{E}} = 300;\ \overline{\overline{W}} = 100;\ \overline{\overline{Ł}} = 80;\ \overline{\overline{N}} = 25;$$

$$\overline{\overline{W \cap Ł}} = 23;$$

$$\overline{\overline{W \cap N}} = 16;$$

$$\overline{\overline{Ł \cap N}} = 14;$$

$$\overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 5 = \overline{\overline{I}}$$

The solution is presented in the following diagram: *Diagram*

$$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{W \cap Ł}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 23 - 5 = 18;$$

$$\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{W \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 16 - 5 = 11$$

$$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{Ł \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 14 - 5 = 9;$$

$$\overline{\overline{V}} = 100 - (18 + 5 + 11) = 66$$

$$\overline{\overline{VI}} = 80 - (18 + 5 + 9) = 48;$$

$$\overline{\overline{VII}} = 25 - (11 + 5 + 9) = 0$$

$$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 300 - (5 + 18 + 11 + 9 + 66 + 0) \Rightarrow \overline{\overline{VIII}} = 300 - 157 = 143$$

Note: to complete the diagram you should start with identifying the common features of three sets, then we continua with identifying the common features of two sets. The actor possessing the needed features belongs to the set V but $\overline{\overline{V}} = 0$, otherwise $V = \varnothing$

Answer: The director will find no actors possessing the required features. The actors possessing none of features constitute $\frac{143}{300} = 0{,}47666666\ 6666667$ of the whole population, i.e. about 48%

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Explanation	1
B	Creating the diagram with data	2
C	Calculating the percentage	1
E	The solution	1

Tarea 1. ¡Va a un casting! (5 puntos)

Introducimos la denominación:

E – espacio, el conjunto de actores registrados

W - el conjunto de actores grandes

Ł – el conjunto de actores calvos

N – el conjunto de actores con ojos azules

$W \cap Ł$ - indica el conjunto de actores grandes y calvos

$W \cap N$ - indica el conjunto de actores grandes con ojos azules

$Ł \cap N$ - indica el conjunto de actores calvos con ojos azules

I = $W \cap Ł \cap N$ - indica el conjunto de hombres grandes con ojos azules y calvos

Que $\overline{\overline{E}}$ indica el número del conjunto E, entonces, conforme al contenido de la tarea:

$\overline{\overline{E}} = 300$; $\overline{\overline{W}} = 100$; $\overline{\overline{Ł}} = 80$; $\overline{\overline{N}} = 25$;

$\overline{\overline{W \cap Ł}} = 23$;

$\overline{\overline{W \cap N}} = 16$;

$\overline{\overline{Ł \cap N}} = 14$;

$\overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 5 = \overline{\overline{I}}$

La solución se puede ver en este diagrama: *Diagram*

$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{W \cap Ł}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 23 - 5 = 18$;

$\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{W \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 16 - 5 = 11$

$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{Ł \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 14 - 5 = 9$;

$\overline{\overline{V}} = 100 - (18 + 5 + 11) = 66$

$\overline{\overline{VI}} = 80 - (18 + 5 + 9) = 48$;

$\overline{\overline{VII}} = 25 - (11 + 5 + 9) = 0$

$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 300 - (5 + 18 + 11 + 9 + 66 + 0) \Rightarrow \overline{\overline{VIII}} = 300 - 157 = 143$

Cuidado! Empezamos a completar el diagrama por la parte común de los tres conjuntos y después pasamos a la parte común de cada dos conjuntos.

¿El director podrá encontrar en esta agencia un actor bajo con ojos azules y con el pelo?

El actor con rasgos buscados pertenece al conjunto V, pero $\overline{\overline{V}} = 0$, es decir $V = \varnothing$

Respuesta: El director no encontrará ese tipo de actores. Los actores que no poseen ninguno de estos rasgos constituyen $\frac{143}{300} = 0{,}47666666\ 6666667$, de toda la población, es decir aproximadamente 48% de todo el grupo.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción	1
B	Demonstración de las proporciones	2
C	Cálculo del porcentaje	1
E	Dar la solución	1

Aufgabe 1. Marsch auf den Casting! (5 Punkte)

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

E- Raum; die Menge von registrierten Schauspielern
W – die Menge von großen Schauspielen
Ł – die Menge von kahlen Schauspielern
N – die Menge von blauäugigen Schauspielern

$W \cap Ł$ - bedeutet die Menge von großen Schauspielern und ohne Haare
$W \cap N$ - bedeutet die Menge von großen und blauäugigen Schauspielern
$Ł \cap N$ - bedeutet die Menge von kahlen blauäugigen Schauspielern
I = $W \cap Ł \cap N$ - bedeutet die Menge von großen blauäugigen Herren ohne Haare

Es bedeute $\overline{\overline{E}}$ die Zählgröße der Menge E, dann gemäß dem Augabeinhalt:

$$\overline{\overline{E}} = 300;\ \overline{\overline{W}} = 100;\ \overline{\overline{Ł}} = 80;\ \overline{\overline{N}} = 25;$$
$$\overline{\overline{W \cap Ł}} = 23;$$
$$\overline{\overline{W \cap N}} = 16;$$
$$\overline{\overline{Ł \cap N}} = 14;$$
$$\overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 5 = \overline{\overline{I}}$$

Die Lösung ist auf folgendem Diagramm vorgestellt: *Diagram*

$$\overline{\overline{II}} = \overline{\overline{W \cap Ł}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 23 - 5 = 18;$$
$$\overline{\overline{III}} = \overline{\overline{W \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 16 - 5 = 11$$
$$\overline{\overline{IV}} = \overline{\overline{Ł \cap N}} - \overline{\overline{W \cap Ł \cap N}} = 14 - 5 = 9;$$
$$\overline{\overline{V}} = 100 - (18 + 5 + 11) = 66$$
$$\overline{\overline{VI}} = 80 - (18 + 5 + 9) = 48;$$
$$\overline{\overline{VII}} = 25 - (11 + 5 + 9) = 0$$
$$\overline{\overline{VIII}} = \overline{\overline{E}} - \left(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{II}} + \overline{\overline{III}} + \overline{\overline{IV}} + \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{VI}} + \overline{\overline{VII}}\right) = 300 - (5 + 18 + 11 + 9 + 66 + 0) \Rightarrow \overline{\overline{VIII}} = 300 - 157 = 143$$

Achtung: Ergänzung des Diagramms beginnen wir mit einem gemeinsamen Teil von drei Mengen, dann kommen wir zu dem gemeinsamen Teil jeder zwei Mengen.
Hat ein Regisseur, der sich bei dieser Agentur meldet, eine Chance, einen kleinen, blauäugigen Schauspieler mit Haaren auf dem Kopf zu finden? Der Schauspieler, der über die gesuchten Eigenschaften verfügt, gehört zu der Menge V, aber $\overline{\overline{V}} = 0$, also $V = \varnothing$
Antwort: Der Regisseur findet keine solche Schauspieler.
Die Schauspieler, die keine von diesen Eigenschaften haben, machen $\frac{143}{300} = 0{,}47666666\ 6666667$ der ganzen Population, also etwa 48% der ganzen Gruppe aus.

Punktwertung

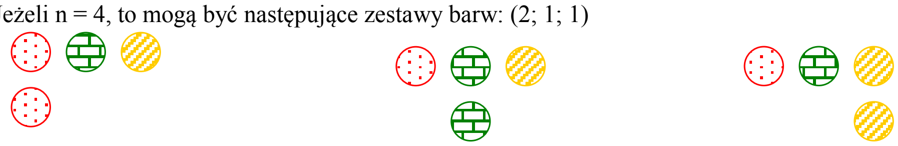
Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung	1
B	Zeichnen eines ausgefüllten Diagramms	2
C	Prozentzählung	1
D	Antwortangabe	1

Zadanie 2. Kulki (3 punkty)[65]

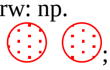
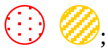
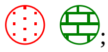
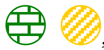
Niech: n – liczba kulek; zatem $n \geq 3$

Jeżeli $n = 3$, to przy wyciągnięciu trzech kulek możliwy jest tylko jeden układ barw: 
, zatem, $n \neq 3$

Jeżeli $n = 4$, to mogą być następujące zestawy barw: (2; 1; 1)



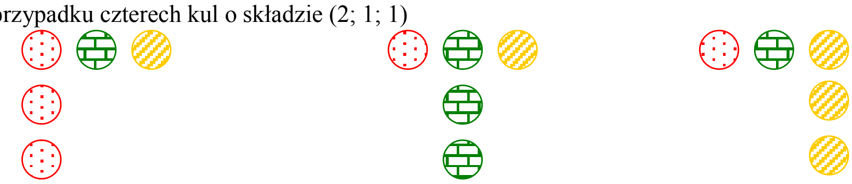
W każdym z tych przypadków przy losowaniu dwóch kul mogę otrzymać tylko cztery zestawy barw: np.

(I) ; (II) ; (III) ; (IV) , zatem $n \neq 4$

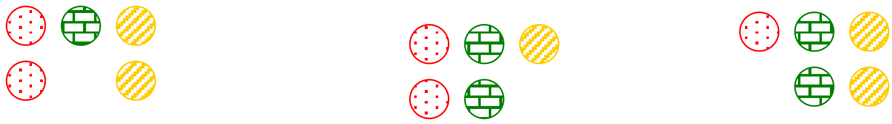
Jeżeli $n = 5$, to mogą być następujące zestawy barw:

A) (3; 1; 1):

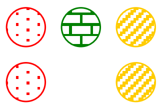
W przypadkach A) przy losowaniu dwóch kul mogę otrzymać tylko cztery zestawy barw jak w przypadku czterech kul o składzie (2; 1; 1)



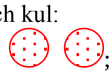
B) (2; 2; 1):

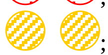


W przypadkach B) przy losowaniu dwóch kul mogę otrzymać następujące zestawy barw np. z poniższego zestawu kul:



mogę otrzymać następujące zestawy barw dwóch kul:

I ;

II ;

III ;

IV ;

V 

---

[65] *Ilustracje zestawów kul zostały wykonane w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*

Natomiast przy losowaniu trzech kul mogę otrzymać tylko pięć zestawów barw:

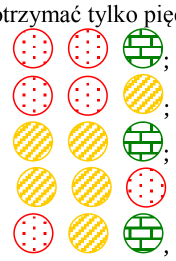
I

II

III

IV

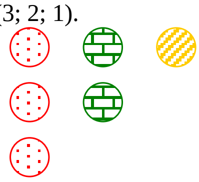
V



zatem $n \neq 5$

Jeżeli n = 6, to dla składu kolorów (3; 2; 1) spełnione będą warunki zadania

Przy losowaniu dwóch kul możliwe jest otrzymanie pięciu układów barw, ponieważ zestaw kul typu (2; 2; 1) jest podzbiorem zestawu (3; 2; 1).



Losując trzy kule z powyższego zestawu mogę otrzymać następujące zestawy barw:

I)

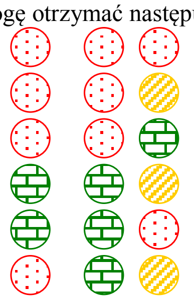
II)

III)

IV)

V)

VI)



Odpowiedź:

Mam w kieszeni, co najmniej sześć kulek:

- Jedna pierwszej barwy
- Dwie drugiej barwy
- Co najmniej trzy trzeciej barwy

Barwy kulek to - oczywiście – czerwień, zieleń i żółć.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wykluczenie ilości kul ≤ 5	1
B	Ustalenie, że liczba kul jest ≥ 6	2

Zadanie 3. Euromat (6 punktów)

	NOMINAŁ:				
OPERACJE	**100€**	**50€**	**20€**	**10€**	**5€**
STAN POCZATKOWY	0	100	100	200	200
WPŁYW O NOMINALE 100€	20				
WYDAWANIE		-20	-20	-40	-40
WPŁYW O NOMINALE 50€		50			
WYDAWANIE			-50	-100	-100
WPŁYW O NOMINALE 20€			10		
WYDAWANIE				-10	-20
WPŁYW O NOMINALE 10€				20	
WYDAWANIE					-40
BILANS	20	130	40	70	0

Przy podanym zapełnieniu początkowym da się przeprowadzić dokładnie 100 operacji.
Ta liczba jest ustalona przez stan początkowy (zapełnienia automatu, w którym było 200 banknotów po 5 euro), i nie zależy ona od tego, ile innych banknotów jest wprowadzanych podczas wymiany.
Rozpoczynamy od 100 euro.
Wpłynęło: 20x100 euro=2000 euro.
Wydano: 20 x 50 euro, 20 x 20 euro, 40 x 10 euro, 40 x 5 euro.
Ze stanu zapełnienia początkowego, bilansu i sposobu wydawania otrzymujemy:

50 euro (130 = 100 – 20 + 50).

Postępując analogicznie otrzymujemy po kolei liczbę wprowadzonych do automatu banknotów o nominałach 20 euro i 10 euro.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Obliczenie ilości banknotów: 50 euro	2
B	Obliczenie ilości banknotów: 20 euro,	2
C	Obliczenie ilości banknotów: 10 euro,	2

Zadanie 4. Sudoku (3 punkty)

Kolorem czerwonym zaznaczona jest propozycja kolejności wpisywania brakujących liczb

6_{7}	7	3_{23}	5_{20}	9	4_{22}	8_{27}	1	2_{29}
2	1_{25}	9_{12}	8_{39}	6_{38}	3	7_{5}	4_{33}	5
8	5_{16}	4_{24}	1_{45}	2_{44}	7_{4}	6_{34}	3_{32}	9_{11}
7_{2}	3_{17}	6_{36}	2_{51}	4_{46}	1_{50}	9_{48}	5_{1}	8
5	2_{26}	1_{37}	9_{49}	7_{3}	8	4_{47}	6_{35}	3
4_{15}	9	8_{9}	6	3_{18}	5_{19}	2_{31}	7	1_{30}
1_{54}	8_{10}	7	4_{56}	5_{21}	2	3_{58}	9	6_{42}
9_{53}	4	5_{14}	3_{57}	8_{40}	6_{8}	1_{59}	2	7_{6}
3_{55}	6	2_{13}	7	1_{43}	9_{52}	5	8_{28}	4_{41}

Sudoku uzupełnione:

6	7	3	5	9	4	8	1	2
2	1	9	8	6	3	7	4	5
8	5	4	1	2	7	6	3	9
7	3	6	2	4	1	9	5	8
5	2	1	9	7	8	4	6	3
4	9	8	6	3	5	2	7	1
1	8	7	4	5	2	3	9	6
9	4	5	3	8	6	1	2	7
3	6	2	7	1	9	5	8	4

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wypełnienei sudoku	3

Zadanie 5. Master mind (5 punktów)

1).	6	8	6	8	9	-	b
					b		
2).	1	5	0	4	8	-	c b
	b			c			
3).	1	3	5	7	1	-	c b
		b			c		
4).	1	2	2	5	6	-	c b
	b	c					
5).	0	2	0	2	4	-	c b
		c			b		
6).	9	0	2	3	5	-	b b b
	b		b	b			
7).	8	3	7	2	4	-	b b b
		b		b	b		
8).	1	2	9	0	7	-	c c b
	b	c	c				

Jedna cyfra na właściwym miejscu – może nią być tylko cyfra 9, bo „8” i „6” są dwie

Powyższego wynika, że cyframi na swoim miejscu są:

	2	9	4	1

Brakującą cyfrą jest „3”, zatem szukany ciąg cyfr to:

3	2	9	4	1

Odpowiedź:

Szukaną liczbą jest: 2941

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Znalezienie I cyfry – „3”	1
B	Znalezienie II cyfry – „2”	1
C	Znalezienie III cyfry – „9”	1
D	Znalezienie IV cyfry – „4”	1
E	Znalezienie V cyfry – „1”	1

Zadanie 6. Niech żyją sofizmaty!!! (5 punktów)

Odpowiedź:

Błąd polega na dzieleniu przez 0 – skoro
$a-b=c$, to $a-b-c=0$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie, że błąd polega na dzieleniu przez 0	3
B	Uzasadnienie, że w przykładzie dzielimy przez zero	2

Zadanie 7. Nie Wszystko Złoto, Co Się Świeci (3 punkty)

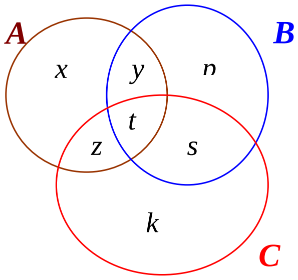
Kładziemy na każdą z szalek po pięć monet.
Jeżeli żadna z szalek nie opadnie to moneta fałszywa znajduje się wśród pozostałych pięciu monet. W drugim ważeniu szalka z tymi właśnie monetami opadnie (i wówczas fałszywa moneta jest cięższa).
W drugim ważeniu szalka z tymi właśnie nie opadnie – i wtedy fałszywa moneta jest lżejsza.
Jeśli natomiast w pierwszym ważeniu jedna z szalek opadnie to zdejmujemy z niej monety i kładziemy na ich miejscu pozostałe pięć monet.
Teraz albo szalki są w równowadze (i fałszywa moneta wśród odłożonych monet jest cięższa).
Albo jedna z szalek opadnie, co oznacza, że fałszywą monetę mamy na szalce, która nie opadła. Fałszywa moneta jest, więc lżejsza.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Pierwsze ważenie	1
B	Ważenie II, gdy w I ważeniu jest równowaga	1
C	Ważenie II, gdy w I ważeniu nie ma równowagi	1

Zadanie 8. Różnica symetryczna (5 punktów)

Rozwiązanie:[66]



$A\setminus B=\{x,z\}$ i $B\setminus A=\{p,s\}$ oraz $A\div B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

więc $A\div B=\{x,z\}\cup\{p,s\}=\{x,z,p,s\}$;

$B\setminus C=\{y,p\}$ i $C\setminus B=\{z,k\}$,

więc $B\div C=\{y,p\}\cup\{z,k\}=\{y,p,z,k\}$

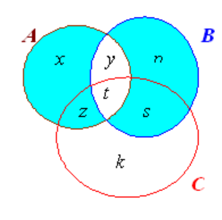
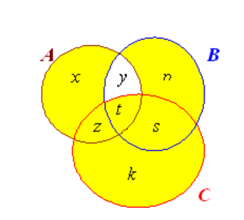
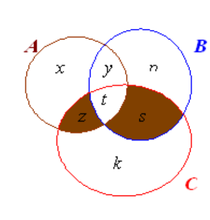
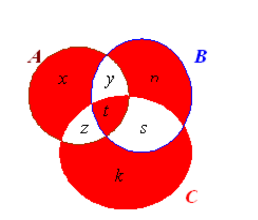
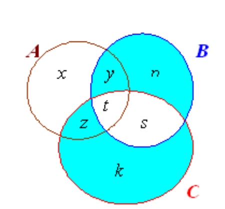
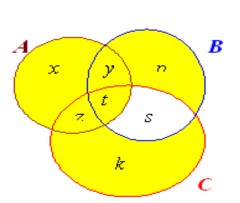
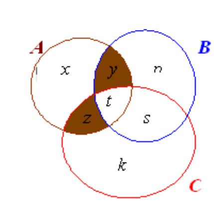
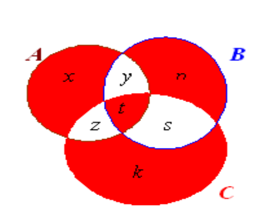
$(A\div B)\setminus C=\{x,p\}$ i $C\setminus(A\div B)=\{k,t\}$,

więc $(A\div B)\div C=\{x,p,k,t\}$

$A\setminus(B\div C)=\{x,t\}$ i $(B\div C)\setminus A=\{p,k\}$

zatem $A\div(B\div C)=\{x,t,p,k\}$

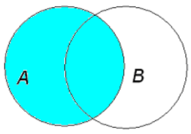
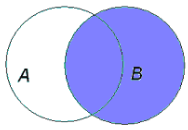
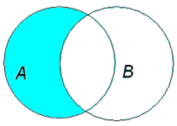
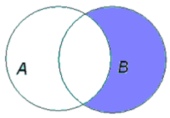
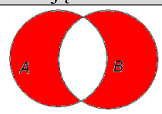
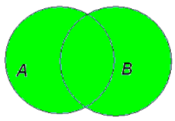
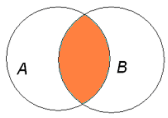
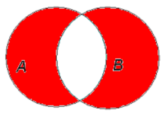
Co zauważyłeś? $(A\div B)\div C=\{x,p,k,t\}$ i $A\div(B\div C)=\{x,t,p,k\}$ więc (A÷B)÷C = A÷(B÷C)[67]

Wyznaczanie zbioru (A÷B)÷C			
			
A÷B	(A÷B)∪C	(A÷B)∩C	(A÷B)÷C
Wyznaczanie zbioru A÷(B÷C)			
 B÷C	 (B÷C)∪A	 (B÷C)∩A	 A÷(B÷C)

[66] *Diagram został wykonany w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*
[67] *Ilustracje graficzne zbiorów zostały wykonane w edytorze graficznym Paint przez Helenę Ewert – Fechner*

Sprawdź, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi równość: $A \div B = (A \cup B)(A \cap B)$

$A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Dane zbiory A i B		
 Zbiór A	 Zbiór B	
Różnica symetryczna zbiorów A i B wyznaczona zgodnie z przyjętą definicją		
 A\B	 B\A	 (A\B)∪(B\A)=A÷B
Różnica sumy zbiorów A i B oraz iloczynu zbiorów A i B		
 A∪B	 B∩A	 A∪B)\(B∩A)

Wniosek: (A\B)∪(B\A)=A÷B=(A∪B)\(B∩A)

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Etapy rozwiązania	2
B	Sprawdzenie równości na diagramie	1
C	Wyznaczenie różnicy symetrycznej danych zbiorów	2

Zadanie 9. Wyjątek obala hipotezę (2 punkty)

Odpowiedź:

```
    1 5 8 7 3
  -----------
  1 1 1 1 1 1 : 7
 -7
  ---
  4 1
 -3 5
  ---
    6 1
   -5 6
    ---
      5 1
     -4 9
      ---
        2 1
       -2 1
        ---
        = =
```

Nie jest prawdą, że:
„nie istnieje liczba postaci 111…11, w której zapisie występują same jedynki i która nie jest podzielna, przez 7”,
bo liczba 111111 jest podzielna przez 7.
Tak, więc liczba: 111111 jest iloczynem liczby 7 oraz liczby 15873, zatem dzieli się przez 7.

111111=7 x 15873.

W świetle powyższego zdanie:

„Żadna z liczb postaci 111…11,
w której zapisie występują same jedynki, nie jest podzielna przez 7”

jest fałszywe

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Znalezienie liczby postaci 111…11, która dzieli się przez 7	1
B	Podanie wniosku	1

Zadanie 10. Zadanie ze smokiem (5 punktów)

Rozwiązanie:
Załóżmy, że do zabicia smoka potrzeba:
x – cięć po 33 głowy,
y – cięć po 21 głów,
z – cięć po 17 głów oraz
t – cięć po 1 głowie.

Ilość			Przyrost głów
Cięć	Ucinanych głów	Odrastających głów	po dokonaniu cięcia
x	33	48	33-48
y	21	0	21-0
z	17	14	17-14
t	1	349	1-349

Smok będzie zabity, gdy dla pewnych $x, y, z, t \in N$ zajdzie równość:
$2000-[(33-48)x+(21-0)y+(17-14)z+(1-349)t]=0$ (*)

Po wykonaniu działań otrzymujemy równanie:
$3(-5x+7y+z-116t)=2000$,
które jest sprzeczne, gdyż lewa strona jest podzielna przez 3 a prawa nie.

Odpowiedź:

Rycerz nie może zabić smoka, bo równość (*) jest sprzeczna.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wprowadzenie oznaczeń	1
B	Ułożenie równania	2
C	Uzasadnienie, że równanie jest sprzeczne i udzielenie odpowiedzi	2

Zadanie 11. Zadanie dla przyszłych policjantów (4 punkty)

Intuicyjnie można powiedzieć, że należy wierzyć naocznemu świadkowi.
Przyjrzyjmy się jednak, jak ta sprawa wygląda od strony matematycznej.
Otóż możliwe są cztery sytuacje:
1. Świadek zeznał, że taksówka była czarna i rzeczywiście tak było.
2. Świadek zeznał, że taksówka była czarna, lecz się pomylił (w rzeczywistości była niebieska).
3. Świadek zeznał, że taksówka była niebieska i rzeczywiście tak było.
4. Świadek zeznał, że taksówka była niebieska, lecz się pomylił (w rzeczywistości była czarna).

Zestawmy, więc wszystkie sytuacje w tabelce:

	Świadek się myli (20% = 0,2)	Świadek nie myli się (80% = 0,8)
Taksówka była czarna (85% = 0,85)	0,2 * 0,85 = 0,17	0,8 * 0,85 = 0,68
Taksówka była niebieska (15% = 0,15)	0,2 * 0,15 = 0,03	0,8 * 0,15 = 0,12

Z treści zadania wynika,
że interesują nas wyniki w komórkach wypełnionych na zielono (sytuacje 3 i 4).
Sąd powinien w tym momencie dobrze zastanowić się nad swoim werdyktem.
Co się, bowiem okazuje?

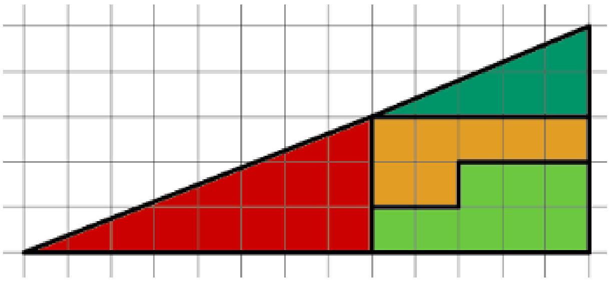
Szanse, że staruszek miał rację wynoszą: $12:17=\frac{12}{17}$, co odpowiada wartości około 41%.

Prawdopodobieństwo tego, że się pomylił wynosi natomiast 59%.
Dla wszystkich przyszłych sędziów:
Opieranie się w tej sytuacji tylko na zeznaniach świadka, może spowodować ukaranie niewinnej osoby.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zestawienie danych informacji	1
B	Analiza danych	1
C	Oszacowanie wiarygodności świadka	2

Zadanie 12. Znikający kwadrat (4 punkty)



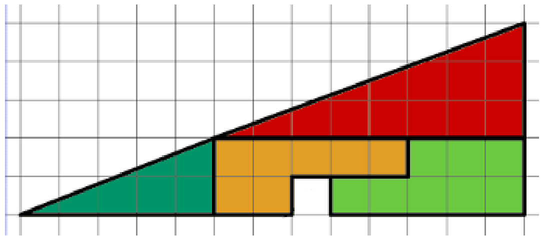
Przeciwprostokątna trójkąta poniżej nie jest linią prostą. Łamie się w punkcie zetknięcia czerwonego trójkąta z turkusowym. Wygląda ona na prostą, lecz jest to złudzenie. Można to udowodnić (i zobaczyć) w prosty sposób:

za pomocą pióra i zeszytu w kratkę.

Zaznaczmy w nim prostą, która pokrywa się z którąś z poziomych linii.

Zaznaczmy na tej prostej dowolny punkt na przecięciu się kratek.

Idąc od niego, odkładajmy przeciwprostokątną czerwonego trójkąta (na 7 kratek w bok idziemy o 3 do góry i tak do końca kartki).



Idąc od tego samego punktu w analogiczny sposób odłóżmy przeciwprostokątną turkusowego trójkąta (na 5 w bok idziemy 2 w górę.)

Widać, że linie się "rozchodzą" w miarę rysowania.

Potwierdza to tezę, że "przeciwprostokątna" dużego trójkąta jest w rzeczywistości łamaną.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Narysowanie trójkątów na papierze w kratkę lub rozcięcie danych trójkątów	2
B	Rozwiązanie problemu – wyjaśnienie, gdzie jest kwadracik	2

Pakiet edukacyjny M-1.3 „Liczę, więc jestem"

I. Treści merytoryczne:

- działania na liczbach rzeczywistych,
- działania na liczbach rzeczywistych postaci $a + b\sqrt{c}$,
- potęgi, pierwiastki,
- porównywanie liczb,
- wzory skróconego mnożenia,
- liczby trójkątne,
- systemy pozycyjne,
- dzielenie z resztą, nwd, nww,
- algorytm Euklidesa,
- średnie,
- twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności logicznego myślenia,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności analizy i syntezy,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności stosowania reguł wnioskowania,
- kształcenie umiejętności doboru modelu i narzędzia matematycznego do sytuacji problemowej,
- kształcenie umiejętności oceny wiarygodności danych.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.]Cewe A., Nahorska H., *Zbiór Zadań dla klasy 1. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk 2004
[2.]Cewe A., Krawczyk, M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R., *Matematyka w otaczającym nas świecie Klasa 1, Podręcznik dla klasy pierwszej kształcenie w zakresie rozszerzonym*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk 2004
[3.]Trzeciak M., Jankowska M., *Matematyka klasa 1 Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcących, liceum profilowanego i technikum Kształcenie w zakresie podstawowym*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2002
[4.] http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2004.html
[5.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2006.html

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

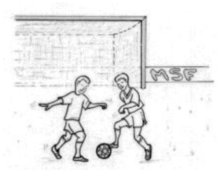
Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1.]Bobiński Z., Jarek P., Nodzyński P., Świątek A., Ustki M., *Matematyka z Wesołym Kangurem*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 1995
[2.]Cewe A., Nahorska H., *Zbiór Zadań dla klasy 1. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk 2004
[3.]Masłowska D., Masłowski T., Makowski A., Nodzyński P., Słowińska E., Strzelczyń A., *Zbiór zadań i testów maturalnych do obowiązkowej matur z matematyki (zgodnych ze standardami obowiązującymi od 2010 roku),* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2009
[4.]Trzeciak M., Jankowska M., *Matematyka klasa 1 Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcących, liceum profilowanego i technikum,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2002
[5.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2004.html
[6.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/zad_2005.html
[7.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2006.html
[8.]http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2007.html

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna**)**

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” – „Liczę, więc jestem”



Bonus – na rozgrzewkę[68]

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Warm-up Bonus Task Seeds of Victory (7 punktów)

Alan, Ben, Charles, Dennis and Eliot's football training session is over. Mr Small, who comes to get the children after their training, is being given the report by his son. *"I scored three goals less than Alan did; Charles three more than Dennis; Alan five less than Charles and Ben three more than I did."* Grade the children according to the number of goals they have scored. Justify.

Exercice Bonus – pour entraînement Les grains de la victoire (7 points)

Anatole, Barnabé, Charles, Denis et Emile ont fini leur entraînement de football. Monsieur Petit qui vient chercher les enfants après l’entraînement a droit au compte-rendu de son fils :« J’ai marqué trois buts de moins qu’Anatole ; Charles trois de plus que Denis ; Anatole cinq de moins que Charles et Barnabé trois de plus que moi. ». Classer les enfants selon le nombre de buts marqués. Justifier.

Tarea bonus – ejercicio de iniciación Los granos de la victoria (7 puntos)

Anatolio, Bernabé, Carlos, Dionisio y Emilio han acabado su entrenamiento de fútbol.
Don Pequeño quien viene a buscar a los niños después del entrenamiento escucha lo que le cuenta su hijo: "He apuntado tres goles menos que Anatolio; Carlos tres más que Dionisio; Anatolio cinco menos que Carlos y Bernabé tres más que yo." Clasifica a los niños segun el número de goles que han apuntado. Justifica.

Bonus-Aufgabe – zur Erwärmung Körnchen des Sieges (7 Punkte)

Anton, Bruno, Charly, Dennis und Emilio kommen vom Fußballtraining. Als Herr Klein die Kinder abholt, wird ihm von seinem Sohn Bericht erstattet: „Ich habe drei Tore weniger geschossen als Anton, Charly drei mehr als Dennis, und Anton fünf weniger als Charly. Bruno hat drei Tore mehr als ich geschossen.“ Bewerte die Kinder nach der Anzahl der geschossenen Tore. Begründe.

Esercizio Bonus – per riscaldare Acini della vittoria (7 punti)

Antonio, Bruno, Carlo, Dino ed Emilio hanno finito la loro partita di calcio.
Il signor Piccolo che è venuto a prendere i ragazzi dopo la partita ascolta il resoconto di suo figlio: “*Ho segnato tre reti meno di Antonio; Carlo ne ha segnate tre più di Dino; Antonio cinque meno di Carlo e Bruno tre più di me.*” Classificare i ragazzi in base al numero di reti segnate. Motivare la risposta.

[68] Zaczerpnięto z [5] - Zadania treningowe 2005; Zadanie 1

Zadanie 1. Cztery statki (3 punkty) [69]

Pewnego roku 10 marca rano, do portu w Gdańsku przybyły cztery statki.
Po południu tego samego dnia, wszystkie równocześnie opuściły port.

Pierwszy z nich powraca do Gdańska, co 4 tygodnie,
drugi - co 8 tygodni,
trzeci, – co 12 tygodni,
a czwarty, co 16 tygodni.

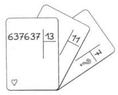
Czy wszystkie statki spotkały się w Gdańsku jeszcze raz w danym roku?

Zadanie 2. Mniej więcej (3 punkty) [70]

Wiedząc, że: $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$; $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$; $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$ **$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$**

Oszacuj wartość wyrażenia: $\dfrac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + \sqrt{7}}{10}$

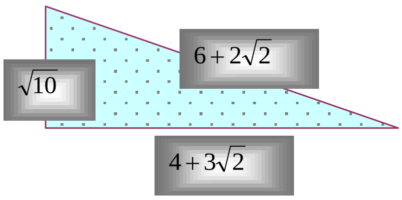
Zadanie 3. Z powrotem na start! (5 punktów) [71]



Wybierz jedną dowolną trzycyfrową liczbę.
Napisz ją dwa razy obok siebie, aby otrzymać jedną liczbę sześciocyfrową N.
Np. wybierasz 637, to otrzymujesz N=637637.
Podziel teraz liczbę N przez 13, wynik przez 11 i na końcu otrzymaną wartość jeszcze przez 7.
Wykonaj to dla różnych liczb trzycyfrowych.
Co zauważasz?
Zapisz swoje wnioski.

Zadanie 4. Prostokątny – tak czy nie? (3 punkty) [72]

Dany jest trójkąt o bokach: $\sqrt{10}$, $4 + 3\sqrt{2}$, $6 + 2\sqrt{2}$



[73]

Sprawdź czy ten trójkąt jest prostokątny?

---

[69] Zaczerpnięto z [1] - Zadanie 5.27, Strona 37
[70] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 56, Strona 25
[71] Zaczerpnięto z [3] - Zadania treningowe 2004; Zadanie 8
[72] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie 5.28 Strona 72
[73] *Ilustracje została wykonana w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" – „Liczę, więc jestem"

Bonus – na rozgrzewkę Ziarenka zwycięstwa [74] (7 punktów)

Alan, Ben, Charles, Dennis i Eliot zakończyli trening piłki nożnej. Pan Small, który przyszedł odebrać dzieci po treningu, usłyszał relację swojego syna. „Zdobyłem trzy gole mniej niż Alan, Charles trzy więcej niż Dennis. Alan pięć mniej niż Charles. Ben trzy więcej niż ja".

Uporządkuj dzieci wg liczby zdobytych goli. Uzasadnij.

Rozwiązanie:

Niech inicjał każdego dziecka oznacza ilość goli zdobytych przez to dziecko.

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A – liczba goli zdobytych przez Alana C – liczba goli zdobytych przez Charles'a

B – liczba goli zdobytych przez Bena D – liczba goli zdobytych przez Dennisa

Przez N oznaczamy liczbę goli uzyskanych przez tego, który opowiada. Otrzymujemy więc następujące równości:

A = N+3 – „Zdobyłem trzy gole mniej niż Alan"; C = D+3 – „Charles trzy więcej niż Dennis"

C = A+5 – „Alan pięć mniej niż Charles"; B = N+3 – „Ben trzy więcej niż ja"

Na ich podstawie można wywnioskować, że opowiada Eliot. Zatem zgodnie z przyjętymi oznaczeniami:

E – liczba goli, które zdobył Eliot i N liczba goli zdobytych przez opowiadającego, więc $E = N$

$A = N + 3 \Rightarrow N < A$ i $E = N$,

więc $E < A$ i $(A = N + 3) \wedge (B = N + 3) \Rightarrow (A = B)$

$[(C = D + 3) \wedge (C = A + 5)] \Rightarrow D + 3 = A + 5 \Rightarrow D = A + 2 \Rightarrow D > A$,

czyli $A = B < D$

$(C = D + 3) \Rightarrow C > D$

Uwzględniając powyższe porównania otrzymujemy następującą klasyfikację: $E < A = B < D < C$

Odpowiedź:

Najwięcej goli zdobył Charles – pierwsze miejsce. Drugie miejsce uzyskał Dennis. Trzecie miejsce - Ben i Alan. Czwarte miejsce Eliot

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Porównania, wnioskowanie, uporządkowanie wg liczby zdobytych goli	3
C	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

[74] Zaczerpnięto z [5] - Zadania treningowe 2005; Zadanie 1

Warm-up Bonus Task Seeds of Victory (7 punktów)

Let each child's initial means the number of goals scored by that child. The following symbols are acceptable:

A - number of goals scored by Alan B - number of goals scored by Ben

C - number of goals scored by Charles D- number of goals scored by Dennis

N stands for the number of goals scored by the child who tells the story. Thus, we obtain the following equations: A = N + 3 – "I scored three goals fewer than Alan";

C = D + 3 – "Charles scored three more goals than Dennis"

C = A + 5 – "Alan scored five goals fewer than Charles";

B = N + 3 – "Ben scored three more goals than I did"

On the basis of this it can be deduced that it is Eliot who is telling the story. Thus, in accordance with accepted symbolism: E – the number of goals scored by Eliot and N - the number of goals scored by the narrator, so $E = N$

$A = N + 3 \Rightarrow N < A$ and $E = N$ so $E < A$ and $(A = N + 3) \wedge (B = N + 3) \Rightarrow (A = B)$

$[(C = D + 3) \wedge (C = A + 5)] \Rightarrow D + 3 = A + 5 \Rightarrow D = A + 2 \Rightarrow D > A$, that is $A = B < D$

$(C = D + 3) \Rightarrow C > D$ Taking into account the above equations, we obtain the following classification: $E < A = B < D < C$

Answer:

Charles scored the highest number of goals - first place.
Dennis - second place.
Third Place - Ben and Alan

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Writing the Polish translation	2
B	Comparison, conclusion, ordering by the number of acquired goals	3
C	Writing the solution in a foreign language	2

Exercice Bonus – pour entraînement Les grains de la victoire (7 points)

Que l'initiale de chaque enfant signifie le nombre de buts marqués par cet enfant. On admet les significations suivantes :

A- le nombre de buts marqués par Alan
B- le nombre de buts marqués par Ben
C- le nombre de buts marqués par Charles
D- le nombre de buts marqués par Dennis

N va signifier le nombre de buts marqués par celui qui fait le compte-rendu. On obtient alors des égalités suivantes:
A = N+3 – „J'ai marqué trois buts de moins que Alan"; C = D+3 – „Charles trois de plus que Dennis"
C = A+5 – „Alan cinq de moins que Charles"; B = N+3 – „Ben trois de plus que moi"
Sur ces bases on peut conclure que celui qui fait le compte-rendu c'est Eliot. Alors, conformement aux significations admises :
E – le nombre de buts marqués par Eliot et N le nombre de buts marqués par celui qui fait le compte-rendu, alors $E = N$
$A = N + 3 \Rightarrow N < A$ i $E = N$, alors $E < A$ i $(A = N + 3) \wedge (B = N + 3) \Rightarrow (A = B)$
$[(C = D + 3) \wedge (C = A + 5)] \Rightarrow D + 3 = A + 5 \Rightarrow D = A + 2 \Rightarrow D > A$, czyli $A = B < D$;
$(C = D + 3) \Rightarrow C > D$
En prenant en considération des comparaisons ci-dessus, on obtient la classification suivante :
$E < A = B < D < C$
La réponse:

Le plus de buts a marqué Charles – le premier prix.
Le deuxième prix a remporté Dennis.
Le troisième prix - Ben i Alan. Le quatrième prix Eliot

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Comparaisons, induction, mise en ordre d'après le nombre de buts marqués	3
C	Inscription de la solution en langue étrangère	2

Tarea bonus – ejercicio de iniciación Los granos de la victoria (7 puntos)

Que la letra inicial de cada chico significa el número de goles marcados por él. Proponemos las siguientes equivalencias:

A – el número de goles apuntados por Alan B - el número de goles apuntados por Ben
C - el número de goles apuntados por Charles D - el número de goles apuntados por Dennis

N - el número de goles apuntados por este chico que está contando. Obtenemos las siguientes ecuaciones:
A = N+3 – "He apuntado tres goles menos que Alan"; C = D+3 – "Charles tres goles más que Dennis".
C = A+5 – "Alan cinco goles menos que Charles"; B = N+3 – "Ben tres goles más que yo".
Basándonos en esto, se puede concluir quien lo está contando es Eliot. Entonces, conforme a las siguientes equivalencias:
E – el número de goles marcados por Eliot N - el número de goles anotados por el chico que lo relata, entonces: *E=N*
$A = N+3 \Rightarrow N < A$ i $E = N$, entonces $E < A$ i $(A = N+3) \wedge (B = N+3) \Rightarrow (A = B)$;
$[(C = D+3) \wedge (C = A+5)] \Rightarrow D+3 = A+5 \Rightarrow D = A+2 \Rightarrow D > A$, entonces $A = B < D$;
$(C = D+3) \Rightarrow C > D$. En consideración a las ecuaciones marcadas, obtenemos la siguiente clasificación: $E < A = B < D < C$.

Solución:

El que más goles ha metido Charles – primer premio.
El segundo premio lo ha obtenido Dennis.
El tercero premio – Ben e Alan; Cuatro – Eliot

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	2
B	Comparación, conclusión, poner en orden según el número de goles anotados	3
C	Escribir la solución en un idioma extranjero.	2

Bonus-Aufgabe – zur Erwärmung Körnchen des Sieges (7 Punkte)

Es sollte ein Initial von jedem Kind die Zahl von Toren, die dieses Kind geschossen hat, bedeuten.

Wir nehmen folgende Bezeichnungen an:

A – die Zahl der von Alan geschossenen Tore
B – die Zahl der von Ben geschossenen Tore
C – die Zahl der von Charles geschossenen Tore
D – die Zahl der von Dennis geschossenen Tore

Als N bezeichnen wir die Zahl von Toren, die von demjenigen, der erzählt, geschossen worden sind. Wir erhalten also folgende Gleichheiten:

A = N+3 – „Ich habe drei Tore weniger als Alan geschossen"; C = D+3 – „Charles drei mehr als Dennis"

C = A+5 – „Alan fünf weniger als Charles"; B = N+3 – „Ben drei mehr als ich"

Aufgrund dessen kann man einen Schluss ziehen, dass Eliot erzähle. Laut angenommenen Bezeichnungen:

E – die Zahl von Toren, die Eliot geschossen hat und N – die Zahl von Toren, die vom Erzählenden geschossen worden sind, also $E = N$.

$A = N+3 \Rightarrow N < A$ und $E = N$, also $E < A$ und $(A = N+3) \wedge (B = N+3) \Rightarrow (A = B)$

$[(C = D+3) \wedge (C = A+5)] \Rightarrow D+3 = A+5 \Rightarrow D = A+2 \Rightarrow D > A$, das heißt $A = B < D$;

$(C = D+3) \Rightarrow C > D$

Wir erhalten folgende Klassifizierung, indem wir die oben stehenden Vergleichungen berücksichtigen: $E < A = B < D < C$

Antwort:

Die meisten Tore hat Charles geschossen – der erste Platz.
Den zweiten Platz hat Dennis belegt.
Den dritten Platz - Ben und Alan. Den vierten Platz – Eliot

Punktwertung

Tätigkeitsnummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	2
B	Vergleichungen, Schlussfolgerungen, Anordnung nach Torenzahl	3
C	Lösungsaufschreibung in einer fremden Sprache	2

Esercizio Bonus – per riscaldare Acini della vittoria (7 punti)

Che l'iniziale del nome di ogni ragazzo significhi il numero di reti segnate da questo ragazzo. Ammettiamo le seguenti identificazioni:

A – numero di reti segnate da Antonio B – numero di reti segnate da Bruno
C – numero di reti segnate da Carlo D – numero di reti segnate da Dino

Con la lettera N identifichiamo il numero delle reti segnate dal ragazzo che racconta. Otteniamo dunque le seguenti uguaglianze :
A = N+3 – „ho segnato tre reti meno di Antonio"; C = D+3 – „Carlo ne ha segnate tre più di Dino"
C = A+5 – „Antonio cinque meno di Carlo"; B = N+3 – „Bruno tre più di me"
In base ad esse possiamo dedurre che racconta Emilio. Seguendo dunque le identificazioni ammesse:
E – numero delle reti che ha segnato Emilio ed N il numero delle reti segnate dal ragazzo che racconta, allora $E = N$
$A = N + 3 \Rightarrow N < A$ e $E = N$, allora $E < A$ e $(A = N + 3) \wedge (B = N + 3) \Rightarrow (A = B)$
$[(C = D + 3) \wedge (C = A + 5)] \Rightarrow D + 3 = A + 5 \Rightarrow D = A + 2 \Rightarrow D > A,$ cioè $A = B < D$;
$(C = D + 3) \Rightarrow C > D$
Tenendo in considerazione le comparazioni, otteniamo la seguente classificazione: $E < A = B < D < C$

Risposta:

Il più di reti ha segnato Carlo – primo posto.
Secondo posto ha preso Dino.
Il terzo posto – Bruno Ed Antonio. Il quarto posto Emilio

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in lingua polacca	2
B	Comparazioni, deduzioni, sistemazione secondo il numero delle reti segnate	3
C	Scrivere la soluzione In lingua straniera	2

Zadanie 1. Cztery statki (3 punkty)[75]

Niech *n* oznacza liczbę tygodni, po których wszystkie statki spotkają się w porcie.
Wtedy $n = NWW(4;8;12;16) = NWW(12;16) = 48$.
Wszystkie statki spotkają się po 48 tygodniach, czyli po $48 \cdot 7 = 336$ dniach.
10 marca jest 69 lub w roku przestępnym 70 dniem roku.
Zatem licząc od pierwszego stycznia wszystkie statki spotkają się w dniu o numerze: $69 + 336 = 405 > 365$ - *w roku zwykłym* (lub $70 + 336 = 406 > 366$ - *w roku przestępnym*) w każdym z przypadków numer dnia następnego spotkania wszystkich statków jest większy od liczby dni w roku, zatem wszystkie statki spotkają się w następnym roku.
Odpowiedź: Wszystkie statki w danym roku już się nie spotkały.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zauważenie, że liczba tygodni cyklu jest NWW	1
B	Wyznaczenie liczby dni i tygodni, które upłyną do następnego spotkania	1
C	Uzasadnienie i odpowiedź	1

[75] Zaczerpnięto z [1] - Zadanie 5.27, Strona 37

Zadanie 2. Mniej więcej (3 punkt)[76]

W oparciu o dane szacujemy poszczególne składniki licznika:

$$\left(1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8\right)\Rightarrow\left(2\cdot 1{,}7<2\sqrt{3}<2\cdot 1{,}8\right)\Rightarrow\left(3{,}4<2\sqrt{3}<3{,}6\right)\ (*)$$

$$\left(2{,}2<\sqrt{5}<2{,}3\right)\Rightarrow\left(-2{,}3<-\sqrt{5}<-2{,}2\right)\Rightarrow\left(-6{,}9<-3\sqrt{5}<-6{,}6\right)\ (**)$$

$$2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7\ \ (***)$$

Otrzymane nierówności $(*)$, $(**)$, $(***)$ zapisujemy w postaci układu: $1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8$

$$+\begin{cases}3{,}4<2\sqrt{3}<3{,}6\\ -6{,}9<-3\sqrt{5}<-6{,}6\\ 2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7\end{cases}$$

Nierówności układu dodajemy stronami:

$\left(3{,}4-6{,}9+2{,}6\right)<\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)<\left(3{,}6-6{,}6+2{,}7\right)$ i wykonujemy działania

$$-0{,}9<\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)<-0{,}3\ \left|\cdot\frac{1}{10}\right.$$

$$\frac{-0{,}9}{10}<\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{10}<\frac{-0{,}3}{10}\ \Rightarrow\ -0{,}09<\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{10}<-0{,}03$$

Odpowiedź:

Wartość wyrażenia $\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+\sqrt{7}}{10}$ należy do przedziału: $\left(-0{,}09;-0{,}03\right)$

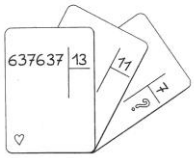
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Oszacowanie poszczególnych składników	1
B	Zapisanie układu nierówności i dodanie ich stronami	1
C	Obliczenia końcowe i odpowiedź	1

[76] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 56, Strona 25

Zadanie 3. Z powrotem na start![77] (5 punktów)

Przykłady – Obliczenia:



637 → 637637

$637637 : 13 = 49049$

$49049 : 11 = 4459$

$4459 : 7 = 637$

512 → 512512

$512512 : 13 = 39424$

$39424 : 11 = 3584$

$3584 : 7 = 512$

897 → 897897

$897897 : 13 = 69069$

$69069 : 11 = 6279$

$6279 : 7 = 897$

945 → 945945

$945945 : 13 = 72765$

$72765 : 11 = 6615$

$6615 : 7 = 945$

W każdym z tych przykładów po wykonaniu dzieleń:
Liczba sześciocyfrowa dzielona przez 13,
Otrzymany iloraz dzielony przez 11
Otrzymana wartość dzielona przez 7
W wyniku ostatniego dzielenia otrzymujemy liczbę trzycyfrową wybraną na początku.
Przykłady – rozwinięcie zapisu w systemie dziesiątkowym:

$637637 = 6 \cdot 100000 + 3 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 =$

$= 6 \cdot 100(1000 + 1) + 3 \cdot 10(1000 + 1) + 7 \cdot (1000 + 1) =$

$= 600 \cdot 1001 + 30 \cdot 1001 + 7 \cdot 1001 = 1001 \cdot (600 + 30 + 7) = 1001 \cdot 637$

ale $1001 = 13 \cdot 77 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, więc $637637 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 637$

$512512 = 5 \cdot 100000 + 1 \cdot 10000 + 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 =$

$= 5 \cdot 100(1000 + 1) + 1 \cdot 10(1000 + 1) + 2 \cdot (1000 + 1) =$

$= 500 \cdot 1001 + 10 \cdot 1001 + 2 \cdot 1001 = 1001 \cdot (500 + 10 + 2) = 1001 \cdot 512$

ale $1001 = 13 \cdot 77 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, więc $512512 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 512$

$897897 = 8 \cdot 100000 + 9 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 7 =$

$= 8 \cdot 100(1000 + 1) + 9 \cdot 10(1000 + 1) + 7 \cdot (1000 + 1) =$

$= 800 \cdot 1001 + 90 \cdot 1001 + 7 \cdot 1001 = 1001 \cdot (800 + 90 + 7) = 1001 \cdot 897$

ale $1001 = 13 \cdot 77 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, więc $897897 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 897$

$945945 = 9 \cdot 100000 + 4 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 =$

$= 9 \cdot 100(1000 + 1) + 4 \cdot 10(1000 + 1) + 5 \cdot (1000 + 1) =$

$= 900 \cdot 1001 + 40 \cdot 1001 + 5 \cdot 1001 = 1001 \cdot (900 + 40 + 5) = 1001 \cdot 945$ ale $1001 = 13 \cdot 77 = 13 \cdot 11 \cdot 7$,

więc $945945 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 945$

lub nieco inaczej: $945945 = 9 \cdot 100000 + 4 \cdot 10000 + 5 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 =$

$= 1000(9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5) + (9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5) =$

$= (9 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5) \cdot (1000 + 1) = 945 \cdot 1001$

ale $1001 = 13 \cdot 77 = 13 \cdot 11 \cdot 7$, więc $945945 = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 945$

[77] Zaczerpnięto z [3] - Zadania treningowe 2004; Zadanie 8

Przykłady – rozwinięcie zapisu mniej szczegółowe

$637637 = 637000 + 637 = 637 \cdot 1000 + 637 = 637 \cdot (1000 + 1) = 637 \cdot 1001 = 637 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$512512 = 512000 + 512 = 512 \cdot 1000 + 512 = 512 \cdot (1000 + 1) = 512 \cdot 1001 = 512 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$897897 = 897000 + 897 = 897 \cdot 1000 + 897 = 897 \cdot (1000 + 1) = 897 \cdot 1001 = 897 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$945945 = 945000 + 945 = 945 \cdot 1000 + 945 = 945 \cdot (1000 + 1) = 945 \cdot 1001 = 945 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

Uogólnienie: Niech:

a – oznacza cyfrę setek liczby trzycyfrowej

b – oznacza cyfrę dziesiątek liczby trzycyfrowej

c – oznacza cyfrę jedności liczby trzycyfrowej

$\overline{abc}$ - oznacza liczbę trzycyfrową

$\overline{abcabc}$ - oznacza liczbę sześciocyfrową N, otrzymaną przez napisanie dwa razy obok siebie liczby trzycyfrowej

$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c$

$\overline{abcabc} = 100000 \cdot a + 10000 \cdot b + 1000 \cdot c + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c =$

$= 1000 \cdot (100 \cdot a + 10 \cdot b + c) + 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = (100 \cdot a + 10 \cdot b + c)(1000 + 1) =$

$= 1001 \cdot (100 \cdot a + 10 \cdot b + c) = 1001 \cdot \overline{abc} = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot \overline{abc}$ lub

$\overline{abcabc} = \overline{abc}000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot (1000 + 1) = \overline{abc} \cdot 1001 = \overline{abc} \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

Wniosek:

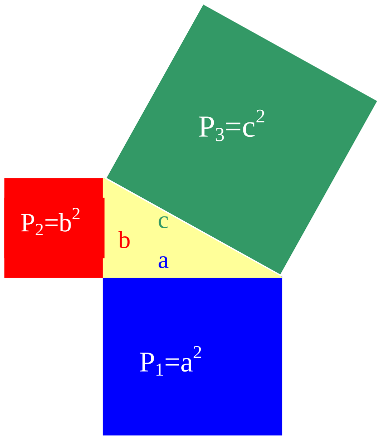
Dla dowolnej liczby trzycyfrowej $\overline{abc}$: otrzymujemy: $\overline{abcabc} = 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot \overline{abc}$, zatem $\overline{abcabc}$ jest podzielna przez każdą z liczb: $13; 11; 7; \overline{abc}$

Punktacja

L.p.	Etapy rozwiązania	Punkty
1	Podanie przykładów, wykonanie dzieleń	1
2	Stwierdzenie, że $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$	1
3	„Odkrycie”, że: $1001 \mid N$ -(Liczba N jest podzielna przez 1001)	2
4	Odpowiedź – zapisanie wniosku	1

Zadanie 4. Prostokątny – tak czy nie? (3 punkty)[78]

Przyjmujemy oznaczenia: $a=\sqrt{10}$; $b=4+3\sqrt{2}$; $c=6+2\sqrt{2}$[79]



$a=\sqrt{10}$, więc: $a^2=\left(\sqrt{10}\right)^2=10$

$b=4+3\sqrt{2}$, więc: $b^2=\left(4+3\sqrt{2}\right)^2=4^2+2\cdot4\cdot3\sqrt{2}+\left(3\sqrt{2}\right)^2$

$b^2=16+24\sqrt{2}+9\cdot2=16+18+24\sqrt{2}=34+24\sqrt{2}$

$c=6+2\sqrt{2}$, więc $c^2=\left(6+2\sqrt{2}\right)^2=6^2+2\cdot6\cdot2\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2$

$c^2=36+24\sqrt{2}+4\cdot2=36+8+24\sqrt{2}=44+24\sqrt{2}$

Zatem:

$$a^2+b^2=10+\left(34+24\sqrt{2}\right)=44+24\sqrt{2}$$

$$\text{i } c^2=44+24\sqrt{2}$$

$$\text{czyli: } a^2+b^2=c^2$$

Oznacza to, że w danym trójkącie suma kwadratów dwóch jego boków równa jest kwadratowi trzeciego boku, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt o bokach: $\sqrt{10}$, $4+3\sqrt{2}$, $6+2\sqrt{2}$ jest prostokątny.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Obliczenie kwadratów boków	1
B	Porównania sumy kwadratów dwóch boków z kwadratem trzeciego boku	1
C	Stwierdzenie, że na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa trójkąt o podanych bokach jest prostokątny	1

[78] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie 5.28 Strona 72

[79] *Ilustracja została wykonana w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" – „Liczę, więc jestem"

Zadanie 1[80]

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania podaj w wybranym wcześniej języku

Exercise 1. Defiant Omlette (7 points)

Maria wants to prepare a basket with the smallest number of eggs, but in such a way that:
if we remove two eggs each time, then one egg will remain in the basket,
if we remove 4 eggs each time, there will remain 3,
if we remove 6 each time, there will remain 5,
if we remove 3 eggs each time, there will remain 2,
if we remove 5 eggs each time, there will remain 4,
if we remove 7 each time, the basket will be empty.
Calculate how many eggs Maria should put in the basket? Explain your answer.

Exercice 1. Une omelette indocile (7 points)

Marie veut préparer un panier avec la moindre quantité d'oeufs qu'il soit possible, mais de la sorte que:
Si on sort les oeufs deux par deux, il restera un oeuf dans le panier,
Si on en sort 4 par 4, il en restera 3,
Si on en sort 6 par 6, il en restera 5,
Si on en sort 3 par 3, il en restera 2,
Si on en sort 5 par 5, il en restera 4,
Si on en sort 7 par 7, le panier deviendra vide.
Compte combien d'oeufs Marie doit mettre dans le panier ? Argumente ta réponse.

Tarea 1. Una Tortilla No Humilde (7 puntos)

María quiere preparar una cesta con el menor número de huevos posible, pero de manera que:
Si va a sacar de en dos, en la cesta quedará 1 huevo.
Si va a sacar de cuatro en cuatro, quedarán 3 huevos.
Si va a sacar de seis en seis, quedarán 5 huevos.
Si va a sacar de tres en tres, quedarán 2 huevos.
Si va a sacar de cinco en cinco, quedarán 4 huevos.
Si va a sacar de siete en siete, la cesta quedara vacía.
Calcula cuántos huevos tiene que meter María en la cesta. Justifica tu respuesta.

Aufgabe 1. Undemütige Omelette (7 Punkte)

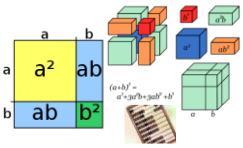
Marie will einen Korb mit einer möglichst kleinsten Eierzahl vorbereiten, aber auf diese Weise, dass:
wenn wir je zwei Eier herausnehmen, bleibt ein Ei im Korb,
wenn wir je 3 herausnehmen, bleiben 2,
wenn wir je 4 herausnehmen, bleiben 3,
wenn wir je 5 herausnehmen, bleiben 4,
wenn wir je 6 herausnehmen, bleiben 5,
wenn wir je 7 herausnehmen, wird der Korb leer sein.
Berechne, wie viele Eier Marie in den Korb hineinlegen soll? Begründe die Antwort.

[80] Zaczerpnięto z [8] - Zadania 2005; Zadanie 8

Esercizio 1. Omelette ribelle (7 punti)

Maria vuole preparare un cestino con delle quantità minime delle uova, ma in questo seguente modo che:
quando svuoteremo il cestino togliendo le ouva a due, nel cestino rimarrà un uovo,
quando prenderemo a 3, rimarranno 2,
quando prenderemo a 4, rimarranno 3,
quando prenderemo a 5, rimarranno 4,
quando prenderemo a 6, rimarranno 5,
quando prenderemo a 7, il cestino diventera vuoto.
Calcola quanti uova Maria dovrebbe mettere nel cestino? Giustifica la risposta.

Zadanie 2. Sprytne mnożenie (3 punkty)[81]



Zauważ, że:

$102^2 = (100+2)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 + 2^2 = 100000 + 400 + 4 = 10404$

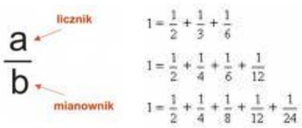
$97 \cdot 103 = (100-3) \cdot (100+3) = 100^2 - 3^2 = 10000 - 9 = 9991$

W podobny sposób oblicz:

a) 74^2 74^2
b) 97^2 97^2
c) 293^2
d) 899^2
e) $59 \cdot 61$
f) $87 \cdot 93$
g) $198 \cdot 202$
h) $596 \cdot 604$

[81] Zaczerpnięto z [1] - Zadanie 33 strona 22

Zadanie 3. Dodaj ułamki (5 punktów) [82]



Odejmij ułamki

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ |wspólnym mianownikiem tych ułamków jest. $n\cdot(n+1)$.

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$ |doprowadzamy ułamki do wspólnego mianownika

$=\frac{n+1}{n\cdot(n+1)}-\frac{n}{n\cdot(n+1)}=$ |wykonujemy odejmowanie ułamków o jednakowych mianownikach

$=\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}$

Otrzymaliśmy, więc: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ - równość, która jest prawdziwa dla wszystkich $n\in N_+$,

– *czyli tożsamość.*

Korzystając z tej tożsamości wartość sumy:

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots\frac{1}{1989\cdot 1990}+\frac{1}{1990\cdot 1991}$$

można obliczyć następująco:

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1989}-\frac{1}{1990}\right)+\left(\frac{1}{1990}-\frac{1}{1991}\right).$$

Zauważamy, że w każdej parze kolejnych nawiasów tej sumy redukują się ułamki:

Drugi ułamek z pierwszego nawiasu z pierwszym ułamkiem nawiasu drugiego nawiasu.

Otrzymujemy, że $S=1-\frac{1}{1991}=\frac{1990}{1991}$

Zadanie dla Ciebie:

Oblicz wartość sumy:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}$

b) $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2009\cdot 2010}$?

Zadanie 4. Palindromy… (5 punktów) [83]

1991 jest liczbą palindromiczną, tzn. może być czytana z lewa na prawo i odwrotnie.

Ile jest liczb palindromicznych trzycyfrowych, które są jednocześnie kwadratami liczb całkowitych?

W jakich latach najbliższych bieżącemu rokowi zapis roku:

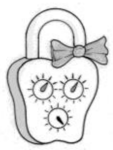
Był liczbą palindromiczną?

Będzie liczbą palindromiczną?

[82] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 19 strona 41

[83] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 25 strona 43

Zadanie 5. Właściwa kombinacja (5 punktów) [84]



Martyna jest bardzo zakłopotana, ponieważ zapomniała szyfru otwierającego jej kłódkę.
Zamek szyfrowy składa się z trzech tarczy,
a każdą z nich można ustawić na jednej z 12 pozycji.
Aby otworzyć kłódkę, Martyna decyduje sprawdzać metodycznie każdą kombinację:

0-0-0;	0-0-11;	0-1-11;
0-0-1;	0-1-0;	0-2-0 ;
0-0-2;	0-1-1;	… itd.
…	…	

Na sprawdzenie każdej z nich potrzeba 1s.
Po upływie 16 min 45 s, kłódka została wreszcie otwarta!
Jaki był szyfr otwierający kłódkę ?Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Dziewięćsił (5 punktów) [85]

Sumę cyfr liczby $N = 10^{92} - 92$ obliczamy następująco:

	1	0	0	…	0	0	0
-						9	2
N=		9	9	…	9	0	8

$10^{92} = 1\underbrace{00...00}_{92\,zera}$, stąd $N = 1\underbrace{00...000}_{92\,zera} - 92 = \underbrace{99...908}_{92\,cyfry}$,

czyli do zapisu tej liczby potrzeba 90 dziewiątek, zero i osiem, zatem suma cyfr jej cyfr jest równa:
$(90 \cdot 9 + 0 + 8) = 818$

	8	1	0
			0
			8
	8	1	8

Można również obliczać:
$$N = 10^{92} - 92 = (10^{92} - 1) - 91 = \underbrace{999...999}_{92\,cyfry} - 91 = \underbrace{999...908}_{90\,cyfr}$$

czyli suma jej cyfr wynosi: $(90 \cdot 9 + 0 + 8) = 818$.

Jaka jest suma cyfr liczby $L = 10^{2009} - 2009$, a jaka liczby $M = 10^{2010} - 2010$?

Zadanie 7. Trzy pociągi (3 punkty) [86]

W trzech pociągach znajduje się odpowiednio: 462, 546 i 630 pasażerów. Z ilu wagonów składa się każdy pociąg, jeżeli w każdym wagonie jest taka sama liczba osób (największa z możliwych)?

Zadanie 8. Wycieczka (3 punkty) [87]

Na wycieczkę pojechało 21 osób o średniej wieku 23 lata. Średnia ta wzrośnie do 24 lat, jeśli doliczy się wiek przewodnika. Ile lat ma przewodnik?

[84] Zaczerpnięto z [3] - Zadania treningowe 2005; zadanie 5
[85] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 16 strona 17 oraz z [4] - Zadania treningowe 2006 – zadanie 4
[86] Zaczerpnięto z [5] - Zadanie 5.26, Strona 37
[87] Zaczerpnięto z [6] - Zadanie 1, Strona 78

Zadanie 9. Liczba uczniów liceum (3 punkty)[88]

Liczba uczniów pewnego liceum zawarta jest między 500 a 1000.
Kiedy grupujemy ich po 18, bądź po 20, bądź po 24, pozostaje za każdym razem po dziewięciu uczniów. Jak jest liczba uczniów?

Zadanie 10. Studia w Pisa (3 punkty)[89]

Pewien człowiek miał trzy chleby, a jego towarzysz dwa. Idąc różnymi drogami spotkali się przy źródle i tam usiedli, żeby zjeść posiłek. Obok nich przechodził żołnierz, a oni zaproponowali mu by zjadł z nimi. Żołnierz usiadł i podróżni podzielili się chlebem w równych częściach. Kiedy zjedli wszystkie chleby, żołnierz zostawił im w podzięce 5 monet.
Jeden podróżny wziął 3 monety, ponieważ przyniósł 3 chleby, a drugi 2 monety, ponieważ przyniósł 2 chleby. Czy podział był sprawiedliwy? Jeżeli nie, zaproponuj podział bardziej sprawiedliwy. Odpowiedź uzasadnij.
(Leonardo z Pisy: De duobus hominibus panes habentibus… Dwoje ludzi chleb mając...)

Zadanie 11. Dwa trójkąty za jeden kwadrat (4 punkty)[90]

Liczba trójkątna o n-tym numerze jest sumą n kolejnych liczb naturalnych. Kolejne liczby trójkątne i ich geometryczna ilustracja:

$T_1 = 1$

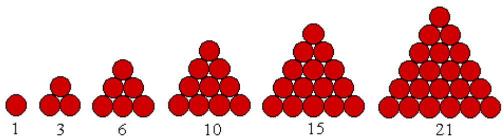
$T_2 = 1+2 = 3$

$T_3 = 1+2+3 = 6$

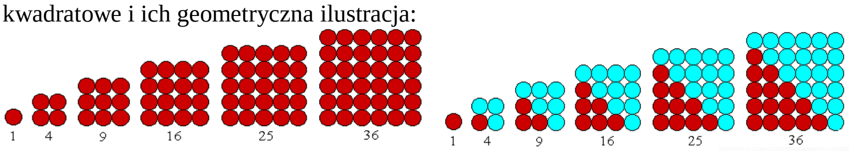
$T_4 = 1+2+3+4 = 10$

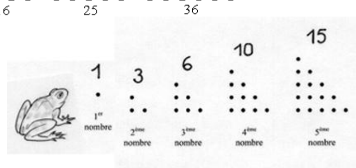
…

$T_n = 1+2+3+4+5+...+n$



Liczby kwadratowe
Liczby kwadratowe są kwadratami kolejnych liczb naturalnych $K_n = n^2$. Kolejne liczby kwadratowe i ich geometryczna ilustracja:





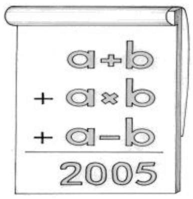
Na rysunku obok przedstawiono pięć pierwszych liczb trójkątnych.

Zadanie dla Ciebie:
Wykaż na rysunku lub obliczając, na trzech przykładach, że:
„suma dwóch kolejnych liczb trójkątnych jest kwadratem pewnej liczby.”
Załóż, że ta reguła jest prawdziwa dla wszystkich liczb trójkątnych i oblicz 2010 liczbę trójkątną.

---

[88] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 21 strona 24
[89] Zaczerpnięto z [7] - Zadania treningowe 2004 – zadanie 10
[90] Zaczerpnięto z [8]- Zadania 2005, zadanie 11

Zadanie 12. Rachunek elementarny (4 punkty)[91]



Znaleźć dwie liczby naturalne dodatnie a i b, gdzie a jest większe lub równe b, takie, że gdy dodamy do siebie ich sumę, iloczyn i różnicę to otrzymamy

a) 2005
b) 2009

Można rozwiązać następująco:

Ad a)

$[(a+b)+(a\cdot b)+(a-b)=2005] \Leftrightarrow \quad [a+b+a\cdot b+a-b=2005]$

$\Leftrightarrow 2a+a\cdot b=2005 \Leftrightarrow a\cdot(b+2)=2005$

Jedynymi dzielnikami 2005 są: 1; 5; 401 ; 2005
czyli 2005 można zapisać w postaci iloczynu na dwa sposoby:
I. $2005=1\cdot 2005$ lub II. $2005=5\cdot 401$
I. Ponieważ: $a>b>0$, a z rozkładu $1\cdot 2005$

otrzymujemy: $\begin{cases} a=2005 \\ b+2=1 \end{cases}$,

czyli $b=-1$ co jest sprzeczne z założeniem $b>0$

to jedynym rozwiązaniem jest: $\begin{cases} a=401 \\ b+2=5 \end{cases}$ stąd $\begin{cases} a=401 \\ b=3 \end{cases}$.

Sprawdzenie rozwiązania:

a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	404
401	3	404	1203	398	a*b	1203
					a-b	398
					Suma:	**2005**

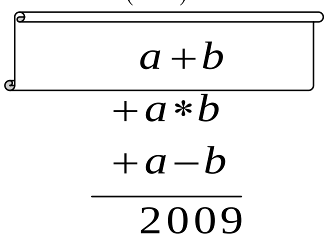
Odpowiedź: Liczby spełniające warunek zadania to: $a=401$ i $b=3$

ad b)

$(a+b)+a\cdot b+(a-b)=2009 \Leftrightarrow a+b+a\cdot b+a-b=2009 \Leftrightarrow 2a+a\cdot b=2009 \Leftrightarrow a\cdot(2+b)=2009$

Rozkład 2009 na czynniki pierwsze jest następujący:

$$\begin{array}{r|l} 2009 & 7 \\ 287 & 7 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$



Z powyższego rozkładu wynika, że jedynymi dzielnikami 2009 są:
1; 7; 41; 49; 287; 2009.
Zatem rozkłady liczby 2009 na dwa czynniki są następujące:

I. $2009=1\cdot 2009$
II. $2009=7\cdot 287$
III. $2009=41\cdot 49$

Ponieważ: $a>b>0$, to:

Z **I** otrzymujemy: $a\cdot(b+2)=1\cdot 2009 \Leftrightarrow \begin{cases} a=2009 \\ b+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2009 \\ b=-1 \end{cases}$; ale $b=-1$ jest sprzeczne z warunkiem $b>0$

[91] Zaczerpnięto z [3] - Zadania treningowe 2005; Zadanie 11

Z **II** otrzymujemy: $a\cdot(b+2)=7\cdot 287 \Leftrightarrow \begin{cases} a=287 \\ b+2=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=287 \\ b=5 \end{cases}$, więc: $a=287$ i $b=5$

Z rozkładu **III** otrzymujemy $a\cdot(b+2)=41\cdot 49 \Leftrightarrow \begin{cases} a=49 \\ b+2=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=49 \\ b=39 \end{cases}$ więc $a=49$ i $b=39$

Sprawdzenie rozwiązań:

a	**b**	**a+b**	**a*b**	**a-b**
287	5	292	1435	282

a+b	292
a*b	1435
a-b	282
Suma:	**2009**

a	**b**	**a+b**	**a*b**	**a-b**
49	39	88	1911	10

a+b	88
a*b	1911
a-b	10
Suma:	**2009**

Odpowiedź:

Liczby spełniające warunek zadania to: $(a = 49\ i\ b = 5)$ oraz $(a = 49\ i\ b = 39)$

Zadanie dla Ciebie:

Sprawdź czy istnieją takie liczby naturalne a i b, gdzie: a jest większe lub równe b, takie, że gdy dodamy do siebie ich sumę, iloczyn i różnicę to otrzymamy 2010?

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" - „Liczę, więc jestem"

Zadanie 1. Niepokorny omlet[92] (7 punktów)

Maria chce przygotować koszyk z jak najmniejszą ilością jajek, ale w taki sposób, że: jeśli będziemy wyjmować jajka po dwa, to w koszyku zostanie jedno jajko, jeśli wyjmiemy je po 3, zostaną 2, jeśli wyjmiemy je po 4, zostaną 3, jeśli wyjmiemy je po 5, zostaną 4, jeśli wyjmiemy je po 6, zostaną 5, jeśli wyjmiemy je po 7, koszyk będzie pusty.
Oblicz ile jajek Maria powinna włożyć do koszyka? Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:
N - zbiór liczb naturalnych ; Niech n oznacza szukaną liczbę jajek w koszyku.
Wtedy:
$n = 2k_1 + 1$; gdzie $k_1 \in N$, bo jeśli wyjmujemy po 2 jajka, to w koszyku zostanie 1 jajko
$n = 3k_2 + 2$; gdzie $k_2 \in N$, bo jeśli wyjmujemy po 3 jajka, to w koszyku zostaną 2 jajka
$n = 4k_3 + 3$; gdzie $k_3 \in N$, bo jeśli wyjmujemy po 4 jajka, to w koszyku zostaną 3 jajka
$n = 5k_4 + 4$; gdzie $k_4 \in N$, bo jeśli wyjmujemy po 5 jajek, to w koszyku zostaną 4 jajka
$n = 6k_5 + 5$; gdzie $k_5 \in N$, bo jeśli wyjmujemy po 6 jajek, to w koszyku zostanie 5 jajek
$n = 7k_6$; gdzie $k_6 \in N$, bo jeśli wyjmiemy po 7 jajek, to koszyk będzie pusty
$n = 2k_1 + 1 \Leftrightarrow n+1 = 2k_1 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 2\cdot(k_1+1)$ czyli $(n+1)$ dzieli się przez 2
$n = 3k_2 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 3k_2 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 3\cdot(k_2+1)$ czyli $(n+1)$ dzieli się przez 3
$n = 4k_3 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 4k_3 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 4\cdot(k_3+1)$ czyli $(n+1)$ dzieli się przez 4
$n = 5k_4 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 5k_4 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 5\cdot(k_4+1)$ czyli $(n+1)$ dzieli się przez 5
$n = 6k_5 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 6k_5 + 6 \Leftrightarrow n+1 = 6\cdot(k_5+1)$ czyli $(n+1)$ dzieli się przez 6
[$(n+1)$ dzieli się przez 2 i $(n+1)$ dzieli się przez 3 i $(n+1)$ dzieli się przez 4 i $(n+1)$ dzieli się przez 5 i $(n+1)$ dzieli się przez 6] $\Leftrightarrow$ $(n+1)$ dzieli się przez $NWW(2;3;4;5;6) = 60$ i $n = 7k_6$ czyli n dzieli się przez 7, co oznacza, że n musi być wielokrotnością 7 i $n+1$ musi być wielokrotnością 60. Najmniejsza liczba całkowita spełniająca te dwa warunki to 119.
Sprawdzenie: $119 : 2 = 59\ \textit{reszty}\ 1$ zatem $119 = 2\cdot 59 + 1$; $119 : 3 = 39\ \textit{reszty}\ 2$ zatem $119 = 3\cdot 39 + 2$; $119 : 4 = 29\ \textit{reszty}\ 3$ zatem $119 = 4\cdot 29 + 3$; $119 : 5 = 23\ \textit{reszty}\ 4$ zatem $119 = 5\cdot 23 + 4$; $119 : 6 = 19\ \textit{reszty}\ 5$ zatem $119 = 6\cdot 19 + 5$; $119 : 7 = 17$ zatem $119 = 7\cdot 17$

Odpowiedź: Maria powinna włożyć do koszyka 119 jajek.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Stwierdzenie podzielności n (liczby jajek) przez 7	1
C	Stwierdzenie, że n+1 musi dzielić się przez NWW(2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) = 60	1
D	Znalezienie najmniejszej liczby n spełniającej warunki	1
E	Sprawdzenie otrzymanego wyniku i udzielenie odpowiedzi	1
F	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

[92] Zaczerpnięto z [8] - Zadania 2005; Zadanie 8

Exercise 1. Defiant Omlette (7 points)

N - a set of natural numbers, Let n mean the sought number of eggs in the basket. Then:
$n = 2k_1 + 1$; where $k_1 \in N$, because if we remove 2 eggs each time, there will remain 1 egg in the basket
$n = 3k_2 + 2$; where $k_2 \in N$, because if we remove 3 eggs each time, there will remain 2 eggs in the basket
$n = 4k_3 + 3$; where $k_3 \in N$, because if we remove 4 eggs each time, there will remain 3 eggs in the basket
$n = 5k_4 + 4$; where $k_4 \in N$, because if we remove 5 eggs each time, there will remain 4 eggs in the basket
$n = 6k_5 + 5$; where $k_5 \in N$, because if we remove 6 eggs each time, there will remain 5 eggs in the basket
$n = 7k_6$; where $k_6 \in N$, because if we remove 7 eggs each time, the basket will be empty
$n = 2k_1 + 1 \Leftrightarrow n + 1 = 2k_1 + 2 \Leftrightarrow n + 1 = 2 \cdot (k_1 + 1)$ that is, $(n+1)$ divides by 2
$n = 3k_2 + 2 \Leftrightarrow n + 1 = 3k_2 + 3 \Leftrightarrow n + 1 = 3 \cdot (k_2 + 1)$ that is, $(n+1)$ divides by 3
$n = 4k_3 + 3 \Leftrightarrow n + 1 = 4k_3 + 4 \Leftrightarrow n + 1 = 4 \cdot (k_3 + 1)$ that is, $(n+1)$ divides by 4
$n = 5k_4 + 4 \Leftrightarrow n + 1 = 5k_4 + 5 \Leftrightarrow n + 1 = 5 \cdot (k_4 + 1)$ that is, $(n+1)$ divides by 5
$n = 6k_5 + 5 \Leftrightarrow n + 1 = 6k_5 + 6 \Leftrightarrow n + 1 = 6 \cdot (k_5 + 1)$ that is, $(n+1)$ divides by 6
[$(n+1)$divides by 2 and $(n+1)$ divides by 3 and $(n+1)$ divides by 4 and$(n+1)$ divides by 5 and$(n+1)$ divides by 6] $\Leftrightarrow (n+1)$ divides by $NWW(2;3;4;5;6) = 60$ and $n = 7k_6$ or n divides by 7, which means that n must be a multiple of 7, and $n+1$ must be a multiple of 60. The smallest number that fulfills these two conditions is 119. Verification:
$119 : 2 = 59$, the remainder is 1, therefore $119 = 2 \cdot 59 + 1$
$119 : 3 = 39$, the remainder is 2, therefore $119 = 3 \cdot 39 + 2$
$119 : 4 = 29$, the remainder is 3, therefore $119 = 4 \cdot 29 + 3$
$119 : 5 = 23$, the remainder is 4, therefore $119 = 5 \cdot 23 + 4$
$119 : 6 = 19$, the remainder is 1, therefore $119 = 6 \cdot 19 + 5$
$119 : 7 = 17$, therefore $119 = 7 \cdot 17$

Answer:

Mary should put 119 eggs in the basket.

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Writing the Polish translation	1
B	Stating that n (the number of eggs) divides by 7	1
C	Stating that n +1 should be divisible by NWW (2, 3, 4, 5, 6) = 60	1
D	Finding the smallest number n satisfying the conditions	1
E	Checking the result obtained and providing the answer	1
F	Writing the solution in a foreign language	2

Exercice 1. Une omelette indocile (7 points)

N – l'ensemble de nombres naturels ; Que n signifie la quantité recherchée d' oeufs dans le panier. Alors :

$n = 2k_1 + 1$; où $k_1 \in N$, car si on sort deux oeufs par deux, il restera 1 oeuf dans le panier

$n = 3k_2 + 2$; où $k_2 \in N$, car si on sort deux oeufs par deux, il restera 2 oeufs dans le panier

$n = 4k_3 + 3$; où $k_3 \in N$, car si on sort deux oeufs par deux, il restera 3 oeufs dans le panier

$n = 5k_4 + 4$; où $k_4 \in N$, car si on sort deux oeufs par deux, il restera 4 oeufs dans le panier

$n = 6k_5 + 5$; où $k_5 \in N$, car si on sort deux oeufs par deux, il restera 5 oeufs dans le panier

$n = 7k_6$; où $k_6 \in N$, car si on sort 7 oeufs par 7, le panier sera vide

$n = 2k_1 + 1 \Leftrightarrow n+1 = 2k_1 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 2\cdot(k_1+1)$ alors $(n+1)$ se divise par 2

$n = 3k_2 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 3k_2 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 3\cdot(k_2+1)$ alors $(n+1)$ se divise par 3

$n = 4k_3 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 4k_3 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 4\cdot(k_3+1)$ alors $(n+1)$ se divise par 4

$n = 5k_4 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 5k_4 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 5\cdot(k_4+1)$ alors $(n+1)$ se divise par 5

$n = 6k_5 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 6k_5 + 6 \Leftrightarrow n+1 = 6\cdot(k_5+1)$ alors $(n+1)$ se divise par 6

[$(n+1)$se divise par 2 i $(n+1)$ se divise par 3 i $(n+1)$ se divise par 4 et $(n+1)$ se divise par 5 et $(n+1)$ se divise par 6] $\Leftrightarrow (n+1)$ se divise par $NWW(2;3;4;5;6) = 60$ i $n = 7k_6$ alors n se divise par 7, ce qui signifie que n doit être le multiple de 7 et $n+1$ doit être le multiple de 60. Le moindre nombre entier remplissant ces deux conditions est 119. Vérification :

119 : 2 = 59 du reste, donc $119 = 2\cdot 59 + 1$ | 119 : 3 = 39 du reste, donc $119 = 3\cdot 39 + 2$
119 : 4 = 29 du reste, donc $119 = 4\cdot 29 + 3$ | 119 : 5 = 23 du reste, donc $119 = 5\cdot 23 + 4$
119 : 6 = 19 du reste, donc $119 = 6\cdot 19 + 5$ | $119 : 7 = 17$, donc $119 = 7\cdot 17$

La réponse:

Marie doit mettre dans le panier 119 oeufs.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduction en langue polonaise	1
B	Constatation de la divisibilité de n (quantité d'oeufs) par 7	1
C	Constatation que n+1 doit se diviser par NWW(2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) = 60	1
D	Trouver le plus petit nombre remplissant les conditions	1
E	Vérifier le résultat obtenu et donner la réponse	1
F	Inscription de la solution en langue étrangère	2

Tarea 1. Una Tortilla No Humilde (7 puntos)

N - El conjunto de los números naturales; Que n significa el numero buscando de huevos en la cesta. Entonces:

$n = 2k_1 + 1$; donde $k_1 \in N$, porque si sacamos de 2 en 2, en la cesta quedará 1 huevo.

$n = 3k_2 + 2$; donde $k_2 \in N$, porque si sacamos 3 en 3, en la cesta quedarán 2 huevos.

$n = 4k_3 + 3$; donde $k_3 \in N$, porque si sacamos 4 en 4, en la cesta quedarán 3 huevos.

$n = 5k_4 + 4$; donde $k_4 \in N$, porque si sacamos 5 en 5, en la cesta quedarán 4 huevos.

$n = 6k_5 + 5$; donde $k_5 \in N$, porque si sacamos 6 en 6, en la cesta quedarán 5 huevos.

$n = 7k_6$; donde $k_6 \in N$, porque si sacamos de 7 en 7 huevos, la cesta quedará vacía.

$n = 2k_1 + 1 \Leftrightarrow n+1 = 2k_1 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 2\cdot(k_1+1)$ es (quiere decir) $(n+1)$ se divide por 2

$n = 3k_2 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 3k_2 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 3\cdot(k_2+1)$ es $(n+1)$ se divide por 3

$n = 4k_3 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 4k_3 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 4\cdot(k_3+1)$ es $(n+1)$ se divide por 4

$n = 5k_4 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 5k_4 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 5\cdot(k_4+1)$ es $(n+1)$ se divide por 5

$n = 6k_5 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 6k_5 + 6 \Leftrightarrow n+1 = 6\cdot(k_5+1)$ es $(n+1)$ se divide por 6

[$(n+1)$ se divide por 2 i $(n+1)$ se divide por 3 i $(n+1)$ se divide por 4 i $(n+1)$ se divide por 5 i $(n+1)$ se divide por 6] $\Leftrightarrow (n+1)$ se divide por $NWW(2;3;4;5;6) = 60$ i $n = 7k_6$ entonces n se divide por 7, eso significa que n tiene que ser múltiplo de 7 i $n+1$ tiene que ser múltiplo de 60. El menor número entero que cumple estas dos condiciones es 119. Verificación :

$119 : 2 = 59$ *resta* 1, entonces $119 = 2\cdot 59 + 1$

$119 : 3 = 39$ *resta* 2, entonces $119 = 3\cdot 39 + 2$

$119 : 4 = 29$ *resta* 3, entonces $119 = 4\cdot 29 + 3$

$119 : 5 = 23$ *resta* 4, entonces $119 = 5\cdot 23 + 4$

$119 : 6 = 19$ *resta* 5, entonces $119 = 6\cdot 19 + 5$

$119 : 7 = 17$, entonces $119 = 7\cdot 17$

Respuesta:

María tiene que meter 119 huevos en la cesta.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Constatación de división n (el numero de los huevos) por 7	1
C	Constatación que n+1 se tiene que dividir por NWW(2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) = 60	1
D	Encontrar el número menor n que cumple las condiciones	1
E	Verificar el resultado y dar la respuesta correcta.	1
F	Escribir la solución en un idioma extranjero	2

Aufgabe 1. Undemütige Omelette (7 Punkte)

N - Menge von natürlichen Zahlen ; Bedeute n die gesuchte Eierzahl im Korb, dann:
$n = 2k_1 + 1$; wo $k_1 \in N$, denn wenn wir je 2 Eier herausnehmen, bleibt 1 Ei im Korb
$n = 3k_2 + 2$; wo $k_2 \in N$, denn wenn wir je 3 Eier herausnehmen, bleiben 2 Eier im Korb
$n = 4k_3 + 3$; wo $k_3 \in N$, denn wenn wir je 4 Eier herausnehmen, bleiben 3 Eier im Korb
$n = 5k_4 + 4$; wo $k_4 \in N$, denn wenn wir je 5 Eier herausnehmen, bleiben 4 Eier im Korb
$n = 6k_5 + 5$; wo $k_5 \in N$, denn wenn wir je 6 Eier herausnehmen, bleiben 5 Eier im Korb
$n = 7k_6$; wo $k_6 \in N$, denn wenn wir je 7 Eier herausnehmen, wird der Korb leer sein.
$n = 2k_1 + 1 \Leftrightarrow n+1 = 2k_1 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 2\cdot(k_1+1)$ das heißt $(n+1)$ wird durch 2 geteilt
$n = 3k_2 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 3k_2 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 3\cdot(k_2+1)$ das heißt $(n+1)$ wird durch 3 geteilt
$n = 4k_3 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 4k_3 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 4\cdot(k_3+1)$ das heißt $(n+1)$ wird durch 4 geteilt
$n = 5k_4 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 5k_4 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 5\cdot(k_4+1)$ das heißt $(n+1)$ wird durch 5 geteilt
$n = 6k_5 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 6k_5 + 6 \Leftrightarrow n+1 = 6\cdot(k_5+1)$ das heißt $(n+1)$ wird durch 6 geteilt
[$(n+1)$teilt man durch 2 i $(n+1)$ teilt man durch 3 und $(n+1)$ teilt man durch 4
und $(n+1)$ teilt man durch 5 und $(n+1)$ teilt man durch 6]
$\Leftrightarrow (n+1)$ teilt man durch $NWW(2;3;4;5;6) = 60$ i $n = 7k_6$ das heißt n teilt man durch 7,
was bedeutet, dass n eine Vielfache von 7 sein muss und $n+1$ eine Vielfache von 60 sein muss. Die kleinste, ganze Zahl, die diese zwei Bedingungen erfüllt, ist 119.
Nachrechnen :
$119 : 2 = 59$ des Restes 1 also $119 = 2\cdot 59 + 1$
$119 : 3 = 39$ des Restes 2 also $119 = 3\cdot 39 + 2$
$119 : 4 = 29$ des Restes 3 also $119 = 4\cdot 29 + 3$
$119 : 5 = 23$ des Restes 4 also $119 = 5\cdot 23 + 4$
$119 : 6 = 19$des Restes 5 also $119 = 6\cdot 19 + 5$
$119 : 7 = 17$ also $119 = 7\cdot 17$
Antwort:
Marie soll in den Korb 119 Eier hineinlegen.

Punktwertung

Tätigkeitsnummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	1
B	Feststellen der Dividualität von n (die Zahl von Eier) durch 7	1
C	Feststellen, dass n+1 durch NWW(2; 3; 4; 5; 6) = 60 geteilt werden muss	1
D	Finden der kleinsten n- Zahl, die die Bedingungen erfüllt	1
E	Nachrechnen des erhaltenen Ergebnisses und Antwort	1
F	Lösungsaufschreibung in einer fremden Sprache	2

Esercizio 1. Omelette ribelle (7 punti)

N - l'insieme dei numeri naturali; Che n significhi il numero cercato delle uova nel cestino. Allora:

$n = 2k_1 + 1$; dove $k_1 \in N$, perché se prendiamo le uova a 2, nel cestino rimane 1 uovo.

$n = 3k_2 + 2$; dove $k_2 \in N$, perché se prendiamo le uova a 3, nel cestino rimarranno 2 uova

$n = 4k_3 + 3$; dove $k_3 \in N$, perché se prendiamo le uova a 4, nel cestino rimarranno 3 uova

$n = 5k_4 + 4$; dove $k_4 \in N$, perché se prendiamo le uova a 5, nel cestino rimarranno 4 uova

$n = 6k_5 + 5$; dove $k_5 \in N$, perché se prendiamo le uova a 6, nel cestino rimarranno 5 uova

$n = 7k_6$; dove $k_6 \in N$, perché se prendiamo le uova a 7, il cestino sarà vuoto.

$n = 2k_1 + 1 \Leftrightarrow n+1 = 2k_1 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 2 \cdot (k_1 + 1)$ cioè $(n+1)$ è divisibile per 2

$n = 3k_2 + 2 \Leftrightarrow n+1 = 3k_2 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 3 \cdot (k_2 + 1)$ cioè $(n+1)$ è divisibile per 3

$n = 4k_3 + 3 \Leftrightarrow n+1 = 4k_3 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 4 \cdot (k_3 + 1)$ cioè $(n+1)$ è divisibile per 4

$n = 5k_4 + 4 \Leftrightarrow n+1 = 5k_4 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 5 \cdot (k_4 + 1)$ cioè $(n+1)$ è divisibile per 5

$n = 6k_5 + 5 \Leftrightarrow n+1 = 6k_5 + 6 \Leftrightarrow n+1 = 6 \cdot (k_5 + 1)$ cioè $(n+1)$ è divisibile per 6

[$(n+1)$è divisibile per 2 i $(n+1)$ è divisibile per 3 i $(n+1)$ è divisibile per 4 i $(n+1)$ è divisibile per 5 e $(n+1)$ è divisibile per 6]$\Leftrightarrow (n+1)$ è divisibile per $NWW(2;3;4;5;6) = 60$ e $n = 7k_6$ cioè n è divisibile per 7, ciò che significa che, n deve essere il multiplo di 7 e $n+1$ deve essere il multiplo di 60.

Il minimo numero intero che risponde a queste due condizioni è 119.

Verifica:

$119 : 2 = 59$ *resto* 1, per cui $119 = 2 \cdot 59 + 1$

$119 : 3 = 39$ *resto* 2, per cui $119 = 3 \cdot 39 + 2$

$119 : 4 = 29$ *resto* 3, per cui $119 = 4 \cdot 29 + 3$

$119 : 5 = 23$ *resto* 4, per cui $119 = 5 \cdot 23 + 4$

$119 : 6 = 19$ *resto* 5, per cui $119 = 6 \cdot 19 + 5$

$119 : 7 = 17$, per cui $119 = 7 \cdot 17$

Risposta:

Maria deve mettere nel cestino 119 uova.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in lingua polacca	1
B	Affermazione di divisibilità della n (numero delle uova) per 7	1
C	Affermazione che n+1 deve dividersi per NWW(2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6) = 60	1
D	Individuare il numero minimo n che risponda alle condizioni	1
E	Verifica del risultato ot tenuto e formula della risposta	1
F	Scrivere la soluzione In lingua straniera	2

Zadanie 2. Sprytne mnożenie (3 punkty)[93]

Ad a.

$$74^2 = (70+4)^2 = 70^2 + 2\cdot 70\cdot 4 + 4^2 = 4900 + 560 + 16 = 5476$$

$$74^2 = (80-6)^2 = 80^2 - 2\cdot 80\cdot 6 + 6^2 = 6400 - 960 + 36 = 5476$$

Ad b.

$$97^2 = (100-3)^2 = 100^2 - 2\cdot 100\cdot 3 + 3^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$$

Ad c.

$$293^2 = (300-7)^2 = 300^2 - 2\cdot 300\cdot 7 + 7^2 = 90000 - 4200 + 49 = 89629$$

Ad d.

$$899^2 = (900-1)^2 = 900^2 - 2\cdot 900\cdot 1 + 1^2 = 810000 - 1800 + 1 = 808201$$

Ad e.

$$59\cdot 61 = (60-1)\cdot(60+1) = 60^2 - 1^2 = 3600 - 1 = 3599$$

Ad f.

$$87\cdot 93 = (90-3)\cdot(90+3) = 90^2 - 3^2 = 8100 - 9 = 8091$$

Ad g.

$$198\cdot 202 = (200-2)\cdot(200+2) = 200^2 - 2^2 = 40000 - 4 = 39996$$

Ad h.

$$596\cdot 604 = (600-4)\cdot(600+4) = 600^2 - 4^2 = 360000 - 16 = 359984$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Za każdy przykład 0,5 punktu	6*0,5=3
B	Za zrobienie wszystkich przykładów 1 punkt dodatkowo	1

[93] Zaczerpnięto z [1] - Zadanie 33 strona 22

Zadanie 3. Dodaj ułamki (5 punktów)[94]

Składniki sumy są ułamkami postaci: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}$, dlatego korzystamy z tożsamości: $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, która jest prawdziwa dla wszystkich $n \in N_+$ *(liczb naturalnych dodatnich)*

ad a).

Wartość sumy $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=S$

obliczamy następująco:

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=$$

w powyższej sumie redukują się ułamki z wyjątkiem pierwszego ułamka z pierwszego nawiasu i drugiego ułamka z ostatniego nawiasu, zatem: $S=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=\frac{10}{10}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

ad b).

Wartość sumy $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2009\cdot 2010}$.

Można obliczyć następująco:

$$S=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2009}-\frac{1}{2010}\right).$$

Zauważamy, że w każdej parze nawiasów tej sumy redukują się ułamki:
Drugi ułamek z pierwszego nawiasu z pierwszym ułamkiem nawiasu drugiego nawiasu.

Otrzymujemy, że $S=1-\frac{1}{2010}=\frac{2009}{2010}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Obliczenie sumy dziesięciu ułamków	2
B	Obliczenie sumy ułamków od $\frac{1}{1\cdot 2}$ do $\frac{1}{2009\cdot 2010}$	3

[94] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 19 strona 41

Zadanie 4. Palindromy… (5 punktów)[95]

Ad 1.

Cyfrą jedności w zapisie dziesiętnym liczby naturalnej, która jednocześnie jest kwadratem liczby naturalnej, może być jedna z cyfr zbioru: $\{0; 1; 4; 5; 6; 9\}$.

Zatem szukane liczby mogą mieć postać:

$\overline{1x1}$; $\overline{4x4}$; $\overline{5x5}$; $\overline{6x6}$; $\overline{9x9}$, gdzie x jest odpowiednio dobrana cyfrą.

Metodą kolejnych oszacowań i prób stwierdzamy, że liczbami tymi są:

$121\left(=11^2\right)$; $484\left(=22^2\right)$; $676\left(=26^2\right)$

Ostatecznie są tylko trzy palindromiczne trzycyfrowe liczby, które są jednocześnie kwadratami liczb naturalnych.

Ad 2.

Jest rok 2010. Liczbą palindromiczną - był zapis roku 2002 - będzie zapis roku 2112

Odpowiedź:

Są trzy liczby palindromiczne trzycyfrowe, które są jednocześnie kwadratami liczb całkowitych.
Najbliższe bieżącemu rokowi lata, których zapis palindromem są: 2002 *(był) i* 2112 *(będzie)*

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Ustalenie cyfr, które mogą być cyframi jedności liczby, która jest kwadratem innej liczby	1
B	Podanie postaci szukanych liczb	1
C	Ustalenie liczb, które spełniają warunki zadania	1
D	Odpowiedź na pytanie „Ile jest liczb trzycyfrowych …”	1
E	Podanie liczb palindromicznych – „numerów” lat	1

[95] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 25 strona 43

Zadanie 5. Właściwa kombinacja (5 punktów)[96]

Obliczamy ile sekund zajęło otwieranie kłódki: 16 min 45 $s = (16 \cdot 60 + 45)s = (960 + 45)s = 1005s$
Kombinacja szyfru jest zapisem liczby w systemie dwunastkowym. Sprawdzenie kombinacji 0-0-0 zajęło jedną sekundę, czyli kombinacja szyfru jest zapisem liczby $1005 - 1 = 1004$ w systemie dwunastkowym. „Odważnikami" w systemie dwunastkowym są potęgi liczby 12:

$12^0 = 1$

$12^1 = 12$

$12^2 = 144$

$12^3 = 1728$

…

zauważamy, że $12^2 < 1004 < 12^3$, czyli $(1004 > 12^2) \wedge (1004 < 12^3)$ więc liczba 1004_{10} w układzie dwunastkowym jest trzycyfrowa. $1004_{(10)} = \overline{abc}_{(12)} = a \cdot 12^2 + b \cdot 12^1 + c \cdot 12^0$.

Wartości *a, b, c* wyznaczamy wykonując kolejno dzielenia:

1.

$$\begin{array}{rrrrl} & & & 6 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & : 144 \\ - & 8 & 6 & 4 & \\ \hline & 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

Wniosek z powyższego dzielenia :
$1004 = 6 \cdot 144 + 140$, zatem $a = 6$

2.

$$\begin{array}{rrrl} & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 4 & 0 & : 12 \\ -1 & 2 & & \\ \hline & 2 & 0 & \\ & -1 & 2 & \\ \hline & & 8 & \end{array}$$

Wniosek : $140 = 11 \cdot 12 + 8$, zatem $b = 11$ oraz $c = 8$

Ostatecznie: $1004 = 6 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12^1 + 8 \cdot 12^0$, więc $6 - 11 - 8$ jest szyfrem otwierającym kłódkę.

Odpowiedź:

Szyfrem otwierającym kłódkę jest: $6 - 11 - 8$, ponieważ trafienie właściwej kombinacji (przy założeniu, że na każdą kombinację cyfr potrzebna była jedna sekunda) nastąpiło po upływie 16 minut i 45 sekund, czyli po 1005 sekundach.
Martyna wybierała liczby od 0, wybrała ich 1005, zatem 1004 to wartość ostatniej wybranej liczby w systemie dziesiątkowym.
Do zapisu liczby $1004_{(10)}$ w systemie dwunastkowym (na każdej tarczy było 12 możliwych pozycji) potrzebne są : 6-11-8

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyrażenie czasu w sekundach – 1005 s	1
B	Stwierdzenie, że szukany szyfr jest zapisem liczby 1004 w systemie dwunastkowym	1
C	Znalezienie szyfru	2
D	Odpowiedź z uzasadnieniem	1

[96] Zaczerpnięto z [3] - Zadania treningowe 2005; zadanie 5

Zadanie 6. Dziewięćsił (5 punktów)[97]

I. Jaka jest suma cyfr liczby $L = 10^{2009} - 2009$?

$L = 10^{2009} - 2009$; $10^{2009} = 1\underbrace{00...00000}_{2009 zer}$;

	1	0	0	…	0	0	0	0	0
-						2	0	0	9
		9	9	…	9	7	9	9	1

$L = \underbrace{99...9}_{2005 cyfr}7991$ lub $L = 10^{2009} - 2009 = \left(10^{2009} - 1\right) - 2008 = \underbrace{999...99999}_{2009 cyfr} - 2008 = \underbrace{999...9}_{2005 \cdot\cdot cyfr}7991$

czyli do zapisu liczby użyto 2005+2 dziewiątki, jedną siódemkę oraz jedną jedynkę.

Niech S oznacza sumę cyfr tej liczby: $S = 2005 \cdot 9 + 7 + 2 \cdot 9 + 1 = 18071$

Odpowiedź:

Suma cyfr liczby $L = 2^{2009} - 2009$ wynosi 18071.

II. Jaka jest suma cyfr liczby $L = 2^{2010} - 2010$? $L = 10^{2010} - 2010$; $10^{2010} = 1\underbrace{00...00000}_{2010 zer}$

	1	0	0	…	0	0	0	0	0
-						2	0	1	0
		9	9	…	9	7	9	9	0

$L = \underbrace{99...9}_{2006 cyfr}7990$ lub $L = 10^{2010} - 2010 = \left(10^{2010} - 1\right) - 2009 = \underbrace{999...99999}_{2010 cyfr} - 2009 = \underbrace{999...9}_{2006 \cdot\cdot cyfr}7990$

czyli do zapisu liczby użyto 2006+2 dziewiątki, jedną siódemkę oraz jedną zero

Niech S oznacza sumę cyfr tej liczby: $S = 2006 \cdot 9 + 7 + 2 \cdot 9 + 0 = 18079$

Odpowiedź:

Suma cyfr liczby $L = 2^{2010} - 2010$ wynosi 18079.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Ustalenie, z jakich cyfr składa się zapis liczby	2
B	Ustalenie ilości poszczególnych cyfr potrzebnych do zapisu liczby	1
C	Obliczenie sumy cyfr	1
D	Odpowiedź	1

[97] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 16 strona 17 oraz z [4] - Zadania treningowe 2006 – zadanie 4

Zadanie 7. Trzy pociągi (3 punkty)[98]

Niech x oznacza liczbę osób w każdym z wagonów.
„W każdym wagonie jest taka sama liczba pasażerów – największa z możliwych” oznacza, że x musi być największym wspólnym dzielnikiem liczb: 462, 546 i 630.
$x = NWD(462;\,546;\,630)$.

Wyznaczanie NWD

Metoda rozkładu liczb na czynniki i znalezienie wspólnych czynników

462	2
231	3
77	7
11	11
1	

546	2
273	3
91	7
13	13
1	

630	2
315	3
105	3
35	5
7	7
1	

$NWD(462;\,546;\,630) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$

Wniosek:

W każdym wagonie jest 42 pasażerów
Obliczanie liczby wagonów w poszczególnych pociągach:
W I pociągu jest 462 pasażerów, po 42 w wagonie,
zatem liczba wagonów w I pociągu jest równa $462 : 42 = 11$
W II pociągu jest 546 pasażerów, po 42 w wagonie,
zatem liczba wagonów w I pociągu jest równa $546 : 42 = 13$
W III pociągu jest 630 pasażerów, po 42 w wagonie,
zatem liczba wagonów w I pociągu jest równa $630 : 42 = 15$

Odpowiedź:

Liczba wagonów w pociągach jest następująca:
W pociągu, który wiezie 462 pasażerów jest 11 wagonów
W pociągu, który wiezie 546 pasażerów jest 13 wagonów
W pociągu, który wiezie 630 pasażerów jest 15 wagonów

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Ustalenie, że liczba pasażerów w wagonie jest równa NWD(462; 546; 630) i obliczenie NWD	1
B	Ustalenie wagonów w poszczególnych pociągach	1
C	Odpowiedź	1

[98] Zaczerpnięto z [5] - Zadanie 5.26, Strona 37

Zadanie 8. Wycieczka (3 punkty)[99]

Niech x_i oznacza wiek i-tego uczestnika wycieczki dla $i \in N$ *oraz* $0 < i < 22$

Z treści zadania wynika, że średnia wieku uczestników wycieczki wynosi 23 lata zapisujemy ten fakt w postaci: $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{21}}{21} = 23$

Z powyższej równości wynika, że: $x_1 + x_2 + \cdots + x_{21} = 23 \cdot 21$ *(*).*

Wiek przewodnika oznaczamy przez x_p.

Zatem fakt, że średnia wieku grupy wraz z przewodnikiem jest równa 24 zapisujemy następująco:

$\frac{(x_1 + x_2 + \cdots + x_{21}) + x_p}{22} = 24,$

ale z *(*)* wynika, że wartość nawiasu w liczniku ułamka można zastąpić iloczynem $23 \cdot 21$ otrzymujemy równość: $\frac{21 \cdot 23 + x_p}{22} = 24$

stąd otrzymujemy: $21 \cdot 23 + x_p = 22 \cdot 24,$

zatem $x_p = 22 \cdot 24 - 21 \cdot 23$ dalej

$$x_p = (23-1)\cdot(23+1) - (22-1)\cdot(22+1) \Leftrightarrow x_p = (23^2 - 1^2) - (22^2 - 1^2) \Leftrightarrow x_p = 23^2 - 1 - 22^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_p = 23^2 - 22^2 \Leftrightarrow x_p = (23-22)\cdot(23+22) \Leftrightarrow x_p = 1 \cdot 25 \Leftrightarrow x_p = 45$$

Odpowiedź:

Przewodnik ma 45 lat.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie średniej uczestników wycieczki i określenie sumy ich wieku	1
B	Zapisanie średniej wieku z przewodnikiem w postaci równania z niewiadomą oznaczającą wiek przewodnika	1
C	Obliczenie wieku przewodnika i odpowiedź	1

[99] Zaczerpnięto z [6] - Zadanie 1, Strona 78

Zadanie 9. Liczba uczniów liceum (3 punkty)[100]

Symbol: $a \mid b$ oznacza „liczba a jest dzielnikiem liczby b”.
Niech x oznacza liczbę uczniów liceum, wtedy z warunków zadania wynika, że:
Reszta z dzielenia $(x:18)$ jest równa 9, zatem $18 \mid (x-9)$ - liczba $(x-9)$ dzieli się przez 18
Reszta z dzielenia $(x:20)$ jest równa 9, zatem $20 \mid (x-9)$ - liczba $(x-9)$ dzieli się przez 20
Reszta z dzielenia $(x:20)$ jest równa 9, zatem $24 \mid (x-9)$ - liczba $(x-9)$ dzieli się przez 24.
Z powyższego wynika, że liczba $(x-9)$ jest podzielna przez każdą z liczb: 18, 20, 24 ,
zatem musi być podzielna przez NWW(18, 20, 24) =360.

18	2			20	2			24	2
9	3			10	2			12	2
3	3			5	5			6	2
1				1				3	3
								1	

$NWW(18;\,20;\,24) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 360$.

Otrzymaliśmy, że $(x-9)$ jest wielokrotnością liczby 360.
Liczba 720 jest jedyną wielokrotnością liczby 360 zawartą między 500 a 1000,
stąd $x-9=720$, czyli $x=729$.

Odpowiedź:

W tej szkole jest 729 uczniów.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wniosek: Jeśli reszta z dzielenia x przez liczbę jest równa 9, to x - 9 dzieli się przez tą liczbę	1
B	Zauważenie, że (x - 9) musi być podzielne przez NWW(18; 20;24) i wyliczenie NWW	1
C	Obliczenie liczby uczniów iodpowiedź	1

[100] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 21 strona 24

Zadanie 10. Studia w Pisa (3 punkty)[101]

(Leonardo z Pisy: *De duobus hominibus panes habentibus... – „Dwoje ludzi chleb mając…”)*
Podział monet: „Jeden podróżny wziął 3 monety, ponieważ przyniósł 3 chleby, a drugi 2 monety, ponieważ przyniósł 2 chleby.” - Byłby sprawiedliwy gdyby żołnierz sam zjadł wszystkie chleby. Podróżni mieli razem 5 chlebów i podzielili się chlebem w równych częściach.

To znaczy, że każdy z podróżnych i żołnierz zjedli po $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ chleba.

Oznacza to, że podróżny, który miał trzy chleby oddał żołnierzowi $3-1\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$ chleba,

natomiast drugi z podróżnych oddał żołnierzowi $2-1\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ chleba.

Ponieważ $\frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{1}=\frac{4}{1}$ czyli 4 części zjedzonego chleba żołnierz otrzymał od pierwszego z podróżnych natomiast od drugiego tylko 1 część.
Oznacza to, że monety powinny zostać podzielone w stosunku 4:1,
czyli 4 monety dla pierwszego z podróżnych, a dla drugiego 1 moneta.
Odpowiedź:

Pierwszy podróżny powinien wziąć 4 monety, a drugi 1 monetę.
Taki podział jest bardziej sprawiedliwy.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Stwierdzenie, że podział monet 3:2 byłby sprawiedliwy gdyby żołnierz sam zjadł chleb	1
B	Zauważenie, że każdy zjadł $1\frac{2}{3}$ chleba oraz ile chleba oddali podróżni (I: $1\frac{1}{3}$, a II $\frac{1}{3}$)	1
C	Zaproponowanie sprawiedliwego podziału monet i odpowiedź	1

[101] Zaczerpnięto z [7] - Zadania treningowe 2004 – zadanie 10

Zadanie 11. Dwa trójkąty za jeden kwadrat (4 punkty)[102]

Liczby trójkątne:

Niech T_n oznacza *n-tą* liczbę trójkątną

$T_1 = 1$

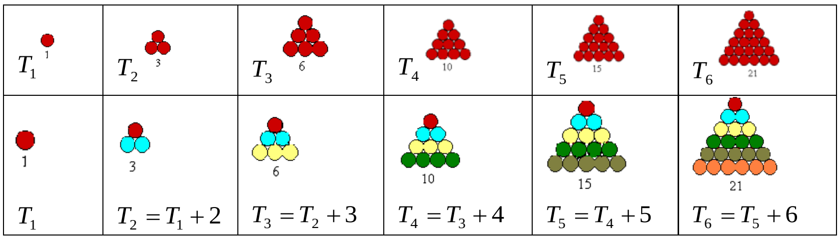
$T_2 = 1 + 2 = 3$, ale również $T_2 = T_1 + 2$

$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, ale również $T_3 = T_2 + 3$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, ale również $T_4 = T_3 + 4$

$\cdots$

$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n-1) + n = T_{n-1} + n$



Liczby kwadratowe:

Niech K_n oznacza *n-tą* liczbę kwadratową to znaczy: $K_n = n^2$

$K_1 = 1$ $\qquad K_2 = 2^2 = 4$ $\qquad K_3 = 3^2 = 9$

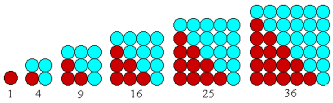
$K_4 = 4^2 = 16$ $\qquad \cdots$ $\qquad K_n = n^2$

Zauważamy, że: $T_1 = K_1$

$T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = K_2$

$T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2 = K_3$

$T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2 = K_4$



Rysunek obok przedstawia sumę $T_4 + T_5 = K_5$

… $T_n + T_{n+1} = K_{n+1} = (n+1)^2$ (*).

Z równości (*) otrzymujemy: $T_{2010} + T_{2011} = K_{2011}$, uwzględniając, że $T_{2011} = T_{2010} + 2011$ oraz $K_{2011} = 2011^2$ otrzymujemy: $T_{2010} + T_{2010} + 2011 = 2011^2$ stąd $2 \cdot T_{2010} = 2011^2 - 2011$ zatem $2 \cdot T_{2010} = 2011 \cdot (2011 - 1)$ czyli $2 \cdot T_{2010} = 2011 \cdot 2010$ zatem $2 \cdot T_{2010} = 4042110$ ostatecznie $T_{2010} = \frac{4042110}{2}$ czyli $T_{2010} = 2021055$

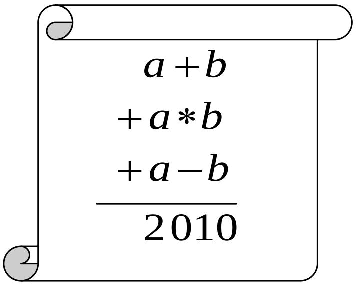
Odpowiedź: $T_{2010} = 2021055$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zauważenie związku między kolejnymi liczbami trójkątnymi	1
B	Zastąpienie sumy dwóch kolejnych liczb trójkątnych liczbą kwadratową	1
C	Zapisanie równania z niewiadomą liczbą 2010-tą trójkątna	1
D	Obliczenie 2010-tej liczby trójkątnej i odpowiedź	1

[102] Zaczerpnięto z [8]- Zadania 2005, zadanie 11

Zadanie 12. Rachunek elementarny[103] (4 punkty)



$(a+b)+a\cdot b+(a-b)=2010 \Leftrightarrow a+b+a\cdot b+a-b=2010$
czyli
$2a+a\cdot b=2010 \Leftrightarrow a\cdot(2+b)=2010$
Rozkład 2010 na czynniki pierwsze jest następujący:

$$\begin{array}{r|l} 2010 & 2 \\ 1005 & 3 \\ 335 & 5 \\ 67 & 67 \\ 1 & \end{array}$$

Z powyższego rozkładu wynika, że dzielnikami liczby 2010 są:
1; 2; 3; 5; 6;10; 15; 30; 67; 134; 201; 365; 402; 670; 1005; 2010.
Zatem rozkłady liczby 2010 na dwa czynniki są następujące:

$$\begin{array}{llll} 2010=1\cdot 2010 & 2010=2\cdot 1005 & 2010=3\cdot 670 & 2010=5\cdot 402 \\ 2010=6\cdot 365 & 2010=10\cdot 201 & 2010=15\cdot 134 & 2010=30\cdot 67 \end{array}$$

Ponieważ: $a>b>0$, to:
Z rozkładu I otrzymujemy:
$a\cdot(b+2)=1\cdot 2010 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a=2010 \\ b+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2010 \\ b=-1 \end{cases}$; $b=-1$ jest sprzeczne z warunkiem $b>0$
Z rozkładu II otrzymujemy:
$a\cdot(b+2)=2\cdot 1005 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a=1005 \\ b+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=287 \\ b=0 \end{cases}$; $b=0$ jest sprzeczne z warunkiem $b>0$
Z rozkładu III otrzymujemy
$a\cdot(b+2)=3\cdot 670 \Leftrightarrow \begin{cases} a=670 \\ b+2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=670 \\ b=1 \end{cases}$; więc $a=670$ i $b=1$ *(1)*
Z rozkładu IV otrzymujemy
$a\cdot(b+2)=5\cdot 402 \Leftrightarrow \begin{cases} a=402 \\ b+2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=402 \\ b=3 \end{cases}$; więc $a=402$ i $b=3$ *(2)*
Z rozkładu V otrzymujemy
$a\cdot(b+2)=6\cdot 365 \Leftrightarrow \begin{cases} a=365 \\ b+2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=365 \\ b=4 \end{cases}$; więc $a=335$ i $b=4$ *(3)*
Z rozkładu VI otrzymujemy
$a\cdot(b+2)=10\cdot 201 \Leftrightarrow \begin{cases} a=201 \\ b+2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=201 \\ b=8 \end{cases}$; więc $a=201$ i $b=8$ *(4)*
Z rozkładu VII otrzymujemy
$a\cdot(b+2)=15\cdot 134 \Leftrightarrow \begin{cases} a=134 \\ b+2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=134 \\ b=13 \end{cases}$; więc $a=134$ i $b=13$ *(5)*

[103] Zaczerpnięto z [3] - Zadania treningowe 2005; Zadanie 11

Z rozkładu VIII otrzymujemy

$a \cdot (b+2) = 30 \cdot 67 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 67 \\ b+2 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 67 \\ b = 28 \end{cases}$; więc $a = 67$ i $b = 28$ *(6)*

Sprawdzenie rozwiązań:

1						
a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	671
670	1	369	1876	39	a*b	670
					a-b	669
					Suma:	**2010**

2						
a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	405
402	3	369	1876	39	a*b	1206
					a-b	399
					Suma:	**2010**

3						
a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	339
335	4	369	1876	39	a*b	1340
					a-b	331
					Suma:	**2010**

4						
a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	209
201	8	369	1876	39	a*b	1608
					a-b	193
					Suma:	**2010**

5						
a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	147
134	13	369	1876	39	a*b	1742
					a-b	121
					Suma:	**2010**

6						
a	b	a+b	a*b	a-b	a+b	95
67	28	369	1876	39	a*b	1876
					a-b	39
					Suma:	**2010**

Odpowiedź:

Istnieją następujące pary takich liczb naturalnych (a, b), gdzie: a jest większe lub równe b, takich, że gdy dodamy do siebie ich sumę, iloczyn i różnicę to otrzymamy 2010 są to:
(670; 1); (402; 3); (335; 4); (201; 8); (134; 13); (61; 28)

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie warunku $a \cdot (b+2) = 2010$; wyznaczenie dzielników liczby 2010; podanie rozkładów 2010 na czynniki	1
B	Analiza otrzymanych rozkładów, wyznaczenie wartości a i b (Po 1p za każde rozwiązanie)	2
C	Sprawdzenie wyników i odpowiedź	1

Pakiet M-1.4 „Wektor! Do nogi!”

Ten sympatyczny bokserek to Wektor

I. Treści merytoryczne:

- pojęcie wektora,
- dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę wektorów systentycznie i w współrzędnych,
- pojęcie wektora zerowego, przeciwnego, wektorów równych,
- przekształcanie punktu w symetrii względem prostej, symetrii środkowej, w jednokładności.

II. Cele szczegółowe:

- utrwalenie pojęcia wektora syntetycznie i analitycznie,
- nabycie umiejętności podziału odcinka punktem,
- pokazanie wektora jako narzędzia do rozwiązywania problemów w geometrii analitycznej, w szczególności w przekształceniach geometrycznych i odnajdowaniu punktów na płaszczyźnie z wykorzystaniem własności trójkąta i czworokątów,
- przybliżenie prostych zastosowań wektorów do rozwiązania problemów fizycznych.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.]Rams S., Rams T. , *Matematyka bez granic, Część II, Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003

[2.]Legutko M., Legutko M., Turnau S., *Matematyka I. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i liceum zawodowego,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1991

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1.]Butrym P., Matematyka w zadaniach praktycznych, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2004

[2.]Kamiński Z., Fizyka dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1973

[3.]Legutko M., Legutko M., Turnau S., Matematyka I. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i liceum zawodowego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne 1991

[4.]Łomnicki A., Treliński G., Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1986

[5.]Mendel B., Mendel J., Zbiór zadań z fizyki dla klasy pierwszej Liceum Ogólnokształcącego i Technikum, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1975

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" - „Wektor! Do nogi!"

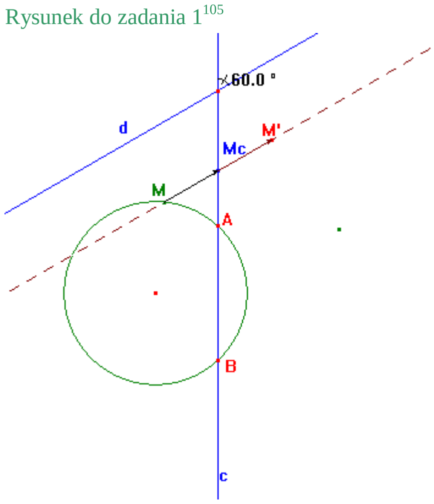
Zadanie na rozgrzewkę[104]

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania podaj w wybranym wcześniej języku

Warm up exercise Misfit (10 points)

"Axial symmetry is boring" Jacques is complaining and is fed up with the fact that a line is connecting a point and its image at right angle. Why not try another angle? Jacques has invented modification called the inclined symmetry. A line segment connecting point M and its image M' in Jacques's symmetry is parallel to a define line segment d and is divided into two equal parts by the axis of symmetry, which is a straight line AB. The straight line d and AB intersect at an angle of 60^0.

Rysunek do zadania 1[105]



If we accept:
S_J – Jacques's symmetry
c – the line segment AB
$S_J(M)$ – the picture of the point M In Jacques's symmetry
$S_J(M)=M'$ – the picture of the point M in Jacques's symmetry is the point M'
M_c – the Picture of the point M in parallel projection onto a line c in the direction to a line d

Notice that $S_J(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{M_cM'}$

Redraw and zoom the figure presented above on a separate answer sheet and construct a picture (shown in the figure) of the circle by the "inclined symmetry" setting the appropriate number of the images of the points.

[104] Zaczerpnięto z [1] – strona 89; zadanie 7
[105] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Ejercicio de iniciación Inadaptado (10 puntos)

„El eje de simetría es aburrido" – se queja Jacques y está harto de que la línea que une el punto y su imagen en el ángulo recto. ¿Porque no intentar el otro ángulo? Jacques se inventa la transformación, llamada «simetría oblicua»:

"El segmento que une el punto M y su imagen M' en la simetría de Jacques es paralelo a una recta definida *d* y dividida por dos partes iguales con el eje de simetría, que es la recta AB". Las rectas *d* y la recta *AB* se cruzan en el ángulo de 60^0.

Si las nombramos:

S_J – simetría de Jacques

c – recta AB

$S_J(M)$ – imagen del punto *M* en la simetría de Jacques

$S_J(M)=M'$ - imagen del punto *M* en la simetría de Jacques es el punto *M'*

M_c –imagen del punto *M* en la proyección paralela en la recta *c* en dirección de la recta *d*

Observamos que: $S_J(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{M_cM'}$

Copia y amplia esta figura en la hoja de soluciones y construye la imagen (presentada en el dibujo) de la circunferencia por esta "simetría oblicua" marcando las imágenes de los números de puntos adecuados.

Esercizio per riscaldarsi Non Appropriato (10 punti)

"La simmetria assale è noiosa" si lamenta Giacomo e ne è già stufo che la linea lega il punto e la sua immagine all'angolo retto.

Perché non provare un altro angolo? Giacomo inventa una trasformazione cosidetta simmetria obliqua:

"Il tratto che lega il punto M e la sua immagine M' nella simmetria di Giacomo è parallelo ad una certa retta stabilita *d* e diviso in due parti uguali dall'asse di simmetria, che è rappresentata dalla *retta AB*" La retta d e la retta AB si incrociano all'angolo di 60°

Se introdiciamo le seguenti identificazioni:

S_J – simmetria di Giacomo

c – retta AB

$S_J(M)$ – immagine del Punto *M* nella simmetria di Giacomo

$S_J(M)=M'$ – il punto *M'* è l'immagine del punto *M* nella simmetria di Giacomo

M_c – immagine del Punto *M* Nel prospetto paralelo Sulla retta *c* nella direzione della retta *d*

Notiamo che $S_J(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{M_cM'}$

Copia ed ingrandisca la figura sopra presentata sulla scheda di soluzioni ed costruisca l'immagine (presentata sul disegno) di un circolo da parte di questa "simmetria obliqua" tracciando le immagini di un numero appropriato dei punti.

Exercice pour entraînement Inadapté (10 points)

« La symétrie axiale est ennuyante » se plaint Jacques
et il en a assez que la droite relie le point et son image à angle droit.
Pourquoi ne pas essayer un autre angle ?
Jacques invente la transformation appellée la symétrie oblique :
« Le segment reliant le point *M* et son image *M'* dans la symétrie de Jacques est parallèle à une certaine droite établie et divisé en deux parties égales par l'axe de symétrie qui est la droite *AB* »
La droite *d* et la droite *AB* se croisent sous un angle de 60˚.
Si on admet les significations suivantes:
S_J - la symétrie de Jacques
c – la droite *AB*
$S_J(M)$ – l'image du point *M* dans la symétrie de Jacques
$S_J(M)=M'$ - l'image du point *M* dans la symétrie de Jacques est le point *M'*
M_c – l'image du point *M* dans la projection parallèle sur la droite *c* dans la direction de la droite *d*
On remarque que $S_J(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{M_cM'}$
Retrace et aggrandit la figure ci-dessus dans la fiche de solution et construit l'image du cercle (presenté sur le dessin) par cette « symétrie oblique » en déterminant les images d'un nombre convenable de points

Aufwärmungsaufgabe Unangepasst (10 Punkte)

„Achsesymmetrie ist langweilig" meckert der Jacques
Und hat die Nase voll davon, dass die Linie einen Punkt mit seinem Bild in einem geraden Winkel verbindet.
Warum nicht ein anderer Winkel?
Jacques denkt eine Umformung aus- schräge Symmetrie genannt:
„Der den Punkt M und sein Bild M' verbindende Abschnitt in der Symmetrie von Jacques ist parallel zu einer bestimmten Geraden *d* und teilbar in zwei gleiche Teile durch die Symmetrieachse, die die Gerade *AB* ist". Die Geraden *d* und Gerade *AB* schneiden sich in einem Winkel 60^0.
Wenn man eine Bezeichnung einführt:
S_J – Symmetrie von Jacques
c – Gerade *AB*
$S_J(M)$ – das Bild vom Punkt *M* in der Symmetrie von Jacques
$S_J(M)=M'$ –das Bild vom Punkt *M* in der Jacques' Symmetrie ist der Punkt *M'*
M_c – das Bild vom Punkt *M* in der parallelen Projektion auf die Gerade *c* Richtung der Geraden *d*
Es lässt sich feststellen, dass $S_J(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{M_cM'}$
Zeichne und vergrößre die oben dargestellte Figur auf das Lösungsblatt nach und baue ein Bild des oben gezeichneten Kreises durch „die schräge Symmetrie", indem du die Bilder der entsprechenden Punktezahl festlegst

Zadanie 1. Podział odcinka (6 punktów) [106]

Dane są punkty *A(-2,3)* i *B(3,-1).*

Znajdź współrzędne punktu P dzielącego odcinek $\overline{AB}$:

- w stosunku 1:1
- w stosunku 2:3

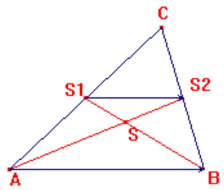
Zadanie 2. Wektor w trójkącie (4 punkty) [107]

Połącz wektorem środki dwóch boków dowolnego trójkąta.

Pokaż, że uzyskany wektor ma kierunek trzeciego boku trójkąta i długość równą połowie jego długości.

Środkowa w trójkącie, to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku.

Jaką własność środkowych widać na rysunku? [108]



Czy mógłbyś ją uzasadnić?

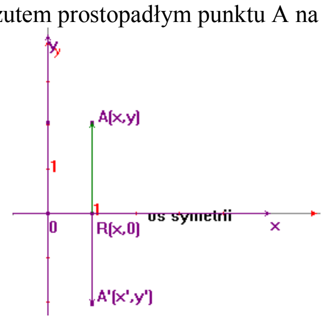
Zadanie 3. Środek ciężkości trójkąta (4 punkty) [109]

Wyznacz współrzędne środka ciężkości trójkąta w zależności od współrzędnych jego wierzchołków. Gdzie znajduje się środek ciężkości trójkąta ABC, gdy *A(-1,-1), B(5,0), C(2,4)?*

Zadanie 4. Symetria osiowa (3 punkty) [110]

Punkt A' jest obrazem punktu A w przekształceniu opisanym związkiem:

$\overrightarrow{RA'} = -\overrightarrow{RA}$, gdzie punkt R jest rzutem prostopadłym punktu A na daną prostą *l*. Jak a rysunku: [111]



1. Znajdź analityczne wzory tego przekształcenia, jeśli prosta *l* jest osią *OX*.
2. Zaznacz na płaszczyźnie i połącz kolejno odcinkami punkty:

(-2,5), (-1,5), (-2,6), (-4,2),
(-2,2), (-2,1), (-1,1), (-2,0), (-2,-1), (2,-1), (2,7), (-2,7), (-2,6).

Otrzymasz profil ludzika.

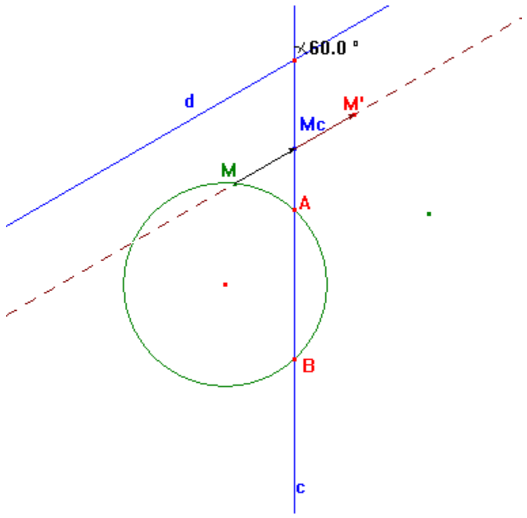
Dla każdego punktu (x, y)zaznacz odpowiadający mu punkt (x', y') według danego przekształcenia.

[106] Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
[107] Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
[108] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[109] Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
[110] Zaczerpnięte z [2]
[111] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczenia otwierające" - „Wektor! Do nogi!"

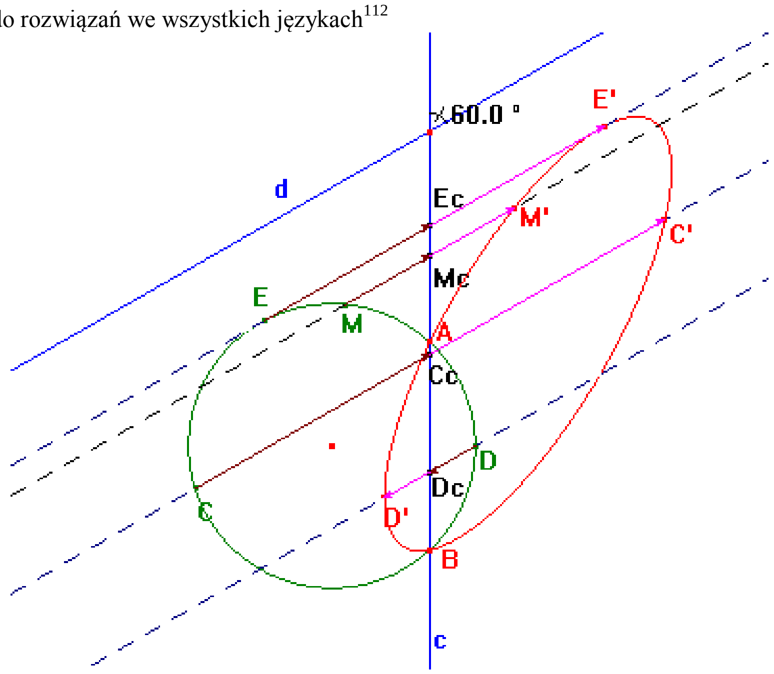
Zadanie na rozgrzewkę Nieprzystosowany (10 punktów)

„Symetria osiowa jest nudna" skarży się Jacques i ma już dość tego, że linia łączy punkt i jego obraz pod kątem prostym.
Dlaczego nie spróbować innego kąta?
Jacques wymyśla przekształcenie zwane symetrią skośną:
„Odcinek łączący punkt M i jego obraz M' w symetrii Jacquesa jest równoległy do pewnej ustalonej prostej *d* i dzielony na dwie równe części przez oś symetrii, którą jest *prosta AB*".
Proste *d* i *prosta AB* przecinają się pod kątem 60^0.
Jeśli wprowadzimy oznaczenia:
M_c – obraz punktu *M* rzucie równoległym na prostą *c* w kierunku prostej *d*.
S_J - symetria Jacquesa;
c – *prosta AB;*
$S_J(M)=M'$ - obrazem punktu *M* w symetrii Jacquesa jest punkt *M';*
$S_J(M)$ – obraz punktu *M* w symetrii Jacquesa;
Zauważymy, że: $S_J(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM_c} = \overrightarrow{M_cM'}$



Przerysuj i powiększ przedstawioną wyżej figurę na arkuszu rozwiązań i skonstruuj obraz (przedstawionego na rysunku) okręgu przez tę „symetrię skośną" wyznaczając obrazy odpowiedniej liczby punktów.

Rozwiązanie:
Rysunek do rozwiązań we wszystkich językach[112]



Wyznaczenie obrazów punktów okręgu: *A; B; M; C; D; E;*
Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami:
punkty: *A; B;* M_c; C_c; D_c; E_c są odpowiednio obrazami punktów: *A; B; M; C; D; E;* w rzucie równoległym na prostą *c* w kierunku prostej *d.*
Zauważamy, że $S_J(A)=A$ oraz $S_J(B)=B$, czyli, że punkty A i B są punktami stałymi tego przekształcenia.
Wyznaczamy wektory: $\overrightarrow{M_cM'}=\overrightarrow{MM_c}$; $\overrightarrow{C_cC'}=\overrightarrow{CC_c}$; $\overrightarrow{D_cD'}=\overrightarrow{DD_c}$; $\overrightarrow{E_cE'}=\overrightarrow{EE_c}$,
zatem $S_J(M)=M'$; $S_J(C)=C'$; $S_J(D)=D'$; $S_J(E)=E'$.
Zauważamy, że obrazem danego okręgu będzie elipsa
Uwagi: Można znaleźć obrazy większej liczby punktów
Zapis wektorowy nie jest wymagany, ale łatwiej zapisać kolejne etapy konstrukcji.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Znalezienie obrazów punktów stałych (A, B)	1
C	Wyznaczenie obrazów minimum trzech dowolnych punktów okręgu	2
D	Wyznaczenie obrazów kolejnych punktów	1
E	Narysowanie elipsy	2
F	Poprawność i staranność wykonanych rysunków	1
G	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

[112] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Ejercicio de iniciación Inadaptado (10 puntos)

Marcar las imágenes de puntos de la circunferencia: *A; B; M; C; D; E;*
Conforme a los marcados admitidos: los puntos: *A; B; Mc; Cc; Dc; Ec*
son adecuadas las imágenes de los puntos *A; B; M; C; D; E;*
en la proyección paralela en la recta *c* en dirección de la recta *d*
Observamos que $S_J(A)=A$ y $S_J(B)=B$, es decir, los puntos A y B son puntos fijos de esta transformación.

Marcamos los vectores: $\overrightarrow{M_cM'} = \overrightarrow{MM_c}$; $\overrightarrow{C_cC'} = \overrightarrow{CC_c}$; $\overrightarrow{D_cD'} = \overrightarrow{DD_c}$; $\overrightarrow{E_cE'} = \overrightarrow{EE_c}$,

Entonces $S_J(M)=M'$; $S_J(C)=C'$; $S_J(D)=D'$; $S_J(E)=E'$. Observamos que la imagen de la circunferencia es la elipse
Patrz – „Rysunek do rozwiązań we wszystkich językach"
Observaciones: Se puede encontrar el número de puntos más grande.
La notación de vectores no es obligatoria, pero es más fácil anotar las siguientes etapas de la construcción.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Encontrar las imágenes de puntos fijos (A, B)	1
C	Marcar las imágenes mínimo de tres libres puntos de la circunferencia	2
D	Marcar las imágenes de los puntos siguientes	1
E	Trazar la elipse	2
F	Trazar los dibujos de la manera correcta y cuidadosa	1
G	Marcar la solución en un idioma extranjero	2

Esercizio per riscaldarsi Non Appropriato (10 punti)

Indicare le immagini dei punti del circolo: *A; B; M; C; D; E.* In accordo alle identificazioni stabilite: i punti: *A; B; Mc; Cc; Dc; Ec.* corrispondono alle immagini dei punti: *A; B; M; C; D; E* nel prospetto parallelo sulla retta *c* nella direzione della retta *d.* Notiamo che $S_J(A)=A$ e che $S_J(B)=B$, ciò che significa che i punti A e B sono punti fissi di una tale trasformazione.

Indichiamo dei vettori: $\overrightarrow{M_cM'} = \overrightarrow{MM_c}$; $\overrightarrow{C_cC'} = \overrightarrow{CC_c}$; $\overrightarrow{D_cD'} = \overrightarrow{DD_c}$; $\overrightarrow{E_cE'} = \overrightarrow{EE_c}$,

per cui $S_J(M)=M'$; $S_J(C)=C'$; $S_J(D)=D'$; $S_J(E)=E'$
Notiamo che l'immagine del circolo dato è una ellisse.
Patrz – „Rysunek do rozwiązań we wszystkich językach"
Osservazioni: Possono essere trovate le immagini di ulteriori punti
Il registro vettoriale non è richiesto, ma è più facile di registrare le succesive fasi della costruzione.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in lingua polacca	1
B	Trovare delle immagini dei punti fissi (A, B)	1
C	Indicare le immagini di minimo tre punti arbitrani del circolo	2
D	Indicare le immagini dei punti successivi	1
E	Disegnare l'ellisse	2
F	Correttezza ed accuratezza dei disegni	1
G	Scrivere la soluzione in lingua straniera	2

Exercice pour entraînement Inadapté (10 points)

Détermination des images des points du cercle: *A; B; M; C; D; E.* D'après les significations admises: les points *A; B; Mc; Cc; Dc; Ec* sont successivement les images des points *A; B; M; C; D; E* dans la projection parallèle sur la droite *c* dans la direction de la droite *d.* Nous remarquons que S_J(A)=A et S_J(B)=B alors que les points A et B sont les points fixes de cette projection.

ous déterminons les vecteurs $\overrightarrow{M_cM'} = \overrightarrow{MM_c}$; $\overrightarrow{C_cC'} = \overrightarrow{CC_c}$; $\overrightarrow{D_cD'} = \overrightarrow{DD_c}$; $\overrightarrow{E_cE'} = \overrightarrow{EE_c}$,

alors S_J(M)=M'; S_J(C)=C'; S_J(D)=D'; S_J(E)=E'. Nous remarquons que l'image du cercle donné sera l'ellipse. *Patrz – „Rysunek do rozwiązań we wszystkich językach"*

Remarques: Il est possible de trouver des images d'un plus grand nombre de points.

La formule vectorielle n'est pas exigée, mais il est plus facile d'enregistrer les étapes consécutives de la construction

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Trouver les images des points fixes(A,B)	2
C	Déterminer les images d'au moins trois points quelconques du cercle	2
D	Déterminer les images des points suivants	1
E	Dessiner l'ellipse	2
F	La correction et précision du dessin	1
G	Ecrire la solution en langue étrangere	2

Aufwärmungsaufgabe Unangepasst (10 Punkte)

Das Festlegen der Punktebilder in einem Kreis: *A; B; M; C; D; E;*

Gemäß der angenommenen Bezeichnung: Punkte: *A; B; Mc; Cc; Dc; Ec sind entsprechend die Bilder der Punkte*: *A; B; M; C; D; E; in der parallelen Projektion auf die Gerade c in Richtung* der Geraden *d..* Wir bemerken, dass S_J(A)=A und S_J(B)=B, also, dass die Punkte A und B die Stammpunkte dieser Umformung sind.

Wir legen die Vektoren fest: $\overrightarrow{M_cM'} = \overrightarrow{MM_c}$; $\overrightarrow{C_cC'} = \overrightarrow{CC_c}$; $\overrightarrow{D_cD'} = \overrightarrow{DD_c}$; $\overrightarrow{E_cE'} = \overrightarrow{EE_c}$,

also S_J(M)=M'; S_J(C)=C'; S_J(D)=D'; S_J(E)=E'

Es ist zu bemerken, dass Das Bild des Kreises ist die Ellipse.

Patrz – „Rysunek do rozwiązań we wszystkich językach"

Anmerkungen: Man kann die Bilder der größeren Menge von Punkten finden

Die Vektoreneintragung ist nicht erforderlich, aber es ist leichter, folgende Konstruktionsabschnitte aufzuzeichnen.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Űbersetzen ins Polnische	1
B	Das Finden der Bilder von Stammpunkte (A, B)	1
C	Das Festlegen der Bilder von Minimum drei beliebigen Punkten des Kreises.	2
D	Das Festlegen der Bilder von den folgenden Punkten	1
E	Das Aufzeichnen der Ellipse.	2
F	Die Korrektheit und Genauigkeit der Zeichnungen	1
G	Die Eintragung der Losung In der Fremdsprache	2

Warm-up Bonus Misfit (10 points)

Indication of the points of the circle of images:*A; B; M; C; D; E;*
In accordance with accepted symbols: points *A; B; Mc; Cc; Dc; Ec* are respectively the images of the points: *A; B; M; C; D; E* in a parallel projection onto a straight line *c* in the the direction of a line *d*
We note that $S_J(A)=A$ and $S_J(B)=B$, so the points A and B are definite points of this transformation
We indicate the vecotrs: $\overrightarrow{M_cM'}=\overrightarrow{MM_c}$; $\overrightarrow{C_cC'}=\overrightarrow{CC_c}$; $\overrightarrow{D_cD'}=\overrightarrow{DD_c}$; $\overrightarrow{E_cE'}=\overrightarrow{EE_c}$
so $S_J(M)=M'$; $S_J(C)=C'$; $S_J(D)=D'$; $S_J(E)=E'$
We note that the image of a circle is the ellipse
Patrz – „Rysunek do rozwiązań we wszystkich językach”
Notes: You can find images of more points
Entry vector is not required, but it’s easier to save the stages of construction.

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Translation into Polish	1
B	Finding an image of the points (A, B)	1
C	Showing three images of the points of the circle at least	2
D	Showing the images of the remaing points	1
E	Drawing an ellipse	2
F	Correctnedenss and precision while drawing the pictures	1
G	Giving the solution into a foreign language	2

Zadanie 1. Podział odcinka (6 punktów)

Ad a)
Dane są punkty *A(-2,3)* i *B(3,-1)*.
Szukany punkt jest środkiem odcinka $\overline{AB}$.
Zapisujemy współrzędne wektorów:
$\overrightarrow{AS} = [x+2;\ y-3]$; $\overrightarrow{AB} = [3-(-2);\ -1-3]$.

Punkt S jest środkiem odcinka $\overline{AB}$, więc $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

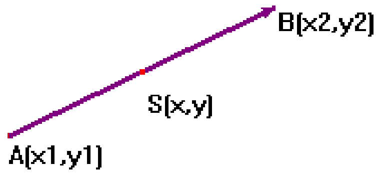
We współrzędnych mamy, więc:

$$[x+2, y-3] = \frac{1}{2}[3+2, -1-3] = \left[\frac{5}{2}, -2\right],$$

otrzymujemy układ równań: $\begin{cases} x+2 = \frac{5}{2} \\ y-3 = -2 \end{cases}$.

Rozwiązaniem tego układu są szukane współrzędne punktu $S = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Ogólnie: gdyby $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $S(x, y)$



[113],

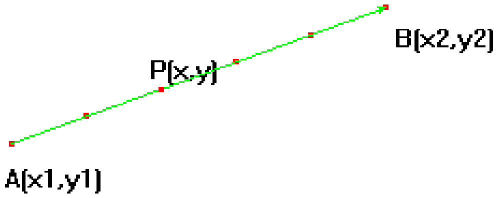
mamy równość wektorów: $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, co daje we współrzędnych: $[x - x_1, y - y_1] = \frac{1}{2}[x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.

Konsekwentnie otrzymujemy: $\begin{cases} x - x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1) \end{cases}$,

a następnie wzory na środek odcinka $\overline{AB}$, punkt $S\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

[113] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

ad b) Analogicznie, niech punkt *P(x,y)* dzieli odcinek $\overline{AB}$ w stosunku *2:3*



[114]

mamy więc $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, czyli: $\begin{cases} x - x_1 = \frac{2}{5}(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \frac{2}{5}(y_2 - y_1) \end{cases}$ po przekształceniu otrzymujemy:

$\begin{cases} x = \frac{2x_2 + 3x_1}{5} \\ y = \frac{2y_2 + 3y_1}{5} \end{cases}$, czyli $P\left(0, \frac{7}{5}\right)$

Uogólnienie: Mając dane współrzędne punktów A i B: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, wyznacz współrzędne takiego punktu P, który dzieli odcinek $\overline{AB}$ w stosunku *m:n.*

Ogólnie, dla podziału odcinka $\overline{AB}$ punktem *P(x,y)* w stosunku *m:n* uzyskujemy:

$\overrightarrow{AP} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$,

czyli: $\begin{cases} x - x_1 = \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1) \end{cases}$,

po uporządkowaniu i wyznaczamy wartości:

$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$ oraz $y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$,

które są współrzędnymi szukanego punktu $P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}; \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	a)Zapisanie równości wektorów: $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$	1
B	a)Wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{AS}$ i $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$	1
C	a) Wyznaczenie współrzędnych punktu S	1
D	b)Zapisanie $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$	1
E	b)Zapisanie równości między współrzędnymi wektorów	1
F	b)Wyznaczenie współrzędnych punktu P	1

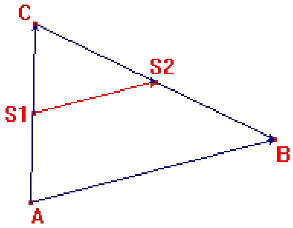
[114] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 2. Wektor w trójkącie (4 punkty)

Rozwiązanie:

a)

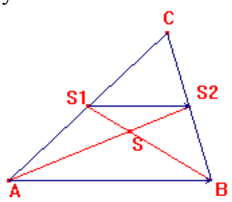
Korzystając z rysunku[115]:



zauważamy, że: $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{S_1C}$ i $\overrightarrow{CB} = 2 \cdot \overrightarrow{CS_2}$ oraz $\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_1C} + \overrightarrow{CS_2}$ stąd otrzymujemy: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{S_1C} + 2\overrightarrow{CS_2} = 2\left(\overrightarrow{S_1C} + \overrightarrow{CS_2}\right) = 2\overrightarrow{S_1S_2}$. Zatem $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{S_1S_2}$, korzystając z własności iloczynu wektora przez liczbę otrzymaliśmy, że uzyskany wektor $\overrightarrow{S_sS_2}$ ma kierunek wektora $\overrightarrow{AB}$, czyli trzeciego boku trójkąta i długość równą połowie jego długości

b)

Jaką własność środkowych widać na rysunku? [116]



Odpowiedź:

Środkowe w trójkącie dzielą się w stosunku 2:1, licząc od wierzchołka.

Czy mógłbyś ją uzasadnić?

W uzasadnieniu możemy powołać się: na część a) zadania i podobieństwo trójkątów ABS i S_2S_1S lub bezpośrednio na twierdzenie Talesa.

Punktacja

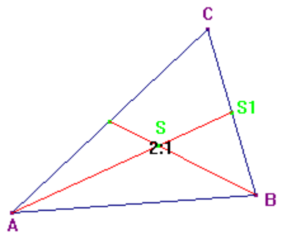
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$	1
B	Przejście na połowy wektorów i zapis $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{S_1S_2}$	1
C	Uzasadnienie	1

[115] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

[116] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 3. Środek ciężkości trójkąta (4 punkty)

Ilustracja – środek ciężkości trójkąta[117]



Niech punkty *A; B; C* mają współrzędne: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$,
zaś punkt *S(środek ciężkości):* $S(x, y)$.

Mamy wówczas: $S_1\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$, bo S_1 jest środkiem odcinka $\overline{BC}$, a ponieważ *S* dzieli odcinek $\overline{AS_1}$ w stosunku *2:1*, to współrzędne punktu *S* mają postać:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\frac{x_2+x_3}{2}+x_1}{3} \\ y = \dfrac{2\frac{y_2+y_3}{2}+y_1}{3} \end{cases}, \text{ czyli: } \begin{cases} x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3} \\ y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3} \end{cases}$$

Otrzymaliśmy, że środkiem ciężkości ΔABC o wierzchołkach w punktach:

$$A(x_1; y_1),\ B(x_2; y_2),\ C(x_3; y_3), \text{ jest punkt } S\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Stąd środek ciężkości *ΔABC,* gdzie *A(-1,-1), B(5,0), C(2,4)* ma współrzędne:

$$\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{-1+0+4}{3}\right) = (2,1)$$

Odpowiedź:

Środkiem ciężkości *ΔABC,* gdzie *A(-1,-1), B(5,0), C(2,4)* jest punkt $S(2;1)$

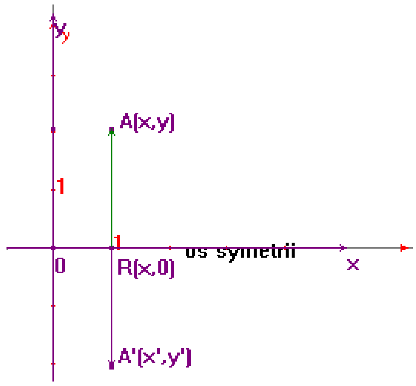
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie środka boku za pomocą współrzędnych wierzchołków	1
B	Wykorzystanie stosunku podziału odcinka punktem do zapisania równań i wyprowadzenia wzorów na środek ciężkości trójkąta	2
C	Wyznaczenie punktu S	1

[117] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 4. Symetria osiowa (3 punkty)

Ilustracja przekształcenia: [118]



Z treści zadania mamy:

$\overrightarrow{RA'} = -\overrightarrow{RA}$, ale: $\overrightarrow{RA} = [x - x;\ y - 0] = [0;\ y]$ i $\overrightarrow{RA'} = [x' - x;\ y' - 0] = [x' - x;\ y']$

Otrzymujemy, zatem równości:

$$[x' - x;\ y'] = -[0;\ y] = [0;\ -y]$$

Więc:

$$\begin{cases} x' - x = 0 \\ y' = -y \end{cases}, \text{ co daje w końcu } \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

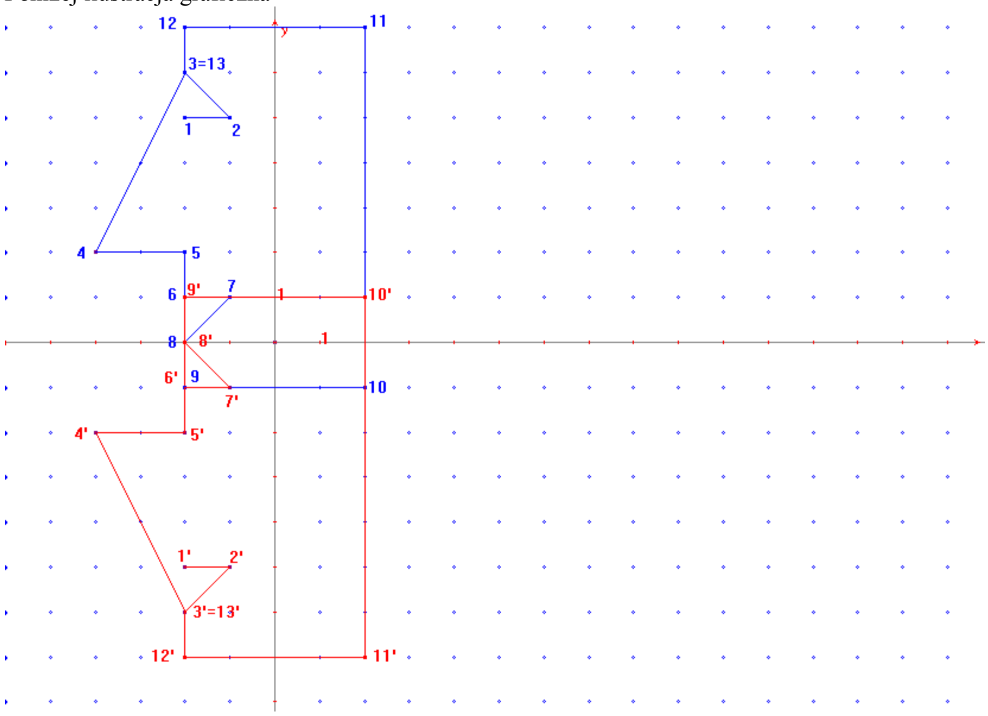
W tabeli zestawione są współrzędne oraz numery na wykresie danych punktów i ich obrazów

Nr punktu	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkt	(-2; 5)	(-1; 5)	(-2; 6)	(-4; 2)	(-2; 2)	(-2; 1)	(-1; 1)	(-2; 0)
Obraz	(-2; -5)	(-1; -5)	(-2; -6)	(-4; -2)	(-2; -2)	(-2; -1)	(-1; -1)	(-2; 0)
Nr obrazu	1’	2’	3’	4’	5’	6’	7’	8’

Nr punktu	8	9	10	11	12	13
Punkt	(-2; 0)	(-2; -1)	(2; -1)	(2; 7)	(-2; 7)	(-2; 6)
Obraz	(-2; 0)	(-2; 1)	(2; 1)	(2; -7)	(-2; -7)	(-2; -6)
Nr obrazu	8’	9’	10’	11’	12’	13’

[118] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Poniżej ilustracja graficzna[119]



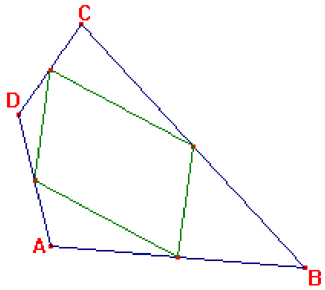
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyznaczenie wzorów na symetrię względem osi OX	1
B	Wyznaczenie współrzędnych obrazów danych punktów w symetrii względem osi OX	1
C	Wykonanie rysunku	1

[119] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Wektor! Do nogi!"

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podaj w wybranym wcześniej języku[120]



Tarea1. …Que hacemos con el Cuadrilátero? (5 puntos)

Une los medios de aquel cuadrilátero convexo ABCD. ¿Qué figura vas a obtener? Justifica tu respuesta.

Exercise 1. …what about the Quadrilateral? (5 points)

Join the points equidistant from any points of convex quadrilateral ABCD.
What figure do you get? Justify your answer.

Aufgabe 1. …und was mit dem Viereck? (5 Punkte)

Verbinde die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen gewölbten Vierecks ABCD.
Was für eine Figur bekommst du? Begründe deine Antwort!

Exercice 1. … Et quoi avec le quadrilatère ? (5 points)

Relie les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe ABCD.
Quelle figure obtiendras-tu ? Justifie la réponse.

Esercizio 1. …ed il quadrangolo? (5 punti)

Collega i centri dei lati di un qualunque quadrangolo convesso ABCD.Wuale figura ottieni? Giustifica la risposta.

[120] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 2. Podział odcinka punktem (2 punkty)[121]

Dane są punkty A(1; -2) i B(4; 1).

Znajdź współrzędne punktu P dzielącego odcinek $\overline{AB}$ w stosunku 1:2

Zadanie 3 . …analogie; analogie… (5 punktów)[122]

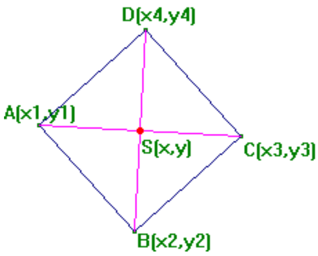
Współrzędne środka ciężkości trójkąta określają wzory:

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right);$$

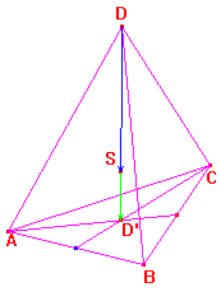
gdzie (x_1, y_1), (x_2, y_2); (x_3, y_3) są współrzędnymi jego wierzchołków.

Zbadaj; czy prawdziwe są analogiczne twierdzenia w przypadku:

a) Kwadratu[123]



b) Czworościanu foremnego[124]



(Wykorzystaj twierdzenie:

odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany przecinają się w jednym punkcie;

przy czym punkt ten dzieli każdy z odcinków w stosunku 3:1).

121 Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą

122 Zaczerpnięto z [1]

123 *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

124 *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 4. Rodzina Indianina (6 punktów) [125]

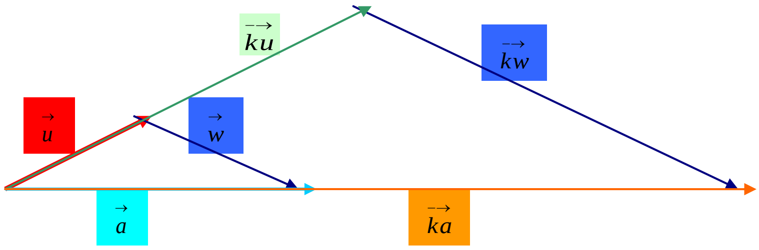
Punkt A' jest obrazem punktu A w przekształceniach opisanym związkami:
Przekształcenie I.: $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$; gdzie punkt *O* jest środkiem układu współrzędnych

Przekształcenie II.: $\overrightarrow{RA'} = -2\overrightarrow{RA}$; gdzie *R* jest rzutem prostopadłym punktu *A* na daną prostą *l* i jeśli prosta *l* jest osią *OY*. Znajdź analityczne wzory tych przekształceń.
Zaznacz na płaszczyźnie i połącz kolejno odcinkami punkty:
(-2; 5); (-1; 5); (-2; 6); (-4; 2); (-2; 2); (-2; 1); (-1; 1); (-2; 0); (-2; -1); (2; -1); (2; 7); (-2; 7); (-2; 6).
Otrzymasz profil ludzika. Wyznacz na oddzielnych rysunkach obraz „profilu ludzika" w każdym z tych przekształceń.
Wskazówka: Dla każdego punktu *(x; y)* zaznacz odpowiadający mu punkt *(x'; y')* według danego przekształcenia.

Zadanie 5. Holowniki (5 punktów) [126]

Dwa holowniki ciągną duży statek do portu. Większy z nich ma siłę uciągu 2000kG; a mniejszy 1600kG. Wiedząc; że statek ma się poruszać prosto po linii AB; zaproponuj kąty α i β; jakie kierunki holowników muszą tworzyć z linią AB.

Zadanie 6. Widziała Pani?!!... (3 punkty) [127]



Jaką własność iloczynu wektora przez liczbę można odczytać z rysunku? [128]

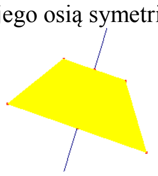
Zadanie 7. Środek symetrii (4 punkty) [129]

Dane są punkty
A(-2; 1) i *B(0; 3)* oraz punkt *S(1; -1)* będący środkiem symetrii równoległoboku *ABCD*.
Znajdź współrzędne punktów *C* i *D*.

[125] Zaczerpnięto z [2]
[126] Zaczerpnięto z [3]
[127] Zaczerpnięto z [1]
[128] *Ilustracja została wykonana w edytorze graficznym programu Word przez Helenę Ewert – Fechner*
[129] Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą

Zadanie 8 – „Oś symetrii” (4 punkty) 130

Dane są punkty *A(2; -1)* i *C(-5; 2),* które są wierzchołkami trapezu równoramiennego *ABCD* oraz prosta *l* o równaniu: $x = -3$ będąca jego osią symetrii.



Znajdź współrzędne punktów *B* i *D*. [131]

Zadanie 9. Znów środek symetrii (5 punktów)[132]

Punkt *A(-1; 2)* jest wierzchołkiem kwadratu *ABCD*
Punkt *S(2; 1)* jest jego środkiem symetrii.
Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu.

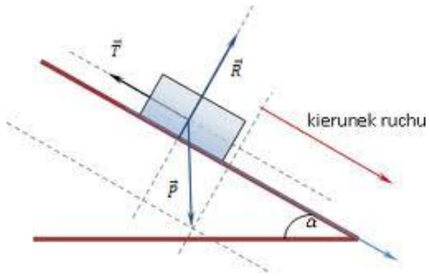
Zadanie 10. Raz;… dwa;… trzy;… szukasz Ty (3 punkty) [133]

Punkty:

$$P(-1;-2)\ \ Q(1;1)\ \ R(-2;3)$$

są wierzchołkami równoległoboku.
Znajdź punkt *S* - czwarty wierzchołek równoległoboku.
Ile jest rozwiązań tego zadania? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11. Równia (4 punkty)[134]



Na gładkiej płaszczyźnie pochyłej; tworzącej z poziomem kąt $\alpha = 30°$;
leży stalowy blok o ciężarze Q=1500N.
Wyznacz siłę F; która działając w kierunku równi utrzyma blok w równowadze
oraz reakcję R; jaką wywiera na niego ta równia.

Zadanie 12. Przeprawa przez rzekę (4 punkty)[135]

Łódka przepływa przez rzekę o szerokości 500m z prędkością 72km/h.
Prąd wody zniósł ją o 150 m w dół rzeki.
Oblicz:
Prędkość prądu rzeki oraz czas; w ciągu; którego łódka przepłynęła na drugi brzeg.

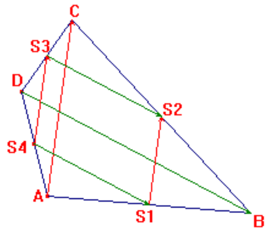
---

130 Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
131 *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
132 Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
133 Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
134 Zaczerpnięto z [4]
135 Zaczerpnięto z [5]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” – „Wektor! Do nogi!”

Zadanie 1. …a co z czworokątem? (5 punktów)[136]

Połącz środki boków dowolnego czworokąta wypukłego ABCD.
Jaką figurę otrzymasz? Odpowiedź uzasadnij.
Rozwiązanie: [137]



W ΔABC: $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ natomiast w ΔADC: $\overline{S_4S_3} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, zatem $\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_4S_3}$ *(*)*

Analogicznie w ΔABD i ΔCBD otrzymamy, że $\overrightarrow{S_4S_1}$ i $\overrightarrow{S_3S_2}$ *(**)* są równe, bo są równe połowie wektora $\overrightarrow{DB}$. Z równości *(*)* i *(**)* wynika, że w czworokącie $S_1S_2S_3S_4$ przeciwległe boki są równe i równoległe, a więc czworokąt $S_1S_2S_3S_4$jest równoległobokiem.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wykonanie rysunku i zauważenie równości wektorów	1
C	Uzasadnienie, że czworokąt jest równoległobokiem	1
D	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

Tarea1. …Que hacemos con el Cuadrilátero? (5 puntos)

En ΔABC: $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ sin embargo en ΔADC: $\overline{S_4S_3} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, entonces $S_1S_2 = S_4S_3$ $(*)$. Analógicamente en ΔABD i ΔCBD obtenemos, que S_4S_1 i $S_3S_2(**)$ son iguales porque son iguales a la mitad del vector $\vec{DB}$. De la ecuación *(*)* i *(**)* resulta que en el cuadrilátero $S_1S_2S_3S_4$ los lados opuestos son iguales y paralelos, de esta manera, el cuadrilátero $S_1S_2S_3S_4$ es el paralelogramo.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Trazar el dibujo y darse cuenta de que los vectores son de la misma longitud.	1
C	Justificar que l cuadrilátero es el paralelogramo.	1
D	Marcar la solución en un idioma extranjero	2

[136] Zadanie własne Iwony Derendarz - inspirowane zbiorami zadań i podręcznikami używanymi w pracy z klasą
[137] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Esercizio 1. …ed il quadrangolo? (5 punti)

Nel ΔABC: $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ invece nel ΔADC: $\overline{S_4S_3} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, , pertanto $\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_4S_3}$ *(*)*. Analogicamente nel ΔABD e ΔCBD otteniamo, che $\overrightarrow{S_4S_1}$ e $\overrightarrow{S_3S_2}$ *(**)* sono uguali, perché sono pari alla metà del vettore $\overrightarrow{DB}$. Dalla parità *(*)* e *(**)* risulta che nel quadrangolo $S_1S_2S_3S_4$ i lati opposti sono pari e paralleli, di conseguenza il quadrangolo $S_1S_2S_3S_4$ è parallelogrammo.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in linga polacca	1
B	Realizzare il disegno e notare la parità dei vettori	1
C	Giustificare che quadrangolo è un parallelogrammo	1
D	Scrivere la soluzione in lingua straniera	2

Exercice 1. … Et quoi avec le quadrilatère ? (5 points)

Dans ΔABC: $\overrightarrow{S_1S_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ cependant dans ΔADC: $\overrightarrow{S_4S_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_4S_3}$ *(*)*. Analogiquement dans ΔABD et ΔCBD on obtient que $\overrightarrow{S_4S_1}$ et $\overrightarrow{S_3S_2}$ *(**)* sont égaux car égaux à la moitié du vecteur $\overrightarrow{DB}$. Sur la base des égalités *(*)* i *(**)* il résulte que dans le quadrilatère $S_1S_2S_3S_4$ les côtés opposés sont égaux et parallèles alors le quadrilatère $S_1S_2S_3S_4$ est un parallélogramme.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Effectuer le dessin et remarquer l'égalité des vecteurs	1
C	Justifier que le quadrilatère est un parallélogramme	1
D	Ecrire la solution en langue polonaise	2

Aufgabe 1. …und was mit dem Viereck? (5 Punkte)

In ΔABC: $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ dagegen in ΔADC: $\overline{S_4S_3} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, also $\overrightarrow{S_1S_2} = \overrightarrow{S_4S_3}$ *(*)*. Analog in ΔABD und ΔCBD stellen wir fest, das $\overrightarrow{S_4S_1}$ i $\overrightarrow{S_3S_2}$ *(**)* sind gleich, weil sie gleich der Hälfte des Vektors $\overrightarrow{DB}$ sind. Aus der Gleichheit *(*)* und *(**) ergibt sich, dass in dem Viereck* $S_1S_2S_3S_4$ die gegenüberliegenden Seiten sind gleich und parallel, also das Viereck $S_1S_2S_3S_4$ ist ein Parallelogramm

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenz ahl
A	Übersetzen ins Polnische.	1
B	Das Anfertigen der Zeichnung und das bemerken der Gleichheit der Vektoren.	1
C	Die Begründung, das das Viereck ein Parallelogramm ist.	1
D	Die Eintragung der Lösung in der Fremdsprache.	2

Zadanie 1. …what about the Quadrilateral? (5 points)

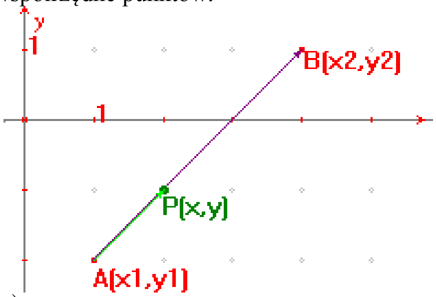
In ΔABC: $\overline{S_1S_2} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ whereas in ΔADC: $\overline{S_4S_3} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ so $S_1S_2 = S_4S_3$ (*). Likewise in ΔABD and ΔCBD we obtain S_4S_1 i S_3S_2 *(**)* are equal because they are equal half of the vector $\overrightarrow{DB}$. The equality *(*)* and *(**)* appear that in the quadrilateral $S_1S_2S_3S_4$ opposite sides are equal and parallel so the quadrilateral $S_1S_2S_3S_4$is parallelogram.

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Translation into Polish	1
B	Drawing a picture and noticing that the vectors are equal	1
C	Stating that the quadrilateral is parallelogram.	1
D	Giving the solution into a foreign language	2

Zadanie 2. Podział odcinka punktem (2 punkty)

Propozycja rozwiązania:
Przyjmujemy, następująco współrzędne punktów: [138]



$A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$; $P(x; y)$. Stosunek podziału to 1:2.

Mamy, więc $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, co daje we współrzędnych: $[x - x_1; y - y_1] = \frac{1}{3}[x_2 - x_1; y_2 - y_1]$,

następnie: $\begin{cases} x - x_1 = \frac{1}{3}(x_2 - x_1) \\ y - y_1 = \frac{1}{3}(y_2 - y_1) \end{cases}$, a po uporządkowaniu układ: $\begin{cases} x = \frac{2x_1 + x_2}{3} \\ y = \frac{2y_1 + y_2}{3} \end{cases}$.

Dla punktów $A(1; -2)$ i $B(4,1)$ otrzymujemy $P\left(\frac{2\cdot 1+4}{3}; \frac{2\cdot(-2)+1}{3}\right)$, czyli $P(2,-1)$

Odpowiedź:

Odcinek $\overline{AB}$ w stosunku 1:2 dzieli punkt $P(2,-1)$

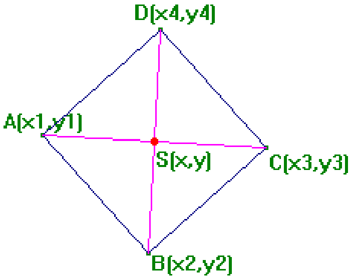
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie $AB = \frac{1}{3}AB$ oraz równości między współrzędnymi wektorów	1
B	Wyznaczenie współrzędnych punktu P	1

[138] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 3. …analogie; analogie… (5 punktów)

Ad a).



.[139]

dla kwadratu o wierzchołkach: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$ i środku przecięcia jego przekątnych $S(x, y)$ zachodzą związki:

Punkt $S(x; y)$ jest środkiem odcinka $\overline{AC}$, zatem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_3}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_3}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Punkt $S(x; y)$ jest środkiem odcinka $\overline{BD}$, zatem:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_2 + x_4}{2} \\ y = \dfrac{y_2 + y_4}{2} \end{cases} \quad (**).$$

Z *(*)* i *(**)* wynika, że:

$$\begin{cases} x + x = \dfrac{x_1 + x_3}{2} + \dfrac{x_2 + x_4}{2} \\ y + y = \dfrac{y_1 + y_3}{2} + \dfrac{y_2 + y_4}{2} \end{cases},$$

po wykonaniu dodawań mamy:

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} \\ 2y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{2} \end{cases}$$

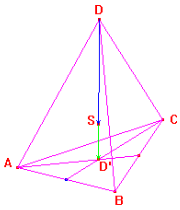
Tak, więc otrzymujemy wzory:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4} \end{cases}$$

[139] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Ad b).

W czworościanie o wierzchołkach.: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $D(x_4;\ y_4;\ z_4)$,



[140]

Środek ciężkości trójkąta ABC oznaczamy przez D', i ze wzoru na współrzędne środka ciężkości trójkąta otrzymujemy: $D'\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3};\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$, zaś środek ciężkości bryły oznaczamy $S(x, y, z)$. Z faktu: „Odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkiem ciężkości przeciwległej ściany przecinają się w jednym punkcie; przy czym punkt ten dzieli każdy z odcinków w stosunku 3:1” wynika, że punkt S dzieli odcinek $\overline{DD'}$ w stosunku 3:1, stąd otrzymujemy równość wektorów: $\overrightarrow{DS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DD'}$. Z porównania ich współrzędnych otrzymujemy:

$$\begin{cases} x - x_4 = \frac{3}{4}\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3} - x_4\right) \\ y - y_4 = \frac{3}{4}\left(\frac{y_1+y_2+y_3}{3} - y_4\right) \\ z - z_4 = \frac{3}{4}\left(\frac{z_1+z_2+z_3}{3} - z_4\right) \end{cases}, \text{ i w efekcie: } \begin{cases} x = \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \\ y = \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4} \\ z = \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4} \end{cases}$$

Odpowiedź:

Środkiem ciężkości czworościanu, którego wierzchołkami są punkty:

$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $C(x_3;\ y_3;\ z_3)$, $D(x_4;\ y_4;\ z_4)$

jest punkt $S\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4};\ \frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4};\ \frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}\right)$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	a) Zapisanie S jako środka boku $\overline{AC}$ i jako środka $\overline{BD}$	1
B	a) Dodanie równań stronami i wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości kwadratu	1
C	b) Zapisanie środka ciężkości jednej ze ścian czworościanu we współrzędnych	1
D	b) Zapisanie równości między współrzędnymi wektorów z wykorzystaniem informacji o stosunku podziału	1
E	b) Wyznaczenie współrzędnych środka ciężkości czworościanu	1

[140] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 4. Rodzina Indianina (6 punktów)

Ad I)

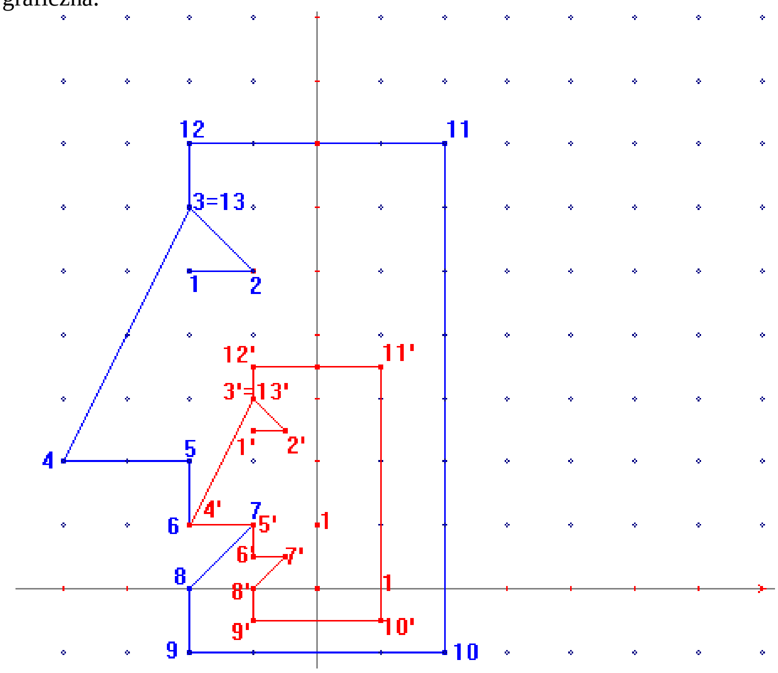
Punkty mają współrzędne: $O(0,0)$, $A(x,y), A'(x',y')$, zatem z równości wektorów: $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

uzyskujemy: $[x',y'] = \frac{1}{2}[x,y]$, więc: $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ t' = \frac{1}{2}y \end{cases}$

W tabeli zestawione są współrzędne oraz numery na wykresie danych punktów i ich obrazów

Nr	1	2	3	4	5	6	7
Punkt	(-2; 5)	(-1; 5)	(-2; 6)	(-4; 2)	(-2; 2)	(-2; 1)	(-1; 1)
Obraz	(-1; 2,5)	(-0,5; 2,5)	(-1; 3)	(-2; 1)	(-1; 1)	(-1; 0,5)	(-0,5; 0,5)
Nr ‘	1’	2’	3’	4’	5’	6’	7’
Nr	8	9	10	11	12	13	
Punkt	(-2; 0)	(-2; -1)	(2; -1)	(2; 7)	(-2; 7)	(-2; 6)	
Obraz	(-1; 0)	(-1; -0,5)	(1; 0,5)	(1; 3,5)	(-1; 3,5)	(-1; 3)	
Nr ‘	8’	9’	10’	11’	12’	13’	

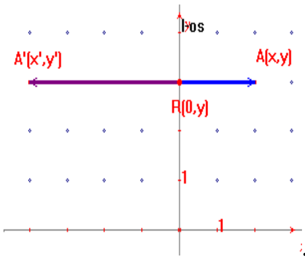
Ilustracja graficzna.[141]



[141] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Ad II).

Przyjmujemy, że punkty: *A; A'* mają współrzędne: $A(x;\, y)$; $A'(x';\, y')$ wtedy $R(0;\, y)$. Zatem wektory mają współrzędne: $\overrightarrow{RA'}=[x', y'-y]$; $\overrightarrow{RA}=[x,0]$, więc z równości wektorów: $\overrightarrow{RA'}=-2\overrightarrow{RA}$ wynika, że $[x', y'-y]=-2[x,0]$, mamy więc: $\begin{cases} x'=-2x \\ y'=y \end{cases}$.

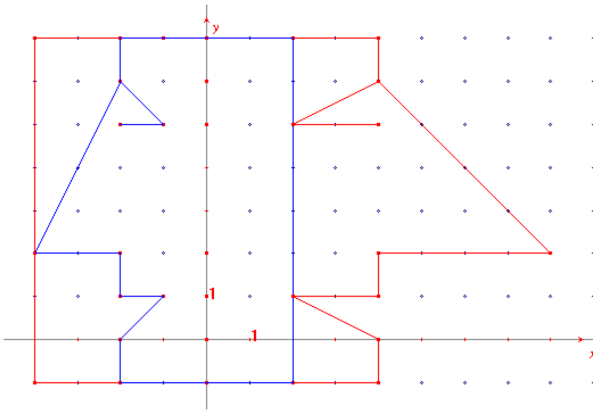


.[142] Zatem przekształcenie II). określone jest wzorami: $\begin{cases} x'=-2x \\ y'=y \end{cases}$.

W tabeli zestawione są współrzędne danych punktów i ich obrazów

Punkt *(x; y)*	(-2; 5)	(-1; 5)	(-2; 6)	(-4; 2)	(-2; 2)	(-2; 1)	(-1; 1)
Obraz *(x'; y')*	(4; 5)	(2; 5)	(4; 6)	(8; 2)	(4; 2)	(4; 1)	(2; 1)
Punkt (x; y)	(-2; 0)	(-2; -1)	(2; -1)	(2; 7)	(-2; 7)	(-2; 6)	
Obraz (x'; y')	(4; 0)	(4; -1)	(-4; -1)	(-4; 7)	(4; 7)	(4; 6)	

Poniżej ilustracja graficzna:



Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyznaczenie wzorów na jednokładność	1
B	Przekształcenie względem nich danych punktów	1
C	Wykonanie rysunku	1
D	Wyznaczenie wzorów na powinowactwo osiowe	1
E	Przekształcenie względem nich danych punktów	1
F	Wykonanie rysunku	1

[142] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

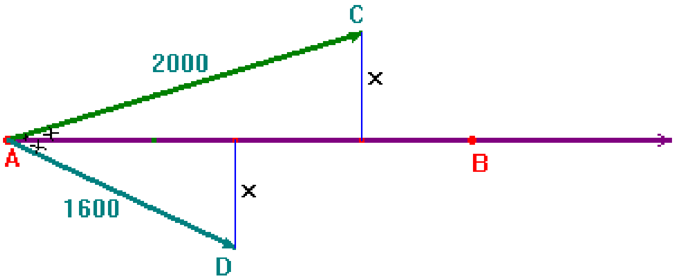
Zadanie 5 – „Holowniki” - (5 punktów)

Dane:

$\vec{F_1} = \overrightarrow{AC}$; $F_1 = 2000\ kG$

$\vec{F_2} = \overrightarrow{AD}$; $F_2 = 1600\ kG$

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$; $|\sphericalangle BAD| = \beta$



[143].

Aby statek nie zboczył z toru *AB* odcinki oznaczone *x* muszą być równe.

Zatem $\left(\frac{x}{F_1} = \sin\alpha\right) \Rightarrow (x = F_1 \cdot \sin\alpha)$

oraz $\left(\frac{x}{F_2} = \sin\beta\right) \Rightarrow (x = F_2 \cdot \sin\beta)$

Mamy, więc

$F_1 \sin\alpha = F_2 \sin\beta$, czyli $\sin\alpha = \frac{F_2}{F_1}\sin\beta$, $\sin\alpha = \frac{1600}{2000}\sin\beta$,

$\sin\alpha = \frac{4}{5}\sin\beta$, np. $\sin\beta = \frac{1}{2}$ dla $\beta = 30^o$ daje $\sin\alpha = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ i kąt $\alpha \approx 23^o35'$

Odpowiedź:

Holowniki muszą z linią AB tworzyć takie kąty α i β, że: $\sin\alpha = \frac{4}{5}\sin\beta$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wykonanie rysunku ilustrującego sytuację w zadaniu	1
B	Zapisanie odcinka x za pomocą F_1 i F_2	2
C	Ułożenie równania	1
D	Propozycja konkretnych wartości kątowych	1

[143] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

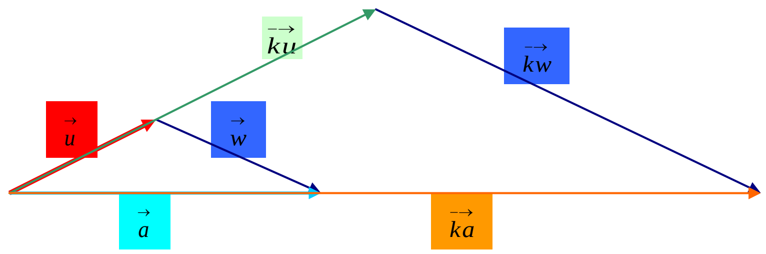
Zadanie 6. Widziała Pani?!!... (3 punkty)

Poniższe równości wynikają z definicji iloczynu wektora przez liczbę

$\overrightarrow{ku} = k \cdot \vec{u}$ (*)

$\overrightarrow{kw} = k \cdot \vec{w}$ (**)

$\overrightarrow{ka} = k \cdot \vec{a}$ (***)



Na rysunku widać, że: $\vec{u} + \vec{w} = \vec{a}$ oraz $\overrightarrow{ku} + \overrightarrow{kw} = \overrightarrow{ka}$

$\overrightarrow{ku} + \overrightarrow{kw} = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{w} = k \cdot \left(\vec{u} + \vec{w}\right) = k \cdot \vec{a}$

Uwzględniając równości (*), (**), (***) otrzymujemy:

$\overrightarrow{ka} = k \cdot \vec{a} = k \cdot \left(\vec{u} + \vec{w}\right) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{w}$

Powyższe równości świadczą o rozdzielności iloczynu wektora przez liczbę względem sumy wektorów.

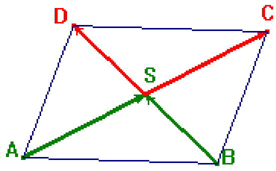
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zauważenie, że $\vec{u} + \vec{w} = \vec{a}$	1
B	$k\vec{u} + k\vec{w} = k(\vec{u} + \vec{w})$	1
C	$k(\vec{u} + \vec{w}) = k\vec{a}$	1

Zadanie 7. Środek symetrii (4 punkty)

Dane:[144]

A(-2,1)
B(0,3)
S(1; -1)



Szukane:

$C(x_C; y_C)$
$D(x_D; y_D)$

Sposób I:

Korzystamy ze wzoru na współrzędne środka odcinka:

Punkt *S(1; -1)* jest środkiem odcinka $\overline{AC}$, zatem spełnione są równości:

$$\begin{cases} \frac{-2+x_C}{2}=1 \\ \frac{1+y_C}{2}=-1 \end{cases}, \text{ czyli: } \begin{cases} x_C=4 \\ y_C=-3 \end{cases}$$

Punkt *S(1; -1)* jest środkiem odcinka $\overline{BD}$, zatem spełnione są równości:

$$\begin{cases} \frac{0+x_d}{2}=1 \\ \frac{3+y_d}{2}=-1 \end{cases}, \text{ czyli: } \begin{cases} x_d=2 \\ y_d=-5 \end{cases}$$

Mamy, więc punkty *C(4; -3)* i *D(2; -5).*

Sposób II:

Korzystamy z równości wektorów o danych współrzędnych:

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SC} \qquad \overrightarrow{AS}=[1-(-2); -1-1]=[3; -2] \qquad \overrightarrow{SC}=[x_C-1; y_C-(-1)]=[x_C-1; y_C+1]$$

z powyższych równości otrzymujemy, że

$$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow [x_C-1; y_C+1]=[3; -2] \Leftrightarrow x_C-1=3 \ i \ y_C+1=-2 \Leftrightarrow x_C=4 \ i \ y_C=-3$$

Analogicznie $\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SD}$; $\overrightarrow{BS}=[1-0; -1-3]=[1; -4]$; $\overrightarrow{SD}=[x_D-1; y_D+1]$

$$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow [x_D-1; y_D+1]=[1; -4] \Leftrightarrow x_D=2 \ i \ y_D=-5$$

Odpowiedź:

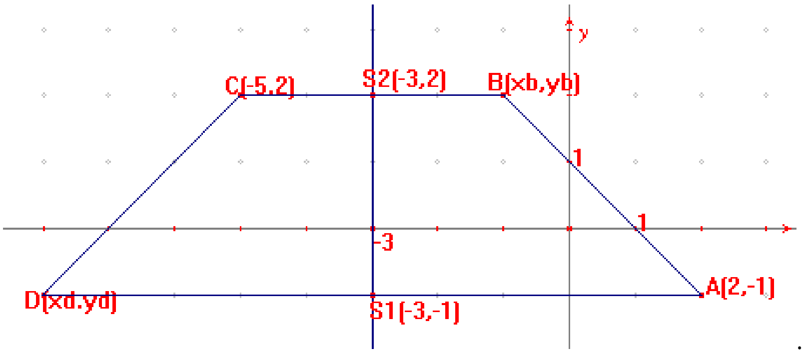
Pozostałymi wierzchołkami równoległoboku są punkty *C(4; -3)* i *D(2; -5).*

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie równań prowadzących do wyznaczenia punktu C	1
B	Wyznaczenie współrzędnych punktu C	1
C	Zapisanie równań prowadzących do wyznaczenia punktu D	1
D	Wyznaczenie współrzędnych punktu D	1

[144] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 8. Oś symetrii (*4 punkty)*



[145]

Przyjmując oznaczenia jak na rysunku i korzystając ze wzorów na współrzędne środka odcinka mamy:

$$\begin{cases} \dfrac{-5+x_b}{2} = -3 \\ \dfrac{2+y_b}{2} = 2 \end{cases}$$

czyli:

$$\begin{cases} x_b = -1 \\ y_b = 2 \end{cases}$$

i dla punktu D:

$$\begin{cases} \dfrac{2+x_d}{2} = -3 \\ \dfrac{-1+y_d}{2} = -1 \end{cases}$$

więc:

$$\begin{cases} x_d = -8 \\ y_d = -1 \end{cases}$$

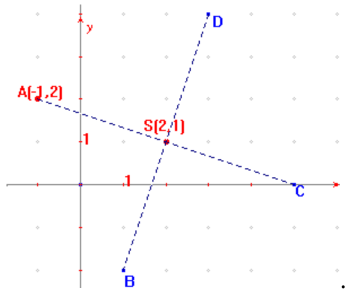
Uzyskane współrzędne to: *B(-1,2), D(-8,-1).*

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie równań prowadzących do wyznaczenia punktu B	1
B	Wyznaczenie współrzędnych punktu B	1
C	Zapisanie równań prowadzących do wyznaczenia punktu D	1
D	Wyznaczenie współrzędnych punktu D	1

[145] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 9. Znów środek symetrii (5 punktów)



[146]

Przyjmując, że punkt $C(x_C, y_C)$, otrzymujemy: $\begin{cases} \dfrac{x_C - 1}{2} = 2 \\ \dfrac{y_C + 2}{2} = 1 \end{cases}$ stąd: $C(5,0)$.

Prosta *BD* jest prostopadła do *AC*, której współczynnik kierunkowy $a = \dfrac{0-2}{5+1} = -\dfrac{1}{3}$.

Zatem równanie prostej *BD*: $y - 1 = 3(x-2)$, ma po przekształceniach postać: $y = 3x - 5$.

Szukamy punktów *B* i *D* jako punktów wspólnych prostej BD i okręgu o środku w punkcie *S* i promieniu $r = |SA| = \sqrt{(2+1)^2 + \left(1-2^2\right)} = \sqrt{10}$.

Tak, więc: $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10 \end{cases}$

Po podstawieniu: $(x-2)^2 + (3x-5-1)^2 = 10$,

dalej $(x-2)^2 + (3x-6)^2 = 10$, $(x-2)^2 + [3\cdot(x-2)]^2 = 10$ $10(x-2)^2 = 10$, $(x-2)^2 = 1$,

więc $x - 2 = 1$ lub $x - 2 = -1$,

co daje w konsekwencji punkty: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$ i $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$.

Punkty $B(1,-2)$ i $D(3,4)$

Odpowiedź:

Pozostałymi wierzchołkami kwadratu są punkty: $C(5;\,0)$; $B(1,-2)$ oraz $D(3,4)$

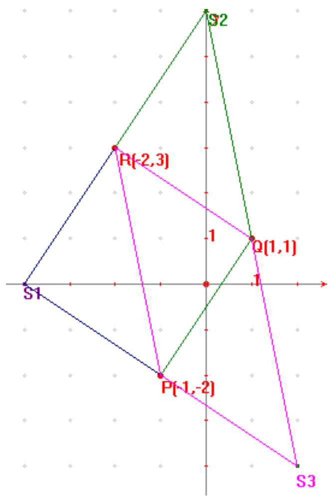
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyznaczenie współrzędnych punktu C	1
B	Wyznaczenie współczynników kierunkowych prostych AC i BD	1
C	Zapisanie związków prowadzących do znalezienia pozostałych wierzchołków kwadratu	1
D	Doprowadzenie do równania z jedna niewiadomą	1
E	Wyznaczenie współrzędnych punktów B i D	1

[146] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 10. Raz;… dwa;… trzy;… szukasz Ty (3 punkty)

1. Równoległobok PQRS$_1$:[147]



$\overrightarrow{PQ} = [1-(-1); 1-(-2)] = [2; 3]$

$\overrightarrow{S_1R} = [-2-x; 3-y]$

Wektory $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{S_1R}$, mają, więc odpowiednio równe współrzędne: $[2; 3] = [-2-x; 3-y]$,

co daje $\begin{cases} -x-2=2 \\ 3-y=3 \end{cases}$

i punkt $S_1(-4; 0)$

2. Równoległobok PQS$_2$R

$\overrightarrow{PQ} = [2; 3]$

$\overrightarrow{RS_2} = [x-(-2); y-3]$

Wektory $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS_2}$, mamy, więc równe współrzędne: $[2; 3] = [x+2; y-3]$,

czyli $\begin{cases} x+2=2 \\ y-3=3 \end{cases}$,

więc punkt $S_2(0; 6)$

3. Równoległobok PS$_3$QR

$\overrightarrow{RQ} = [1-(-2); 1-3] = [3; -2]$

i $\overrightarrow{PS_3} = [x-(-1); y-(-2)]$

Wektory $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{PS_3}$,

więc $[3; -2] = [x+1; y+2]$,

co prowadzi do układu:

$\begin{cases} x+1=3 \\ y+2=-2 \end{cases}$

zatem trzeci punkt $S_3(2; -4)$.

To zadanie ma trzy rozwiązania, ponieważ przy danych 3 punktach mamy trzy możliwości uzyskania obrazu odcinka utworzonego na dwóch punktach w symetrii środkowej wg trzeciego punktu.

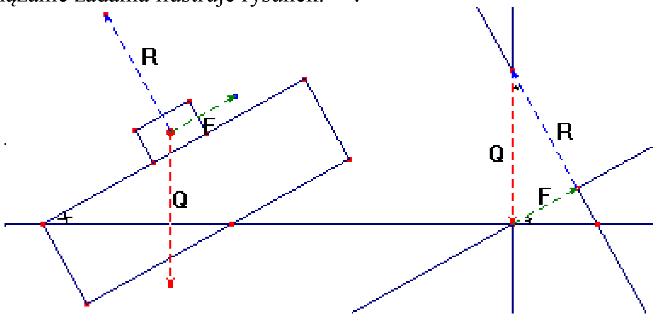
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyznaczenie czwartego wierzchołka z wykorzystaniem równości wektorów	1
B	Po punkcie za każdy następny przypadek	2

[147] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 11. Równia (4 punkty)[148]

Układ sił $\vec{Q}$, $\vec{F}$, $\vec{R}$ działających na blok jest w równowadze, co oznacza $\vec{Q}+\vec{F}+\vec{R}=\vec{0}$.
Na rysunku z początku i końca siły $\vec{Q}$, wykreślonej w przyjętej skali, poprowadzono linie równoległe do sił $\vec{F}$ i $\vec{R}$ otrzymując zamknięty trójkąt prostokątny.
Wartości liczbowe sił F i R można obliczyć bezpośrednio z rysunku:
$\frac{F}{Q}=\sin\alpha$, zatem $F=Q\sin\alpha=1500N\cdot 0{,}5=750N$, oraz $\frac{R}{Q}=\cos\alpha$,
zatem $R=Q\cos\alpha=1500N\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=750\cdot\sqrt{3}N\approx 1300N$.
Wykreślne rozwiązanie zadania ilustruje rysunek.[149].



Odpowiedź:

Siła F; która działając w kierunku równi utrzyma blok w równowadze ma wartość *750 N*, natomiast reakcja R; jaką ta równia wywiera na blok ma wartość około *1300 N*.

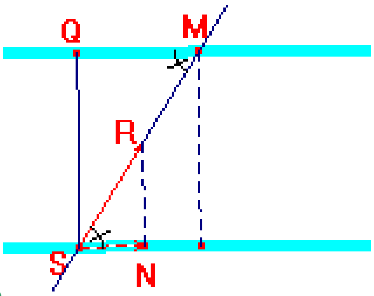
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wykonanie rysunku ciężaru na równi z działającymi siłami	1
B	Wykreślenie sił w trójkącie prostokątnym	1
C	Wyznaczenie wartości siły $\vec{F}$	1
D	Wyznaczenie wartości siły $\vec{R}$	1

[148] Zaczerpnięto z [4]
[149] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 12. Przeprawa przez rzekę (4 punkty)

Rozwiązanie



Oznaczenia: jak na rysunku.[150]

$\overrightarrow{SR} = \vec{v}$, v -prędkość własna łódki

$\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{v_r}$, v_r - prędkość rzeki

$|SM| = s$, droga przebyta przez łódkę, $|QM| = 150m$, $|SQ| = 500m$.

$v = 7{,}2 km/h = \frac{7200m}{60\min} = 120m/\min$.

Droga przebyta przez łódkę: $s = \sqrt{500^2 + 150^2} = \sqrt{272500} \approx 522m$.

Możemy obliczyć czas potrzebny na pokonanie tej drogi $t = \frac{s}{v_r} = \frac{522}{120} = 4{,}35\min. = 4\min.21s.$

Zauważamy również podobieństwo

$\Delta SNR \approx \Delta MQS$, (trójkąty prostokątne o przystającym jeszcze jednym kącie),

więc $\frac{v_r}{v} = \frac{s}{|QM|}$.

Mamy, zatem:

$v_r = \frac{150 \cdot 120}{522} \approx 34{,}5m/\min. = 0{,}58m/s$.

Odpowiedź:

Prędkość prądu rzeki wynosi $0{,}58\ m/s$. Łódka przepłynęła na drugi brzeg po *4 min.* i *21 s.*

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Wyznaczenie drogi s	1
C	Wyznaczenie czasu potrzebnego na przeprawę	1
D	Wyznaczenie prędkości prądu rzeki	1

[150] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Pakiet M–1.5 „Sinus, cosinus daj Boże trzy minus…”

I. Treści merytoryczne:

- definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego,
- wartości funkcji trygonometrycznych kątów: 30^0, 45^0, 60^0,
- związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta,
- związki między funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych tego samego trójkąta prostokątnego, trójkąty prostokątne,
- wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, gdy dana jest wartość jednej z nich.

II. Cele szczegółowe:

- utrwalenie pojęć sinus kąta, cosinus kąta, tangens kąta ostrego,
- doskonalenie umiejętności stosowania związków między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego,
- doskonalenie umiejętność stosowania funkcji trygonometrycznych do zadań praktycznych,
- kształcenie umiejętności rozstrzygania problemu „czy istnieje taki kąt?”,
- doskonalenie sprawności wykonywania działań na liczbach – również niewymiernych.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.]Cewe A., Nahorska H., *Zbiór zadań dla klasy 1. Matematyka w otaczającym nas świecie. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk 2004
[2.]Cewe A., Krawczyń M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R., *Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik dla klasy **1** kształcenie w zakresie podstawowym*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2008
[3.]Masłowska D., Masłowski T., Makowski A., Nodzyński P., Słowińska E., Strzelczyń A., *Zbiór zadań i testów maturalnych do obowiązkowej matur z matematyki (zgodnych ze standardami obowiązującymi od 2010 roku)*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2009
[4.]http://www.zadania.info

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1.]Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od roku 2010. Zbiór zadań maturalnych z zakresu kształcenia podstawowego*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2009
[2.]Masłowska D., Masłowski T., Makowski A., Nodzyński P., Słowińska E., Strzelczyń A., *Zbiór zadań i testów maturalnych do obowiązkowej matur z matematyki (zgodnych ze standardami obowiązującymi od 2010 roku)*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2009
[3.]Pawłowski H., *Matematyka 1 zakres podstawowy,* Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Rumia 2002
[4.]Wojtowicz W., Kielecki B., Czyżykowski M., *Trygonometria dla klas X i XI*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1961
[5.] http://matematyka.pisz.pl/strona/718.html

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

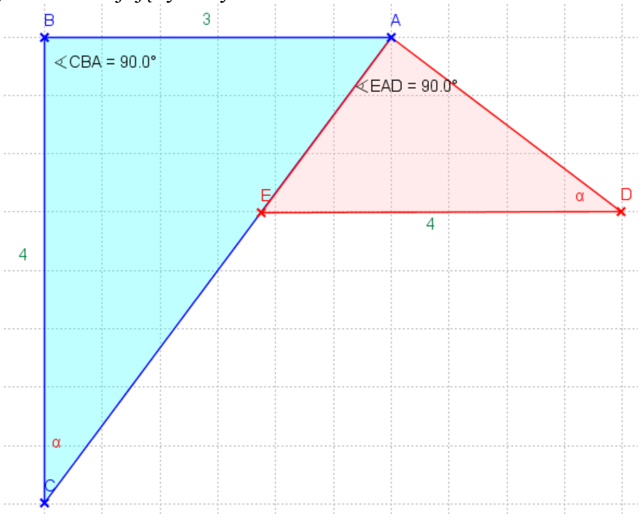
1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" – „Sinus, kosinus, daj Boże trzy minus..."

W tym zadaniu należy:

- Przetłumaczyć treść zadania na język polski
- Rozwiązać zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Ilustracja do wszystkich wersji językowych[151]



Warm up Two right-angled triangles (10 points)

Assuming the data as shown in the figure below, calculate: $\sin\alpha, \cos\alpha$ and the length of the catheti of the triangle EDA

Exercice pour entraînement Deux Triangles Rectangles (10 points)

En admettant les données comme sur l'image ci-dessous, calcule: $\sin\alpha, \cos\alpha$ et les cathètes du triangle EDA.

Ejercicio de iniciación Dos triángulos rectángulos (10 puntos)

Admitiendo los datos como los del dibujo de más abajo, calcula: $\sin\alpha, \cos\alpha$ y las longitudes de los cateos del triángulo EDA

Aufgaben zur Erwärmung Zwei rechteckige Dreiecke (10 Punkte)

Nimm die Angaben wie auf der Zeichnung unten an und berechne: $\sin\alpha, \cos\alpha$ sowie die Längen von Katheten des Dreiecks EDA.

Esercizi di apertura esercizio per riscaldare Due Trangoli Rettangoli (10 punti)

Ammessi i dati riportati sul disegno qui sotto, calcola: $\sin\alpha, \cos\alpha$ nonché le lunghezze dei cateti del triangolo EDA.

[151] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 1. Wysoki czy niski? (8 punktów)[152]

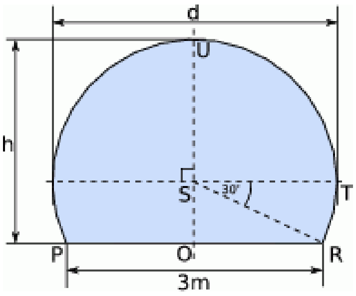
Wysokość trójkąta równoramiennego jest dwa razy krótsza niż jego ramię.
Oblicz miary kątów tego trójkąta. Rozważ dwa przypadki.

Zadanie 2. Od sumy sinusów, do iloczynu cosinusów (4 punkty) [153]

W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β spełniony jest warunek: $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

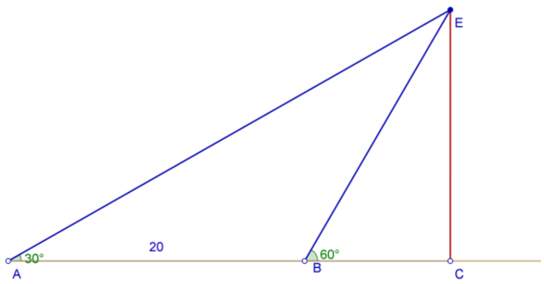
Oblicz iloczyn cosinusów kątów ostrych tego trójkąta.

Zadanie 3. Łuk podkowiasty (4 punkty) [154]



W architekturze islamu często stosowanym elementem był *łuk podkowiasty*.
Schemat okna w kształcie takiego łuku (łuku okręgu) przedstawiono na rysunku powyżej.
Korzystając z danych na rysunku oblicz wysokość okna h i największy prześwit d.

Zadanie 4. Elektrownia wiatrowa (6 punktów)[155]



Ewa jadąc drogą widziała elektrownię wiatrową oznaczoną na rysunku[156] literą E.
Z punktu A widziała ją pod kątem $30°$ stopni do kierunku drogi. A z punktu B pod kątem $60°$.
Przejeżdżając przez punkt C minęła elektrownię. Długość odcinka $\overline{AB}$ jest równa $20\,km$.
Oblicz: (W rachunkach przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}75$.)

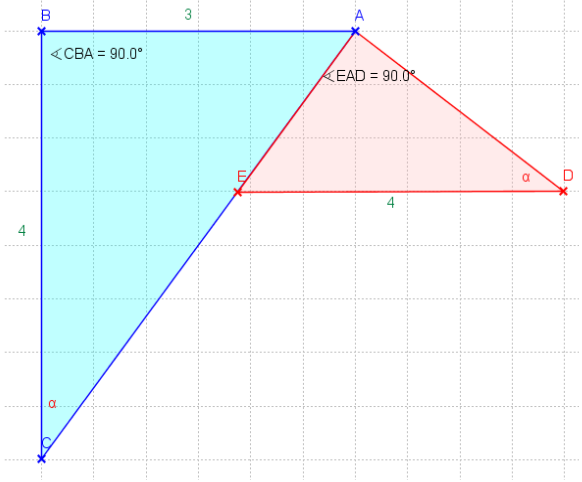
- miary kątów $\angle AEB$ i $\angle BEC$
- długość odcinka $\overline{BC}$
- odległość elektrowni od drogi

[152] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 2.27, Strona 47
[153] Zaczerpnięto z [3] - Zadanie 5, strona 98
[154] Zaczerpnięto z [4] - d555/5180631
[155] Zaczerpnięto z [4] - d555/220466
[156] Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” - „Sinus, cosinus daj Boże trzy minus...”

Ćwiczenie na rozgrzewkę Dwa trójkąty prostokątne (10 punktów)

Przyjmując dane jak na rysunku, [157]

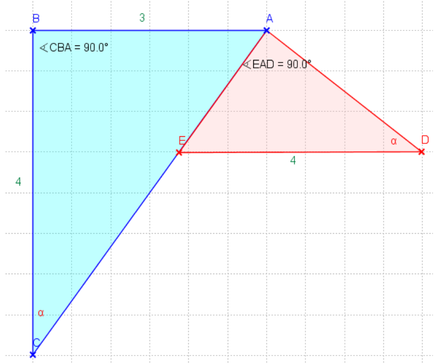


Oblicz:

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ oraz długości przyprostokątnych trójkąta EDA.

Szkic rozwiązania:

Dane:



Trójkąty ΔABC oraz ΔEDA prostokątne, w których jeden z kątów ostrych ma miarę α

W ΔABC: $|AB| = 3$; $|BC| = 4$

W ΔEDA: $|DE| = 4$

Szukane:

$\sin\alpha = ?$, $\cos\alpha = ?$

---

[157] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Przyprostokątne ΔEDA: $|AE| = ?$ oraz $|AD| = ?$

W ΔABC:

1. Na mocy twierdzenia Pitagorasa: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. Uwzględniając dane z rysunku otrzymujemy $\left(|AC|^2 = 3^2 + 4^2\right) \Rightarrow \left(|AC|^2 = 9 + 16\right) \Rightarrow |AC|^2 = 25$, zatem $|AC| = 5$
2. Z definicji funkcji trygonometrycznych otrzymujemy:

I. $\sin\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$, stąd $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

II. $\cos\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$, stąd $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

W ΔEDA:

I. $\left(\sin\alpha = \frac{|AE|}{|DE|}\right) \wedge \left(\sin\alpha = \frac{3}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, zatem $\frac{|AE|}{4} = \frac{3}{5}$, stąd $|AE| = \frac{3}{5} \cdot 4$, czyli $|AE| = \frac{12}{5}$

II. $\left(\cos\alpha = \frac{|AD|}{|DE|}\right) \wedge \left(\cos\alpha = \frac{4}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, zatem $\frac{|AD|}{4} = \frac{4}{5}$, stąd $|AD| = \frac{4}{5} \cdot 4$, czyli $|AD| = \frac{16}{5}$

Odpowiedź:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Przyprostokątne w trójkącie ΔEDA wynoszą: $\frac{12}{5}$ oraz $\frac{16}{5}$.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wyznaczenie długości przeciwprostokątnej $\lvert AC\rvert$	1
C	Obliczenie $\sin\alpha$, $\cos\alpha$	2
D	Wyznaczenie długości przyprostokątnej $\lvert AE\rvert$	2
E	Wyznaczenie długości przyprostokątnej $\lvert AD\rvert$	2
F	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

Warm up Two right-angled triangles (10 points)

Dane:

Right-angled triangles: ΔABC and ΔEDA, in which one of the acute angles has measure α.

In ΔABC: $|AB| = 3$; $|BC| = 4$

In ΔEDA: $|DE| = 4$

Search:

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$

The catheti ΔEDA, That is: $|AE| = ?$ and $|AD| = ?$

In ΔABC:

1. On the strength of the Pythagoras theorem: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. Taking into account the data from the figure we get: $\left(|AC|^2 = 3^2 + 4^2\right) \Rightarrow \left(|AC|^2 = 9 + 16\right) \Rightarrow |AC|^2 = 25$, so $|AC| = 5$

2. On be basis of the definition of trigonometric functions we get:

$$\text{I. } \sin\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}, \text{ so } \sin\alpha = \frac{3}{5} \qquad \text{II. } \cos\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}, \text{ so } \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

In ΔEDA:

I. $\left(\sin\alpha = \frac{|AE|}{|DE|}\right) \wedge \left(\sin\alpha = \frac{3}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, then $\frac{|AE|}{4} = \frac{3}{5}$, so $|AE| = \frac{3}{5}\cdot 4$, so $|AE| = \frac{12}{5}$

II. $\left(\cos\alpha = \frac{|AD|}{|DE|}\right) \wedge \left(\cos\alpha = \frac{4}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, then $\frac{|AD|}{4} = \frac{4}{5}$, so $|AD| = \frac{4}{5}\cdot 4$, so $|AD| = \frac{16}{5}$

Answer:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. The catheti in the triangle ΔEDA are: $\frac{12}{5}$ and $\frac{16}{5}$.

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Translation into Polish	1
B	Giving the length of the hypotenuse $\overline{AC}$	1
C	Calculating $\sin\alpha$, $\cos\alpha$	2
D	Giving the length of the cathetus $\overline{AE}$	2
E	Giving the length of the cathetus $\overline{AD}$	2
F	Writing the solution in a foreign language	2

Exercice pour entraînement Deux Triangles Rectangles (10 points)

Données:

Les triangles rectangles: ΔABC et ΔEDA, dans lesquels l'un des angles aigus a la mesure α

Dans ΔABC: $|AB| = 3$; $|BC| = 4$

Dans ΔEDA: $|DE| = 4$

Recherchés:

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$

Cathètes ΔEDA, alors: $|AE| = ?$ et $|AD| = ?$

Dans ΔABC:

1. Conformément au théorème de Pythagore $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. En prenant en considération les données de l'image, on obtient $(|AC|^2 = 3^2 + 4^2) \Rightarrow (|AC|^2 = 9 + 16) \Rightarrow |AC|^2 = 25$, alors $|AC| = 5$
2. D'après la définition des fonctions trigonométriques on obtient:

I. $\sin\alpha = \dfrac{|AB|}{|AC|}$, d'où $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ II. $\cos\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|}$, d'où $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

Dans ΔEDA:

I. $\left(\sin\alpha = \dfrac{|AE|}{|DE|}\right) \wedge \left(\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, alors $\dfrac{|AE|}{4} = \dfrac{3}{5}$, d'où $|AE| = \dfrac{3}{5} \cdot 4$, alors $|AE| = \dfrac{12}{5}$

II. $\left(\cos\alpha = \dfrac{|AD|}{|DE|}\right) \wedge \left(\cos\alpha = \dfrac{4}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, alors $\dfrac{|AD|}{4} = \dfrac{4}{5}$, d'où $|AD| = \dfrac{4}{5} \cdot 4$, alors $|AD| = \dfrac{16}{5}$

Réponse:

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Les cathètes dans le triangle ΔEDA s'élèvent à: $\dfrac{12}{5}$ et $\dfrac{16}{5}$.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Déterminer la longeur de la cathète $\overline{|AC|}$	1
C	Calculer $\sin\alpha$, $\cos\alpha$	2
D	Déterminer la longeur de la cathète $\overline{|AE|}$	2
E	Déterminer la longeur de la cathète $\overline{|AD|}$	2
F	Ecrire la solution en langue étrangere	2

Ejercicio de iniciación Dos triángulos rectángulos (10 puntos)

Datos:

Los triángulos rectángulos:
ΔABC y ΔEDA, en los cuales uno de ángulos agudos tiene la medida α
W ΔABC: $|AB| = 3$; $|BC| = 4$
W ΔEDA: $|DE| = 4$

Buscados:

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$
Cateos ΔEDA, entonces: $|AE| = ?$ y $|AD| = ?$

W ΔABC:

1. Basándonos en el teorema de Pitágoras: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. Tomando los datos del dibujo en consideración obtenemos: $\left(|AC|^2 = 3^2 + 4^2\right) \Rightarrow \left(|AC|^2 = 9 + 16\right) \Rightarrow |AC|^2 = 25$, Entonces $|AC| = 5$

2. De la definición trigonométrica obtenemos:

I. $\sin\alpha = \dfrac{|AB|}{|AC|}$, stąd $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ II. $\cos\alpha = \dfrac{|BC|}{|AC|}$, stąd $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

En ΔEDA:

I. $\left(\sin\alpha = \dfrac{|AE|}{|DE|}\right) \wedge \left(\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, así $\dfrac{|AE|}{4} = \dfrac{3}{5}$, se deduce que $|AE| = \dfrac{3}{5} \cdot 4$, es decir $|AE| = \dfrac{12}{5}$

II. $\left(\cos\alpha = \dfrac{|AD|}{|DE|}\right) \wedge \left(\cos\alpha = \dfrac{4}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, así $\dfrac{|AD|}{4} = \dfrac{4}{5}$,

se deduce que $|AD| = \dfrac{4}{5} \cdot 4$, es decir $|AD| = \dfrac{16}{5}$

La respuesta:

$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$. Los cateos en el triángulo ΔEDA tienen: $\dfrac{12}{5}$ y $\dfrac{16}{5}$.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Marcar la longitud de la hipotenusa $\overline{AC}$	1
C	Calcular $\sin\alpha$, $\cos\alpha$	2
D	Marcar la longitud del cateo $\overline{AE}$	2
E	Marcar la longitud del cateo $\overline{AD}$	2
F	Marcar la solución en un idioma extranjero	2

Aufgabe zur Erwärmung Zwei rechteckige Dreiecke (10 Punkte)

Angaben:

Rechteckige Dreiecke: ΔABC und ΔEDA, in denen einer von den spitzen Winkeln das Maß α hat

In ΔABC: $|AB| = 3$; $|BC| = 4$

In ΔEDA: $|DE| = 4$

Gesucht:

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$

Katheten ΔEDA, also: $|AE| = ?$ und $|AD| = ?$

In ΔABC:

1. Aufgrund des Pythagoräischen Lehrsatzes : $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. Die Angaben aus der Zeichnung berücksichtigend, bekommen wir: $\left(|AC|^2 = 3^2 + 4^2\right) \Rightarrow \left(|AC|^2 = 9 + 16\right) \Rightarrow |AC|^2 = 25$, also $|AC| = 5$

2. Aus Definitionen von trigonometrischen Funktionen bekommen wir:

I. $\sin\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$, daher $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ II. $\cos\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$, daher $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

In ΔEDA:

I. $\left(\sin\alpha = \frac{|AE|}{|DE|}\right) \wedge \left(\sin\alpha = \frac{3}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, also $\frac{|AE|}{4} = \frac{3}{5}$, daher $|AE| = \frac{3}{5} \cdot 4$, also $|AE| = \frac{12}{5}$

II. $\left(\cos\alpha = \frac{|AD|}{|DE|}\right) \wedge \left(\cos\alpha = \frac{4}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, also $\frac{|AD|}{4} = \frac{4}{5}$, daher $|AD| = \frac{4}{5} \cdot 4$, also $|AD| = \frac{16}{5}$

Antwort:

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. Die Katheten im Dreieck ΔEDA betragen: $\frac{12}{5}$ und $\frac{16}{5}$.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	1
B	Bestimmung der Kathetenlänge $\lvert AC\rvert$	1
C	Berechnung von $\sin\alpha$, $\cos\alpha$	2
D	Bestimmung der Kathetenlänge $\lvert AE\rvert$	2
E	Bestimmung der Kathetenlänge $\lvert AD\rvert$	2
F	Einschreibung von Lösung in einer fremden Sprache	2

L'esercizio per riscaldare Due triangoli rettangoli (10 punti)

Dati:

I triangoli rettangoli: ΔABC e ΔEDA, nei quali uno degli angoli aguti ha la misura α

Nel ΔABC: $|AB| = 3$; $|BC| = 4$

nel ΔEDA: $|DE| = 4$

Ricercati:

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$

Cateti ΔEDA, cioè : $|AE| = ?$ e $|AD| = ?$

Risoluzione:

nel ΔABC:

1. Applicando il teorema di Pitagora: $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$. In considerazione dei dati del disegno otteniamo $\left(|AC|^2 = 3^2 + 4^2\right) \Rightarrow \left(|AC|^2 = 9 + 16\right) \Rightarrow |AC|^2 = 25$, per cui $|AC| = 5$

2. Dalla definizione delle funzioni trigonometriche otteniamo :

I. $\sin\alpha = \frac{|AB|}{|AC|}$, per cui $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ II. $\cos\alpha = \frac{|BC|}{|AC|}$, per cui $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Nel ΔEDA:

I. $\left(\sin\alpha = \frac{|AE|}{|DE|}\right) \wedge \left(\sin\alpha = \frac{3}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, allora $\frac{|AE|}{4} = \frac{3}{5}$, per cui $|AE| = \frac{3}{5} \cdot 4$, cioè $|AE| = \frac{12}{5}$

II. $\left(\cos\alpha = \frac{|AD|}{|DE|}\right) \wedge \left(\cos\alpha = \frac{4}{5}\right) \wedge |DE| = 4$, allora $\frac{|AD|}{4} = \frac{4}{5}$, per cui $|AD| = \frac{4}{5} \cdot 4$, cioè $|AD| = \frac{16}{5}$

Risposta:

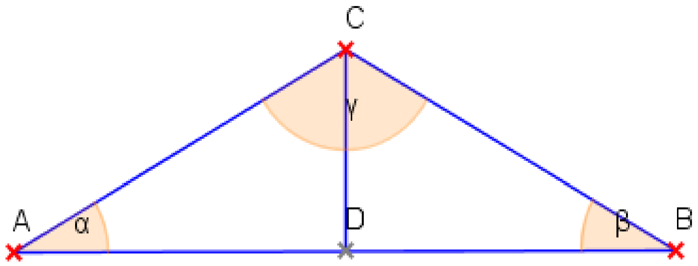
$\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$. I cateti nel triangolo ΔEDA sono: $\frac{12}{5}$ e $\frac{16}{5}$.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in lingua polacca	1
B	Definire la lunghezza dell'ipotenusa $|AC|$	1
C	Calcolo del $\sin\alpha$, $\cos\alpha$	2
D	Definire la lunghezza del cateto $|AE|$	2
E	Definire la lunghezza del cateto $|AD|$	2
F	Scrivere la soluzione in lingua straniera	2

Zadanie 1. Wysoki czy niski? (8 punktów)

Rozwiązanie:
W informacji: „Wysokość trójkąta równoramiennego jest dwa razy krótsza niż jego ramię”
nie określono, która wysokość (prostopadła do podstawy trójkąta, czy prostopadła do ramienia trójkąta) ma tę własność.
Rozważamy, więc dwa przypadki:
Przypadek I:
Przyjmujemy, że wysokość opuszczona na podstawę trójkąta jest dwa razy krótsza niż jego ramię
Oznaczenia i rysunek[158]



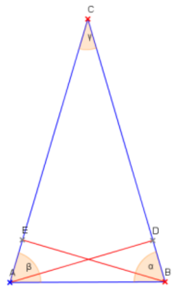
$CD = h$ - wysokość trójkąta;
$AD = DB$ - połowa podstawy
Dane:
ΔABC – równoramienny: $AC = BC = a$
$h = \frac{1}{2}a$ stąd $a = 2h$
Szukane:
Miary kątów: $\alpha = \beta = ?$ $\gamma = ?$
Rozwiązanie:
W ΔADC mamy:
CD jest wysokością ΔABC, więc, miara $|\sphericalangle ADC| = 90^\circ$, zatem trójkąt ΔADC jest prostokątny
Z definicji funkcji sinus otrzymujemy:
$$\sin\alpha = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{h}{2h} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow |\sphericalangle \alpha| = 30^\circ,$$
zatem $\beta = \alpha = 30^\circ$
Wyznaczanie miary kąta γ:
$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$$
Odpowiedź – przypadek I:
Miary kątów trójkąta wynoszą: $30^\circ; 30^\circ; 120^\circ$

[158] Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner

Przypadek II:

Przyjmujemy, że wysokość prowadzona do ramienia trójkąta jest dwa razy krótsza niż to ramię

Oznaczenia i rysunek[159]:



$AD = BE = h$ - wysokość trójkąta

Dane:

ΔABC – równoramienny, w którym: $AC = BC = a$; $h = \frac{1}{2}a$ stąd $a = 2h$

Szukane:

Miary kątów: $\alpha = \beta = ?$ $\gamma = ?$

Rozwiązanie:

Rozważam, ΔADC (analogiczne rozumowanie można przeprowadzić, dla ΔBEC).
W ΔADC mamy: AD jest wysokością ΔABC, więc, miara $|\sphericalangle ADC| = 90°$, zatem trójkąt ΔADC jest prostokątny. Z definicji funkcji sinus otrzymujemy:

$\sin\gamma = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{h}{2h} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow |\sphericalangle \gamma| = 30°$. Zatem $\gamma = 30°$.

Wyznaczanie miary kąta $\beta = \alpha$: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, po uwzględnieniu, że $\beta = \alpha$ i $\gamma = 30°$.
Otrzymujemy: $2 \cdot \alpha + 30° = 180°$, stąd $2 \cdot \alpha = 150°$, czyli $\alpha = 75°$

Odpowiedź – przypadek II:

Miary kątów trójkąta wynoszą: $30°; 75°; 75°$

Odpowiedź:

Trójkąt równoramienny, w którym wysokość jest dwa razy krótsza niż jego ramię może mieć kąty: $30°; 30°; 120°$ lub $30°; 75°; 75°$.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Przypadek: wysokość prostopadła do podstawy jest dwa razy krótsza niż ramię trójkąta, wykonanie rysunku, zapisanie danych	1
B	Wyznaczenie $\sin\alpha$ i wartości kąta α	2
C	Wyznaczanie wartości kątów trójkąta	1
D	Przypadek: wysokość prostopadła do ramienia jest dwa razy krótsza niż	1
E	Wyznaczenie $\sin\gamma$ i wartości kąta γ	2
F	Wyznaczanie wartości kątów trójkąta	1

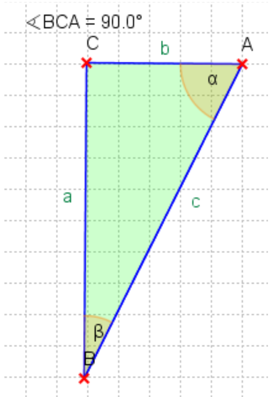
[159] Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner

Zadanie 2. Od sumy sinusów, do iloczynu cosinusów (4 punkty)

Dane i rysunek: [160]

α i β są kątami ostrymi w trójkącie prostokątnym

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



Oblicz:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta$$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi, które zachodzą w ΔABC:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$ $\quad$ $\sin\alpha = \cos\beta$ $\quad$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad$ $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

Z danych wynika: $\left(\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

Stosujemy wzór na kwadrat sumy

$\left(\sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \left(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{5}{4}\right)$ *(*)*

Zauważamy:, ponieważ $\sin\beta = \cos\alpha$, to $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin\beta = \cos\alpha$ i $\sin\alpha = \cos\beta$, zatem $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos\beta\cdot\cos\alpha$.

Wobec powyższych związków równość *(*)* przybiera postać: $1 + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{5}{4}$,

więc $2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{5}{4} - 1$ zatem $2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{4} \,|: 2$ stąd $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{8}$

Odpowiedź:

α, β są kątami ostrymi w trójkącie prostokątnym i $\left(\sin\alpha + \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{8}$

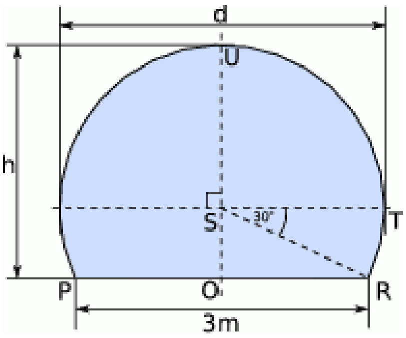
Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, rysunek. Podanie związków między sinusami i cosinusami kątów ostrych w trójkącie prostokątnym	1
B	Zastosowanie wzoru na kwadrat sumy oraz związków między funkcjami	2
C	Podanie odpowiedzi	1

[160] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 3. Łuk podkowiasty (4 punkty)

Dane:



$|\overline{PR}| = 3m$

$|\angle RST| = 30°$

$|SU| = |ST| = |SR| = r$

Wyznacz: h
Wyznacz: d
Rozwiązanie:
Zauważmy, że $h = |SU| + |OS|$, natomiast $d = 2 \cdot |ST|$,
więc tak naprawdę wystarczy wyliczyć boki trójkąta prostokątnego ΔSOR.

Znamy jeden z jego boków $|OR| = \frac{1}{2} \cdot |PR| = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1{,}5$

oraz $|\sphericalangle OSR| = 90° - |\sphericalangle RST| = 90° - 30° = 60°$.

W takim razie w ΔSOR mamy: $\left(\frac{|OR|}{|SR|} = \sin 60°\right) \Rightarrow \left(|SR| = \frac{|OR|}{\sin 60°}\right) \Rightarrow |SR| = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

oraz $\left(\frac{|OS|}{|SR|} = \cos 60°\right) \Rightarrow (|OS| = |SR| \cdot \cos 60°) \Rightarrow |OS| = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zatem: $d = 2 \cdot |SR| = 2\sqrt{3}$; $h = |SU| + |SO| = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Odpowiedź:

Wysokość okna wynosi: $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, natomiast prześwit $d = 2\sqrt{3}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych	1
B	Wyznaczenie długości boków ΔSOR	1
C	Wyznaczenie d i h	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 4 – Elektrownia wiatrowa (6 punktów)

Dane[161]**:** $|\overline{AB}| = 20\,km$

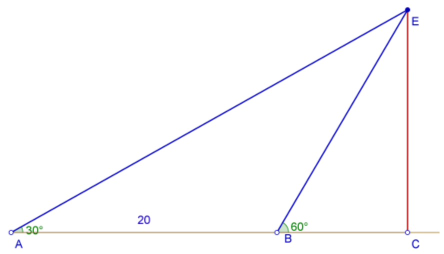
$|\angle BAE| = 30°$; $|\angle CBE| = 60°$

Oblicz:

$|\angle AEB| = ?$ i $|\angle BEC| = ?$ $|\overline{BC}| = ?$

$|\overline{EC}| = ?$ - odległość elektrowni od drogi

W rachunkach przyjmij, że $\sqrt{3} \approx 1{,}75$



Ad a) Ponieważ $|\angle ABE| = 180° - 60° = 120°$, mamy

$|\angle AEB| = 180° - |\angle BAE| - |\angle ABE| = 180° - 30° - 120° = 30°$. Ponadto w trójkącie ∇BCE mamy

$|\angle BEC| = 180° - 90° - 30° = 30°$. I tak: $|\angle AEB| = 30°$, $|\angle BEC| = 30°$

Ad b) Zauważamy, że $|\angle AEB| = |\angle BAE| = 30°$, zatem trójkąt ∇ABE jest równoramienny,

stąd $|\overline{BE}| = |\overline{AB}| = 20$. Ponadto w ∇BCE mamy: $\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{BE}|} = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

Stąd, uwzględniając wcześniejsze dane otrzymujemy: $\frac{|\overline{BC}|}{20} = \frac{1}{2}$, zatem $|\overline{BC} = 10|$.

Otrzymaliśmy, że: długość odcinka $\overline{BC}$ wynosi $10\,km$.

Ad c) **Sposób I:** W ∇BCE: mamy: $\frac{|\overline{EC}|}{|\overline{BE}|} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, zatem $\frac{|\overline{EC}|}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli

$|\overline{EC}| = 10\sqrt{3} \approx 17{,}5$

Sposób II: Skoro wiemy, że ∇BCE jest trójkątem prostokątnym, w którym $|\overline{BE}| = 20$ i $|\overline{BC}| = 10$,

możemy długość $\overline{EC}$ wyliczyć z twierdzenia Pitagorasa:

$$\left|\overline{EC} = \sqrt{|\overline{BE}|^2 - |\overline{BC}|^2}\right| = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}5$$

Odpowiedź: Odległość elektrowni od drogi wynosi $17{,}5\,km$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyznaczenie miar kątów	2
B	Wyznaczenie długości $|\overline{BC}|$	2
C	Wyznaczenie odległości elektrowni od drogi	2

[161] Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - "Sinus, cosinus daj Boże trzy minus..."

Zadanie 1[162]
W tym zadaniu należy:

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania podaj w wybranym wcześniej języku

Task 1. The clinic, the stairs (8 points)

In front of the entrance to the clinic there are stairs that have 8 steps, each height 15 cm.
It was decided that a ramp having a slope o 7^0 for the disabled people will be built.
Calculate the length of the driveway. The result rounds to 10cm.

Tarea 1. El dispensario, las escaleras (8 puntos)

Delante de la entrada en el dispensario hay unas escaleras que tienen 8 peldaños de 15 cm de altura cada uno.
Se ha decidido construir una rampa para las personas con su movilidad reducida, con la inclinación de 70.Calcula la longitud de esta rampa.
Escribe el resultado en números redondos a 10 cm..

Aufgabe 1. Poliklinik, die treppe (8 Punkte)

Vor dem Eingang zu einer Poliklinik befindet sich eine Treppe, die 8 Stufen von einer Höhe von je 15 cm hat. Man hat beschlossen, einen Zufahrtsweg für Behinderte von einer Neigung von 70zu bauen. Berechne die Länge des Zufahrtsweges. Gib das Ergebnis in einer Abrundung bis 10cm an.

Esercizio 1. Ambulanza, scala (8 punti)

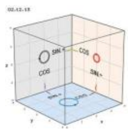
Davanti all'entrata dell'ambulanza c'è la scala che ha 8 gradi a 15 cm di altezza ognuno. Si è decise di costruire una discesa per disabili con la pendenza di 7°.
Calcola la lunghezza della discesa. Esprimi il risultato arrotondato a 10 cm

Exercice 1. Dispensaire, Escalier (8 points)

Devant l'entrée au dispensaire il y a l'escalier qui est composé de 8 marches dont chacune a 15cm de hauteur.
On a decidé de construire une rampe d'accès handicapé sous une inclinaison de 70. Calcule la longeur de la rampe.
Donne le résultat arrondi à 10cm.

[162] Zaczerpnięto z [1]

Zadanie 2. Od sumy cosinusów, do iloczynu sinusów (4 punkty) [163]



W trójkącie prostokątnym suma cosinusów kątów ostrych jest równa $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Oblicz iloczyn sinusów tych kątów

Zadanie 3. …sinus różnicy, sinus sumy… (3 punkty)[164]

Dane są wzory:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \ \textit{(*)};$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \ \textit{(**)}$$

Korzystając ze wzoru *(*)* $\sin 15°$ można obliczyć następująco:

Zauważamy, że $15° = 45° - 30°$, zatem

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$$

stąd otrzymujemy, że $\sin 15° = \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Postępując analogicznie oblicz $\sin 75°$.

Zadanie 4. Od sinusa do tangensa (3 punkty)[165]

Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, oblicz $tg\alpha$.

Zadanie 5. Czy istnieje?... (3 punkty)[166]

Czy istnieje kąt ostry α taki, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $tg\alpha = \frac{2}{3}$?

Odpowiedź uzasadnij.

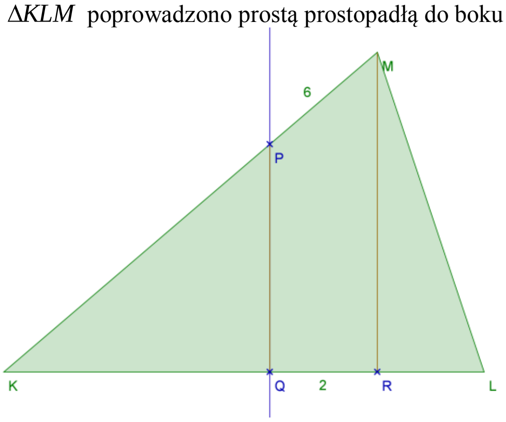
Zadanie 6. Wartość wyrażenia... (3 punkty) [167]

Wiedząc, że $tg\alpha = \frac{1}{3}$, oblicz wartość wyrażenia $5\cdot\left(2\cdot\sin^2\alpha - 1\right)$.

[163] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 6.27, strona 109
[164] Zaczerpnięto z [3] - Zadanie 6, strona 98
[165] Zaczerpnięto z [3] - Zadanie 1, strona 98
[166] Zaczerpnięto z [3] - Zadanie 4, strona 98
[167] Zaczerpnięto z [3] - Zadanie 2, strona 98

Zadanie 7. Trójkąty podobne… (7punktów)[168]

W trójkącie ostrokątnym ΔKLM poprowadzono prostą prostopadłą do boku $\overline{KL}$.: [169]

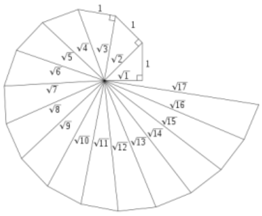


Poprowadzona prosta przecina:
bok $\overline{KM}$ w punkcie P i bok $\overline{KL}$ w punkcie Q.
Punkt R jest spodkiem wysokości trójkąta poprowadzonej z punktu M.
Wiedząc, że $\left|\overline{PM}\right| = 6$ i $\left|\overline{QR}\right| = 2$ oblicz sinus kąta MKL.

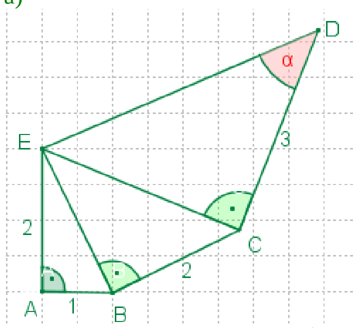
Zadanie 8. Prawie ślimak Teodorosa??… (6 punktów)[170]

Oblicz wartość $\sin^2 \alpha$ i wartość $\cos^2 \alpha$, uwzględniając dane przedstawione na rysunku:

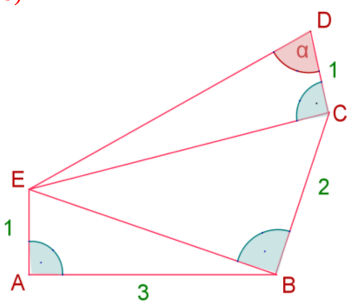
Ślimak Teodorosa



a) [171]



b) [172]



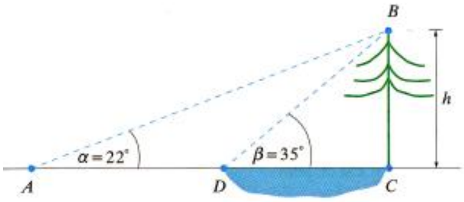
Zadanie 9 – Nie taki kwadrat straszny… (5 punktów)[173]

W kwadracie $\square ABCD$ punkt E jest środkiem boku $\overline{CD}$.
Odcinki $\overline{BE}$ i $\overline{AC}$ przecinają się w punkcie F.
Wyznacz tangensy kątów trójkąta ΔCEF.

---

168 Zadanie własne Heleny Ewert - Fechner
169 Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner
170 Zaczerpnięto z [2] - Zadanie 6.7, strona 106
171 Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner
172 Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner
173 Zaczerpnięto z [4] - Przykład 7, strona 146

Zadanie 10 – Kąt wzniesienia… (3 punkty) [174]

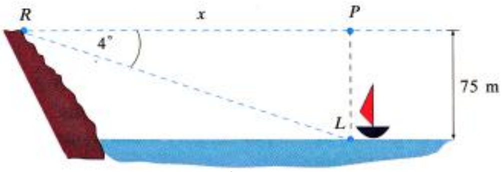


Aby wyznaczyć szerokość rzeki (na rycinie jest to odcinek DC),
Zmierzono:
odległość $|AD| = 52{,}5\,m$ prostopadle do brzegu.

Drzewo BC rosnące na brzegu po przeciwnej stronie rzeki, widać z punktu A pod kątem wzniesienia $22°$, a z punktu D - pod kątem $35°$.
Oblicz szerokość rzeki.

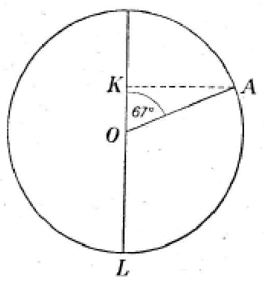
Zadanie 11. … i kąt depresji (2 punkty)[175]

Reflektor ustawiony nad brzegiem morza na wysokości 75 m uchwycił łódź pod kątem 4° (kąt depresji).
Oblicz odległość łodzi od brzegu morza.



Zadanie 12. A koło się toczy… (3 punkty)[176]

Koło o promieniu $12{,}5cm$ toczy się po płaszczyźnie poziomej.
W pewnej chwili punkt A okręgu znajdował się w położeniu najwyższym.
Na jakiej wysokości nad płaszczyzną poziomą znajduje się obecnie punkt A,
jeżeli koło obróciło się o $67°$.



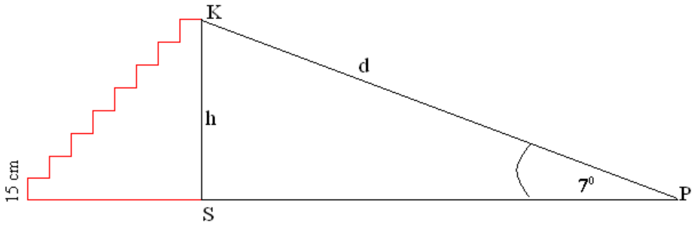
[174] Zaczerpnięto z [4] - Przykład 3, strona 148
[175] Zaczerpnięto z [4] - Przykład 4, strona 149
[176] Zaczerpnięto z [5] - Zadanie 59, strona 31

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” - ”Sinus, cosinus daj Boże trzy minus...”

Zadanie 1. Przychodnia, schody (8 punków)

Przed wejściem do przychodni lekarskiej znajdują się schody mające 8 stopni po 15cm wysokości każdy. Postanowiono zbudować podjazd dla niepełnosprawnych o nachyleniu 7^0.
Oblicz długość podjazdu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 10cm.

Rysunek i oznaczenia:



$KS = h$ - wysokość podjazdu
$PK = d$ – długość podjazdu
Wysokość podjazdu równa jest wysokości schodów:
$h = 8 \cdot 15\ cm = 120\ cm$
W ΔKPS mamy:

$$\frac{KS}{PK} = \sin 7°$$

Zatem $\frac{h}{d} = \sin 7° \Leftrightarrow d = \frac{h}{\sin 7°}$,
ale $h = 120\ cm$ i $\sin 7° = 0{,}1219$,
więc $d = \frac{120}{0{,}1219} = 984{,}413$

Odpowiedź:

Długość podjazdu w zaokrągleniu do 10 cm wynosi 980 cm.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wykonanie rysunku i wprowadzenie oznaczeń	1
C	Obliczenie wysokości podjazdu	1
D	Obliczenie długości podjazdu	2
E	Zaokrąglenie otrzymanego wyniku i podanie odpowiedzi	1
F	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

Task 1. The clinic, the stairs (8 points)

Symbols:

$KS = h$ - the height of the driveway; $PK = d$ – the length of the driveway

The height of the driveway equals the height of the stairs: $h = 8 \cdot 15\ cm = 120\ cm$

In ΔKPS we have: $\frac{KS}{PK} = \sin 7°$. So $\frac{h}{d} = \sin 7° \Leftrightarrow d = \frac{h}{\sin 7°}$,

But $h = 120\ cm$ and $\sin 7° = 0{,}1219$.

So $d = \frac{120}{0{,}1219} = 984{,}413$

Answer:

The lenght of the driveway (being rounded to 10 cm) is 980 cm.

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Translation into Polish	1
B	Making a picture and introducing symbols	1
C	Calculating the height of the driveway	1
D	Calculating the length of the driveway	2
E	Rounding the obtained result and giving the correct answer	1
F	Writing the solution in a foreign language	2

Tarea 1. El dispensario, las escaleras (8 puntos)

Las designaciones:

$KS = h$ - La altura de la rampa

$PK = d$ – la longitud de la rampa

La altura de la rampa es igual a la altura de las escaleras:

$h = 8 \cdot 15\ cm = 120\ cm$

En ΔKPS tenemos: $\frac{KS}{PK} = \sin 7°$, entonces $\frac{h}{d} = \sin 7° \Leftrightarrow d = \frac{h}{\sin 7°}$,

pero $h = 120\ cm$ y $\sin 7° = 0{,}1219$ entonces $d = \frac{120}{0{,}1219} = 984{,}413$

Solución:

La longitud de la rampa en números redondos de 10 cm, es de 980 cm.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Dibujar el dibujo y marcar las designaciones	1
C	Calcular la altura de la rampa	1
D	Calcular la longitud de la rampa	2
E	Dar la respuesta en números redondos	1
F	Marcar la solución en un idioma extranjero	2

Aufgabe 1. Poliklinik, die treppe (8 Punkte)

Bezeichnungen:
$KS = h$ - Höhe des Zufahrtsweges
$PK = d$ – Länge des Zufahrtsweges
Die Höhe des Zufahrtsweges ist gleich an Höhe der Treppe: $h = 8 \cdot 15\,cm = 120\,cm$

In ΔKPS haben wir: $\frac{KS}{PK} = \sin 7°$. Also $\frac{h}{d} = \sin 7° \Leftrightarrow d = \frac{h}{\sin 7°}$,

aber $h = 120\,cm$ i $\sin 7° = 0{,}1219$. So $d = \frac{120}{0{,}1219} = 984{,}413$

Antwort:

Die Zufahrtslänge beträgt in Abrundung bis 10 cm 980 cm.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	1
B	Zeichnung und Einführung von Bezeichnungen	1
C	Berechnung der Höhe des Zufahrtsweges	1
D	Berechnung der Länge des Zufahrtsweges	2
E	Abrundung des Ergebnisses und Antwortsangabe	1
F	Einschreiben der Lösung in einer fremden Sprache	2

Esercizio 1. Ambulanza, scala (8 punti)

Identificazioni:
$KS = h$ - altezza della discesa
$PK = d$ – lunghezza della discesa

Nel ΔKPS abbiamo: $\frac{KS}{PK} = \sin 7°$, allora $\frac{h}{d} = \sin 7° \Leftrightarrow d = \frac{h}{\sin 7°}$,

ma $h = 120\,cm$ e $\sin 7° = 0{,}1219$, dunque $d = \frac{120}{0{,}1219} = 984{,}413$

L'altezza della discesa è pari all'altezza della scala: $h = 8 \cdot 15\,cm = 120\,cm$

Risposta:

La lunghezza della discesa arrotondata a 10cm, è di cm 980.

Punteggio:

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in lingua polacca	1
B	Realizzare il grafico ed inserire le identificazioni	1
C	Calcolo dell'altezza della discesa	1
	Calcolo della lunghezza della discesa	2
	Arrotondare il risultato ot tenuto e dare la riposta	1
	Scrivere la riposta nella lingua straniera	2

Exercice 1. Dispensaire, Escalier (8 points)

Désignations:
$KS = h$ - l'hauteur de la rampe
$PK = d$ – la longeur de la rampe
L'hauteur de la rampe égale à la hauteur de l'escalier: $h = 8 \cdot 15\ cm = 120\ cm$

Dans ΔKPS on a: $\frac{KS}{PK} = \sin 7°$. Alors $\frac{h}{d} = \sin 7° \Leftrightarrow d = \frac{h}{\sin 7°}$,

mais $h = 120\ cm$ et $\sin 7° = 0{,}1219$ donc $d = \frac{120}{0{,}1219} = 984{,}413$

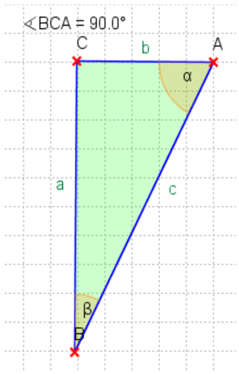
Réponse:

La longeur de la rampe arrondi à 10cm égale 980 cm.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Faire le dessin et introduire les désignations	1
C	Calculer l'hauteur de la rampe	1
D	Calculer la longeur de la rampe	2
E	Arrondir le resultat reçu et donner la réponse	1
F	Ecrire la solution en langue étrangère	2

Zadanie 2. Od sumy cosinusów, do iloczynu sinusów (4 punkty)



Dane:

α i β są kątami ostrymi w trójkącie prostokątnym

$\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Oblicz:

$\sin\alpha \cdot \sin\beta = ?$

Rozwiązanie:

Wykorzystujemy związki między funkcjami trygonometrycznymi, które zachodzą W ΔABC:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$ $\qquad$ $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$ $\qquad$ $\sin\alpha = \cos\beta$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\qquad$ $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

Z danych wynika: $\left(\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$

Stosujemy wzór na kwadrat sumy

$\left(\cos^2\alpha + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta = \frac{4\cdot 3}{9}\right) \Rightarrow \left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{4}{3}\right)$ *(*)*

Zauważamy, że ponieważ $\cos\alpha = \sin\beta$, to $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = \sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$;

$\sin\beta = \cos\alpha$ i $\sin\alpha = \cos\beta$ zatem $\cos\beta\cdot\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\sin\beta$;

Wobec powyższych związków równość *(*)* przybiera postać: $1 + 2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{4}{3}$,

więc $2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{4}{3} - 1$;

$2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{3} \,|:2$,

zatem $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{6}$

Odpowiedź:

W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych α i β takich, że $\cos\alpha + \cos\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

iloczyn sinusów tych kątów jest równy $\frac{1}{6}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, rysunek. Podanie związków między sinusami i cosinusami kątów ostrych w trójkącie prostokątnym	1
B	Zastosowanie wzoru na kwadrat sumy oraz związków między funkcjami trygonometrycznymi kątów ostrych w trójkącie prostokątnymi. Obliczenie $\sin\alpha\cdot\sin\beta$	2
C	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 3. …sinus różnicy, sinus sumy… (5 punktów)

Korzystając ze wzoru: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$ *(**)*
$\sin 75°$ obliczamy następująco: zauważamy, że $75°=45°+30°$, zatem:

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

stąd otrzymujemy, że $\sin 75°=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie $75°=45°+30°$	1
B	Zastosowanie wzoru (**)	1
C	Podstawienie wartości funkcji, wyznaczenie $\sin 75°=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$	1

Zadanie 4. Od sinusa do tangensa (3 punkty)

Dane: α – kąt ostry oraz $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$

Szukane: $tg\alpha$

Z własności funkcji trygonometrycznych $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin\alpha$ jest dany, zatem do wyznaczenia wartości $tg\alpha$ brakuje wartości $\cos\alpha$.
Wyznaczymy $\cos\alpha$, korzystając z „jedynki trygonometrycznej”:

$\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\right)\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, stąd $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$,

czyli $\left(\cos^2\alpha=1-\frac{5}{25}\right)\Rightarrow\left(\cos^2\alpha=1-\frac{1}{5}\right)\Rightarrow\left(\cos^2\alpha=\frac{4}{5}\right)$; α jest kątem ostrym, zatem $\cos\alpha>0$,

więc $\cos\alpha=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Mamy więc $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ oraz $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,

zatem $tg\alpha=\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{5}{2\sqrt{5}}$ stąd otrzymujemy $tg\alpha=\frac{1}{2}$.

Odpowiedź:

Jeśli $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$, to $tg\alpha=\frac{1}{2}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, podanie wzorów	1
B	Obliczenie $\cos\alpha$	1
C	Wyznaczenie wartości $tg\alpha$, podanie odpowiedzi	1

Zadanie 5. Czy istnieje? (3 punkty)

Z danych $tg\alpha = \frac{2}{3}$ oraz ze związku $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ otrzymujemy: $\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{2}\cdot\sin\alpha$,

ale $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ więc $\cos\alpha = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$ to znaczy, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Z drugiej strony, jeśli dany jest $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, to musi być prawdziwy związek $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ „jedynka trygonometryczna".

Sprawdzenie: $\left(\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \wedge \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$, stąd

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{3}{9} + \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{13}{12} \neq 1$ wbrew tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Odpowiedź: Nie istnieje kąt ostry α taki, że $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ i $tg\alpha = \frac{2}{3}$, bo przyjęcie tych wartości prowadzi do sprzeczności.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wyznaczenie wartości $\cos\alpha$ w oparciu o dane	1
B	Podstawienie wartości $\cos\alpha$ i $\sin\alpha$ do jedynki trygonometrycznej	1
C	Wniosek i odpowiedź	1

Zadanie 6. Wartość wyrażenia... (3 punkty)

Dane: $tg\alpha = \frac{1}{3}$; **Oblicz:** Wartość wyrażenia $5\cdot(2\sin^2\alpha - 1)$

Niech W oznacza wartość szukanego wyrażenia, wtedy $W = 5\cdot(2\cdot\sin^2\alpha - 1) = 10\cdot\sin^2\alpha - 5$.
Korzystając z danych w zadaniu oraz ze związków między funkcjami trygonometrycznymi otrzymujemy: $\left(tg\alpha = \frac{1}{3} \wedge tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{3}\right) \Rightarrow (\cos\alpha = 3\cdot\sin\alpha)$. Dla wszystkich kątów prawdziwa jest równość: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Podstawiamy do „jedynki trygonometrycznej" $(3\cdot\sin\alpha)$ zamiast $\cos\alpha$ i otrzymujemy: $\sin^2\alpha + (3\cdot\sin\alpha)^2 = 1$, czyli $\sin^2\alpha + 9\cdot\sin^2\alpha = 1$, stąd $10\cdot\sin^2\alpha = 1$, zatem wartość wyrażenia $W = 10\cdot\sin^2\alpha - 5 = 1 - 5 = -4$.

Odpowiedź:

Jeżeli $tg\alpha = \frac{1}{3}$, to wartość wyrażenia $5\cdot(2\cdot\sin^2\alpha - 1)$ wynosi -4.

Punktacja

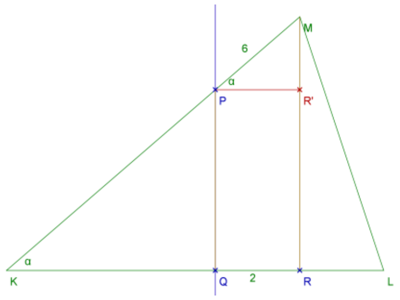
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych i przekształcenie wyrażenia do postaci: $W = 10\cdot\sin^2\alpha - 5$	1
B	Wyznaczenie wartości $10\cdot\sin^2\alpha$	1

C	Obliczenia wartości wyrażenia i podanie odpowiedzi	1

Zadanie 7. Trójkąty podobne (7 punktów)

Dane i rysunek: [177]

$|\overline{QR}| = 2$; $|\overline{PM}| = 6$



Szukane: $\sin\angle MKL$

Z treści zadania wynika, że $\overline{PQ} \perp \overline{KL}$ oraz $\overline{MR} \perp \overline{KL}$ zatem $\overline{PQ} \parallel \overline{MR}$. Prowadzimy prostą równoległą do $\overline{KL}$ przechodzącą przez punkt R. Powstaje nowy trójkąt prostokątny $\Delta MR'P$, w którym: $|\overline{PR'}| = |\overline{QR}| = 2$, $|\overline{PM}| = 6$. Trójkąty ΔMRK oraz $\Delta MR'P$ są podobne. Z podobieństwa tych trójkątów wynika, że $|\angle MKL| = |\angle MPR'|$. Przyjmujemy, że $|\angle MKL| = \alpha$

I sposób: W $\Delta MR'P$ mamy: $\sin\alpha = \frac{|\overline{MR'}|}{|\overline{PM}|}$, stosując twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy $|\overline{MR'}|$:

$|\overline{MR'}|^2 + |\overline{PR'}|^2 = |\overline{PM}|^2 \Leftrightarrow |\overline{MR'}|^2 + 2^2 = 6^2 \Leftrightarrow |\overline{MR'}|^2 = 6^2 - 2^2 = 32 = 16\cdot 2$, zatem $|\overline{MR'}| = 4\sqrt{2}$

stąd $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

II sposób: W $\Delta MR'P$ mamy: $\cos\alpha = \frac{|\overline{PR'}|}{|\overline{PM}|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Wartość $\cos\alpha$ wstawiam do, jedynki trygonometrycznej" i otrzymuję: $\sin^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$; $\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$; $\sin^2\alpha = \frac{8}{9}$; $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Odpowiedź:

$$\sin\angle MKL = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, wykonanie rysunku	1
B	Wskazanie trójkątów podobnych; zauważenie równości kątów: $\lvert\angle MKL\rvert = \lvert\angle MPR'\rvert$	1
C	Wyznaczenie boków trójkąta prostokątnego $\Delta MR'P$	1
D	Podanie wniosku końcowego	1
E	Obliczenie $\sin\alpha$	1

[177] Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner

F	Podanie odpowiedzi	1

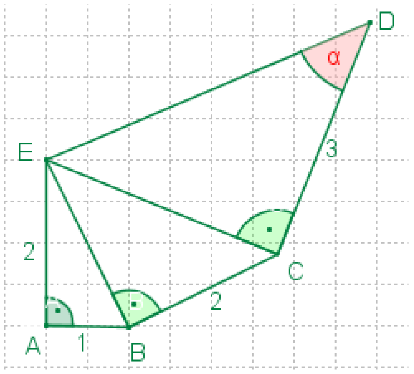
Zadanie 8. Prawie ślimak Teodorosa??... (6 punktów)

Ad a)
Dane:

Trójkąty prostokątne: ΔEAB; ΔEBC; ΔECD; $|\overline{AE}| = 2$; $|\overline{AB}| = 1$; $|\overline{BC}| = 2$; $|\overline{CD}| = 3$

Obliczyć:

$\sin^2\alpha = ?$ $\cos^2\alpha = ?$



W ΔECD

mamy: $\sin\alpha = \frac{|\overline{EC}|}{|\overline{ED}|} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{(|\overline{EC}|)^2}{(|\overline{ED}|)^2}$ **(*),**

natomiast $\cos\alpha = \frac{|\overline{DC}|}{|\overline{ED}|} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{(|\overline{DC}|)^2}{(|\overline{ED}|)^2}$ (**)

Zadane wielkości obliczymy wyznaczając kolejno kwadraty przeciwprostokątnych:

Z ΔEAB na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $(|\overline{EB}|)^2 = (|\overline{EA}|)^2 + (|\overline{AB}|)^2$ uwzględniając dane z rysunku mamy: $(|\overline{EB}|)^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$.

Analogicznie z ΔEBC otrzymujemy: $(|\overline{EC}|)^2 = (|\overline{EB}|)^2 + (|\overline{BC}|)^2$, po uwzględnieniu danych na rysunku i wyniku wcześniejszych obliczeń mamy: $(|\overline{EC}|)^2 = 5 + 2^2 = 9$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa z ΔECD otrzymujemy: $(|\overline{ED}|)^2 = (|\overline{EC}|)^2 + (|\overline{DC}|)^2$, więc uwzględniając dane i wyniki wcześniejszych obliczeń otrzymujemy: $(|\overline{ED}|)^2 = 9 + 3^2 = 18$.

Podstawiając wyniki obliczeń do (*) otrzymujemy: $\sin^2\alpha = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$,

natomiast podstawiając dane i otrzymane wyniki do (**) mamy: $\cos^2\alpha = \frac{3^2}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$

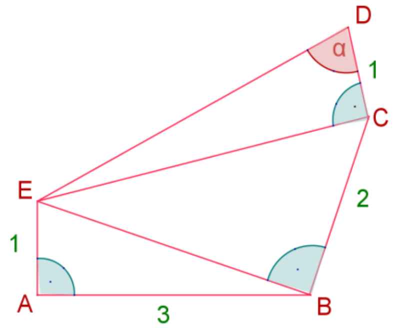
Odpowiedź:

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$ i $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$

Ad b)

Dane: Trójkąty prostokątne: ΔEAB; ΔEBC; ΔECD; $|\overline{AE}| = 1$; $|\overline{AB}| = 3$; $|\overline{BC}| = 2$; $|\overline{CD}| = 1$

Obliczyć: $\sin^2\alpha = ?$; $\cos^2\alpha = ?$



W ΔECD mamy: $\sin\alpha = \frac{|\overline{EC}|}{|\overline{ED}|} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{(|\overline{EC}|)^2}{(|\overline{ED}|)^2}$ **(*),**

natomiast $\cos\alpha = \frac{|\overline{DC}|}{|\overline{ED}|} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{(|\overline{DC}|)^2}{(|\overline{ED}|)^2}$ (**)

Zadane wielkości obliczymy wyznaczając kolejno kwadraty przeciwprostokątnych:

Z ΔEAB na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $(|\overline{EB}|)^2 = (|\overline{EA}|)^2 + (|\overline{AB}|)^2$ uwzględniając dane z rysunku mamy: $(|\overline{EB}|)^2 = 1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$.

Analogicznie z ΔEBC otrzymujemy: $(|\overline{EC}|)^2 = (|\overline{EB}|)^2 + (|\overline{BC}|)^2$, po uwzględnieniu danych na rysunku i wyniku wcześniejszych obliczeń mamy: $(|\overline{EC}|)^2 = 10 + 2^2 = 14$.

Na mocy twierdzenia Pitagorasa z ΔECD otrzymujemy: $(|\overline{ED}|)^2 = (|\overline{EC}|)^2 + (|\overline{DC}|)^2$,

więc uwzględniając dane i wyniki wcześniejszych obliczeń otrzymujemy: $(|\overline{ED}|)^2 = 14 + 1^2 = 15$.

Podstawiając wyniki obliczeń do (*) otrzymujemy: $\sin^2\alpha = \frac{14}{15}$,

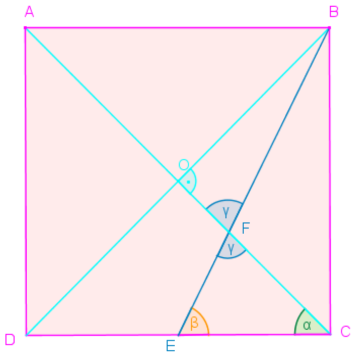
natomiast podstawiając dane i otrzymane wyniki do (**) mamy: $\cos^2\alpha = \frac{1^2}{15} = \frac{1}{15}$

Odpowiedź: $\sin^2\alpha = \frac{14}{15}$ zaś $\cos^2\alpha = \frac{1}{15}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych oraz podanie wzorów a) i b)	1
B	Obliczenie kwadratów kolejnych przeciwprostokątnych a) i b)	3
C	Obliczenie $sin^2\alpha$ i $cos^2\alpha$ oraz podanie odpowiedzi a) i b)	2

Zadanie 9. Nie taki kwadrat straszny… (5 punktów)



Dane i rysunek:[178]

$ABCD$ - kwadrat

$\overline{DE} = \overline{EC}$ *- punkt E jest środkiem boku $\overline{CD}$.*

$\overline{BE} \cap \overline{AC} = \{F\}$ *- odcinki $\overline{BE}$ i $\overline{AC}$ przecinają się w punkcie F*

Przyjmujemy oznaczenia:

$|\angle ECF| = \alpha$; $|\angle CEF| = \beta$; $|\angle EFC| = \gamma$

Oblicz:

$tg\alpha$; $tg\beta$; $tg\gamma$ - wyznacz tangensy kątów trójkąta ΔCEF .

Zauważmy, że: $\alpha = |\angle ACD|$, $\beta = |\angle BEC|$ zaś $\gamma = |\angle AFB|$.

Zgodnie z danymi i rysunkiem otrzymujemy:

W ΔADC stąd $tg\alpha = \dfrac{|\overline{AD}|}{|\overline{CD}|} = 1$, bo □ $ABCD$ jest kwadratem:, zatem $|\overline{AD}| = |\overline{CD}|$,

W ΔBCE: Punkt E jest środkiem boku $\overline{CD}$, więc $|\overline{BC}| = |\overline{DC}| = 2 \cdot |\overline{CE}|$, stąd $tg\beta = \dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{CE}|} = \dfrac{2 \cdot |\overline{CE}|}{|\overline{CE}|} = 2$

ΔBOF : Rysujemy $\overline{BD}$, który jest drugą przekątną tego kwadratu.

Niech przekątne kwadratu przecinają się w punkcie O, to znaczy $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$.

Przekątne kwadratu dzielą się na połowy, więc:

w ΔBDC odcinki $\overline{BE}$ i $\overline{CO}$ są środkowymi stąd: $\dfrac{|\overline{OF}|}{|\overline{FC}|} = \dfrac{|\overline{EF}|}{|\overline{FB}|} = \dfrac{1}{2}$.

Ponadto są one *(przekątne kwadratu)* do siebie prostopadłe w takim razie ΔBOF jest trójkątem prostokątnym, w którym przyprostokątna $\overline{OF}$ jest trzy razy krótsza od przyprostokątnej $\overline{OB}$,

bo $|\overline{OB}| = |\overline{OC}|$ i $\dfrac{|\overline{OF}|}{|\overline{FC}|} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow |\overline{FC}| = 2 \cdot |\overline{OF}|$,

ponadto $|\overline{OC}| = |\overline{OF}| + |\overline{FC}|$,

zatem $|\overline{OC}| = |\overline{OF}| + 2 \cdot |\overline{OF}| = 3 \cdot |\overline{OF}|$ czyli: $|\overline{OB}| = 3 \cdot |\overline{OF}|$, $tg\gamma = \dfrac{|\overline{OB}|}{|\overline{OF}|} = \dfrac{3 \cdot |\overline{OF}|}{|\overline{OF}|} = 3$

Odpowiedź:

Tangensy kątów trójkąta ΔCEF wynoszą: $tg\alpha = 1$; $tg\beta = 2$; $tg\gamma = 3$

Punktacja

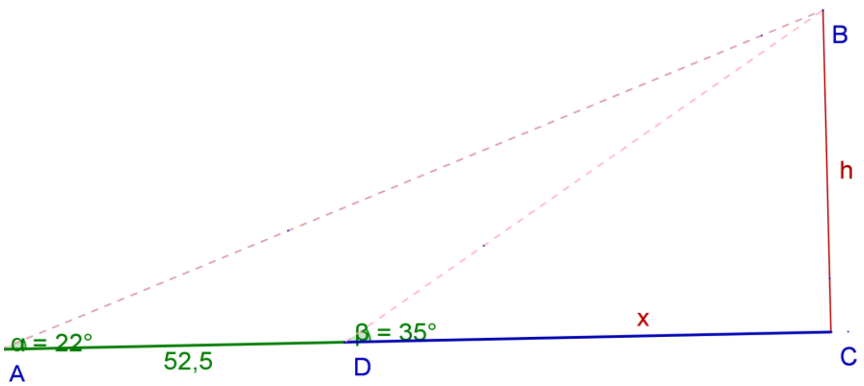
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	2
B	Wyznaczenie $tg\alpha$ oraz $tg\beta$;	1
C	Wyznaczenie $tg\gamma$ i podanie odpowiedzi	1

[178] Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner

Zadanie 10. Kąt wzniesienia… (3 punkty)

Oznaczenia i rysunek: [179]

$\left|\overline{BC}\right| = h$ - *wysokość drzewa;* $\left|\overline{DC}\right| = x$ - *szerokość rzeki*



Dane:

Trójkąty prostokątne: ΔACD i ΔBCD

$\left|\angle BAC\right| = \alpha = 22°$; $\left|\angle BDC\right| = \beta = 35°$; $\left|\overline{AD}\right| = 52{,}5\,m$

Oblicz: $x = ?$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami otrzymujemy:

W ΔABC: $tg\alpha = \dfrac{h}{\left|\overline{AD}\right| + x}$ *(*);*

a w ΔBCD: $tg\beta = \dfrac{h}{x}$, stąd $h = x \cdot tg\beta$

Wracając z tym do równości (*), otrzymujemy równość: $tg\alpha = \dfrac{xtg\beta}{\left|\overline{AD}\right| + x}$, która jest równoważna

$tg\alpha \cdot \left(\left|\overline{AD}\right| + x\right) = x \cdot tg\beta \Leftrightarrow \left|\overline{AD}\right| \cdot tg\alpha + x \cdot tg\alpha = x \cdot tg\beta$ skąd $x = \dfrac{\left|\overline{AD}\right| \cdot tg\alpha}{tg\beta - tg\alpha}$ ostatecznie, więc

$$x = \frac{52{,}5 \cdot tg22°}{tg35° - tg22°} \approx \frac{52{,}5 \cdot 0{,}4040}{0{,}7002 - 0{,}4040} \approx \frac{21{,}21138}{0{,}296181} \approx 71{,}61619 \approx 72.$$

Odpowiedź:

Rzeka ma szerokość $72\,m$.

Punktacja

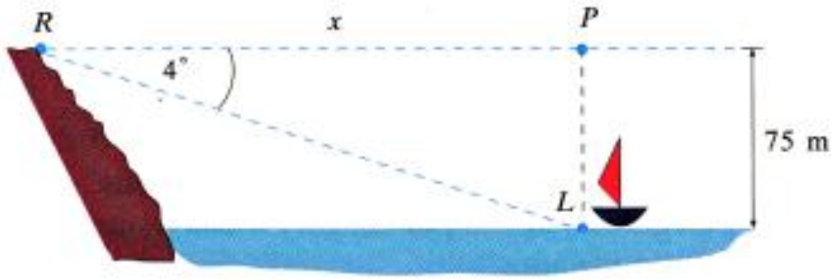
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, przyjęcie oznaczeń, rysunek	1
B	Wyznaczenie tangensów kątów α, β oraz powiązanie otrzymanych równości	1
C	Obliczenie szerokości rzeki i podanie odpowiedzi	1

[179] *Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 11. … i kąt depresji (2 punkty)

Oznaczenia:

$|\overline{RP}| = x$ - *odległość łodzi od brzegu morza*



Dane:

ΔLPR - *trójkąt prostokątny*

$|\angle PRL| = 4°$; $|\overline{PL}| = 75\,m$

Szukane:

Odległość łodzi od brzegu morza: $x = ?$

Rozwiązanie:

W trójkącie ΔRPL mamy:

$$tg\,4° = \frac{|\overline{PL}|}{x} \Leftrightarrow tg\,4° = \frac{75}{x}$$

skąd $x = \frac{75}{tg\,4°} = \frac{75}{0{,}0699} \approx 1073$

Odpowiedź:

Łódź znajduje się w odległości $1073\,m$ od brzegu morza.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie danych, przyjęcie oznaczeń, wyznaczenie $tg\,4°$	1
B	Obliczenie odległości łodzi od brzegu morza i podanie odpowiedzi	1

Zadanie 12. A koło się toczy… (3 punkty)

Rysunek[180] **i oznaczenia:**
A - wybrany punkt okręgu
O - środek okręgu
K - rzut prostokątny punktu A na średnicę
B - rzut prostokątny punktu A na płaszczyznę poziomą
$|\overline{OA}| = |\overline{OL}| = r$ - promień okręgu
$|\overline{AB}|$ - odległość punktu A od płaszczyzny poziomej

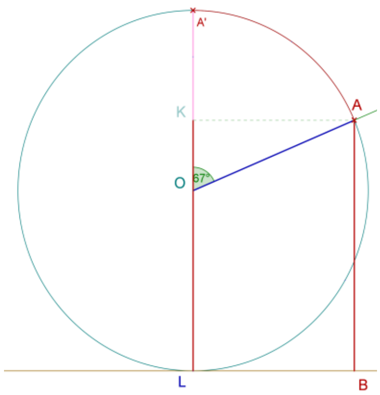
Dane: Koło o promieniu $12{,}5\,cm$

$r = |\overline{OA}| = |\overline{OL}| = 12{,}5\,cm$; $|\angle AOK| = 67°$

Szukane:

$|\overline{AB}|$ - odległość punktu A od płaszczyzny poziomej

Rozwiązanie:



Bezpośrednio z rysunku widać, że poszukiwana wysokość $|\overline{AB}|$ jest równa $|\overline{KL}|$.

$|\overline{KL}| = |\overline{KO}| + |\overline{OL}|$, należy więc obliczyć $|\overline{KO}|$, które wyznaczymy z prostokątnego ΔAKO:

$$\cos 67° = \frac{|\overline{KO}|}{|\overline{OA}|} \Rightarrow |\overline{KO}| = |\overline{OA}| \cdot \cos 67° \Rightarrow |\overline{KO}| \approx 12{,}5 \cdot 0{,}3907 \Rightarrow |\overline{\mathrm{KO}}| \approx 4{,}8841$$

stąd $|\overline{KL}| \approx 12{,}5 + 4{,}8841 \approx 17{,}38$

Odpowiedź: Jeżeli koło obróciło się o $67°$, to punkt A znajduje się na wysokości $17{,}38\ cm$ nad płaszczyzną poziomą

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń i zapisanie danych	1
B	Wyznaczenie długości odcinka $\overline{KO}$	1

[180] Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner

C	Wyznaczenie odległości punktu A od płaszczyzny poziomej, odpowiedź	1

Pakiet M-1.6 „O wartości! Nie bądź aż tak bezwzględna!”

I. Treści merytoryczne:

- definicja wartości bezwzględnej,
- podstawowe własności wartości bezwzględnej,
- przedziały,
- funkcje przedziałami liniowe i ich wykresy,
- twierdzenie Pitagorasa,
- symetralna odcinka.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie pojęcia odległości na prostej i na płaszczyźnie,
- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię,
- korzystanie z definicji wartości bezwzględnej,
- utrwalanie własności wartości bezwzględnej i wykorzystywanie ich do rozwiązywania równań i nierówności,
- utrwalanie pojęć związanych z pojęciem funkcji (wykres, miejsce zerowe, monotoniczność, zbiór wartości),
- interpretacja geometryczna rozwiązania równania lub nierówności z jedną lub dwiema zmiennymi.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć:

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.] Legutko M., Legutko M., Turnau S., *Matematyka I, Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i liceum zawodowego*, Wyd. II, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993
[2.] Orlińska M., *Matura 2010, Zakres rozszerzony, Matematyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Gdynia 2009
[3.] Rams S., Rams T., *Międzynarodowy konkurs matematyczny ”Matematyka bez granic”, część II, zadania konkursowe-etap wstępny 1998-2003,* Nowy Sącz 20003

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1.]Legutko M., Legutko M., Turnau S., *Matematyka I, Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i liceum zawodowego,* Wyd. II, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993
[2.]Orlińska M., *Matura 2010, Zakres rozszerzony, Matematyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Gdynia 2009
[3.]Rams S., Rams T. , *Matematyka bez granic, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003

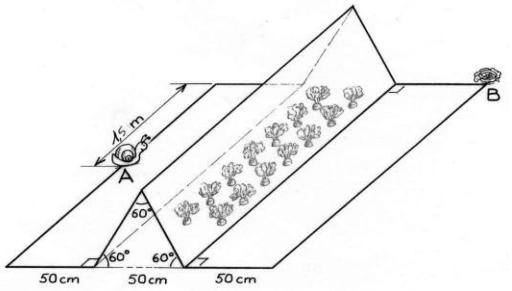
Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Wartości! Nie bądź aż tak bezwzględna!”

W tym ćwiczeniu:

- Przetłumacz treść zadania na język polski
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podaj w wybranym wcześniej języku



Warm up a hungry snail (6 points)

A snail wants to take the shortest route from point A to point B.
In its way there is a glass roof in the form of an equilateral triangle.
Its dimensions can be read from the attached drawing:
Calculate the length of the shortest route. Explain how you calculated it.

Exercice pour entraînement Escargot Qui A Faim (6 points)

L’escargot veut traverser le plus court chemin du point A au point B.
Sur son chemin il y a un toit de verre dont la vue en coupe est un triangle équilatéral. On peut lire ses mesures sur l’image cijointe.
Calcule la longeur du plus court chemin. Explique comment tu l’as obtenu.

Ejercicio de iniciación Un caracol hambriento (6 puntos)

El caracol quiere pasar por el camino más corto desde el punto A hasta el punto B. En su camino hay un techito de vidrio de la sección del triangulo equilátero. Se puede leer sus dimensiones en el dibujo abajo. Calcula la longitud del camino más corto. Explica cómo lo has hecho.

Esercizio per riscaldare Chiocciola affamata (6 punti)

La chiocciola vuole passare utilizzando il più corto tratto dal Punto A al punto B. Sulla sua strada si trova un piccolo tetto di vetro di una sezione del triangolo equilatero.
Le sue dimensioni si leggono sul disegno qui allegato.
Calcola la lunghezza del più corto tratto. Spiega come l’hai ottenuta.

Aufgabe zur Erwärmung Eine hungrige Schnecke (6 Punkte)

Eine Schnecke will den kürzesten Weg gehen, vom Punkt A bis zum Punkt B. Auf seinem Weg befindet sich ein Dächlein aus Glas von einem Durchschnitt eines gleichseitigen Dreiecks. Seine Abmessungen kann man aus der beigefügten Zeichnung ablesen:
Berechne die Länge des kürzesten Weges. Erkläre, wie du es berechnet hast.

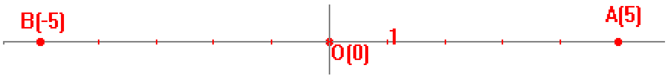
Zadanie 1. Jak daleko stąd, jak blisko… (7 punktów)

Warunek $|x|=5$ można odczytać „odległość punktu x od 0 jest równa 5”,

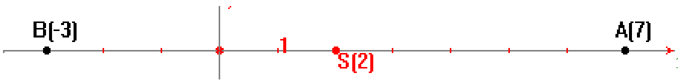
zaś warunek $|x-2|=5$ „odległość punktu x od 2 jest równa 5”.

Rozwiązania równań można wtedy zinterpretować następująco:

$|x|=5$ na osi OX szukamy punktów odległych od 0 o 5 jednostek, czyli: $|x|=5 \Leftrightarrow x=5$ lub $x=-5$ [181]



$|x-2|=5$ na osi OX szukamy punktów odległych od 2 o 5 jednostek, czyli $|x-2|=5 \Leftrightarrow x-2=5$ lub $x-2=-5$,



[182]

czyli x=7 lub x=-3

Rozwiąż dane równania i nierówności:

$|2x-4|=6$ $\quad$ $|2x-4|<6$ $\quad$ $|2x-4|\le 6$

$|2x-4|>6$ $\quad$ $|2x-4|\ge 6$ $\quad$ $|x-1|+|x+1|=3$

Zadanie 2. To nie jest naturalne? (5 punktów)

Wykaż, że liczba $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{2}+3}+\sqrt{2}$ jest naturalna.

Zadanie 3. Można prościej? (5 punktów)

Dana jest funkcja $f(x)=x-|x-1|$.

Narysuj jej wykres.

Określ:

1. Zbiór jej wartości;
2. Miejsca zerowe;
3. Monotoniczność

Zadanie 4. Jaki to obszar? (4 punkty)

Przedstaw zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek: $|x|+|y|\le 2$.

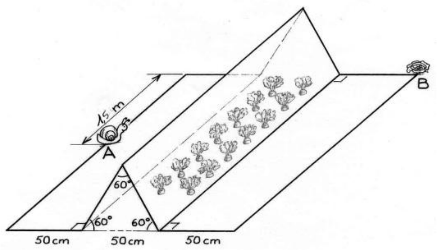
Jak nazwiesz powstałą figurę geometryczną?

[181] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[182] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

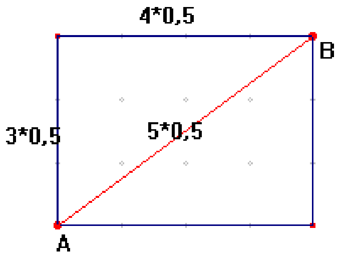
Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” - „Wartości! Nie bądź aż tak bezwzględna!”

Zadanie na rozgrzewkę Głodny ślimak (6 punktów)

Ślimak chce przejść najkrótszą drogą z punktu A do B.
Na jego drodze znajduje się szklany daszek o przekroju trójkąta równobocznego.
Jego wymiary można odczytać z załączonego rysunku.



Oblicz długość najkrótszej drogi. Wyjaśnij jak ją uzyskałeś.
Rozwiązanie:



[183]

Ślimak musi pokonać 4 pasy, każdy o szerokości *0,5m.*
Po ułożeniu ich obok siebie (rozwinięciu pobocznicy, czyli „spłaszczeniu” bryły) możemy obliczyć długość drogi *2,5m* w oparciu o twierdzenie Pitagorasa.

$d^2 = (3\cdot 0{,}5)^2 + (4\cdot 0{,}5)^2$

$d^2 = (0{,}5)^2 \cdot (3^2 + 4^2) = (0{,}5)^2 \cdot 25 = (0{,}5)^2 \cdot 5^2$

$d > 0$, zatem $d = 0{,}5\cdot 5 = 2{,}5$

Odpowiedź: Najkrótsza droga ślimaka jest równa $2{,}5\,m$

Punktacja

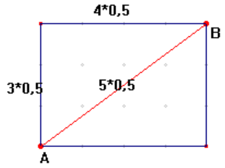
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Tłumaczenie zadania na język polski	1
B	Za prawidłowo obliczoną długość drogi	1
C	Za drogę prawidłowo wytyczoną i wyznaczoną w wyniku pomiaru	1
D	Za prawidłowo narysowaną drogę, ale przy braku obliczeń	1

[183] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

E	Za odpowiedź sformułowaną w języku obcym	2

Warm up a hungry snail (6 points)

The snail ought to go through 4 strips, each 0.5 m wide.



After putting them side by side (developing the side, or 'flattening' the solid figure).
We can calculate the path length 2.5 m based on the Pythagorean theorem.

$d^2 = (3 \cdot 0{,}5)^2 + (4 \cdot 0{,}5)^2$

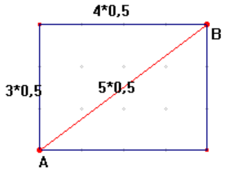
$d^2 = (0{,}5)^2 \cdot (3^2 + 4^2) = (0{,}5)^2 \cdot 25 = (0{,}5)^2 \cdot 5^2$; $d > 0 \Rightarrow d = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Translating the task into Polish	1
B	Calculating the length of the route	1
C	Correct calculation and tracing of the route	1
D	Drawing the route properly, failed calculation	1
E	Giving the answer in a foreign language	2

Exercice pour entraînement Escargot Qui A Faim (6 points)

L'escargot doit parcourir 4 voies, chacune de *0,5m*.



Après les avoir mises l'une à côté de l'autre (après avoir « aplati » le solide géométrique) on peut calculer la longeur du chemin 2,5m d'après le théorème de Pythagore.

$d^2 = (3 \cdot 0{,}5)^2 + (4 \cdot 0{,}5)^2$

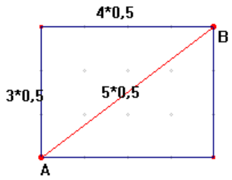
$d^2 = (0{,}5)^2 \cdot (3^2 + 4^2) = (0{,}5)^2 \cdot 25 = (0{,}5)^2 \cdot 5^2$; $d > 0 \Rightarrow d = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Pour la traduction en langue polonaise	1
B	Pour le calcul correct de la longeur du chemin	1
C	Pour le chemin correctement tracé et déterminé suite à la mesure	1
D	Pour le dessin correct du chemin, mais sans calculs	1
E	Pour la réponse formulée en langue étrangere	2

Ejercicio de iniciación Un caracol hambriento (6 puntos)

El caracol tiene que superar 4 vías, de la anchura 0,5m cada una.



Si las ponemos una al lado de otra (si ponemos la figura en plano).
Podemos calcular la longitud del camino 2,5m basándonos en el teorema de Pitágoras.

$$d^2 = (3\cdot 0{,}5)^2 + (4\cdot 0{,}5)^2$$

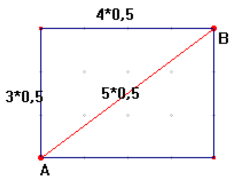
$$d^2 = (0{,}5)^2\cdot(3^2+4^2) = (0{,}5)^2\cdot 25 = (0{,}5)^2\cdot 5^2;\ d>0 \Rightarrow d = 0{,}5\cdot 5 = 2{,}5$$

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Calcular correctamente la longitud del camino.	1
C	Marcar y trazar correctamente el camino como resultado de la medida	1
D	Trazar correctamente el camino, pero con falta de cálculos.	1
E	Marcar la solución en un idioma extranjero	2

Esercizio per riscaldare Chiocciola affamata (6 punti)

La chiocciola deve trapassare 4 tratti ognano di una larghezza di *0,5m.*



Dopo averli sitemati accanto a loro (risvolto la parte laterale, cioè dopo aver appiattito il blocco) possiamo calcolare la lunghezza del tratto 2,5 m in base al teorema di Pitagora.

$$d^2 = (3\cdot 0{,}5)^2 + (4\cdot 0{,}5)^2$$

$$d^2 = (0{,}5)^2\cdot(3^2+4^2) = (0{,}5)^2\cdot 25 = (0{,}5)^2\cdot 5^2$$

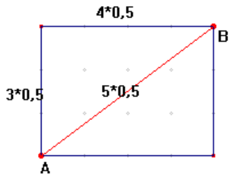
$$d>0 \Rightarrow d = 0{,}5\cdot 5 = 2{,}5$$

Punteggio

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione dell’esercizio in lingua polacca	1
B	Per la corretta lunghezza calcolata	1
C	Per il tratto correttamentetracciato ed indicato in seguito alla misurazione	1
D	Per il tratto disegnato correttamente, ma senza i calcoli	1
E	Per la riposta formulata in lingua straniera	2

Aufgabe zur Erwärmung Eine Hungrige Schnecke (6 Punkte)

Die Schnecke muss 4 Strecken zurücklegen, jede von einer Breite von *0,5m.*



Nach Verlegung der Strecken nebeneinander (Entwicklung des Flächenmantels, also „Abflachen“ des Körpers) können wir die Länge des Weges *2,5 m* anhand des Pythagoräischen Lehrsatzes berechnen.

$$d^2 = (3 \cdot 0{,}5)^2 + (4 \cdot 0{,}5)^2$$

$$d^2 = (0{,}5)^2 \cdot (3^2 + 4^2) = (0{,}5)^2 \cdot 25 = (0{,}5)^2 \cdot 5^2$$

$$d > 0 \Rightarrow d = 0{,}5 \cdot 5 = 2{,}5$$

Punktwertung

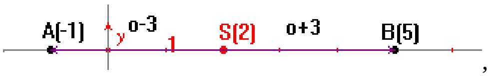
Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnische	1
B	Für eine richtig berechnete Länge des Weges	1
C	Für einen richtig infolge von Abmessungen abgesteckten Weg	1
D	Für einen richtig gezeichneten Weg, aber ohne Berechnungen	1
E	Für eine richtig formulierte Antwort in einer fremden Sprache	2

Zadanie 1. Jak daleko stąd, jak blisko… (7 punktów)

Ad a)

$|2x-4|=6$, z własności wartości bezwzględnej mamy: $2|x-2|=6$, czyli $|x-2|=3$

więc: $x-2=3$ lub $x-2=-3$[184]



,

czyli $x=5$ lub $x=-1$

Ad b)

Mamy: $|2x-4|<6$, więc $2|x-2|<6$, czyli $|x-2|<3$.

Ponieważ odległość od 2 ma być mniejsza niż 3 otrzymujemy: $x-2<3$ i $x-2>-3$.
Następnie: $x<5$ i $x>-1$, co daje przedział: $x\in(-1{,}5)$

Ad c)

Mamy: $|2x-4|\le 6$, więc $2|x-2|\le 6$, czyli $|x-2|\le 3$.

Ponieważ odległość od 2 ma być mniejsza lub równa 3 otrzymujemy: $x-2\le 3$ i $x-2\ge -3$.
Następnie: $x\le 5$ i $x\ge -1$, co daje przedział: $x\in\langle -1{,}5\rangle$.

Ad d)

Mamy: $|2x-4|>6$,więc $2|x-2|>6$, czyli $|x-2|>3$

Ponieważ odległość od 2 ma być większa niż 3 otrzymujemy: $x-2>3$ lub $x-2<-3$.
Następnie: $x>5$ lub $x<-1$, co daje sumę przedziałów: $x\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$

Ad e)

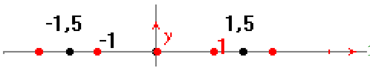
Mamy: $|2x-4|\ge 6$, więc $2|x-2|\ge 6$, czyli $|x-2|\ge 3$.

Ponieważ odległość od 2 ma być większa lub równa 3 otrzymujemy: $x-2\ge 3$ lub $x-2\le -3$.
Następnie: $x\ge 5$ lub $x\le -1$, co daje sumę przedziałów: $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 5,+\infty)$.

Ad f)

Mamy: $|x-1|+|x+1|=3$,

czyli suma odległości szukanego x od punktów -1 i 1 ma być równa 3
Odległość między punktami -1 i 1 wynosi 2.
Aby suma odległości szukanego punktu na osi od -1 i 1 wynosiła 3,
musimy „odejść” od -1 i od 1 o $\frac{1}{2}$, co daje rozwiązania $x=1\frac{1}{2}$ i $x=-1\frac{1}{2}$



[185]

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Za prawidłowo wyznaczone rozwiązanie równania lub nierówności w przykładach od a) do e)	Po 1 punkcie
B	Za prawidłowo wyznaczone rozwiązania równania w podpunkcie f)	1

[184] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[185] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 2. To nie jest naturalne? (5 punktów)

Założenie:

$$x=\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{2}+3}+\sqrt{2}$$

Teza:

$x\in N$ *- dana liczba jest naturalna*

Dowód:

◊Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia zauważamy, że:

$\left(2\sqrt{2}-3\right)^2=8-12\sqrt{2}+9=17-12\sqrt{2}$,

Podobnie: $\left(\sqrt{2}+1\right)^2=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$.

Daną liczbę zapiszemy, więc w postaci:

$x=\sqrt{\left(2\sqrt{2}-3\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}+\sqrt{2}=\left|2\sqrt{2}-3\right|+\left|\sqrt{2}+1\right|+\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=2\in N$ ♦cnw

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie liczb pod pierwiastkiem w postaci kwadratu sumy lub różnicy	2
B	Zapisanie liczb w postaci wartości bezwzględnej	1
C	Zapisanie liczb bez wartości bezwzględnej	1
D	Redukcja i wniosek	1

Zadanie 3. Można prościej? (5 punktów)

Z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & gdy \quad x \geq 1 \\ -x+1, & gdy \quad x < 1 \end{cases},$$

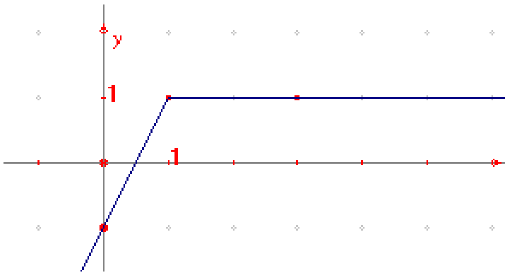
stąd:

$$x-|x-1| = \begin{cases} x-(x-1), & gdy \ x \geq 1 \\ x-(-x+1), & gdy \ x < 1 \end{cases},$$

zatem otrzymujemy funkcję określoną wzorami:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & gdy \quad x \in (-\infty, 1) \\ 1, & gdy \quad x \in \langle 1, +\infty) \end{cases}$$

Szkic wykresu funkcji[186] $f(x) = x - |x-1|$



Własności funkcji $f(x) = x - |x-1|$

a) Zbiorem jej wartości funkcji jest: $Y = (-\infty, 1\ \rangle$

b) Miejscem zerowym funkcji jest $x_0 = \frac{1}{2}$

c) Monotoniczność: funkcja jest niemalejąca

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie funkcji bez wartości bezwzględnej (uwzględniając przedziały)	1
B	Wykres funkcji	1
C	Udzielenie odpowiedzi na poszczególne pytania od a) do c)	Po 1 punkcie

[186] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 4. Jaki to obszar? (4 punkty)

Rozwiązanie:

Warunek: $|x|+|y|\le 2$ zapiszemy bez używania znaku wartości bezwzględnej.

Z definicji wartości bezwzględnej mamy:

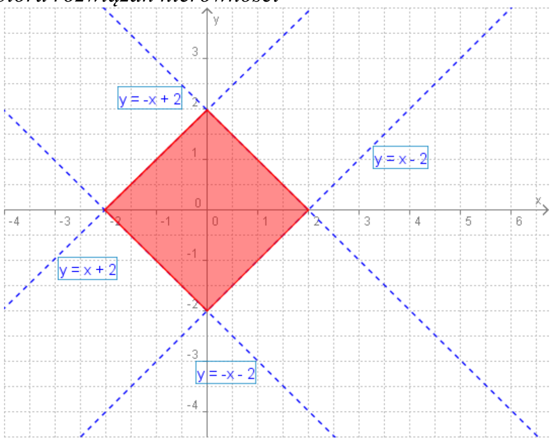
$$|x|=\begin{cases} x & dla\ x\ge 0 \\ -x & dla\ x<0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad |y|=\begin{cases} y & dla\ y\ge 0 \\ -y & dla\ y<0 \end{cases}$$

$$\text{zatem: } |x|+|y|\le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y\le 2 & dla\ x\ge 0 \wedge y\ge 0 \\ -x+y\le 2 & dla\ x<0 \wedge y\ge 0 \\ -x-y\le 2 & dla\ x<0 \wedge y<0 \\ x-y\le 2 & dla\ x\ge 0 \wedge y<0 \end{cases}$$

W poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych otrzymujemy zbiory tych punktów, których współrzędne spełniają podane warunki:

I ćwiartka:	II ćwiartka:	III ćwiartka:	IV ćwiartka:
$x\ge 0,\ y\ge 0$	$x<0,\ y\ge 0$	$x<0,\ y<0$	$x\ge 0,\ y<0$
$x+y\le 2$	$-x+y\le 2$	$-x-y\le 2$	$x-y\le 2$

Ilustracja graficzna zbioru rozwiązań nierówności[187]



Odpowiedź: Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny układu współrzędnych, których współrzędne spełniają warunek: $|x|+|y|\le 2$ jest kwadratem, którego wierzchołkami są punkty:

$$A=(-2;0);\ B=(0;\ 2);\ C=(2;\ 0);\ D=(0;\ -2)$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Punkty
A	Zapisanie nierówności bez wartości bezwzględnej (uwzględniając poszczególne obszary) i zaznaczenie w układzie współrzędnych	*4 - (Po jednym za każdą ćwiartkę układu)*
B	Rozpoznanie otrzymanej figury i udzielenie odpowiedzi	1

[187] Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner

Spotkanie 1: „Rozwiążmy razem" - „Wartości! Nie bądź aż tak bezwzględna!"

W tym zadaniu należy:

- Przetłumaczyć treść zadania na język polski
- Rozwiązać zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Task 1. Can It Be Simpler? (7 points)

Given the function $f(x)=|3-x|-4$.
What is the domain of the given function?
Find the zero points of this function
For which argument does the function get its lowest value?
Prove that this function is neither increasing nor decreasing
Demonstrate that in the interval $\langle 3,\infty\ )$ the function is increasing

Tarea 1. ¿Se Puede Más Sencillo? (7 puntos)

Tenemos la función $f(x)=|3-x|-4$.
¿Cuál es el dominio de esta función?
Encuentra los puntos raíz (o cero) de esta función.
¿Para qué argumento esta función obtiene el valor más pequeño?
Demuestra que esta función no es ni creciente ni decreciente
Demuestra que en el intervalo $\langle 3,\infty\ )$ la función es creciente

Esercizio 1. Si può più facilmente? (7 punti)

E' data la funzione $f(x)=|3-x|-4$.
Quale è l'insieme di definizione di questa funzione?
Trova una radice (o zero) di questa funzione.
Per quale argomento tale funzione raggiunge il minore valore?
Dimostra che questa funzione non è ne crescente, ne diminuente.
Dimostra che nell'intervallo $\langle 3,\infty\ )$ questa funzione è crescente.

Aufgabe 1. Geht es einfacher? (7 Punkte)

Es gibt eine Funktion $f(x)=|3-x|-4$.
Wie ist ihr Definitionsbereich?
Finde die Nullstellen dieser Funktion.
Für welches Argument erreicht die Funktion den kleinsten Wert?
Zeige, dass diese Funktion weder zunehmend noch abnehmend ist
Zeige, dass in einem Intervall $\langle 3,\infty\ )$ diese Funktion zunehmend ist

Exercice 1. Peut-on plus simplement? (7 points)

Il y a une fonction $f(x)=|3-x|-4$. Quel est le domaine de définition de cette fonction?
Trouve les racines d'un nombre de cette fonction
Pour quel argument cette fonction atteint la plus petite valeur?
Démontre que cette fonction n'est ni croissante ni décroissante.
Démontre que dans l'intervalle $\langle 3,\infty\ )$ cette fonction est croissante.

Zadanie 2. Jak daleko stąd, jak blisko… (3 punkty)

Rozwiąż dane równania i nierówności:

a) $|6+3x|=9$

b) $|6+3x|<9$

c) $|6+3x|\le 9$

d) $|6+3x|>9$

e) $|6+3x|\ge 9$

Zadanie 3. Łatwo zauważyć, że… (3 punkty)[188]

Wykorzystując własności wartości bezwzględnej podaj rozwiązania równań i nierówności:

a) $|x|=x$

b) $|x|=-x$

c) $|x|>x$

d) $|1-x|=x-1$

e) $|x-4|<0$

f) $|x|\le x$

g) $|2x+3|=2x+3$

Zadanie 4. To nie jest naturalne? (6 punktów)[189]

Wykaż, że liczba

a) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{21-4\sqrt{5}}-\sqrt{5}$

b) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3\sqrt{2}$

Jest naturalna.

Zadanie 5. Naturalne? Oczywiście! (6 punktów)[190]

Wykaż, że jeśli:

a) $x\in(-2,4)$, to $\dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-|x-4|-x+7=4$

b) $x\in(-2,3)$, to $\dfrac{\sqrt{4x^2+16x+16}}{2x+4}-3\dfrac{x-3}{|x-3|}=4$

[188] Zaczerpnięto z [1]
[189] Zaczerpnięto z [2]
[190] Zaczerpnięto z [2]

Zadanie 6. Spiętrzenie (4 punkty)[191]

Odczytaj na osi liczbowej i podaj rozwiązania równań:

$|x| + |x-3| = 5$

$|x+1| + |x-2| = 3$

$|x-1| + |x-5| = 3$

$|x-1| = |x-4|$

Zadanie 7. Od szczegółu do ogółu (4 punkty)[192]

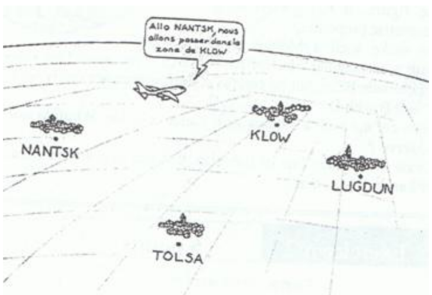
Dobierz liczby *a, b i c* ($c \geq 0$) tak, aby rozwiązanie równania: $|x-a| + |x-b| = c$ było:

Zbiorem jednoelementowym
Zbiorem dwuelementowym
Zbiorem pustym
Przedziałem $\langle a, b \rangle$?

Czy może być jeszcze inny przypadek? Uogólnij swoje obserwacje formułując odpowiednie twierdzenie.

Zadanie 8. Pod kontrolą (4 punkty)[193]

W odległej Syldawii przestrzeń powietrzna jest nadzorowana przez cztery centra kontroli. Znajdują się one w miejscowościach: Nantsk, Klow, Lugdun i Tolsa.
Syldawskie władze przyjęły następującą prostą regułę: ”Każdy samolot w syldawskiej przestrzeni powietrznej ma być nadzorowany przez najbliżej położone centrum kontrolne”.



Znane są odległości:

$|KT| = 600km$,

$|KL| = 350km$,

$|NK| = 350km$,

$|TL| = 400km$

$|NT| = 450km$.

Narysuj na arkuszu rozwiązań centra kontroli (1cm = 50km).
Pokoloruj cztery strefy dozoru przez poszczególne centra kontroli, po uprzednim wyznaczeniu ich granic!

[191] Zaczerpnięto z [1]
[192] Zaczerpnięto z [1]
[193] Zaczerpnięto z [3] - zadanie5 strona 88

Zadanie 9. Pola i miedze (8 punktów)[194]

Przedstaw zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają podany warunek.
Jak nazwiesz powstałą figurę geometryczną?

a) $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y-2| \le 1 \end{cases}$

b) $x = |y|$

c) $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{y}{|y|}$

d) $|x| + |y| = 4$

e) $|x| - |y| > 3$

Zadanie 10. Pomyślmy logicznie (3 punkty)

Rozwiąż dane równania i nierówności:

a) $\left||2x+3|-4\right| < 1$

b) $\left||x-1|-7\right| > 3$

c) $\sqrt{x^2-4x+4} - 3x + 5 = 0$

Zadanie 11. Maturalny standard (2 punkty)

Narysuj wykres funkcji $f(x) = |x| - \sqrt{x^2+4x+4}$.

Określ:

Zbiór wartości tej funkcji
Podaj jej miejsca zerowe
Określ jej monotoniczność

Zadanie 12. Czujesz ten rytm? (3 punkty)

Wykonaj w oddzielnych układach współrzędnych kolejno
rysunki ilustrujące wykresy funkcji:

$y = x,\ y = |x|,\ y = |x| - 1,\ y = \left||x|-1\right|,\ y = \left||x|-1\right| - 1,\ y = \left|\left||x|-1\right|-1\right|$

$y = -2x + 2,\ y = |-2x+2|,\ y = -2|x| + 2$

$y = \frac{1}{3}x + 1,\ y = \frac{1}{3}|x| + 1,\ y = \left|\frac{1}{3}x + 1\right|$

[194] Zaczerpnięto z [1]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” - „Wartości! Nie bądź aż tak bezwzględna!”

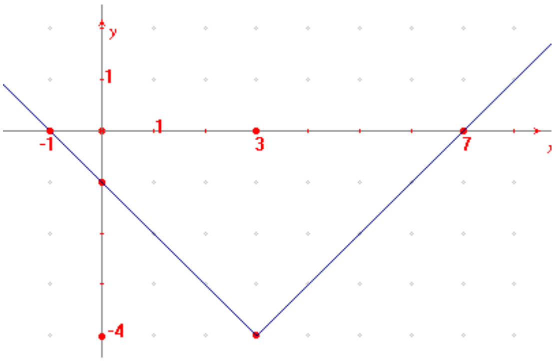
Zadanie 1. Można prościej? (7 punktów)[195]

Dana jest funkcja $f(x)=|3-x|-4$. Jaka jest dziedzina tej funkcji? Znajdź miejsca zerowe tej funkcji. Dla jakiego argumentu funkcja ta osiąga najmniejszą wartość? Wykaż, że funkcja ta nie jest ani rosnąca, ani malejąca. Wykaż, że w przedziale $\langle 3,\infty)$ funkcja ta jest rosnąca.

Rozwiązanie: $f(x)=|3-x|-4$, z definicji wartości bezwzględnej mamy:

$|3-x|=\begin{cases}3-x,\ gdy\ 3-x\geq 0, & x\leq 3\\ x-3,\ gdy\ 3-x<0, & x>3\end{cases}$ otrzymujemy, zatem $f(x)=\begin{cases}-x-1,\ gdy\ x\in(-\infty,3\rangle\\ x-7,\ gdy\ x\in(3,+\infty)\end{cases}$.

Wykres funkcji[196] $f(x)=|3-x|-4$ [197]



Własności funkcji $f(x)=|3-x|-4$.

Dziedzina: $D=R$.

Miejsca zerowe: $x=-1,\ x=7$

Najmniejszą wartością funkcji jest: $f(3)=-4$, funkcja nie przyjmuje wartości największej.

Funkcja nie jest monotoniczna w swojej dziedzinie, ale jest przedziałami monotoniczna:

maleje dla $x\in(-\infty,3)$,

rośnie dla $x\in(3,+\infty)$.

Dla $x\in\langle 3,+\infty)$ mamy: $f(x)=x-7$, zatem $f(x_2)-f(x_1)=x_2-7-(x_1-7)=x_2-x_1$, stąd mamy: dla $x_2-x_1>0$ również, $f(x_2)-f(x_1)>0$, czyli $f(x)$ jest funkcją w tym przedziale rosnącą.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Tłumaczenie	1
B	Zapisanie funkcji bez wartości bezwzględnej (uwzględniając przedziały) i sporządzenie wykresu	1
C	Udzielenie odpowiedzi na poszczególne pytania: za a) i b) razem	1
D	Udzielenie odpowiedzi na poszczególne pytania: za c), d) razem	1
E	Uzasadnienie, że funkcja jest rosnąca w przedziale $\langle 3,+\infty)$	1
F	Zapisanie rozwiązania w języku obcym	2

[195] Zaczerpnięto z [1]
[196] Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II
[197] Wykres wspólny dla rozwiązań we wszystkich językach

Task 1. can it be simpler? (7 points)

$f(x)=|3-x|-4$, from the definition of absolute value we have:

$|3-x|=\begin{cases}3-x, gdy\ 3-x\geq 0,\ x\leq 3\\ x-3, gdy\ 3-x<0,\ x>3\end{cases}$ then, we obtain $f(x)=\begin{cases}-x-1, gdy\ x\in(-\infty,3\rangle\\ x-7, gdy\ x\in(3,+\infty)\end{cases}$

$D=R$; $x=-1$, $x=7$

The lowest value of the function is: $f(3)=-4$, the function does not obtain the highest value. The function is not monotonic in its domain, but is monotonic at intervals: decreasing for $x\in(-\infty,3)$ and increasing for $x\in(3,+\infty)$. For $x\in\langle 3,+\infty)$ we have: $f(x)=x-7$, also $f(x_2)-f(x_1)=x_2-7-(x_1-7)=x_2-x_1$ hence we have: for $x_2-x_1>0$ also $f(x_2)-f(x_1)>0$ taht is $f(x)$ the function in this interval is increasing

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Translation into Polish	1
B	Giving the function without the absolute value (including intervals), and drawing the graph	1
C	Answering respective questions: for a) and b) together	1
D	Answering respective questions: for c) and d) together	1
E	Proving that the function is increasing in the interval	1
F	Giving the solution in a foreign language	2

Tarea 1. ¿Se Puede Mas Sencillo? (7 puntos)

$f(x)=|3-x|-4$, de la definición del valor absoluto tenemos: $|3-x|=\begin{cases}3-x, cuando 3-x\geq 0,\ x\leq 3\\ x-3, cuando 3-x<0,\ x>3\end{cases}$

obtenemos, entonces $f(x)=\begin{cases}-x-1, cuando\ x\in(-\infty,3\rangle\\ x-7, cuando\ x\in(3,+\infty)\end{cases}$; $D=R$; $x=-1$, $x=7$

El menor valor de función es: $f(3)=-4$, la función no coge el valor mayor.

La función no es monótona en su domino, pero es monótona en los intervalos: disminuye para $x\in(-\infty,3)$ y crece para $x\in(3,+\infty)$. Para $x\in\langle 3,+\infty)$ tenemos en : $f(x)=x-7$, entonces $f(x_2)-f(x_1)=x_2-7-(x_1-7)=x_2-x_1$ así tenemos: para $x_2-x_1>0$ también $f(x_2)-f(x_1)>0$ quiere decir $f(x)$ es función creciente en este intervalo.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Escribir la función sin valor absoluto (tomando los intervalos en consideración) y trazar el diagramo	1
C	Responder a las preguntas a y b junto	1
D	Responder a las preguntas c y d junto	1
E	Justificar que la función es creciente en el intervalo $\langle 3,+\infty)$	1
F	Marcar la solución en un idioma extranjero	2

Zadanie 1. Si può più facilmente? (7 punti)

$f(x)=|3-x|-4$, dalla definizione del valore assoluto abbiamo:

$|3-x|=\begin{cases}3-x, quando 3-x\geq 0, & x\leq 3\\ x-3, quando 3-x<0, & x>3\end{cases}$ riceviamo, per cui $f(x)=\begin{cases}-x-1, quando & x\in(-\infty,3\rangle\\ x-7, quando & x\in(3,+\infty)\end{cases}$

$D=R$; $x=-1$, $x=7$. Il minore valore della funzione è : $f(3)=-4$, la funzione non raggiunge il valore massimo La funzione non è monotona nel suo insieme di definizione, ma diventa monotona negli intervalli: decresce per $x\in(-\infty,3)$ e cresce per $x\in(3,+\infty)$. Per $x\in\langle 3,+\infty)$ abbiamo:

$f(x)=x-7$, per cui $f(x_2)-f(x_1)=x_2-7-(x_1-7)=x_2-x_1$ di conseguenza abbiamo: per $x_2-x_1>0$ anche $f(x_2)-f(x_1)>0$ cioè $f(x)$ è funzione crescente in questo intervallo.

Punteggio

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione	1
B	Scrivere la funzione senza il valore assoluto (considerando gli intervalli) e rappresentare graficamente	1
C	Rispondere alle singole domande: per a) e b) insieme	1
D	Rispondere alle singole domande: per c) e d) insieme	1
E	Giuitificare che la funzione è crescente nell'intervallo $\langle 3,+\infty)$	1
F	Scrivere la soluzione nella lingua straniera	2

Aufgabe 1. Geht es Einfacher? (7 Punkte)

$f(x)=|3-x|-4$, aus der Definition vom absoluten Betrag haben wir:

$|3-x|=\begin{cases}3-x, gdy 3-x\geq 0, & x\leq 3\\ x-3, gdy 3-x<0, & x>3\end{cases}$ bekommen wir, also $f(x)=\begin{cases}-x-1, gdy & x\in(-\infty,3\rangle\\ x-7, gdy & x\in(3,+\infty)\end{cases}$

$D=R$; $x=-1$, $x=7$. Der kleinste Funktionswert ist: $f(3)=-4$, die Funktion nimmt den größten Wert nicht an

Die Funktion ist in ihrem Definitionsbereich nicht monoton, sie ist aber in ihren Intervallen monoton: sie ist fallend für $x\in(-\infty,3)$ und wachsend für $x\in(3,+\infty)$. Für $x\in\langle 3,+\infty)$ haben wir:

$f(x)=x-7$, also $f(x_2)-f(x_1)=x_2-7-(x_1-7)=x_2-x_1$ daher haben wir: für $x_2-x_1>0$ auch $f(x_2)-f(x_1)>0$ also $f(x)$ ist in diesem Intervall eine wachsende Funktion.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung	1
B	Aufschreiben der Funktion ohne absoluten Bereich (die Intervalle berücksichtigend) und Aufzeichnen des Bildes der Funktion	1
C	Antwort auf einzelne Fragen: für a) und b) zusammen	1
D	Antwort auf einzelne Fragen: für c), d) zusammen	1
E	Begründung, dass die Funktion im Intervall $\langle 3,+\infty)$ wachsend ist	1
F	Aufschreiben der Lösung in einer fremden Sprache	2

Exercice 1. Peut-on plus simplement? (7 points)

$f(x)=|3-x|-4$, de la définition de la valeur absolut on a: $|3-x|=\begin{cases}3-x, gdy 3-x\geq 0, & x\leq 3\\ x-3, gdy 3-x<0, & x>3\end{cases}$

alors on obtient $f(x)=\begin{cases}-x-1, gdy \; x\in(-\infty,3\rangle\\ x-7, gdy \; x\in(3,+\infty)\end{cases}$ $D=R$; $x=-1,\ x=7$. La plus petite valeur de la fonction est: $f(3)=-4$, la fonction n'atteint pas la valeur la plus grande La fonction n'est pas monotone dans sa domaine, mais elle est monotone dans les intervalles: décroit pour $x\in(-\infty,3)$ et accroît pour $x\in(3,+\infty)$. Pour $x\in\langle 3,+\infty\,)$ on a: $f(x)=x-7$, alors $f(x_2)-f(x_1)=x_2-7-(x_1-7)=x_2-x_1$ d'où on a: dla $x_2-x_1>0$ aussi $f(x_2)-f(x_1)>0$ alors $f(x)$ est la fonction dans cette intervalle croissante

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire	1
B	Noter la fonction sans valeur absolut (en prenant en consideration les intervalles) et construire le graphique	1
C	Donner la réponse à des questions particulières: pour a) et b) au total	1
D	Donner la réponse à des questions particulières: pour c) et d) au total	1
E	Justifier que la fonction est croissante dans l'intervalle $\langle 3,+\infty)$	1
F	Ecrire la solution en langue étrangère	2

Zadanie 2. Jak daleko stąd, jak blisko… (3 punkty)

$|6+3x|=9$, z własności wartości bezwzględnej mamy:

$|x+2|=3$, więc: $x=-5$ lub $x=1$.


[198].

Czytamy: "odległość od -2 wynosi 3"

$|6+3x|<9$ mamy: $x\in(-5;1)$: „odległość od -2 jest mniejsza od 3"

$|6+3x|\leq 9$ mamy: $x\in\langle -5;1\rangle$: „odległość od -2 jest mniejsza lub równa 3"

$|6+3x|>9$ mamy: $x\in(-\infty;-5)\cup(1;+\infty)$„ odległość od -2 jest większa od 3"

$|6+3x|\geq 9$ mamy: $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\langle 1;+\infty)$„ odległość od -2 jest większa lub równa 3"

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Rozwiązanie równania a)	1
B	Rozwiązanie nierówności b) i c)	1
C	Rozwiązanie nierówności d) i e)	1

[198] Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II

Zadanie 3. Łatwo zauważyć, że… (3 punkty)

a) $|x| = x$: dla $x \geq 0$, bezpośrednio z definicji

b) $|x| = -x$: dla $x \leq 0$, bezpośrednio z definicji

c) $|x| > x$: dla $x < 0$, bezpośrednio z definicji

d) $|x| \leq x$: dla $x \geq 0$

e) $|2x+3| = 2x+3$: dla $2x+3 \geq 0$, czyli $x \geq -\frac{3}{2}$

f) $|1-x| = x-1$: dla $1-x \leq 0$, czyli $x \geq 1$

g) $|x-4| < 0$: $x \in \emptyset$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Rozwiązanie a),b)	1
B	Rozwiązanie c), d)	1
C	Rozwiązanie nierówności e), f) i g)	1

Zadanie 4. To nie jest naturalne? (6 punktów)

Ad a)

Niech $x = \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{21-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}$.

Zauważamy, że:

$14-6\sqrt{5} = 9-6\sqrt{5}+5 = 3^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(3-\sqrt{5}\right)^2$ *(*)*

$21-4\sqrt{5} = 1-4\sqrt{5}+20 = 1-4\sqrt{5}+4\cdot 5 = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{5} + \left(2\sqrt{5}\right)^2 = \left(1-2\sqrt{5}\right)^2$ *(**)*

Wykorzystując *(*)* i *(**)* otrzymujemy:

$x = \sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{21-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = \sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2} + \sqrt{\left(1-2\sqrt{5}\right)^2} - \sqrt{5} = \left|3-\sqrt{5}\right| + \left|1-2\sqrt{5}\right| - \sqrt{5}$,

ale $\left|3-\sqrt{5}\right| = 3-\sqrt{5}$, bo $3-\sqrt{5} > 0$ oraz $\left|1-2\sqrt{5}\right| = -1+2\sqrt{5}$, bo $1-2\sqrt{5} < 0$.

Zatem $x = 3-\sqrt{5}-1+2\sqrt{5}-\sqrt{5} = 2-2\sqrt{5}+2\sqrt{5} = 2$ zaś liczba $2 \in N$

Odpowiedź:

Otrzymaliśmy: $\sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{21-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = 2$,

co oznacza, że $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{21-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right) \in N$ czyli,

że liczba $\left(\sqrt{14-6\sqrt{5}} + \sqrt{21-4\sqrt{5}} - \sqrt{5}\right)$ jest liczbą naturalną.

Ad b)

Niech $y=\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3\sqrt{2}$.

Zauważamy, że: $9-4\sqrt{2}=1-4\sqrt{2}+8=1^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2=\left(1-2\sqrt{2}\right)^2$ *(*)*

$11+6\sqrt{2}=9+6\sqrt{2}+2=3^2+2\cdot 3\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(3+\sqrt{2}\right)^2$ *(**)*

Wykorzystując *(*)* i *(**)* otrzymujemy:

$y=\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3\sqrt{2}=\sqrt{\left(1-2\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(3+\sqrt{2}\right)^2}-3\sqrt{2}=\left|1-2\sqrt{2}\right|+\left|3+\sqrt{2}\right|-3\sqrt{2}$

ale $\left|1-2\sqrt{2}\right|=-1+2\sqrt{2}$, bo $1-2\sqrt{2}<0$

oraz $\left|3+\sqrt{2}\right|=3+\sqrt{2}$, bo $3+\sqrt{2}>0$

Zatem $y=-1+2\sqrt{2}+3+\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=2\in N$.

Odpowiedź:

Otrzymaliśmy, że, $\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3\sqrt{2}=2$, co oznacza,
że: $\left(\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3\sqrt{2}\right)\in N$

czyli, że liczba $\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3\sqrt{2}$ jest liczbą naturalną.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	a) Zapisanie liczb pod pierwiastkiem w postaci kwadratu sumy lub różnicy i przejście do wartości bezwzględnej	2
B	a) Zapisanie liczb bez wartości bezwzględnej i redukcja	1
C	b) Zapisanie liczb pod pierwiastkiem w postaci kwadratu sumy lub różnicy i przejście do wartości bezwzględnej	2
D	b) Zapisanie liczb bez wartości bezwzględnej i redukcja	1

Zadanie 5. Naturalne? Oczywiście! (6 punktów)

Ad a)

Jeżeli $x \in (-2;4)$, to: $\sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = x+2$ i $|x-4| = -x+4$

Zatem wartość wyrażenia w podanym przedziale wynosi: $\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - |x-4| - x + 7 =$

$\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - |x-4| - x + 7 = \frac{|x+2|}{x+2} - |x-4| - x + 7 = = \frac{x+2}{x+2} - (-x+4) - x + 7 =$

$= 1 + x - 4 - x + 7 = 4$

Powyższe oznacza, że: $x \in (-2;4) \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - |x-4| - x + 7 = 4$

Ad b)

Jeżeli $x \in (-2,3)$, to:

$$\sqrt{4x^2+16x+16} = \sqrt{(2x+4)^2} = |2x+4| = 2x+4 \text{ i } |x-3| = -x+3$$

Zatem wartość wyrażenia w podanym przedziale wynosi:

$\frac{\sqrt{4x^2+16x+16}}{2x+4} - 3 \cdot \frac{x-3}{|x-3|} = \frac{\sqrt{(2x+4)^2}}{2x+4} - 3\frac{x-3}{|x-3|} = \frac{|2x+4|}{2x+4} - 3\frac{x-3}{|x-3|} = \frac{2x+4}{2x+4} - 3\frac{x-3}{3-x} =$

$= 1 - 3 \cdot (-1) = 1 + 3 = 4$.

Powyższe oznacza, że: $x \in (-2;3) \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - |x-4| - x + 7 = 4$

Punktacja

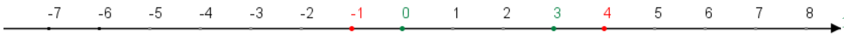
Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	a) Zapisanie liczb pod pierwiastkiem w postaci kwadratu sumy lub różnicy i przejście do wartości bezwzględnej	2
B	a) Zapisanie liczb bez wartości bezwzględnej i redukcja	1
C	b) Zapisanie liczb pod pierwiastkiem w postaci kwadratu sumy lub różnicy i przejście do wartości bezwzględnej	2
D	b) Zapisanie liczb bez wartości bezwzględnej i redukcja	1

Zadanie 6. Spiętrzenie (4 punkty)

Ad a)

$|x|+|x-3|=5$ Oznacza, że suma odległości x od 0 i od 3 ma wynosić 5.

Ponieważ obie liczby odległe są o 3, to trzeba się oddalić od nich o połowę pozostałej odległości $\left(\frac{5-3}{2}\right)$, czyli o 1, w obie strony, co daje $x=0-1=-1$ lub $x=3+1=4$.



[199]

Ad b)

$|x+1|+|x-2|=3$ Oznacza, że suma odległości x od -1 i od 2 jest równa 3.

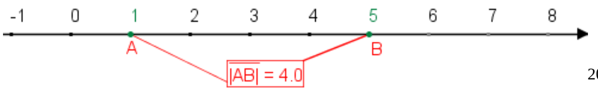
Ponieważ obie liczby są odległe o 3, więc równanie spełnia każda liczba leżąca miedzy nimi i one obie. Mamy, więc $x \in \langle -1,2 \rangle$.

[200]

Ad c)

$|x-1|+|x-5|=3$.

Odległość liczby 1 od 5 wynosi 4, nie ma więc liczb, których suma odległości od 1 i 5 wynosiłaby 3. Odpowiedź: $x \in \phi$



[201]

Ad d)

$|x-1|=|x-4|$. Liczby 1 i 4 są odległe od siebie o 3.

Liczby tak samo odległe od nich obu leżą w połowie drogi (na symetralnej odcinka), na osi OX jest to, więc $x=2\frac{1}{2}$.

[202]

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Za prawidłowo wyznaczone rozwiązanie równania w przykładach od a) do d)	*Po 1 punkcie*

[199] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*
[200] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*
[201] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*
[202] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 7. Od szczegółu do ogółu (4 punkty)

Ad a)

Zbiorem jednoelementowym: Przykład: $a = b = 3,\ \ c = 0,\ wtedy\ \ x = 3$.

Uogólnienie:

Zbiór rozwiązań równania $|x-a|+|x-b|=c$ jest jednoelementowy $\Leftrightarrow a = b\ i\ c = 0$

Ad b)

Zbiorem dwuelementowym. Przykład: $a = -1,\ b = 3,\ c = 6,\ wtedy\ x = -2$ lub $x = 4$.

Uogólnienie:

Zbiór rozwiązań równania $|x-a|+|x-b|=c$ jest dwuelementowy $\Leftrightarrow c > |a-b| \wedge a \neq b$

Ad c)

Zbiorem pustym. Przykład: $a = -1,\ b = 3,\ c = 2$

Uogólnienie:

Zbiór rozwiązań równania $|x-a|+|x-b|=c$ jest zbiorem pustym $\Leftrightarrow c < |a-b| \wedge a \neq b$

Ad d)

Przedziałem $\langle a,b\ \rangle$. Przykład: Np. $a = -1,\ b = 3$, $c = 4$.

Uogólnienie:

Zbiór rozwiązań równania $|x-a|+|x-b|=c$ jest przedziałem $\langle a; b\rangle$ $\Leftrightarrow c = |a-b| \wedge a \neq b$

Odpowiedź:

W treści zadania podano wszystkie możliwe przypadki, to znaczy, że:

Zbiór rozwiązań równania $|x-a|+|x-b|=c$ może być:

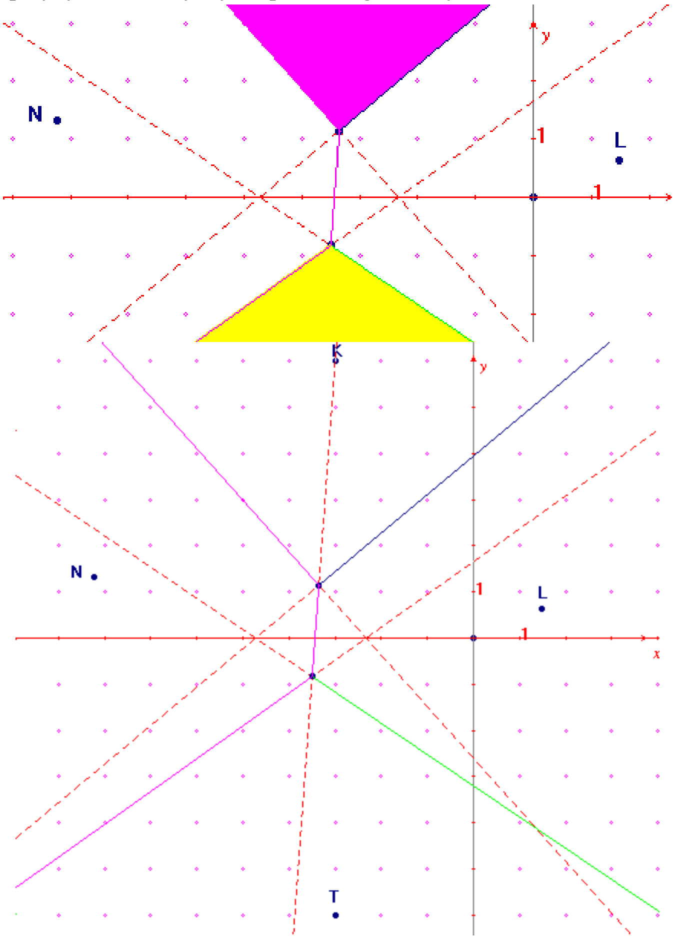
zbiorem pustym lub zbiorem jednoelementowym lub zbiorem dwuelementowym
lub przedziałem domkniętym

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Za prawidłowo podany przykład równania od a) do d)	Po 1 punkcie

Zadanie 8. Pod kontrolą (4 punkty)

Gdy połączy się parami miasta,
to uzyska się granice stref kontroli jako symetralne odcinków łączących te centra kontroli.
Decydujący jest przy tym właściwy wybór punktów granicznych. [203].



Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wyznaczenie symetralnych odcinków	1
B	Wybór granic	2
C	Dokładność i sposób przedstawienia obszarów	1

[203] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 9. Pola i miedze (8 punktów)

Rozwiązania:

Ad a)

$$\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y-2| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 3 \end{cases}$$

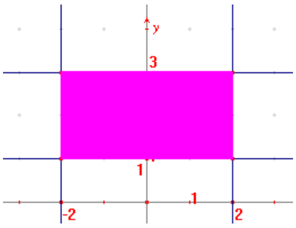
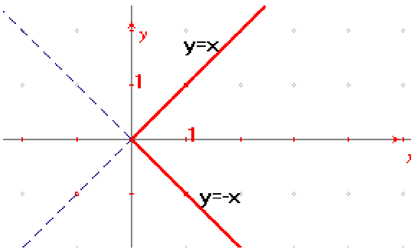


Figura jest prostokątem[204].

Ad b)

$x = |y|$



Suma półprostych[205].

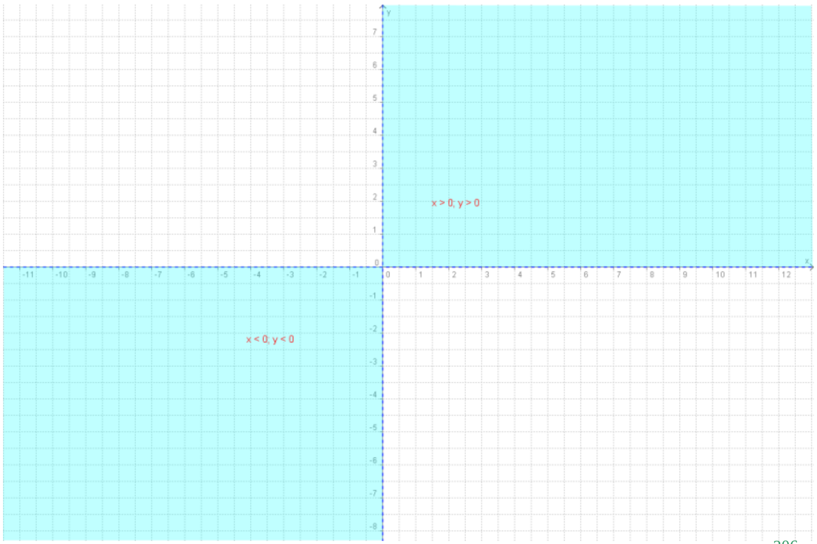
Ad c)

$\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|}$; Zastrzeżenia: $x \neq 0, \quad y \neq 0$

$$\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x} = \frac{y}{y} \wedge x > 0 \wedge y > 0 \\ \frac{x}{x} = \frac{y}{-y} \wedge x > 0 \wedge y < 0 \\ \frac{x}{-x} = \frac{y}{y} \wedge x < 0 \wedge y > 0 \\ \frac{x}{-x} = \frac{y}{-y} \wedge x < 0 \wedge y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 \wedge x > 0 \wedge y > 0 - \mathit{warunek\ prawdziwy} \\ 1 = -1 \wedge x > 0 \wedge y < 0 - \mathit{warunek\ faszywy} \\ -1 = 1 \wedge x < 0 \wedge y > 0 - \mathit{warunek\ faszywy} \\ -1 = -1 \wedge x < 0 \wedge y < 0 - \mathit{warunek\ prawdziwy} \end{cases}$$

Zatem $\frac{x}{|x|} = \frac{y}{|y|} \Leftrightarrow [(x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)]$

[204] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[205] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*



Otrzymana figura to suma I i III ćwiartki układu współrzędnych bez osi współrzędnych[206]

Ad d)

$|x|+|y|=4$

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$|x|+|y|=4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \quad dla \quad x>0 \wedge y>0 \\ -x+y=4 \quad dla \quad x<0 \wedge y>0 \\ -x-y=4 \quad dla \quad x<0 \wedge y<0 \\ x-y=4 \quad dla \quad x>0 \wedge y<0 \end{cases}$$

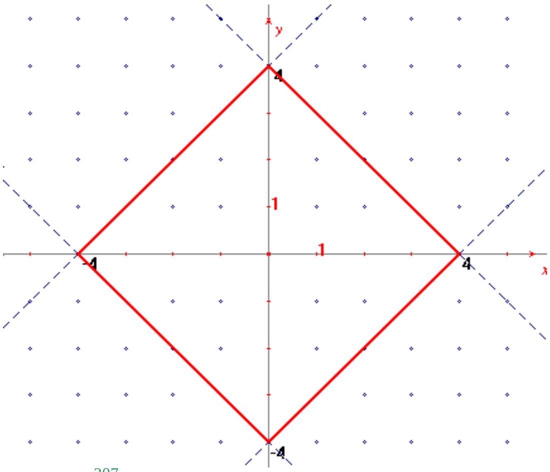


Figura jest brzegiem kwadratu. [207]

---

[206] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

[207] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

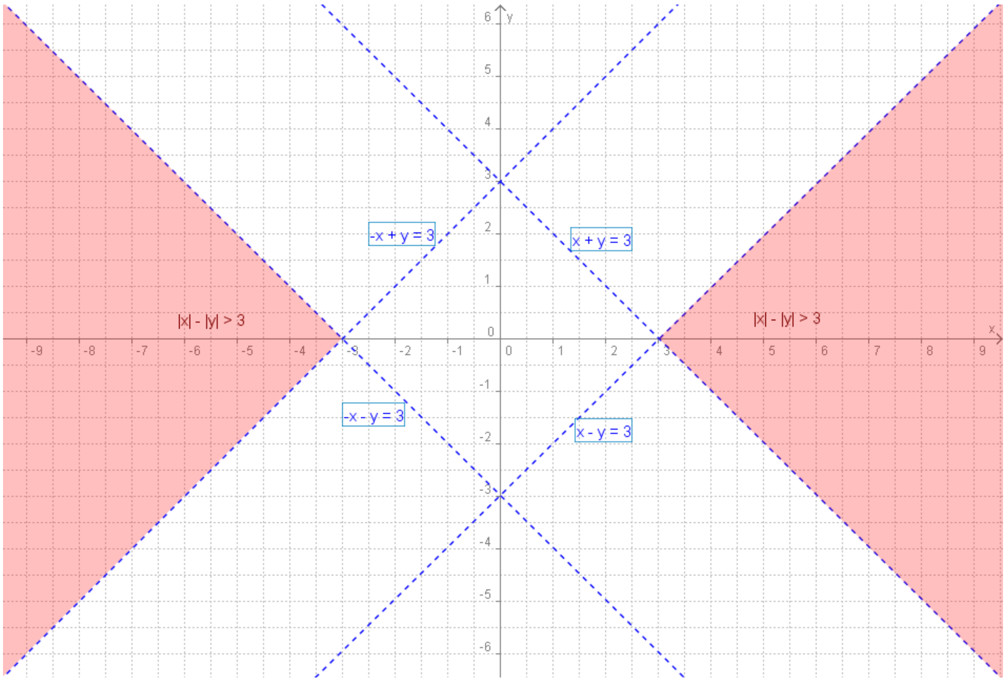
Ad e)

$|x|-|y|>3$[208]

Korzystając z definicji wartości bezwzględnej otrzymujemy:

$$|x|-|y|>3 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y>3 & dla \quad x\geq 0 \wedge y\geq 0 \\ -x-y>3 & dla \quad x<0 \wedge y\geq 0 \\ -x+y>3 & dla \quad x<0 \wedge y<0 \\ x+y>3 & dla \quad x\geq 0 \wedge y<0 \end{cases}$$



Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Narysowanie figur w punktach a) i b)	Po 1 punkcie
B	Analiza równania lub nierówności i narysowanie figur w punktach c), d) i e)	Po 2 punkty każdy

[208] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 10. Pomyślmy logicznie… (3 punkty)

Ad a)

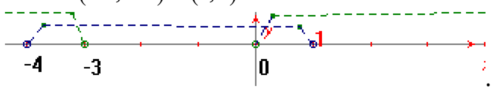
$||2x+3|-4|<1 \Leftrightarrow (|2x+3|-4<1 \text{ i } |2x+3|-4>-1)$

$(|2x+3|<5 \text{ i } |2x+3|>3) \Leftrightarrow$

$[-5<2x+3<5 \text{ i } (2x+3>3 \text{ lub } 2x+3<-3)] \Leftrightarrow$

$[-4<x<1 \text{ i } (x>0 \text{ lub } x<-3)]$

Co daje sumę przedziałów $x \in (-4;-3) \cup (0;1)$



[209]

Odpowiedź:

$$||2x+3|-4|<1 \Leftrightarrow x \in (-4;-3) \cup (0;1)$$

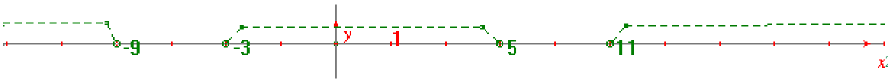
Ad b)

$||x-1|-7|>3 \Leftrightarrow (|x-1|-7>3 \text{ lub } |x-1|-7<-3) \Leftrightarrow$

$[|x-1|>10 \text{ lub } |x-1|<4] \Leftrightarrow$

$[(x>11 \text{ lub } x<-9) \text{ lub } (x<5 \ i \ x>-3)]$.

Co daje sumę przedziałów $x \in (-\infty;-9) \cup (-3;5) \cup (11;\infty)$



[210]

Odpowiedź:

$$||x-1|-7|>3 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-9) \cup (-3;5) \cup (11;\infty)$$

Ad c)

$\sqrt{x^2-4x+4}-3x+5=0 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2}-3x+5=0$, czyli $|x-2|-3x+5=0$,

mamy dwie możliwości:

I $x \geq 2$ Wtedy: $x-2-3x+5=0$, $x=\frac{3}{2} \notin \langle 2,\infty)$;

II $x<2$ Wtedy: $-x+2-3x+5=0$, $x=\frac{7}{4} \in (-\infty,2)$

Odpowiedź:

$$\sqrt{x^2-4x+4}-3x+5=0 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}.$$

Punktacja

L.p.	Etapy rozwiązania	Punkty
1	Poprawne rozwiązanie każdej nierówności lub równania	Po 1 punkcie

[209] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*
[210] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

Zadanie 11. Maturalny standard (2 punkty)

Dana jest funkcja $f(x)=|x|-\sqrt{x^2+4x+4}$.

Przekształcamy równanie funkcji do postaci równoważnej:

$f(x)=|x|-\sqrt{x^2+4x+4} \Leftrightarrow f(x)=|x|-\sqrt{(x+2)^2} \Leftrightarrow f(x)=|x|-|x+2|,\ x\in R$

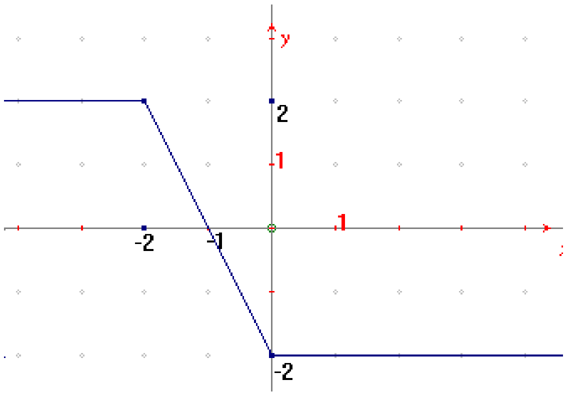
Mamy trzy przedziały:

I) $x\in(-\infty,-2) \Rightarrow f(x)=-x+x+2=2$

II) $x\in\langle-2,0\ ) \Rightarrow f(x)=-x-x-2=-2x-2$

III) $x\in\langle 0,\infty\ ) \Rightarrow f(x)=x-x-2=-2$

To daje funkcję[211]: $f(x)=\begin{cases}2,\ dla\ x\in(-\infty,-2)\\ -2x-2,\ dla\ x\in\langle-2;0)\\ -2,\ dla\ x\in\langle 0;\infty)\end{cases}$



Odpowiedź:

Zbiór wartości tej funkcji: $Y=\langle-2;2\rangle$

Jej miejsca zerowe: $x_0=-1$

Monotoniczność: funkcja jest nierosnąca.

Punktacja

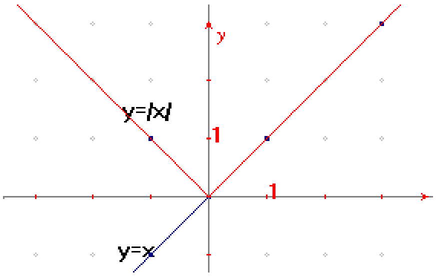
Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Zapisanie funkcji bez wartości bezwzględnej (uwzględniając przedziały) i sporządzenie wykresu	1
B	Udzielenie odpowiedzi na wszystkie poszczególne pytania	1

[211] *Rysunek wykonany przez Iwonę Derendarz w programie Cabri Geometry II*

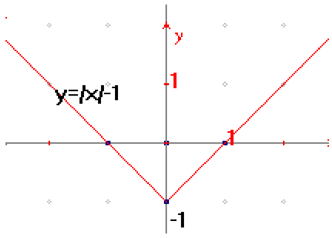
Zadanie 12. Czujesz ten rytm? (3 punkty)

$y = x$, $y = |x|$, $y = |x| - 1$, $y = ||x| - 1|$, $y = ||x| - 1| - 1$, $y = |||x| - 1| - 1|$

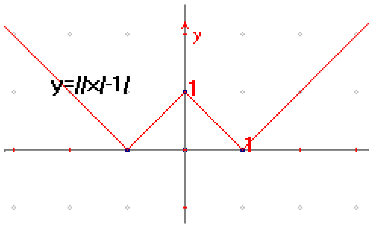
$y = x$, $y = |x|$



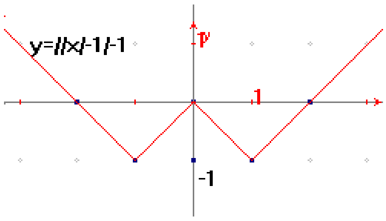
$y = |x| - 1$



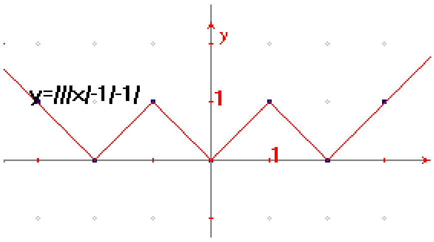
$y = ||x| - 1|$



$y = ||x| - 1| - 1$

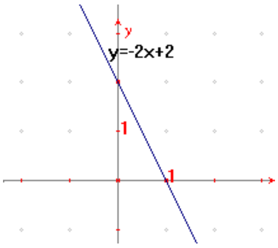


$y = |||x| - 1| - 1|$

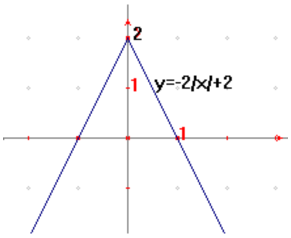


$y=-2x+2$, $y=|-2x+2|$, $y=-2|x|+2$

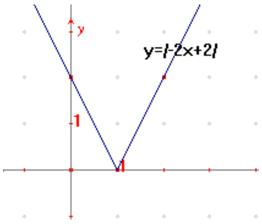
$y=-2x+2$



$y=|-2x+2|$

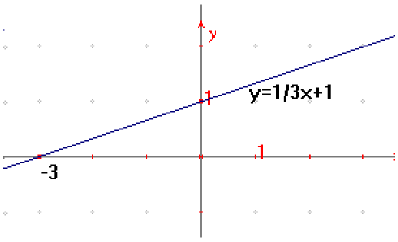


$y=-2|x|+2$

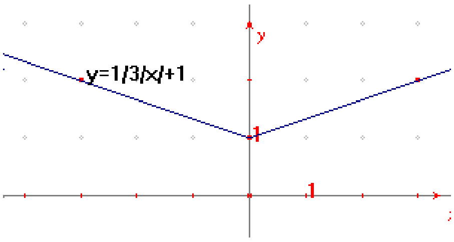


$y=\frac{1}{3}x+1$, $y=\frac{1}{3}|x|+1$, $y=\left|\frac{1}{3}x+1\right|$

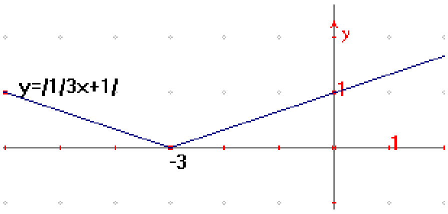
$y=\frac{1}{3}x+1$



$y=\frac{1}{3}|x|+1$



$y=\left|\frac{1}{3}x+1\right|$



Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Poprawne narysowanie każdej funkcji w poszczególnych punktach	Po 1 punkcie za każdy podpunkt

Pakiet M-1.7 - „Na układy nie ma rady”

I. Treści merytoryczne:

- równanie prostej na płaszczyźnie,
- warunek równoległości i warunek prostopadłości prostych będących wykresami funkcji liniowej,
- układy równań liniowych – rozwiązywanie algebraiczne metodą przeciwnych współczynników i podstawiania,
- graficzna interpretacja układów równań liniowych,
- układy równań stopnia pierwszego z wartością bezwzględną,
- stosunek pól figur podobnych.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności rozwiązywania układów równań różnymi metodami,
- utrwalanie nawyku precyzyjnego oznaczania niewiadomych i sprawdzania zgodności otrzymanych wyników z założeniami,
- utrwalenie definicji wartości bezwzględnej,
- nabywanie biegłości w działaniach na liczbach niewymiernych,
- wskazanie zastosowań matematyki w prostych zadaniach z fizyki (zależność miedzy drogą, prędkością i czasem).

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1.] Dróbka N., Szymański K., *Matematyka, klasa 1. Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2002

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne**)**

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie.
   Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie.
   Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1.]Cewe A., Nahorska H., *Zbiór zadań dla klasy I*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2004

[2.]Kłaczkow K., Kurczak M., Świda E., *Matematyka, zbiór zadań do liceum i technikum, kl. I.*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002

[3.]Dróbka N., Szymański K., *Matematyka, klasa 1. Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2002

[4.]Bartman A., Fabiański I., *I ty zostaniesz Euklidesem I,* Oficyna Wydawniczo – Poligraficzna i Reklamowo – Handlowa „Adam”, Warszawa 1996

[5.]Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, arszawa 1994

[6.]Herbut I., Olszańska A., *Maturalnie, że zdasz*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2004

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Na układy nie ma rady”

Zadanie 1

- Przetłumacz treść zadania na język polski;
- Rozwiąż zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Task 1. Squares Once! (5 points)

The ratio of the areas of two squares is $\frac{1}{9}$, while their circumferences differ by 32 Calculate the lengths of their diagonals

Aufgabe 1. Quadrate, Auf Einmal! (5 Punkte)

Das Verhältnis der Flächen von zwei Quadraten ist gleich $\frac{1}{9}$, ihre Umfänge dagegen sind um 32 unterschiedlich. Berechne die Längen von Diagonalen dieser Quadrate!

Exercice 1. Carrés une fois! (5 points)

Le rapport des aires de deux carrés égale $\frac{1}{9}$, cependant leurs périmètres différent de 32. Calcule les longeurs des diagonales de ces carrés.

Tarea1. Cuadrados una vez! (5 puntos)

La relación de dos cuadrados es igual $\frac{1}{9}$, sin embargo sus perímetros difieren de 32. Calcula las longitudes de diagonales de estos cuadrados.

Esercizio 1. Quadrato uno! (5 punti)

Il rapporto delle superfici di due quadrati è $\frac{1}{9}$, invece le loro circonferenze differenziano di 32. Calcola le lunghezze delle diagonali di questi quadrati.

Zadanie 2. Proste i punkty (4 punkty)[212]

Dane są punkty:

$$A=(-2;-1)$$
$$B=(2;\,4)$$
$$C=(3;\,0).$$

Wyznacz równania prostych:

l_1 - zawierającej punkty A i B,

l_2 - przechodzącej przez C i równoległej do l_1

l_3 - przechodzącej przez C i prostopadłej do l_1

Wykonaj rysunek do zadania

Zadanie 3. Układ z wartością bezwzględną raz! (5 punktów)[213]

Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań: $\begin{cases} y-2x+1=0 \\ y-|x|-1=0 \end{cases}$

Zadanie 4. Liczby i cyfry raz! (4 punkty)[214]

Suma liczby dwucyfrowej i liczby powstałej po przestawieniu jej cyfr jest równa 121, zaś różnica tych liczb to 63.
Jakie to liczby?

[212] Zadanie własne Anny Rybak
[213] Zaczerpnięto z [1] - Zadanie 6.42, strona 71
[214] Zadanie własne Anny Rybak

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Na układy nie ma rady?”

Zadanie 1. Kwadraty raz! (5 punktów)[215]

Stosunek pól dwóch kwadratów jest równy $\frac{1}{9}$, natomiast ich obwody różnią się o 32.

Oblicz długości przekątnych tych kwadratów.

Rozwiązanie:

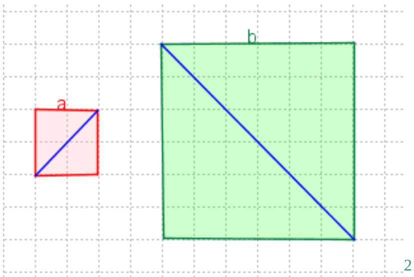
Przyjmujemy oznaczenia: a - długość boku mniejszego kwadratu, $a > 0$

b - długość boku większego kwadratu, $b > 0$

Wtedy: Warunek: „stosunek pól dwóch kwadratów jest równy $\frac{1}{9}$” zapisujemy w postaci:

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Natomiast informację: „Obwody kwadratów różnią się o 32” wyraża równość:

$4b - 4a = 32$.[216]



217

Otrzymane równości zapisujemy w postaci układu równań i rozwiązujemy ten układ

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ 4b - 4a = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases} \text{ - sprzeczne z założeniem,}$$

więc $\begin{cases} b = 3a \\ 3a - a = 8 \end{cases}$ zatem $\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 8 \end{cases}$ stąd $\begin{cases} b = 3a \\ a = 4 \end{cases}$ ostatecznie: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$

Odpowiedź:

Przekątna mniejszego kwadratu to $4\sqrt{2}$, zaś większego to $12\sqrt{2}$.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Oznaczenie niewiadomych w języku obcym, podanie założeń	1
C	Ułożenie układu równań	1
D	Rozwiązanie układu równań	1

[215] Zadanie własne Anny Rybak
[216] *Ilustracja do rozwiązań we wszystkich językach*
[217] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

F	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Task 1. Squares Once! (5 punktów)

Let us designate:
a – length of the side of the smaller square, $a > 0$
b – length of the side of the bigger square, $b > 0$

Then: The condition "the ratio of the areas of two squares is $\frac{1}{9}$" write as: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9}$

While the equation $4b - 4a = 32$ represents the expression "their circumferences differ by 32"
Let us write the obtained equations as a system of equations and solve the system

$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ 4b - 4a = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ or $\begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ - contradicts the assumption,

thus $\begin{cases} b = 3a \\ 3a - a = 8 \end{cases}$ therefore $\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 8 \end{cases}$ hence $\begin{cases} b = 3a \\ a = 4 \end{cases}$ finally: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$

Answer:

The diagonal of the smaller square is $4\sqrt{2}$ and that of the bigger one is $12\sqrt{2}$

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Task translation into Polish	1
B	Designation of the unknowns in a foreign language, presenting assumptions	1
C	Arranging systems of equations	1
D	Solving the systems of equations	1
E	Giving the answer in a foreign language	1

Aufgabe 1. Quadrate, Auf einmal! (5 Punkte)

Wir nehmen Bezeichnungen an:
a - die Seitenlänge des kleineren Quadrats, $a > 0$
b - die Seitenlänge des größeren Quadrats , $b > 0$
Dann: Bedingung: „das Verhältnis der Flächen von zwei Quadraten ist gleich $\frac{1}{9}$" wir schreiben es folgend auf: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Die Information dagegen: „die Quadratenumfänge sind um 32 unterschiedlich" drückt die Gleichheit aus: $4b - 4a = 32$.

Die erhaltenen Gleichheiten schreiben wir in Form eines Gleichungssystems und dieses System lösen wir auf folgende Weise:

$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ 4b - 4a = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ oder $\begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ - unvereinbar mit Voraussetzung,

also $\begin{cases} b = 3a \\ 3a - a = 8 \end{cases}$ also $\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 8 \end{cases}$ daher $\begin{cases} b = 3a \\ a = 4 \end{cases}$ schließlich: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$

Antwort:

Die Diagonale des kleineren Quadrats ist $4\sqrt{2}$, des größeren dagegen ist $12\sqrt{2}$.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnische	1
B	Bezeichnung von Unbekannten in einer fremden Sprache, Angabe von Voraussetzungen	1
C	Verlegung eines Gleichungssystems	1
D	Lösung eines Gleichungssystems	1
E	Antwortsangabe in einer fremden Sprache	1

Exercice 1. Carrés une fois! (5 points)

On admet les désignations:

a - la longueur du côté de plus petit carré, $a > 0$

b - la longueur du côté de plus grand carré, $b > 0$

Alors: La condition:" Le rapport des aires de deux carrés égale $\frac{1}{9}$" on écrit sous forme : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

Cependant l'information: „les périmètres des carrés différent de 32." exprime l'équation: $4b - 4a = 32$.

On écrit les équations reçues en forme de système d'équations et on calcule ce système

$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ 4b - 4a = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ - contradictoire à la supposition, alors $\begin{cases} b = 3a \\ 3a - a = 8 \end{cases}$

alors $\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 8 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} b = 3a \\ a = 4 \end{cases}$ définitivement: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$

Réponse:

La diagonale de plus petit carré c'est $4\sqrt{2}$, cependant de celui plus grand $12\sqrt{2}$.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Designer les inconnus en langue étrangère, formuler les suppositions	1
C	Construire le système d'équations	1
D	Calculer le système d'équations	1
E	Ecrire la solution en langue étrangere	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tarea1. Cuadrados una vez! (5 puntos)

Establecemos que:
a - La longitud del lado del cuadrado menor $a > 0$
b - La longitud del lado del cuadrado mayor, $b > 0$

Entonces: Condición: “ la relación de superficie de dos cuadrados es igual $\frac{1}{9}$ ” lo que escribimos de la manera siguiente:: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9}$. Sin embargo, la información “Los perímetros de cuadrados difieren de 32” se explica por este ecuación: $4b - 4a = 32$.
Las igualdades obtenidas las escribimos en forma de un sistema de ecuaciones y lo solucionamos

$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ 4b - 4a = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ o $\begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ - contradictorio al principio, así pues $\begin{cases} b = 3a \\ 3a - a = 8 \end{cases}$

entonces $\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 8 \end{cases}$ resulta que $\begin{cases} b = 3a \\ a = 4 \end{cases}$ definitivamente: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$

Respuesta:

La diagonal del cuadrado menor es $4\sqrt{2}$, del cuadrado mayor es $12\sqrt{2}$.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Establecer la incógnitas en un idioma extranjero, dar las príncipes.	1
C	Establecer un sistema de ecuaciones	1
D	Solucionar el sistema de ecuaciones	1
E	Dar la respuesta en un idioma extranjero.	1

Esercizio 1. Quadrato uno! (5 punti)

Definiamo le identificazioni:
a - lunghezza del quadrato minore, $a > 0$
b - lunghezza del quadrato maggiore, $b > 0$
Allora: Condizione: „Il rapporto delle superfici di due quadrati è $\frac{1}{9}$,"
scriviamo in forma: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9}$.
Invece l'informazione: „Le loro circonferenze differenziano di 32" esprime l'uguaglianza:
$4b - 4a = 32$.
Le uguaglianze ottenute scriviamo In forma di sistema di equazioni e lo risolviamo

$\begin{cases} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{1}{9} \\ 4b - 4a = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \frac{a}{b} = -\frac{1}{3} \\ b - a = 8 \end{cases}$ - contraddittorio alla premessa, dunque $\begin{cases} b = 3a \\ 3a - a = 8 \end{cases}$

allora $\begin{cases} b = 3a \\ 2a = 8 \end{cases}$ di cui $\begin{cases} b = 3a \\ a = 4 \end{cases}$ infine: $\begin{cases} a = 4 \\ b = 12 \end{cases}$

Risposta:
La diagonale del quadrato minore è $4\sqrt{2}$, invece di questo più grande è $12\sqrt{2}$.

Punteggio

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione dell'esercizio in lingua polacca	1
B	Definizione dei valori cercati in lingua straniera, esprimere le premesse	1
C	Stesura del sistema di equazioni	1
D	Risoluzione del sistema di equazioni	1
E	Dare la riposta In lingua straniera	1

Zadanie 2. Proste i punkty (4 punkty)

Punkty:

$A=(-2;-1)$; $B=(2;4)$; $C=(3;0)$;

$A\in l_1 \wedge B\in l_1 \Rightarrow pr.AB=l_1$;

$(C\in l_2)\wedge(l_2 \parallel l_1)$;

$C\in l_3 \wedge (l_3 \perp l_1)$

$l_1:\quad y=ax+b$;

$A=(-2;-1)\wedge A\in l_1 \Rightarrow -1=a\cdot(-2)+b$; i $B=(2;4)\wedge B\in l_1 \Rightarrow 4=a\cdot 2+b$

Otrzymujemy, więc układ równań: $\begin{cases}-1=-2a+b\\ 4=2a+b\end{cases}$, czyli $\begin{cases}a=\dfrac{5}{4}\\ b=\dfrac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow l_1:\quad y=\dfrac{5}{4}\cdot x+\dfrac{3}{2}$

$l_2:\quad y=cx+d$;

Z równoległości prostych l_1 oraz l_2 wynika równość ich współczynników kierunkowych $c=a$, zatem $c=\frac{5}{4}$, więc równanie prostej l_2 przybiera postać: $y=\frac{5}{4}\cdot x+d$. $C(3;0)\in l_2$ zatem jego współrzędne muszą spełniać równanie tej prostej, otrzymujemy układ równań:

$\begin{cases}c=\dfrac{5}{4}\\ 0=\dfrac{5}{4}\cdot 3+d\end{cases}$, czyli $\begin{cases}c=\dfrac{5}{4}\\ d=-\dfrac{15}{4}\end{cases} \Rightarrow l_2:\quad y=\dfrac{5}{4}\cdot x-\dfrac{15}{4}$

$l_3: y=ex+f$

Z prostopadłości prostych l_3 oraz l_1 wynika, że ich współczynniki kierunkowe odpowiednio e oraz a spełniają warunek: $a\cdot e=-1$; $C(3;0)\in l_3$, zatem jego współrzędne muszą spełniać równanie tej prostej, otrzymujemy układ równań:

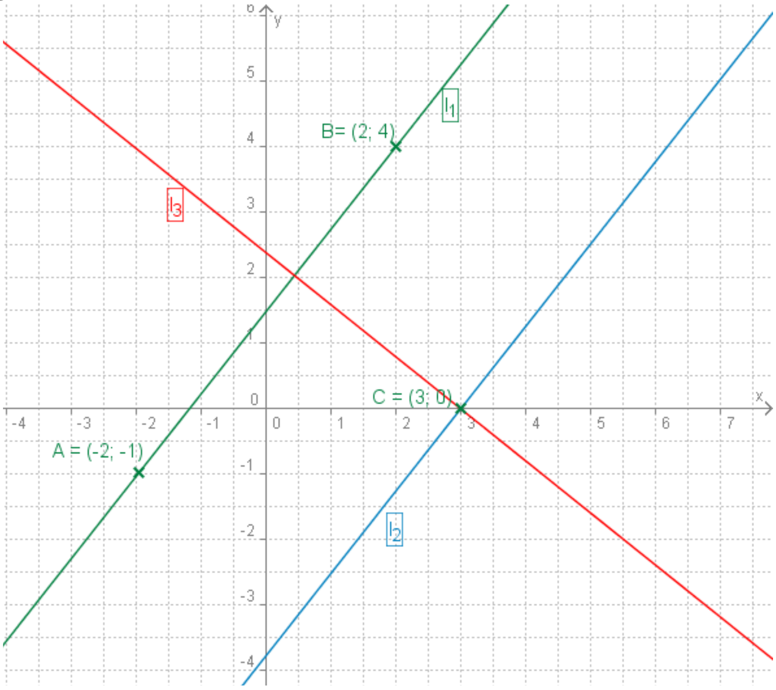
$\begin{cases}e\cdot\dfrac{5}{4}=-1\\ 0=3e+f\end{cases}$, czyli $\begin{cases}e=-\dfrac{4}{5}\\ f=\dfrac{12}{5}\end{cases} \Rightarrow l_3=-\dfrac{4}{5}\cdot x+\dfrac{12}{5}$

Odpowiedź:

Równania prostych są następujące

$$l_1: y=\frac{5}{4}x+\frac{3}{2};\quad l_2: y=\frac{5}{4}x-\frac{15}{4};\quad l_3: y=-\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}$$

Ilustracja graficzna[218]:



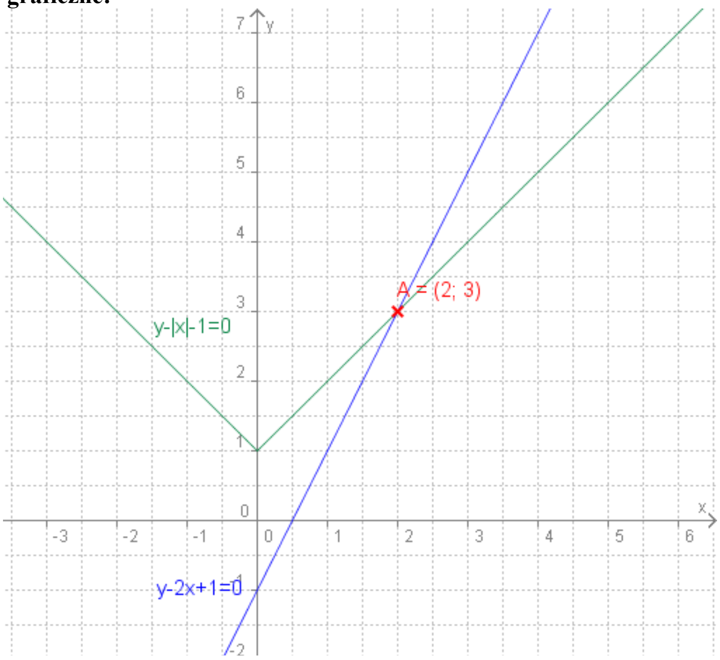
Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wyznaczenie równania prostej l_1	1
B	Wyznaczenie równania prostej l_2	1
C	Wyznaczenie równania prostej l_3	1
D	Wykonanie rysunku do zadania	1

[218] *Rysunek wykonany za pomocą programu CaRMetal przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 3. Układ z wartością bezwzględną raz! (5 punktów)

Rozwiązanie graficzne: [219]



Rozwiązanie algebraiczne:

$|x| = \begin{cases} x, \ dla \ x \geq 0 \\ -x, \ dla \ x < 0 \end{cases},$

czyli:

Dla $x \geq 0$ mamy: $\begin{cases} y-2x+1=0 \\ y-x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=-1 \\ -y+x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ zgodne z założeniem.

Dla $x < 0$ mamy: $\begin{cases} y-2x+1=0 \\ y+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=-1 \\ -y-x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=\frac{1}{3} \end{cases}$ sprzeczne z założeniem.

Zatem jedynym rozwiązaniem danego układu równań jest $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Rozwiązanie I przypadku	1
B	Rozwiązanie II przypadku	1
C	Podanie odpowiedzi	1
D	Rozwiązanie graficzne	2

[219] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 4. Liczby i cyfry raz! (4 punkty)

Przyjmujemy, że symbol $\overline{ab} = 10 \cdot a + 1 \cdot b$ oznacza liczbę dwucyfrowa,
której *cyfra dziesiątek* jest równa a, zaś *cyfra jedności* wynosi b.

Niech:

x - oznacza cyfrę dziesiątek szukanej liczby

y - oznacza cyfrę jedności szukanej liczby

z warunków zadania mamy: $x \in N \wedge x \le 9; \quad y \in N \wedge y \le 9$

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami:

$\overline{xy}$ - jest szukaną liczbą

$\overline{yx}$ - to liczba o przestawionych cyfrach

Równość $\overline{xy} + \overline{xy} = 121$ jest zapisem algebraicznym warunku:

„Suma liczby dwucyfrowej i liczby powstałej po przestawieniu jej cyfr jest równa 121”

Zapis $\overline{xy} - \overline{yx} = 63$ oznacza, że: różnica tych liczb to 63

Otrzymaliśmy w ten sposób układ równań:

$$\begin{cases} \overline{xy} + \overline{yx} = 121 \\ \overline{xy} - \overline{yx} = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + y + 10y + x = 121 \\ 10x + y - 10y - x = 63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 11 \\ x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$ - zgodne z warunkami zadania.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 92.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Na układy nie ma rady"

- Przetłumaczyć treść zadania na język polski
- Rozwiązać zadanie
- Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Task 1. Into the basket (5 points)

During a basketball match the player Wysocki, performing 16 successful throws in the game, (that is, for 2 or 3 points) scored 36 points. How many throws were worth 2 points, and how many worth 3 points?

Aufgabe 1. In den Korb (5 Punkte)

Während eines Basketballspiels hat der Spieler Wysocki 36 Punkte gewonnen, indem er 16 effektive Würfe aus dem Spiel (also für 2 oder 3 Punkte) gemacht hat. Wie viele Würfe waren für 2 und wie viele für 3 Punkte?

Exercice 1. Dans le panier (5 points)

Pendant un match de basket, le joueur Wysocki, en tirant 16 fois (à 2 ou 3 points) a gagné 36 points. Il y a eu combien de tirs à 2 points et combien à 3 points ?

¡Las Canastas! (5 puntos)

Durante un partido del baloncesto, el jugador Wysocki ha hecho 16 lanzamientos eficaces (quiere decir: de 2 o de 3 puntos) consiguiendo 36 puntos. ¿Cuántos lanzamientos ha hecho de 2 y cuántos los ha hecho de 3 puntos?

Esercizio 1. Nel canestro (5 punti)

Durante la partita di pallacanestro il giocatore Wysocki, eseguendo 16 lanci effettivi dal gioco, (cioè per 2 oppure 3 punti), ha segnato 36 punti. Quanti lanci erano per 2, e quanti per 3 punti?

Zadanie 2. Nie taki pierwiastek straszny (4 punkty)[220]

Rozwiąż algebraicznie układ równań

$$\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}-\dfrac{y}{\sqrt{3}+2}=-\sqrt{3}-10 \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{y}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Zadanie 3. koła dwa! (4 punkty)[221]

Stosunek pól dwóch stycznych zewnętrznie kół wynosi $\frac{1}{9}$, zaś odległość między ich środkami to 80.

Oblicz obwody tych kół.

[220] Zaczerpnięto z [1] – zadanie 15.14 f), strona 99
[221] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 4. Motocyklem z A do B (4 punkty) [222]

Motocyklista poruszający się ze stałą prędkością przejechał drogę z miasta A do miasta B w ustalonym czasie.
Jeśli jechałby z prędkością o 6 km/godz. większą, to czas przejazdu byłby o 1 godzinę krótszy.
Gdyby zaś prędkość była o 5 km/godz. mniejsza to czas przejazdu byłby o 1 godz. i 12 min. dłuższy.
Z jaka prędkością jechał motocyklista z A do B?
W jakim czasie przebył tę drogę?
Jak daleko jest z A do B?

Zadanie 5. Układ z wartością bezwzględną dwa! (5 punktów) [223]

Rozwiąż algebraicznie i graficznie układ równań:

$$\begin{cases} y+x-1=0 \\ |y|-x-1=0 \end{cases}$$

Zadanie 6. Liczby i cyfry dwa! (4 punkty)[224]

Jeżeli do liczby dwucyfrowej dopiszemy z prawej strony cyfrę jej dziesiątek, to otrzymamy liczbę o 227 większą.
Dopisując zaś przed daną liczbą cyfrę jej jedności otrzymamy liczbę 21 razy większą.
Jaka to liczba?

Zadanie 7. Podstawianie… (4 punkty)[225]

Rozwiąż układ równań wprowadzając zmienne pomocnicze podane obok:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0{,}1 \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0{,}3 \end{cases};\quad a=\frac{1}{x-y+2};\quad b=\frac{1}{x+y-1}$$

Zadanie 8. Punkt przecięcia a parametr (4 punkty)[226]

Określ, dla jakich wartości parametru m punkt przecięcia się prostych:

$$l_1: y=x-2m-2;\quad l_2: y=-2x+m+1$$

należy do IV ćwiartki układu współrzędnych.
Czy istnieje takie m, aby punkt przecięcia się tych prostych należał do I ćwiartki?

[222] Zaczerpnięto z [2]
[223] Zaczerpnięto z [3] – zadanie 6.44 a), strona 71
[224] Zaczerpnięto z [4]
[225] Zaczerpnięto z [1]
[226] Zaczerpnięto z [1]

Zadanie 9. Naszość i Waszość (4 punkty)[227]

Kiedyś do partii „Naszość" należało dwa razy więcej członków niż do partii „Waszość". W wyniku nieudanych działań w niedalekiej przeszłości z członkostwa w „Waszości" zrezygnowało 20 osób, które przeszły do „Naszości".
Niestety – w partii „Naszość" wybuchła afera finansowa. Każdy z poprzednich uciekinierów przyprowadził do starej partii aż 5 członków „Naszości"! W wyniku udanej akcji propagandowej partia „Waszość" przyjęła jeszcze 165 nowych członków i obecnie liczy trzy razy więcej niż „Naszość". Ile osób obecnie liczy każda partia?

Zadanie 10. Dziadek i Babka (4 punkty)[228]

Dziadek i Babka mają razem 140 lat.. Dziadek ma obecnie dwa razy tyle, ile Babka miała wtedy, gdy Dziadek miał tyle, ile Babka ma teraz. Ile lat ma Dziadek a ile Babka?

Zadanie 11. Miedź i być (4 punkty)[229]

Stop miedzi i cynku waży 24N.
Przy zanurzeniu w wodzie stop ten traci na wadze $2\frac{8}{9}$N.
Znajdź ciężar miedzi i cynku w tym stopie, jeżeli wiadomo,
że miedź traci na wadze $11\frac{1}{9}$%, a cynk $14\frac{2}{7}$% swojego ciężaru.

Zadanie 12. Kwas mrówkowy (4 punkty)[230]

Ile kilogramów kwasu mrówkowego o stężeniu 20%
i ile kilogramów kwasu mrówkowego o stężeniu 5% należy zmieszać,
aby otrzymać 36 kg kwasu o stężeniu 10%?

[227] Zadanie własne Anny Rybak
[228] Zaczerpnięto z [5]
[229] Zaczerpnięto z [5]
[230] Zaczerpnięto z [6]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” – „Na układy nie ma rady”

Zadanie 1. Do kosza (5 punktów)

Podczas meczu koszykówki zawodnik Wysocki, wykonując 16 skutecznych rzutów z gry, (czyli za 2 lub za 3 punkty), zdobył 36 punktów. Ile było rzutów za 2 a ile za 3 punkty?

Szkic rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia:

x - liczba rzutów za 2 punkty, $x \in N$, $x \le 16$

y - liczba rzutów za 3 punkty, $y \in N$, $y \le 16$

Wtedy:

$x + y = 16$ - oznacza, że Wysocki wykonał 16 skutecznych rzutów

$2x$ - oznacza liczbę punktów zdobytych w rzutach za 2 punkty

$3x$ - oznacza liczbę punktów zdobytych w rzutach za 3 punkty

$2x + 3y$ - oznacza sumę zdobytych punktów

Otrzymujemy, więc układ równań:

$$\begin{cases} x + y = 16 & \Big| \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow + \begin{cases} -2x - 2y = -32 \\ \underline{2x + 3y = 36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

- otrzymane wyniki są zgodne z założeniami: $x \in N$, $x \le 16$ i $y \in N$, $y \le 16$

Odpowiedź:

Wysocki wykonał 12 rzutów za 2 punkty i 4 rzuty za 3 punkty.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Przetłumaczenie zadania	1
B	Oznaczenie niewiadomych w języku obcym, podanie założeń	1
C	Ułożenie układu równań	1
D	Rozwiązanie układu	1
E	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Task 1. Into The Basket (5 points)

Let us assume that:

x – number of throws worth 2 points, $x \in N$, $x \le 16$

y – number of throws worth 3 points, $y \in N$, $y \le 16$

Then:

$x + y = 16$ - means that Wysocki performed 16 successful throws

$2x$ - designates the number of points scored with throws for 2 points

$3x$ - designates the number of points scored with throws for 3 points

$2x + 3y$ - designates the sum of points scored

Thus we obtain a system of equations:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Bigg| \cdot (-2) \Leftrightarrow + \begin{cases} -2x - 2y = -32 \\ \underline{2x + 3y = 36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

- the obtained results agree with the assumptions: $x \in N$, $x \le 16$; $y \in N$, $y \le 16$

Answer:

Wysocki performed 12 throws for 2 points and 4 throws for 3 points

Scores

Activity	Stages of solutions	Points
A	Przetłumaczenie zadania	1
B	Oznaczenie niewiadomych w języku obcym, podanie założeń	1
C	Ułożenie układu równań	1
D	Rozwiązanie układu	1
E	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Aufgabe 1. In den Korb (5 Punkte)

Wir nehmen Bezeichnungen an:
x - Zahl der Würfe für 2 Punkte, $x \in N,\ x \le 16$
y - Zahl der Würfe für 3 Punkte, $y \in N,\ y \le 16$
Dann:
$x + y = 16$ - bedeutet, dass Wysocki 16 effektive Würfe gemacht hat
$2x$ - bedeutet die in Würfen für 2 Punkte gewonnene Punktezahl
$3x$ - bedeutet die in Würfen für 3 Punkte gewonnene Punktezahl
$2x + 3y$ - bedeutet die Summe von gewonnenen Punkten
Wir bekommen, also das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Bigg| \cdot (-2) \Leftrightarrow + \begin{cases} -2x - 2y = -32 \\ \underline{2x + 3y = 36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

- die erhaltenen Ergebnisse stimmen mit Voraussetzungen überein: $x \in N,\ x \le 16$ i $y \in N,\ y \le 16$

Antwort:

Wysocki hat 12 Würfe für 2 Punkte i 4 Würfe für 3 Punkte gemacht.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe	1
B	Bezeichnung von Unbekannten in einer fremden Sprache, Angabe von Voraussetzungen	1
C	Verlegung eines Gleichungssystems	1
D	Lösung eines Gleichungssystems	1
E	Antwortsangabe in einer fremden Sprache	1

Exercice 1. Dans le panier (5 points)

On admet des désignations:

x - le nombre de tirs à 2 points, $x \in N,\ x \le 16$

y - le nombre de tirs à 3 points, $y \in N,\ y \le 16$

Alors:

$x + y = 16$ - signifie que Wysocki a fait 16 tirs efficaces

$2x$ - signifie le nombre de points gagnés grâce aux tirs à 2 points

$3x$ - signifie le nombre de points gagnés grâce aux tirs à 3 points

$2x + 3y$ - signifie la somme de points gagnés

On obtient alors le système d'équations:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Big| \cdot (-2) \Leftrightarrow + \begin{cases} -2x - 2y = -32 \\ \underline{2x + 3y = 36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

- les résultats obtenus sont conformes aux suppositions: $x \in N,\ x \le 16$ i $y \in N,\ y \le 16$

Réponse:

Wysocki a fait 12 tirs à 2 points et 4 tirs à 3 points.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Designer les inconnus en langue étrangère, formuler les suppositions	1
C	Construire le système d'équations	1
D	Calculer le système d'équations	1
E	Ecrire la solution en langue étrangere	1

Tarea 1. ¡Las canastas! (5 puntos)

Establecemos que:

x - El número de los lanzamientos de 2 puntos, $x \in N,\ x \le 16$

y - El número de los lanzamientos de 3 puntos, $y \in N,\ y \le 16$

Entonces:

$x + y = 16$ - quiere decir que Wysocki ha hecho 16 lanzamientos eficaces

$2x$ - marca el número de puntos ganados en los lanzamientos de 2 puntos

$3x$ - marca el número de puntos ganados en los lanzamientos de 3 puntos

$2x + 3y$ - marca la suma de todos los puntos ganados.

De esta manera obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Big| \cdot (-2) \Leftrightarrow + \underline{\begin{cases} -2x - 2y = -32 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

- los resultados obtenidos son conformes con los principios $x \in N,\ x \le 16$ i $y \in N,\ y \le 16$

La respuesta:

Wysocki ha hecho 12 lanzamientos de 2 puntos y 4 de 3 puntos.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea al polaco	1
B	Establecer las incógnitas en un idioma extranjero, dar las notaciones básicas	1
C	Establecer un sistema de ecuaciones	1
D	Solucionar el sistema de ecuaciones	1
E	Dar la respuesta en un idioma extranjero.	1

Esercizio 1. Nel canestro (5 punti)

Definiamo le identificazioni:

x - numero lanci per 2 punti, $x \in N,\ x \leq 16$

y - numero lanci per 3 punti, $y \in N,\ y \leq 16$

Allora:

$x + y = 16$ - significa, che Wysocki ha eseguito 16 lanci effettivi

$2x$ - significa il numero dei punti segnati con i lanci per 2 punti

$3x$ - significa il numero dei punti segnati con i lanci per 3 punti

$2x + 3y$ - significa la somma dei punti segnati

Otteniamo dunque un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Big| \cdot (-2) \Leftrightarrow + \begin{cases} -2x - 2y = -32 \\ 2x + 3y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x + y = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 4 \end{cases}$$

- risultati ottenuti sono conformi alle premesse: $x \in N,\ x \leq 16$ e $y \in N,\ y \leq 16$

Risposta:

Wysocki ha eseguito 12 lanci per 2 punti e 4 lanci per 3 punti.

Punteggio

N. attivita	Fasi della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione dell'esercizio	1
B	Definizione dei valori cercati in lingua straniera, esprimere le premesse	1
C	Stesura del sistema di equazioni	1
D	Risoluzione del sistema	1
E	Dare la riposta in lingua straniera	1

Zadanie 2. Nie taki pierwiastek straszny (4 punkty)

Usuwamy niewymierność z mianowników ułamków

$$\begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} - \dfrac{y}{\sqrt{3}+2} = -\sqrt{3}-10 \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{y}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+2\right)+y\left(\sqrt{3}-2\right) = -\sqrt{3}-10 \\ \dfrac{x\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} + \dfrac{y\left(\sqrt{3}-1\right)}{2} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\begin{cases} -x\left(2\sqrt{3}+3\right)+y\left(\sqrt{3}-2\right) = -\sqrt{3}-10 \\ x\left(\sqrt{3}+1\right)+y\left(\sqrt{3}-1\right) = 1+3\sqrt{3} \end{cases}$ z pierwszego z równań wyznaczamy y ,czyli

$$y = \frac{-\sqrt{3}-10+x\left(2\sqrt{3}+3\right)}{\sqrt{3}-2} = \left(\sqrt{3}-10\right)\left(\sqrt{3}+2\right) - x\left(2\sqrt{3}+3\right)\left(\sqrt{3}+2\right) = 23+12\sqrt{3}-x\left(12+7\sqrt{3}\right).$$

Po podstawieniu do drugiego równania otrzymujemy:

$$x\left(\sqrt{3}+1\right)+\left(23+12\sqrt{3}-x\left(12+7\sqrt{3}\right)\right)\left(\sqrt{3}-1\right) = 1+\sqrt{3}$$

$$x\left(\sqrt{3}+1\right)-x\left(5\sqrt{3}+9\right) = 1+3\sqrt{3}-23\sqrt{3}+23-36+12\sqrt{3}.$$

Po wykonaniu działań i redukcji wyrażeń podobnych: $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 2 \end{cases}$

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Obliczenie x	2
B	Obliczenie y	2

Zadanie 3. koła dwa! (4 punkty)

Przyjmujemy oznaczenia:

r - promień mniejszego koła, $r \succ 0$

R - promień większego koła, $R \succ 0$

$\begin{cases} \left(\dfrac{r}{R}\right)^2 = \dfrac{1}{9} \\ R+r=80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{3} \\ R+r=80 \end{cases}$ lub $\begin{cases} \dfrac{r}{R} = -\dfrac{1}{3} \\ R+r=80 \end{cases}$ sprzeczne z założeniem, więc $\begin{cases} R=60 \\ r=20 \end{cases}$

Odpowiedź:

Obwód mniejszego kola wynosi 40π, zaś większego to 120π.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 4. Motocyklem z A do B (4 punkty)

Oznaczenia:

v - prędkość motocyklisty, $v \succ 5$

s - odległość z A do B, $s \succ 0$

t - czas jazdy, $t \succ 1$

$\begin{cases} v+6=\dfrac{s}{t-1} \\ v-5=\dfrac{s}{t+1{,}2} \end{cases}$, ale $s=v\cdot t$, więc $\begin{cases} v+6=\dfrac{v\cdot t}{t-1} \\ v-5=\dfrac{v\cdot t}{t+1{,}2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v\cdot t=(v+6)(t-1) \\ v\cdot t=(v-5)(t+1{,}2) \end{cases}$,

zatem $\begin{cases} v=6t-6 \\ 6=-5t+1{,}2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=30 \\ t=6 \end{cases}$ - zgodne z założeniami.

Mamy więc $s=30\cdot 6$, czyli $s=180$.

Odpowiedź:

Prędkość motocyklisty to 30 km/godz..

Czas potrzebny na przejazd to 6 godzin, a szukana odległość to 180 km.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 5. Układ z wartością bezwzględną dwa! (5 punktów)

Rozwiązanie algebraiczne:

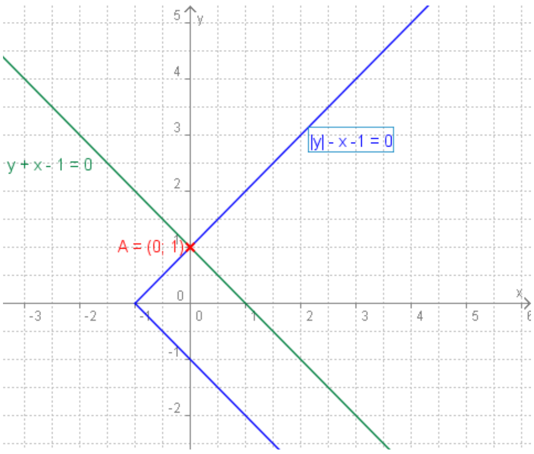
$|y| = \begin{cases} y, & dla\ y \geq 0 \\ -y, & dla\ y < 0 \end{cases}$, czyli

dla $y \geq 0$ mamy: $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ y - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2 \\ -y + x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ zgodne z założeniem.

dla $y < 0$ mamy: $\begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ -y - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 = 0$ sprzeczność, brak rozwiązań.

Jedynym rozwiązaniem zadania jest punkt A (0,1).

Rozwiązanie graficzne: [231]



Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Rozwiązanie I przypadku	1
B	Rozwiązanie II przypadku	1
C	Podanie odpowiedzi	1
D	Rozwiązanie graficzne	2

[231] *Rysunek wykonany za pomocą programu GEONExT przez Helenę Ewert - Fechner*

Zadanie 6. Liczby i cyfry dwa! (4 punkty)

Niech
$\overline{abc} = 100a + 10b + 1c$ oznacza liczbę trzycyfrową,
z warunków zadania mamy: $x \in N \wedge x \le 9; y \in N \wedge y \le 9$

$\begin{cases} \overline{xyx} = 227 + \overline{xy} \\ \overline{yxy} = 21 \cdot \overline{xv} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100x + 10y + x = 227 + 10x + y \\ 100y + 10x + y = 21 \cdot (10x + y) \end{cases}$, po uporządkowaniu: $\begin{cases} 99x + 9y = 227 \\ 80y = 200x \end{cases}$.

Rozwiązaniem układu jest $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ - zgodne z założeniem.

Odpowiedź:

Szukana liczba to 25.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 7. Podstawianie… (4 punkty)

$\begin{cases} a - b = 0{,}1 \\ a + b = 0{,}3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}1 \end{cases}$,

wracając do podstawienia otrzymujemy: $\begin{cases} \dfrac{1}{x - y + 2} = \dfrac{1}{5} \\ \dfrac{1}{x + y - 1} = \dfrac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

Odpowiedź:

Rozwiązaniem układu są liczby: $\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Obliczenie x	2
B	Obliczenie y	2

Zadanie 8. Punkt przecięcia a parametr (4 punkty)

$\begin{cases} y = x - 2m - 2 \\ y = -2x + m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2m - 2 = -2x + m + 1 \\ y = -2x + m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ y = -m - 1 \end{cases}$ czyli $A = (m+1; -m-1)$.

Punkt należy do IV ćwiartki, gdy jego współrzędne spełniają warunek:

$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$, mamy, więc: $\begin{cases} m + 1 > 0 \\ -m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$.

Punkt należy do I ćwiartki gdy jego współrzędne spełniają warunek:

$\begin{cases} x \succ 0 \\ y \succ 0 \end{cases}$, mamy, więc: $\begin{cases} m + 1 > 0 \\ -m - 1 > 0 \end{cases}$ - układ sprzeczny.

Odpowiedź:

Gdy $m \in (-1; \infty)$, to punkt przecięcia należy do IV ćwiartki układu współrzędnych.
Nie istnieje takie m, dla którego punkt przecięcia należy do I ćwiartki.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Wyznaczenie współrzędnych punktu przecięcia	1
B	Rozwiązanie warunku pierwszego	1
C	Rozwiązanie warunku drugiego	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 9. Naszość i Waszość (4 punkty)

Oznaczenia:

x - początkowa liczba członków partii „Naszość”, $x \in N$

y - początkowa liczba członków partii „Waszość”, $y \in N \wedge y \geq 20$

Zapisujemy treść zadania w języku algebry:

$x = 2y^{(*)}$ - *kiedyś do partii „Naszość” należało dwa razy więcej członków niż do partii „Waszość”*

$y - 20$ - *w wyniku nieudanych działań w niedalekiej przeszłości z członkostwa w „Waszości” zrezygnowało 20 osób*

$x + 20$ - *ilość członków„Naszości”, gdy 20 osób z „Waszości” przeszło do „Naszości”.*

$x + 20 - (20 + 5 \cdot 20) = x - 100$ - *ilość członków„Naszości”, gdy. każdy z poprzednich uciekinierów przyprowadził do starej partii aż 5 członków „Naszości”!*

$y + 5 \cdot 20$ - *ilość członków w „Waszości”, gdy każdy z poprzednich uciekinierów przyprowadził do starej partii aż 5 członków „Naszości”!*

$y + 5 \cdot 20 + 165$ - *ilość członków w „Waszości”, gdy partia „Waszość” przyjęła jeszcze 165 nowych członków*

$3 \cdot (x - 100) = y + 5 \cdot 20 + 165^{(**)}$ – *obecnie "Waszość" liczy trzy razy więcej członków niż „Naszość”.*

Z równości (*) i(**) tworzymy układ: $\begin{cases} x = 2y \\ 3 \cdot (x - 100) = y + 5 \cdot 20 + 165 \end{cases}$

Rozwiązujemy układ: $\begin{cases} x = 2y \\ 3x - 300 = y + 265 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3x - y = 565 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 226 \\ y = 113 \end{cases}$ - zgodne z założeniem

Obecnie partie liczą:

„Naszość”: $x - 100 = 126$

zaś „Waszość”: $y + 100 + 165 = 113 + 265 = 378 = 3 \cdot 126$

Odpowiedź:

Obecnie w partii „Naszość jest 126 członków, a w „Waszości” – 378.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 10. Dziadek i Babka (4 punkty)

Oznaczenia:

b - wiek Babki, $b \succ 0$

d - wiek Dziadka, $d \succ 0$

Wiek teraz	Wiek przed $d-b$ laty
d	b
b	$b-(d-b)$

$$\begin{cases} b+d=140 \\ d=2\cdot(2b-d) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+d=140 \\ 4b-3d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=60 \\ d=80 \end{cases}$$ - zgodne z założeniem

Odpowiedź:

Dziadek ma 80 lat, a Babka 60 lat.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 11. Miedź i być (4 punkty)

Oznaczenia:

c - ciężar cynku, $c \in \langle 0;24 \rangle$

m - ciężar miedzi, $m \in \langle 0;24 \rangle$

$$\begin{cases} m+c=24 \\ 11\frac{1}{9}\%m+14\frac{2}{7}\%c=2\frac{8}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+c=24 \\ \frac{100}{900}m+\frac{100}{700}c=\frac{26}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+c=24 \\ 7m+9c=182 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=17 \\ c=7 \end{cases}$$

- otrzymane wartości zmiennych są zgodne z założeniem.

Odpowiedź:

Ciężar miedzi to 17N, a cynku – 7N.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 12. Kwas mrówkowy (4 punkty)

Oznaczenia:

x - liczba kg kwasu 20%, $x \in \langle 0;36 \rangle$

y - liczba kg kwasu 5%, $y \in \langle 0;36 \rangle$

$\begin{cases} x+y=36 \\ 20\%x+5\%y=10\%\cdot 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=36 \\ 4x+y=72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=24 \end{cases}$ - zgodne z założeniem.

Odpowiedź:

Należy zmieszać 12 kg kwasu 20% i 24 kg kwasu 5%.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Bibliografia

[1.]Bartman A., Fabiański I., *I ty zostaniesz Euklidesem I,* Oficyna Wydawniczo – Poligraficzna i Reklamowo – Handlowa „Adam", Warszawa 1996

[2.]Bobiński Z., Jarek P., Nodzyński P., Świątek A., Ustki M., *Matematyka z Wesołym Kangurem,* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 1995

[3.]Bogusz L., Zarzycki P., Zieliński J., *Łamigłówki Logiczne tom 2*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 2007

[4.]Butrym P., *Matematyka w zadaniach praktycznych,* Wydawnictwo Szkolne OMEGA, Kraków 2004

[5.]Cewe A., Nahorska H., *Zbiór zadań dla klasy 1. Matematyka w otaczającym nas świecie. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk 2004

[6.]Cewe A., Krawczyń M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R., *Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik dla klasy **1** kształcenie w zakresie podstawowym*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk, 2008

[7.]Cewe A., Nahorska H., *Matura z matematyki od roku 2010. Zbiór zadań maturalnych z zakresu kształcenia podstawowego*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2009

[8.]Dróbka N., Szymański K., *Matematyka, klasa 1. Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2002

[9.]Gulgowski L., *Matematyka dla ambitnych*, Wydawnictwo Podkowa Bis, Gdańsk 2000

[10.] Herbut I., Olszańska A., *Maturalnie, że zdasz*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2004

[11.] Kamiński Z., *Fizyka dla kandydatów na wyższe uczelnie techniczne*, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1973

[12.] Kłaczkow K., Kurczak M., Świda E., *Matematyka, zbiór zadań do liceum i technikum, kl. I.*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2002

[13.] Legutko M., Legutko M., Turnau S., Matematyka I. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i liceum zawodowego, Wyd. I, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1991

[14.] Legutko M., Legutko M., Turnau S., *Matematyka I, Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i liceum zawodowego*, Wyd. II, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993

[15.] Łomnicki A., Treliński G., *Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1986

[16.] Masłowska D., Masłowski T., Makowski A., Nodzyński P., Słowińska E., Strzelczyń A., *Zbiór zadań i testów maturalnych do obowiązkowej matur z matematyki (zgodnych ze standardami obowiązującymi od 2010 roku),* Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2009

[17.] Mendel B., Mendel J., *Zbiór zadań z fizyki dla klasy pierwszej Liceum Ogólnokształcącego i Technikum,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1975

[18.] Orlińska M., *Matura 2010, Zakres rozszerzony, Matematyka*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Gdynia 2009

[19.] Pawłowski H., *Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum Linia 1 ponadstandardowa*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Gdynia 2003
[20.] Pawłowski H., *Matematyka 1 zakres podstawowy*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Rumia 2002
[21.] Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic*, *część I*, Nowy Sącz 2003
[22.] Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003
[23.] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994
[24.] Trzeciak M., Jankowska M., *Matematyka klasa 1 Zbiór zadań dla liceum ogólnokształcących, liceum profilowanego i technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2002
[25.] Wojtowicz W., Kielecki B., Czyżykowski M., *Trygonometria dla klas X i XI*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1961
[26.] Red. Zieliński S., *Matematyka Zeszyt 1*,Instytut Kształcenia Nauczycieli, Zielona Góra 1986
[27.] http://www.edusektor.net/matematyka-ciek/242-kryminalne-zagadki-matematyczne.html
[28.] http://www.edusektor.net/matematyka-ciek/274-zagadka-matematyczna-z-trojktami.html
[29.] http://matematyka.pisz.pl/strona/718.html
[30.] http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/zad_2005.html
[31.] http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2004.html
[32.] http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/zad_2005.html
[33.] http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2006.html
[34.] http://www.xlo.pl/~matematyka/strony/tr_2007.html
[35.] http://www.zadania.info