KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

ptm rok zał. 1919

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wespół w zespół z Matematyką bez Granic

Materiały edukacyjne

dla uczestnika Projektu

Podręcznik II

Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury II

II klasa szkoły ponadgimnazjalnej

Materiały edukacyjne dystrybuowane są bezpłatnie

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOPKA REDAKCYJNA

Podręcznik **„Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury 2”** dla klasy drugiej szkoły ponadgimnazjalnej powstał w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne **projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic”** współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego(umowa o dofinansowanie projektu w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki nr UDA-POKL.03.03.04-00-165/09).
Podręcznik został opracowany przez zespół doświadczonych nauczycieli matematyki uczestniczących w projekcie pod kierunkiem Krystyny Białek - nauczyciela akademickiego Wydziału Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego, członka Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Autorzy i recenzenci materiałów edukacyjnych:
Iwona Derendarz, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Helena Ewert-Fechner, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Anna Rybak, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań

Tłumaczenie:
Joanna Jaros, język francuski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Elżbieta Jastrzębska, język hiszpański, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Jacek Kędziora, język włoski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Barbara Mędryk, język niemiecki, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Joanna Skowronek-Kaziów, język angielski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra

Doradztwo metodyczne:
Alicja Kozak-Wnuczek, Samorządowy Ośrodek Doskonalenia i Doradztwa , Zielona Góra

Recenzenci:
Dorota Krassowska, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski
Wojciech Saleniuk, Katolickie Liceum Ogólnokształcące, Żary

Projekt okładki:
Klara Keler

Spis treści

I. Wprowadzenie

Materiały edukacyjne pod tytułem „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury II**" opracowano w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Podręcznik „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury II**" stanowi część drugą materiałow edukacyjnych adresowanych do uczniów drugiej klasy szkół ponadgimnazjalnych kontynujących zajęcia pozalekcyjne z matematyki w ramach Projektu, realizowanego w latach 2009 – 2012 w szkołach z województw: kujawsko - pomorskiego, lubuskiego i zachodniopomorskiego.

Projekt „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" wpisuje się w ponadregionalny program rozwijania umiejętności uczniów w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem nauk matematyczno - przyrodniczych i języków obcych.

Celem projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" jest podnoszenie kompetencji kluczowych uczniów ze szkół podstawowych, gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych w zakresie kształtowania umiejętności opisywania w języku matematyki otaczającego świata, stawiania hipotez i ich weryfikowania, rozwiązywania problemów w twórczy sposób, integracji zespołu klasowego, skutecznego porozumiewania się w różnych sytuacjach, efektywnego współdziałania w zespole oraz interdyscyplinarnego spojrzenia na otaczającą nas rzeczywistość z uwzględnieniem znajomości języków obcych.

Podręcznik „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury II**" zawiera siedem pakietów edukacyjnych zgodnych z podstawą programową kształcenia ogólnego dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych oraz standardów egzaminacyjnych. Materiały edukacyjne zawarte w podręczniku mają być źródłem do wzbogacenia treści omawianych w ramowym programie nauczania z zakresu matematyki realizowanych na zajęciach lekcyjnych w szkołach, z których pochodzą uczestnicy Projektu, rozszerzenia ich i usystematyzowania wiedzy.

Zaproponowany podział na 7 bloków tematycznych został dokonany w oparciu o podręcznik: Cewe A.,Krawczyk M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R. „Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik dla klasy 2", Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2008.

Podział jest zgodny z Podstawą programową kształcenia ogólnego dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych, których ukończenie umożliwia uzyskanie świadectwa dojrzałości po zdaniu egzaminu maturalnego.

Pakiety edukacyjne zawarte w podręczniku „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury II**" będą realizowane na zajęciach pozalekcyjnych w klasach drugich szkół ponadgimnazjalnych, z których pochodzą uczestnicy Projektu, pod kierunkiem nauczyciela nauczającego matematyki w danej klasie.

Materiały podane w każdym pakiecie edukacyjnym zaplanowano do realizacji na cztery godziny lekcyjne - zajęć pozalekcyjnych zwanych - **„Spotkaniami zespołów MbG**".
Zajęcia te mogą być realizowane w dwojaki sposób:

„Spotkanie 1 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Ćwiczenia otwierające".
„Spotkanie 2 zespołów MbG" – 2 godziny lekcyjne – „Rozwiążmy razem".
„Spotkanie 3 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Zajęcia podsumowujące".

bądź:

„Spotkanie 1 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna– „Ćwiczenia otwierające".
„Spotkanie 2 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Rozwiążmy razem".
„Spotkanie 3 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna – „Rozwiążmy razem".
„Spotkanie 4 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna– „Zajęcia podsumowujące".

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Każde „Spotkanie Zespołów MbG” zawiera następujące stałe elementy:

- planowanie i podział zadań, realizacja założonych planów,
- rozwiązywanie zestawu zadań - rozwiązanie zestawu zadań przez zespoły zadaniowe, w tym jednego zadania w języku obcym,
- udokumentowanie pracy zespołów,
- podsumowanie i ocena.

Realizacja każdego pakietu edukacyjnego rozpocznie się jedną godziną lekcyjną przygotowań kształtujących pożądane umiejętności (wskazane przez Autorów Pakietu) pod kierunkiem nauczyciela.

„Ćwiczenia otwierające” odbywają się zgodnie z terminarzem obowiązującym w danym pakiecie i są przeprowadzane przez nauczycieli matematyki w danej klasie w siedzibie szkół, z których pochodzą uczestnicy Projektu.

Zadania z „Ćwiczeń otwierających” są treningiem do rozwiązywania zestawu „Rozwiążmy razem”. Rozwiązane zadania przez zespoły uczniów z każdego zestawu zadań „Rozwiążmy razem” sprawdza nauczyciel matematyki uczestniczący w projekcie i ocenia je według otrzymanego klucza w danym pakiecie. **Arkusze rozwiązań zestawu zadań „Rozwiążmy razem” stanowią każdorazowo załącznik do raportu z realizacji danego pakietu edukacyjnego.**

Pierwsze zadanie podawane jest w języku obcym (angielskim, francuskim, niemieckim, hiszpańskim i włoskim). Należy je przetłumaczyć, rozwiązać i podać rozwiązanie w wybranym języku obcym. Rozwiązanie to musi zawierać co najmniej 30 wyrazów.

W rozwiązaniu zestawu zadań „Rozwiążmy razem” uczestniczy cała klasa, pracując w odpowiednio dobranych grupach. Czas na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut. Oceniana jest również strona graficzna i estetyka przedstawionych rozwiązań. Uczniowie mogą korzystać ze słowników językowych, przyborów geometrycznych, nożyczek, kredek i flamastrów.

Zakres współpracy z nauczycielami uczestniczącymi w projekcie „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic”:

- zaplanowanie terminów zajęć pozalekcyjnych;
- realizacja pakietów edukacyjnych zgodnie z wytycznymi Projektodawcy;
- przygotowanie raportu z realizacji każdego pakietu edukacyjnego:
    - podanie terminów, w których odbyły się zajęcia;
    - odnotowanie frekwencji;
    - uwagi dotyczące realizacji zajęć;
    - dane dotyczące zestawu „Rozwiążmy razem”.
- przesłanie raportu wraz z listą obecności uczniów na zajęciach oraz arkuszami rozwiązań zestawu „Rozwiążmy razem” na adres Punktu Konsultacyjnego Projektu;
- aktualizacja stanu osobowego zespołu klasowego;
- współdziałanie w zakresie monitoringu i ewaluacji dotyczącej realizacji Projektu.

II. Cele edukacyjne zajęć pozalekcyjnych z zakresu matematyki

Zakładamy, że przeprowadzenie zajęć w ramach projektu:

- wyrobi umiejętność współpracy i dzielenia się obowiązkami w grupie;
- wzbudzi zainteresowanie matematyką u uczniów;
- rozwinie umiejętność wnioskowania oraz stawiania i weryfikowania hipotez;
- wykształci umiejętność czytania tekstów matematycznych ze zrozumieniem oraz analizowania ich z wykorzystaniem pojęć i technik matematycznych;
- rozwinie umiejętność interpretowania danych;
- wykształci umiejętność stosowania schematów, symboli literowych, rysunków i wykresów w sytuacjach związanych z otaczającą rzeczywistością;
- wspomoże i wzmocni proces edukacyjny, jakiemu podlegają uczniowie szkół podstawowych, gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych;
- ugruntuje wiedzę wyniesioną przez uczniów z lekcji matematyki;
- wspomoże kształcenie języka obcego, wzbogaci słownictwo o terminologię matematyczną;
- pokaże zastosowania pojęć i teoretycznych problemów do rozwiązywania zagadnień praktycznych;
- pozwoli zdjąć matematykę z piedestału niedoścignionej Królowej Nauk;
- wzbudzi wśród młodzieży i dzieci aktywne postawy wobec pojawiających się problemów, nieustępliwość i upór w rozwiązywaniu zadań.

Cele szczegółowe każdego pakietu edukacyjnego umieszczone są przy poszczególnych pakietach.

III. Warunki organizacyjne zajęć w ramach Projektu

1. Adresaci zajęć pozalekcyjnych

Zgodnie z założeniami Projektu, zajęcia pozalekcyjne przeznaczone są dla uczniów klasy drugiej szkoły ponadgimnazjalnej, którzy chcą utrwalić, poszerzyć wiedzę oraz rozwijać i udoskonalić swoje umiejętności w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem matematyki i języków obcych, jak również chcą odnieść sukces na egzaminie maturalnym z matematyki. Są to klasy, które brały udział w projekcie w roku szkolnym 2009/2010.

2. Wymagania wstępne

Uczeń kontynuujący uczestnictwo w Projekcie lub przystępujący do niego w klasie drugiej szkoły ponadgimnazjalnej powinien:

- określać wartość logiczną zdania, zaprzeczenie zdania, alternatywy, koniunkcji, implikacji, równoważności zdań;
- wykonywać podstawowe działania na zbiorach i przedziałach liczbowych (suma, część wspólna, różnica);
- wykonywać obliczenia na liczbach rzeczywistych, w szczególności działania na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- odróżniać liczby wymierne od liczb niewymiernych;

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- zamieniać ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne okresowe i odwrotnie;
- znać pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej związek z odległością na osi liczbowej;
- porównywać liczby rzeczywiste;
- szacować wartości wyrażeń liczbowych oraz błąd przybliżenia;
- rozwiązywać nierówności liniowe oraz ich układy i zapisywać wyniki w postaci przedziałów liczbowych;
- stosować obliczenia procentowe;
- szkicować wykresy funkcji liczbowych zadanych tabelką oraz funkcji przedziałami liniowych;
- odczytywać z dowolnego wykresu funkcji jej własności;
- znajdować na podstawie wykresu funkcji jej wartości największe (najmniejsze) w dziedzinie lub jej podzbiorze;
- przekształcać wykresy funkcji (przesunięcia wykresu wzdłuż osi);
- wyznaczać równania prostej na płaszczyźnie;
- rozwiązywać układy równań liniowych i znać ich interpretację geometryczną w układzie współrzędnych;
- stosować układy równań liniowych z dwiema i trzema niewiadomymi do rozwiązania zadań tekstowych;
- opisywać półpłaszczyzny za pomocą nierówności liniowych;
- stosować twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać skalę podobieństwa dwóch figur podobnych;
- wykorzystywać twierdzenie o stosunku pól podobnych do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznym kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- obliczać pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeśli jest znana jedna z nich;
- znać elementy przynajmniej jednego języka nowożytnego;
- czytać ze zrozumieniem, tłumaczyć wyrazy i budować proste zdania;
- biegle posługiwać się słownikiem języka obcego.

3. Sylwetka uczestnika zajęć po drugim roku realizacji Projektu

Zakładamy, że uczniowie po drugim roku realizacji Projektu będą potrafili:

- znać podzbiory zbioru liczb rzeczywistych i relacje miedzy nimi;
- obliczać procent danej liczby;
- wyznaczać sumę, różnicę i iloczyn przedziałów;
- znać definicję przedziału liczbowego na osi;
- wykonywać działania na wielomianach;
- rozwiązywać równanie wielomianowe, stosując metody rozkładu wielomianu na czynniki;
- rozwiązywać nierówności homograficzne;
- znać definicje funkcji i odczytywać własności funkcji z wykresu;
- wyznaczać sumę, różnicę i iloczyn przedziałów trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i stosować je do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego;
- umieć zastosować wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

- przeprowadzać nieskomplikowane rozumowania matematyczne,
- posługiwać się własnościami liczb i działań oraz własnościami figur przy rozwiązywaniu zadań,
- posługiwać się kalkulatorem przy rozwiązywaniu typowych zadań,
- dostrzegać, wykorzystywać i interpretować zależności funkcyjne,
- interpretować związki wyrażone za pomocą wzorów, wykresów, schematów, diagramów, tabel.

Zakładamy również, że realizacja zajęć w ramach Projektu w roku szkolnym 2010/2011:

- ułatwi aktywizację uczniów;
- pozwoli na wykształcenia postawy nieustępliwości i uporu w rozwiązywaniu zadań;
- pozwoli na wykształcenie u uczniów umiejętności przejrzystego przedstawiania rozumowania i uzasadniania odpowiedzi;
- pozwoli na wykształcenie umiejętności uzasadniania własnego stanowiska, argumentowania i przekonywania innych;
- pozwoli na wykształcenie umiejętności pracy w zespole, podejmowanie różnych funkcji społecznych w grupie i ich zamiana w zależności od potrzeb;
- pozwoli na uświadomienie uczniom o użyteczności matematyki w życiu codziennym;
- pozwoli dobrze zaplanować i wykorzystać czas na naukę;
- pozwoli zaspakajać i rozwijać wiele potrzeb edukacyjnych uczniów;
- daje możliwość lepszego poznania uczniów;
- integruje zespół klasowy.

4. Czas trwania zajęć w ramach realizacji Projektu

Czas trwania zajęć uzależniony jest od organizacji roku szkolnego i składa się z trzech etapów. Każdy etap obejmuje jeden rok nauki szkolnej i polega na realizacji siedmiu pakietów edukacyjnych w wymiarze 28 godzin lekcyjnych (po 4 godziny na jeden pakiet).

IV. Metody i formy uczenia się

W czasie zajęć pozalekcyjnych z matematyki w ramach Projektu główną formą pracy jest praca w grupach.

Zakładamy, że dzięki pracy w zespołach zadaniowych uczniowie będą mieli możliwość udoskonalenie swoich umiejętności twórczego rozwiązywania problemów oraz rozwiną abstrakcyjne myślenie matematyczne. Szczególne korzyści z pracy w zespole będą mieli uczniowie mniej zdolni. Taka forma zajęć ma często decydujący wpływ na zmianę ich postawy wobec przedmiotu, zwiększa ich zainteresowanie zajęciami i niejednokrotnie pomaga osiągnąć lepsze wyniki w nauce. Dzięki czynnemu udziałowi w pracach i osiągnięciach zespołu zadaniowego, uczniowie nabiorą wiary we własne siły i chętnie uzupełnią braki w swoich wiadomościach z matematyki i języków obcych.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Praca w grupach ma nie tylko walory kształcące ale i wychowawcze, pozwala na:

- wykształcenie umiejętności w komunikowaniu się i współpracy,
- uczy przestrzegania przyjętych zasad,
- pomaga stać się odpowiedzialnym za swoje własne nauczanie,
- zapewnia większe poczucie bezpieczeństwa,
- wzmacnia wiarę we własne możliwości,
- umożliwia wzajemne uczenie się od siebie,
- zachęca do otwartej dyskusji oraz do podejmowania nowych zadań,
- zwiększa odpowiedzialność za siebie i innych,
- daje szansę na pokonywanie własnej nieśmiałości,
- uczy tolerancji i życzliwości,
- zwiększa zaangażowanie i motywację do pracy,
- przygotowuje do publicznych wystąpień.

Można też zastosować takie metody jak dyskusja, metoda ćwiczeniowa i burza mózgów.

W czasie indywidualnej pracy z podręcznikiem uczeń może skorzystać z następujących porad doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań.

- Przeczytaj zadanie kilkukrotnie.
- Jeżeli zadanie dotyczy konkretnej sytuacji, postaraj się wyobrazić sobie tę sytuację.
- Możesz wykonać rysunek do zadania.
- Ustal, co jest niewiadomą w zadaniu i co wystarczy wiedzieć, by tę niewiadomą ustalić.
- Wyodrębnij dane z zadania i ustal czego możesz się na podstawie tych danych dowiedzieć.
- Ułóż plan rozwiązania i wykonaj go.
- Sprawdź, czy Twoje rozwiązanie jest poprawne.

V. Pakiety edukacyjne

Pakiet M-2.1 „Parabole tańczą…”

Pakiet M-2.2 „Wiele mian i jedna hi.. hiperbola”

Pakiet M-2.3 „Nieodparty urok ciągów; strzeż się pociągu do …”

Pakiet M-2.4 „Kombinuj dziewczyno!”

Pakiet M-2.5 „Miary - wizyta u krawca”

Pakiet M-2.6 „Ścinki, wycinki … wizyta u krawca dwa”

Pakiet M-2.7 „Co robić, żeby nic nie robić?” - „Kapitaliki”

Pakiet M-2.1 „Parabole tańczą…”

I. Treści merytoryczne:

- równania i nierówności kwadratowe i metody ich rozwiązywania;
- wykresy i własności funkcji kwadratowych;
- najmniejsza i największa wartość funkcji w przedziale;
- równania i nierówności kwadratowe z parametrem.

II. Cele szczegółowe:

- utrwalenie znajomości wzorów dotyczących funkcji kwadratowej;
- ćwiczenia w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych;
- odczytywanie własności funkcji z wykresu.

III. Cele szczegółowe w zakresie kompetencji społecznych:

- umiejętność dokonywania samooceny;
- usystematyzowanie zdobytej wiedzy;
- uświadomienie celowości pracy w grupie;
- ocenienie trafności dokonanego wyboru roli w grupie;
- kształtowanie umiejętności zaprezentowania danych;
- przygotowanie i praktykowanie wystąpień publicznych;
- formułowanie i wyrażanie własnych opinii;
- słuchanie opinii wyrażanych przez innych członków.

IV. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

V. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

ptm rok zał. 1919

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1] Zalewska A., Stachowski E., *I ty zostaniesz Euklidesem*,Oficyna Wydawniczo – Poligraficzna „Adam”, Warszawa 1995
[2] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1] ŚnieżekA., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994
[2] Babiański W., ChańkoL., Ponczek D., *Matematyka, podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym 1*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2007
[3] Bednarek W., *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1995
[4] Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku zamieszczony na stronie internetowej CKE
[5] Kłaczkow K., Kurczak M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników, klasa II*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2006

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" - „Parabole tańczą…"

Zadanie 1[1]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercise 1. Square and rectangle (5 points)

A wire of the length 140 cm is divided into two parts. From the first part the square is made and from the second one the rectangle is made for which the ratio of adjacent sides is 3:1.
How the wire should be divided to obtain the smallest sum of areas of a square and a rectangle?

Tarea 1. Un cuadrado y un rectángulo (5 puntos)

Se divide el hilo de 140 cm en dos partes. De una parte formamos el borde del cuadrado, de otra, el borde del rectángulo en el cuál la relación de los lados es 3:1
¿Cómo se debe dividir el hilo para que la suma de áreas del cuadrado y los del rectángulo sea la menor?

Exercice 1. Un carré et un rectangle (5 points)

On coupe en deux un fil de fer de 140 cm. La première partie sera le côté d'un carré, la deuxième - le côté d'un rectangle, dans lequel la relation des côtés est de 3 : 1.
Comment couper le fil pour que la somme de l'aire du carré et du rectangle soit la plus petite?

Esercizio 1. Quadrato e rettangolo (5 punti)

Il filo lungo di 140 cm è diviso in due parti. Con la prima parte facciamo il lato del quadrato e con l'altra il lato del rettangolo nel quale il rapporto dei lati fa 3 : 1.
Come dividere il filo purché la somma di campi del quadrato e del rettangolo sia la più piccola?

Aufgabe 1. Quadrat und Rechteck (5 Punkte)

Einen 140 cm langen Draht teilen wir in zwei Teile. Aus dem einen formen wir eine Quadratkante, aus dem anderen eine Kante eines Rechtecks, in dem das Seitenverhältnis 3:1 ist. Wie soll man den Draht teilen, damit die Summe der Flächeninhalte von Quadrat und Rechteck am kleinsten wird.

[1] Zaczerpnięto z [1]

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Ze wzorów, bez wzorów - raz (4 punkty)[2]

Dla równań kwadratowych o nieujemnym wyróżniku prawdziwe są następujące wzory, zwane wzorami Viete'a: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Bez wyznaczania rozwiązań równania kwadratowego $2x^2 - 3x - 2 = 0$ oblicz sumę kwadratów i odwrotność sumy rozwiązań.

Zadanie 3. Te boki, te przekątne…- raz (4 punkty)[3]

Jak nazywa się wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest o 450%większa niż liczba boków?

Zadanie 4. Zadanie Bezouta (4 punkty)[4]

Kupiec kupił konia i po pewnym czasie sprzedał go za 24 pistole, tracąc przy tym tyle procent, ile pistoli kosztował koń.
Za ile pistoli kupiec kupił konia?

[2] Zadanie własne Anny Rybak
[3] Zadanie własne Anny Rybak
[4]Zaczerpnięte z [2]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” - „Parabole tańczą”

Zadanie 1. Kwadrat i prostokąt (5 punktów)

Drut o długości 140 cm dzielimy na dwie części. Z pierwszej tworzymy brzeg kwadratu, z drugiej brzeg prostokąta, w którym stosunek boków jest równy 3:1.
Jak należy podzielić drut, aby suma pól kwadratu i prostokąta była najmniejsza?

Zadanie 1. Kwadrat i prostokąt (5 punktów) – szkic rozwiązania

Niech x będzie długością krótszego boku prostokąta, $x \in (0;17{,}5)$
zaś y długością boku kwadratu, $y \in (0;35)$
$8x + 4y = 140$, czyli $y = -2x + 35$. Suma pól jest funkcją zmiennej x o dziedzinie $D = (0;17{,}5)$:
$f(x) = 3x \cdot x + (-2x + 35)^2$, po uporządkowaniu $f(x) = 7x^2 - 140x + 1225$
Funkcja ta osiąga najmniejszą wartość q dla $x_W = -\frac{b}{2a} = -\frac{-140}{14} = 10$ gdzie $x \in D$.
Wtedy $y = -20 + 35 = 15$
Odpowiedź: Drut dzielimy w stosunku $4y : 8x = 60 : 80$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania	1
B	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
C	Ułożenie wzoru funkcji	1
D	Wyznaczenie $q \in D$	1
E	Podanie odpowiedzi i przetłumaczenie jej na język obcy	1

Exercise 1 . Square and rectangle (5 points)

Let x be the length of a shorter side of this rectangle, $x \in (0;17{,}5)$,
and let y be the side's length of the square, $y \in (0;35)$.
$8x + 4y = 140$, so $y = -2x + 35$.
The sum of areas is the function of a variable x with the domain $D = (0;17{,}5)$:
$f(x) = 3x \cdot x + (-2x + 35)^2$, after ordering $f(x) = 7x^2 - 140x + 1225$.
The function achieves the smallest value q for $x_W = -\frac{b}{2a} = -\frac{-140}{14} = 10$ where $x \in D$.
Then $y = -20 + 35 = 15$.
Answer: The wire should be divided in the ratio $4y : 8x = 60 : 80$

Scores

Activity	Stages of solving the task	Points
A	Translation of the exercise's text into Polish	1
B	Introduction of notations and writing of assumptions	1
C	Writing of a function's rule	1
D	Computation of $q \in D$	1
E	Giving the solution and translation of it into English	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tarea 1. Un cuadrado y un rectángulo (5 puntos)

Que x sea la longitud del lado más corto del rectángulo, $x \in (0;17{,}5)$, en cambio y constituya el lado del cuadrado, $y \in (0;35)$. $8x + 4y = 140$, es Decin $y = -2x + 35$
La suma de áreas constituye la función de la variable x con dominio $D = (0;17{,}5)$:
$f(x) = 3x \cdot x + (-2x + 35)^2$, después de haber ordenado . $f(x) = 7x^2 - 140x + 1225$
Esta función tiene un valor menor q para $x_W = -\frac{b}{2a} = -\frac{-140}{14} = 10$ *dónde* $x \in D$.
Entonces $y = -20 + 35 = 15$
Respuesta: Se divide el hilo en proporción $4y : 8x = 60 : 80$

Puntuación

Actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea	1
B	Introducción de las marcas, apuntación de hipótesis	1
C	Formación de la fórmula de la función	1
D	Determinación (medición) $q \in D$	1
E	Presentación de la respuesta y su traducción en la lengua extranjera	1

Exercice 1. Un carré et un rectangle (5 points)

Soit x la longueur du côté plus court du rectangle, $x \in (0;17{,}5)$ et y la longueur du côté du carré, $y \in (0;35)$. $8x + 4y = 140$, donc $y = -2x + 35$
La somme des aires est la fonction de la variable x avec le domaine $D = (0;17{,}5)$:
$f(x) = 3x \cdot x + (-2x + 35)^2$, après l'arrangement $f(x) = 7x^2 - 140x + 1225$
La fonction atteint sa plus petite valeur q pour $x_W = -\frac{b}{2a} = -\frac{-140}{14} = 10$ où $x \in D$.
Alors $y = -20 + 35 = 15$
Réponse: On coupe le fil dans la relation $4y : 8x = 60 : 80$

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction de l'exercice	1
B	Introduction des notations mathématiques, formulation des hypothèses	1
C	Formulation de la fonction	1
D	Détermination de $q \in D$	1
E	Réponse et sa traduction en langue étrangère	1

Esercizio 1. Quadrato e rettangolo (5 punti)

Se x è il lato più corto del rettangolo x = (0;17,5)
e y la lunghezza del lato di quadrato y = (0;35)
8x + 4y = 140, allora y = 2x + 35
La somma dei campi è funzione della variabile x con il dominio D = (0;17,5)
$f(x) = 3x \cdot x + (-2x + 35)^2$, dopo sistemazione $f(x) = 7x^2 - 140x + 1225$
Questa funzione ottiene il valore più piccolo q per $x_W = -\frac{b}{2a} = -\frac{-140}{14} = 10$ dove $x \in D$.
Allora $y = -20 + 35 = 15$
Risposta: Il filo deve essere diviso in rapporto di 4y: 8x = 60 : 80

Punteggio

N. attivita	Tappa di soluzione dell’esercizio	Numero di punti
A	Traduzione dell’esercizio	1
B	Introduzione delle indicazioni, iscrizione delle premesse	1
C	Stesura della formula di funzione	1
D	Indicazione q ϵ D	1
E	Risposta e la sua traduzione in lingua straniera	1

Aufgabe 1. Quadrat und rechteck (5 Punkte)

Sei x die Länge der kürzeren Rechteckseite, $x \in (0; 17{,}5)$ dagegen y die Länge der Quadratseite, $y \in (0;35)$.
$9x + 4y = 140$, also $y = -2x + 35$
Die Summe der Flächeninhalte ist eine Funktion der Variable x vom Definitionsbereich: $D = (0; 17{,}5)$
$f(x) = 3x \cdot x + (-2x + 35)^2$, nach dem Ordnen $f(x) = 7x^2 - 140x + 1225$
Die Funktion erreicht den kleinsten Wert q für $x_W = -\frac{b}{2a} = -\frac{-140}{14} = 10$, wo $x \in D$.
Dann $y = -20 + 35 = 15$
Antwort:
Den Draht teilen wir im Verhältnis $4y : 8x = 60 : 80$

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe	1
B	Einführung der Bezeichnungen, Niederschreiben von Voraussetzungen	1
C	Aufstellen der Formel von Funktion	1
D	Bestimmung von $q \in D$	1
E	Antwortangabe und -übersetzung in eine Fremdsprache	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wspól w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Ze wzorów, bez wzorów - raz[5] (4 punkty)

$\Delta = 25$, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{17}{4}$; $\frac{1}{x_1 + x_2} = \frac{2}{3}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie wzorów Viete'a i obliczenie sumy kwadratów	2
B	Zapisanie wzorów Viete'a i obliczenie odwrotności sumy	2

Zadanie 3. Te boki, te przekątne…- raz (4 punkty)[6]

Jak nazywa się wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest o 450%większa niż liczba boków?

n - liczba boków szukanego wielokąta, $n \geq 3$, $n \in N$. Z treści zadania otrzymujemy równanie: $\frac{n(n-3)}{2} = 550\%n$, a po uporządkowaniu: $n^2 - 3n = 11n$. Rozwiązaniami tego równania są: $n = 0$ - sprzeczne z założeniem oraz $n = 14$, więc szukany wielokąt to czternastokąt.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
B	Ułożenie równania	1
C	Rozwiązanie równania, sprawdzenie z założeniami	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 4. Zadanie Bezouta (4 punkty)

x - liczba pistoli, za które kupiec kupił konia $x > 0$. $x - 24$ - tyle pistoli stracił, sprzedając, zaś strata ta to $x\% \cdot x$. Otrzymujemy równanie: $x - 24 = \frac{x}{100} \cdot x$. Rozwiązaniami tego równania są 40 lub 60.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
B	Ułożenie równania	1
C	Rozwiązanie równania, sprawdzenie z założeniami	1
D	Podanie odpowiedzi	1

[5] Zadanie własne Anny Rybak
[6] Zadanie własne Anny Rybak

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" – „Parabole tańczą…"

Zadanie 1[7]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercise 1. Per mils (5 points)

The container with the capacity 40 litres is full of alcohol. Some part of alcohol was poured out and instead it the water was added. Then exactly the same part of mixture was poured out and the water was added again instead it. After it there was 10 litres of alcohol in the container. How many litres of liquid were poured out in each case?

Tarea 1. Por mil (5 puntos)

Del recipiente con capacidad de 40 litros, llenado de alcohol, echaron una cantidad de alcohol y añadieron agua. Cuándo volvieron de echar la misma cantidad de la mezcla completando por agua el recipiente, se quedaron ahí 10 litros de alcohol.
¿Cuántos litros de líquido echaron cada vez?

Exercice 1. Pour mille (5 points)

On a retiré une certaine quantité d'alcool et on a ajouté de l'eau dans un récipient d'une contenance de 40 litres rempli d'alcool. En retirant de nouveau la même quantité du mélange et en remplissant le récipient d'eau, il restait 10 litres d'alcool.
Combien de litres de liquide a-t-on retiré à chaque fois?

Esercizio 1. Millesimi (5 punti)

Dal recipiente di 40 litri con l'alcol hanno versato una certa quantità d'alcol e hanno aggiunto l'acqua. Quando hanno versato di nuovo la stessa quantità di miscela riempiendo il recipienta con l'acqua, nel recipiente sono rimasti 10 litri di alcol. Quanti litri di liquido sono versati ogni volta ?

Aufgabe 1. Promille (5 Punkte)

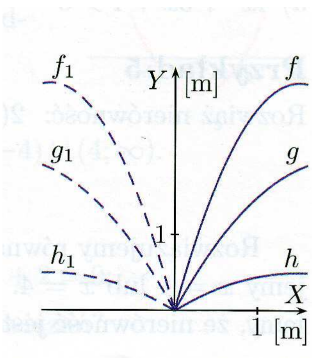
Aus einem mit Alkohol gefüllten Gefäß mit der Kapazität von 40 Liter wurde eine gewisse Menge Alkohol abgegossen und Wasser nachgegossen. Als man wieder die gleiche Menge Gemisch abgoss und das Gefäß mit Wasser auffüllte, blieb im Gefäß 10 Liter Alkohol. Wie viele Liter Flüssigkeit goss man jedes Mal ab?

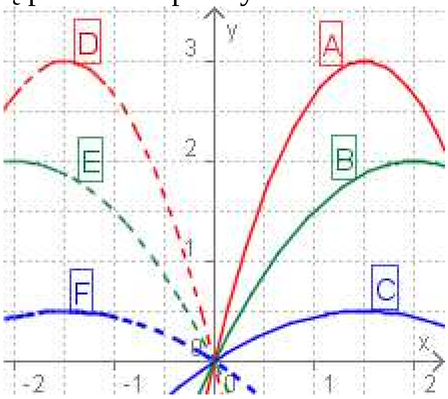
---

[7] Zaczerpnięte z [1]

Zadanie 2. Fontanny (5 punktów)[8]

Krople wody tryskające z fontanny poruszają się po torach opisanych równaniami: [9]



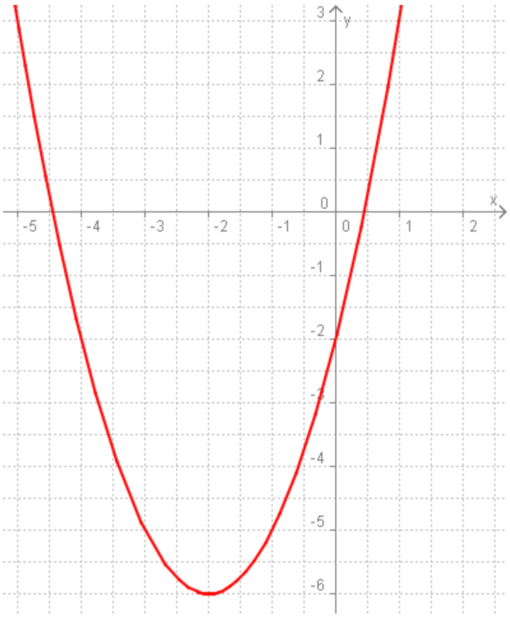


$A: \quad y=-\frac{4}{3}x^2+4x$; $B: \quad y=-\frac{1}{2}x^2+2x$; $C: \quad y=-\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{3}x$

Jak daleko od środka fontanny spadają krople?
Podaj równania parabol: D, E, F i współrzędne ich wierzchołków.

Zadanie 3. Czy umiesz czytać? (3 punkty)[10]

Na wykresie[11] jest przedstawiony szkic wykresu funkcji kwadratowej.
Odczytaj z wykresu znaki: a, b, c, Δ, p, q.



[8] Zaczerpnięte z [2]
[9] Zdjęcie i rycina – skany obrazków z [2]; wykres wykonała Helena Ewert – Fechner w programie GEONExT
[10] Zadanie własne Anny Rybak
[11] Wykres wykonała Helena Ewert – Fechner w programie GEONExT

Zadanie 4. Nie ściągaj (4 punkty) [12]

Ł. Geniusz i A. Dam siedzieli na sprawdzianie z matematyki w jednej ławce, jeden z nich pisał zadania z grupy A, drugi – grupy B.
Zadanie czwarte (z rozszerzenia) w grupie A miało treść:, „Dla jakiej wartości parametru m funkcja $f(x)=(5-m)x^2-2(1-m)x+2(1-m)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie”?
W grupie B zadanie czwarte brzmiało: „Wyznacz parametr m tak, aby zbiorem rozwiązań nierówności $(5-m)x^2-2(1-m)x+2(1-m)>0$ był zbiór liczb rzeczywistych.”
Czy chłopcy mogli te zadania rozwiązywać tak samo? Uzasadnij swoją odpowiedź.
Rozwiąż zadanie z grupy A.

Zadanie 5. Do poprawki (5 punktów) [13]

Kasia, Basia i Małgosia uczyły się razem do sprawdzianu z matematyki. Miały rozwiązać trzy nierówności kwadratowe.
Kasia miała rozwiązać nierówność: $x^2<25$ zapisała, więc: $x^2<25/\sqrt{\ }$, otrzymała $x<5$.
Basia miała rozwiązać nierówność: $(x-2)(x+3)\geq x+3$ i zapisała $(x-2)(x+3)\geq x+3/(x+3)$, otrzymała $x-2\geq 1$, czyli $x\geq 3$.
Nierówność Małgosi to $x^2+x+1\succ 0$. Małgosia liczy: $\Delta=-3$ i zapisuje: nie ma rozwiązania. Rozwiązania te zobaczyli koledzy z klasy: Ł. Geniusz i A. Dam i stwierdzili, że żadna z dziewczynek nie potrafi rozwiązywać nierówności.
Rozwiąż te nierówności poprawnie i opisz, jakie błędy popełniły dziewczynki.

Zadanie 6. Chyba nikt nie lubi takich zadań (4 punkty) [14]

Wykazać, że jeżeli równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ o współczynnikach całkowitych ma pierwiastek wymierny, to, co najmniej jedna z liczb: a, b, c jest parzysta.

Zadanie 7. Ze wzorów, bez wzorów - dwa (4 punkty) [15]

Bez wyznaczania rozwiązań równania kwadratowego $2x^2-3x-2=0$ oblicz sumę sześcianów i sumę odwrotności rozwiązań równania.

Zadanie 8. Współczynnik – rozwiązaniem (6 punktów) [16]

Dane jest równanie $x^2+bx+c=0$ z niewiadomą x.
Wyznacz wartości b oraz c tak, aby były one rozwiązaniami danego równania.

---

[12] Zadanie własne Anny Rybak
[13] Zadanie własne Anny Rybak
[14] Zaczerpnięto z [3]
[15] Zadanie własne Anny Rybak
[16] Zaczerpnięto z [4]

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 9. O ile procent? (2 punkty)[17]

O ile procent należy zwiększyć promień kuli, aby pole jej powierzchni wzrosło o 44%?

Zadanie 10. Czytaj ze zrozumieniem (3 punkty)[18]

Dla jakiej wartości parametru x równanie z niewiadomą k ma jedno rozwiązanie:
$2x^2 - 3(k-1)x + 1 - k^2 = 0$?

Zadanie 11. W stolarni (3 punkty)[19]

Pewien zakład stolarski produkuje stoły, które sprzedaje po 96 złotych za sztukę.
Związek między kosztem produkcji $K(x)$ a liczbą x wytworzonych w ciągu dnia stołów wyraża wzór $K(x) = 5x^2 + 6x + 160$.
Zakład może wyprodukować dziennie maksymalnie 12 stołów.
Oblicz, ile stołów dziennie powinien wyprodukować ten zakład, aby jego produkcja była opłacalna.
Określ, dla jakiej liczby wyprodukowanych w ciągu dnia stołów zysk zakładu będzie największy i ile wyniesie.

Zadanie 12. Nie wszystko złoto, co się świeci (6 punktów)[20]

„Złoty podział" to podział odcinka na dwie części tak, by stosunek dłuższej z nich do krótszej był taki sam, jak całego odcinka do części dłuższej.
Stosunek ten nazywa się złota liczbą i oznacza literą φ.
Oblicz φ. Znajdź jej odwrotność. Co zauważyłeś?

[17] Zaczerpnięto z [5]
[18] Zadanie własne Anny Rybak
[19] Zaczerpnięto z [5]
[20] Zadanie własne Anny Rybak

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” – „Parabole tańczą”

Zadanie 1. Promile (5 punktów)

Z naczynia o pojemności 40 litrów napełnionego alkoholem odlano pewną ilość alkoholu i dolano wody. Gdy znowu odlano taka sama ilość mieszaniny i dopełniono naczynie wodą, w naczyniu zostało 10 litrów alkoholu. Ile litrów cieczy odlano za każdym razem?

Zadanie 1 - Promile *(*5 punktów*)* – **Szkic rozwiązania:**

Niech x oznacza ułamek wyrażający część całej ilości alkoholu odlewanego za każdym razem, $x \in (0;1)$. Wtedy po pierwszym odlaniu w naczyniu zostało $40-40x$ litrów alkoholu. Po drugim odlaniu w naczyniu mamy $40-40x-x(40-40x)$ litrów alkoholu. Zgodnie z treścią zadania mamy równanie: $40-40x-x(40-40x)=10$. Po uporządkowaniu otrzymujemy równanie:

$4x^2-8x+3=0$, którego rozwiązaniami są liczby: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}$

sprzeczne z założeniem.

Odpowiedź: Za każdym razem odlano połowę, czyli 20 litrów.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania	1
B	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
C	Ułożenie równania	1
D	Rozwiązanie równania, sprawdzenie z założeniem	1
E	Podanie odpowiedzi i przetłumaczenie jej na język obcy	1

Exercise 1. Per mils (5 points)

Let x denote the fraction expressing the part of the whole capacity which was poured out in each case, $x \in (0;1)$. After first pouring out there was $40-40x$ litres of alcohol in the container. After second pouring out it was $40-40x-x(40-40x)$ litres of alcohol in the container. Hence the equation: $40-40x-x(40-40x)=10$. After ordering we obtain the equation: $4x^2-8x+3=0$, the solutions of which are the numbers: $x_1=\frac{1}{2}$ agreeable with the assumption and $x_2=\frac{3}{2}$ contradicted with the assumption.

Answer: In every case 20 litres were poured out.

Scores

Activity number	The stages of solution	Points
A	Translation of exercise’s text	1
B	Introduction of notations and writing the assumptions	1
C	Writing the equation	1
D	Soving the equation, checking the assumption	1
E	Giving the solution and translation it into English	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tarea 1. Por mil (5 puntos)

Que x represente una fracción siendo una parte de toda la cantidad de alcohol echado cada vez juntos $x \in (0;1)$. Entonces, después de la primera echada, en el recipiente quedaron $40-40x$ litros de alcohol. Después de la segunda echada en el recipiente tenemos $40-40x-x(40-40x)$ litros de alcohol. Conforme al contenido de la tarea tenemos una ecuación: $40-40x-x(40-40x)=10$. Después de haber ordenado, obtenemos una ecuación: $4x^2-8x+3=0$, cuyas soluciones son números: $x_1=\frac{1}{2}$ conforme a la hipotesis, $x_2=\frac{3}{2}$ no conforme a la hipotesis

Respuesta: Cada vez echaron la mitad, es decir 20 litros.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea	1
B	Introducción de las marcas, apuntación de las hipótesis	1
C	Formación de la ecuación	1
D	Solución de la ecuación, verificación de la hipotesis	1
E	Presentación de la respuesta y su traducción en la lengua extranjera	1

Exercice 1. Pour mille (5 points)

Soit x la fraction exprimant une partie de toute la quantité d'alcool retiré à chaque fois, $x \in (0;1)$. Alors, après la première ponction, il restait dans le récipient $40-40x$ litres d'alcool. Après la deuxième, nous avons dans le récipient $40-40x-x(40-40x)$ litres d'alcool. Conformément à l'exercice, nous avons l'équation : $40-40x-x(40-40x)=10$. Nous arrivons ainsi à l'équation : $4x^2-8x+3=0$.

Il y a 2 solutions : $x_1=\frac{1}{2}$, conforme à l'hypothèse et $x_2=\frac{3}{2}$ contraire à l'hypothèse.

Réponse: A chaque fois, on a retiré la moitié, donc 20 litres.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction de l'exercice	1
B	Introduction des notations mathématiques, formulation des hypothèses	1
C	Formulation de l'équation	1
D	Solution de l'équation, vérification de l'hypothèse	1
E	Réponse et sa traduction en langue étrangère	1

Esercizio 1. Millesimi (5 punti)

Se x indica la frazione della parte di tutto l'alcol versato ogni volta, $x \in (0;1)$.
Cosi dopo il primo versamento abbiamo nel recipiente $40-40x$ litri di alcol.
Dopo il secondo versamento nel recipiente abbiamo $40-40x-x(40-40x)$ litri di alcol.
Secondo il contenuto del compito otteniamo l'equazione : $40-40x-x(40-40x)=10$.
Dopo il riordinamento otteniamo l'equazione: $4x^2-8x+3=0$, di cui soluzione sono i numeri: $x_1=\frac{1}{2}$ conformemente alla premessa e $x_2=\frac{3}{2}$ non conforme alla premessa.
Risposta: Ognia volta viene versata la metà, dunque 20 litri.

Punteggio

N. attivita	Tappa di soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione della proposizione	1
B	Introduzione delle indicazioni, iscrizione delle premesse	1
C	Composizione dell'equazione	1
D	Soluzione dell'equazione, revisione delle premesse	1
E	Risposta e la sua traduzione in lingua straniera	1

Aufgabe 1. Promille (5 Punkte)

Bezeichne x eine Bruchzahl, die den Teil der ganzen Menge jedes Mal abgegossener Alkohol ausdrückt, $x \in (0;1)$. Dann blieb im Gefäß nach dem ersten Abgießen $40-40x$ Liter Alkohol. Nach dem zweiten Abgießen haben wir im Gefäß $40-40x-x(40-40x)$ Liter Alkohol. Gemäß dem Aufgabeninhalt haben wir die Gleichung: $40-40x-x(40-40x)=10$. Nach dem Ordnen bekommen wir die Gleichung: $4x^2-8x+3=0$, deren Lösung die Zahlen:

$$x_1=\frac{1}{2}$$

voraussetzungsgemäß und

$$x_2=\frac{3}{2}$$

voraussetzungswidrig sind.
Antwort: Jedes Mal hat man die Hälfte, also 20 Liter abgegossen.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe	1
B	Einführung der Bezeichnungen, Niederschreiben von Voraussetzungen	1
C	Aufstellen der Gleichung	1
D	Gleichungslösen, Prüfen mit der Voraussetzung	1
E	Antwortangabe und -übersetzung in eine Fremdsprache	1

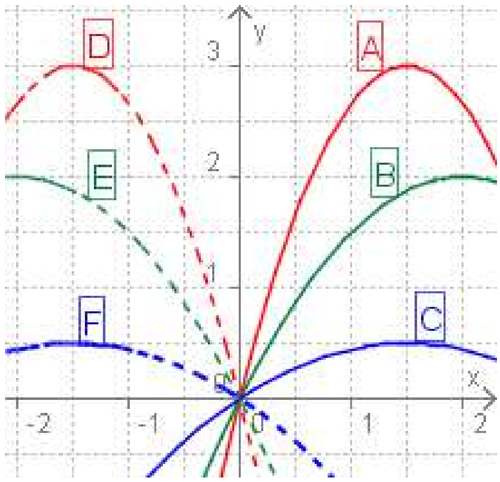
Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Fontanny (5 punktów)[21]

a) Dla parabol: A, D odległość spadających kropel od środka to 3 metry (miejsca zerowe).

Dla parabol: C, F odległość spadających kropel od środka też 3 metry.

Dla parabol B, E ta odległość wynosi 4 metry



b)

$$D: \quad y=-\frac{4}{3}x^2-4x;\ W=\left(-\frac{3}{2};3\right)$$

$$E: \quad y=-\frac{1}{2}x^2-2x;\ W=(-2;2)$$

$$F: \quad y=-\frac{2}{9}x^2-\frac{2}{3}x;\ W=\left(-\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie odległości: 3 4 3	1
B	Podanie równań trzech paraboli	2
C	Podanie współrzędnych wierzchołków	2

Zadanie 3. Czy umiesz czytać? (3 punkty)[22]

Odpowiedź:

$a>0,\quad b>0,\quad c<0,\quad \Delta>0,\quad p<0,\quad q<0$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie znaku każdej liczby po 0,5 pkt	3

[21] Zaczerpnięte z [2]
[22] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 4. Nie ściągaj (4 punktów)[23]

Tak, aby rozwiązać obydwa zadania należy rozpatrzyć warunki: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases} \vee \begin{cases} a=b=0 \\ c>0 \end{cases}$ czyli

$\begin{cases} m<5 \\ -4m^2+40m-36<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<5 \\ m\in(-\infty;1)\cup(9;\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\vee\begin{cases} 5-m=-2(1-m)=0 \\ 2(1-m)>0 \end{cases}$ - sprzeczne

Odpowiedź: Warunki zadania spełnia $m<1$

Punktacja

Czynność	Odpowiedź z uzasadnieniem	Liczba punktów
A	Zapisanie pierwszego układu warunków	1
B	Rozwiązanie pierwszego układu	1
C	Zapisanie i rozwiązanie drugiego układu warunków	1
D	Sformułowanie rozwiązania	1

Zadanie 5. Do poprawki (5 punktów)[24]

Nierówność Kasi: $(x-5)(x+5)<0 \Leftrightarrow x\in(-5;5)$, błąd polegał na pierwiastkowaniu stronami nierówności.

Nierówność Basi: $(x-2)(x+3)-(x+3)\geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3\rangle\cup\langle 3;\infty)$ błąd polegał na dzieleniu przez wyrażenie o nieustalonym znaku.

Nierówność Małgosi jest spełniona dla każdej liczby rzeczywistej, błąd polegał na rozwiązaniu równania a nie nierówności.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rozwiązanie poprawnie każdej nierówności	3
B	Wskazanie błędu u każdej dziewczynki	2

[23] Zadanie własne Anny Rybak
[24] Zadanie własne Anny Rybak

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 6. Chyba nikt nie lubi takich zadań (4 punkty)[25]

Niech x_0 będzie wymiernym pierwiastkiem podanego równania. Oznaczmy $t_0 = ax_0$.

Wtedy t_0 jest wymierne oraz $a\left(\frac{t_0}{a}\right)^2 + b\frac{t_0}{a} + c = 0$, skąd $t_0{}^2 + bt_0 + ac = 0$.

Liczba t_0 jest, więc pierwiastkiem trójmianu: $t_0{}^2 + bt_0 + ac$.

Ponieważ współczynnik przy t^2 jest równy 1, więc liczba t_0 jest całkowita.

Załóżmy, wbrew temu, co mamy udowodnić, że liczby a, b, c są wszystkie nieparzyste.

Jeśli t_0 jest nieparzyste, to liczby t_0^2 i bt_0 są nieparzyste, więc liczba $t_0{}^2 + bt_0 + ac$ jest nieparzysta, co jest niemożliwe, gdyż zero nie jest liczbą nieparzystą.

Jeżeli t_0 jest parzyste, to liczby t_0^2 i bt_0 są parzyste, więc liczba $t_0{}^2 + bt_0 + ac$ jest nieparzysta, co znowu jest niemożliwe.

Tak, więc założenie, że liczby a, b, c są wszystkie nieparzyste jest błędne, czyli co najmniej jedna z nich jest parzysta.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Uzasadnienie, ze liczba t_0 jest całkowita	1
B	Rozpatrzenie przypadku t_0 nieparzyste	1
C	Rozpatrzenie przypadku t_0 parzyste	1
D	Podanie wniosku końcowego	1

Zadanie 7. Ze wzorów, bez wzorów - dwa (4 punkty)[26]

$\Delta = 25$ więc równanie ma dwa pierwiastki

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 - x_1x_2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = \frac{63}{8}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{3}{2}$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie wzorów Viete'a i obliczenie sumy kwadratów	2
B	Zapisanie wzorów Viete'a i obliczenie odwrotności sumy	2

[25] Zaczerpnięto z [3]
[26] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 8. Współczynnik – rozwiązaniem (6 punktów)[27]

Niech $b^2-4c\geq 0$. Wtedy $\begin{cases} b^2+bb+c=0 \\ c^2+bc+c=0 \end{cases}$. Z pierwszego równania mamy: $c=-2b^2$, po podstawieniu do drugiego: $4b^4-2b^3-2b^2=0 \Leftrightarrow 2b^2\left(2b^2-b-1\right)=0$. Więc $b=0$ lub $b=-\frac{1}{2} \vee b=1$. Otrzymujemy pary: $\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases} \vee \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ c=-\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} b=1 \\ c=-2 \end{cases}$. Każda z par spełnia założenie dotyczące istnienia pierwiastków.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ułożenie układu	2
B	Podanie trzech rozwiązań równania z jedną niewiadomą	2
C	Podanie współrzędnych wierzchołków	1
D	Sprawdzenie z założeniem	1

Zadanie 9. O ile procent? (2 punkty) [28]

Z treści zadania mamy:

$$\pi(x\%r)^2=\pi r^2\cdot 144\% \text{ gdzie } x>100.$$

$$\pi\cdot\frac{x^2}{10000}\cdot r^2=\pi\cdot r^2\cdot\frac{144}{100},$$

czyli $x^2=14400$ więc $x=-120$ - sprzeczne, lub $x=120$.

Promień wzrósł, więc o 20%.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ułożenie równania z treści zadania	1
B	Rozwiązanie równania, podanie odpowiedzi	1

Zadanie 10. Czytaj ze zrozumieniem (3 punkty) [29]

Porządkujemy równanie ze względu na niewiadomą k: $-k^2-3xk+2x^2+3x+1=0$.
Równanie to ma jedno rozwiązanie, gdy wyróżnik jest równy 0.

$$\Delta=9x^2-4\cdot(-1)\cdot\left(2x^2+3x+1\right)=17x^2+12x+4.$$

$$\Delta=0\Leftrightarrow 17x^2+12x+4=0.$$

Wyróżnik otrzymanego równania wynosi: $12^2-4\cdot 17\cdot 4=144-204=-60$, zatem to równanie nie ma rozwiązania, więc nie istnieje parametr x spełniający warunki zadania.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Uporządkowanie równania ze względu na niewiadomą	2
B	Obliczenie wyróżnika, podanie odpowiedzi	2

[27] Zaczerpnięto z [4]
[28] Zaczerpnięto z [5]
[29] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 11. W stolarni (3 punkty) [30]

Funkcja zysku jest dana wzorem:
$Z(x) = 96x - (5x^2 + 6x + 160) = -5x^2 + 90x - 160$, gdzie $x \in N \wedge x \leq 12$.
Produkcja jest opłacalna, gdy zysk jest dodatni, czyli gdy zakład produkuje od 3 do 12 stołów. Największy jest wtedy, gdy zakład wyprodukuje 9 stołów, zysk wtedy wyniesie 245.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie funkcji zysku	1
B	Obliczenie, kiedy produkcja jest opłacalna	1
C	Obliczenie maksymalnego zysku	1

Zadanie 12. Nie wszystko złoto, co się świeci (6 punktów) [31]

Niech a oznacz długość pierwszej, dłuższej części odcinka o długości $a+b$.

$$\text{Wtedy: } \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}.$$

$$\text{Mamy } \frac{a}{b} = \varphi.$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, którego rozwiązaniami są:

$$\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ lub } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań jest sprzeczne - długość odcinka nie może być liczbą ujemna.
Odwrotność złotej liczby to liczba od niej o 1 mniejsza:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \varphi - 1$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń (może być rysunek)	1
B	Ułożenie równania	1
C	Rozwiązanie równania, sprawdzenie rozwiązań	2
D	Obliczenie odwrotności	1
E	Sformułowanie wniosku	1

[30] Zaczerpnięto z [5]
[31] Zadanie własne Anny Rybak

Pakiet M-2.2 „Wiele mian i jedna hi… hiperbola”

I. Treści merytoryczne:

- definicja wielomianu, stopnia wielomianu;
- działania na wielomianach i wyrażeniach wymiernych;
- wykresy funkcji homograficznych.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności działań na wielomianach;
- nabywanie biegłości w działaniach na wyrażeniach wymiernych;
- nabywanie biegłości w sporządzaniu wykresów funkcji;
- kształcenie umiejętności analizy i syntezy.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy , asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1] Herburt I., Olszańska A., *Maturalnie, że zdasz*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2004
[2] Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku zamieszczony na stronie internetowej CKE

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1] Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku zamieszczony na stronie internetowej CKE

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna**)**

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" – „Wiele mian i jedna hi…hiperbola"

Zadanie 1.

W tym zadaniu[32] należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercise 1. To school (5 points)

The first half of his journey to school Tomek goes by a bicycle with the average speed 10 km/hour. The second one he goes faster - with the speed 15 km/hour. What is the medium speed of Tomek on the whole distance from home to school?

Exercice 1. A L'ecole (5 points)

Thomas a fait la moitié du chemin pour aller à l'école à vélo avec une vitesse moyenne de 10 km/h. L'autre moitié a été faite plus rapidement – avec une vitesse de 15 km/h. Quelle est la vitesse moyenne de Thomas sur tout le parcours ?

Tarea 1. A la escuela (5 puntos)

Tomás iba en velo a la escuela con una velocidad media de 10 km por hora durante la premiera mitad del camino. La segunda mitad iba más rápidamente – con una velocidad de 15 km/h.
¿Cuál est la velocidad media de la ida de Tomás en todo el camino?

Esercizio 1. A Scuola (5 punti)

Tomek andava a bicicletta a scuola la prima metà con la velocità di 10 km/h. La seconda metà andava più presto – con la velocità di 15 km/h. Qual'è la velocità media di Tomek durante tutto il viaggio?

Aufgabe 1. Zur Schule (5 Punkte)

Thomas fuhr mit dem Fahrrad die Hälfte des Weges zur Schule mit durchschnittlicher Geschwindigkeit 10 km/h. Die zweite Weghälfte fuhr er schneller – mit der Geschwindigkeit 15 km/h. Was ist die Durchschnittsgeschwindigkeit von Thomas' Fahrt auf dem ganzen Weg?

[32] Zadanie własne Anny Rybak

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Przesuwamy hiperbolę raz! (6 punktów) [33]

Podaj, jakie przekształcenia należy wykonać, aby
z wykresu funkcji $y = \frac{3}{x}$ otrzymać wykres $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Naszkicuj otrzymany wykres i odczytaj z niego rozwiązania równania $\frac{2x-1}{x+1} = 2$.

Sprawdź otrzymane rozwiązania rachunkowo.

Zadanie 3. Lanie wody (6 punktów)[34]

Do zbiornika o pojemności 700 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami.
W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 5m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 16 godzin krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą.
Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

Zadanie 4. Prostopadłościan (5 punktów)[35]

Jedna krawędź prostopadłościanu ma długość b, druga jest od niej dłuższa o 4, a trzecia krawędź jest dłuższa od pierwszej o 6.
Dla jakich wartości b objętość tego prostopadłościanu jest mniejsza od objętości sześcianu o krawędzi długości $b+3$?
Podaj wynik dokładny oraz jego przybliżenie z dokładnością do dwóch miejsc po przecinku.

[33] Zadanie własne Anny Rybak
[34] Zaczerpnięto z [1]
[35] Zaczerpnięto z [2]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Wiele mian i jedna hi…hiperbola"

Zadanie 1. Do szkoły (5 punktów)

Tomek połowę drogi do szkoły jechał na rowerze ze średnią prędkością 10 km/godz.
Drugą połowę drogi jechał szybciej – z prędkością 15 km/godz.
Jaka jest średnia prędkość jazdy Tomka na całej drodze?

Zadanie 1. Do szkoły (5 punktów) – szkic rozwiązania

	Pierwsza połowa	Druga połowa
Prędkość	10	15
Droga $s > 0$	$\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{2}s$
Czas $t > 0$	t_1	t_2

$v = \frac{s}{t}$, więc $t = \frac{s}{v}$. Szukana prędkość to: $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2}$.

Po podstawieniu mamy:

$$v_{śr} = \frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{10} + \frac{\frac{1}{2}s}{15}} = \frac{s}{\frac{1}{20}s + \frac{1}{30}s} = \frac{s}{\frac{30s + 20s}{600}} = s \cdot \frac{600}{50s} = 12$$

Odpowiedź: Średnia prędkość na całej drodze to 12 km/godz.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania	1
B	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
C	Zapisanie średniej prędkości na całej trasie	1
D	Wykonanie przekształceń	1
E	Podanie odpowiedzi i przetłumaczenie jej na język obcy	1

Exercise 1. To school (5 points)

	First half	Second half
speed	10	15
distance $s \succ 0$	$\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{2}s$
time $t \succ 0$	t_1	t_2

$v = \frac{s}{t}$, so $t = \frac{s}{v}$; The seeked average speed $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2}$.

After substitution we have:

$$v_{śr} = \frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{10} + \frac{\frac{1}{2}s}{15}} = \frac{s}{\frac{1}{20}s + \frac{1}{30}s} = \frac{s}{\frac{30s + 20s}{600}} = s \cdot \frac{600}{50s} = 12$$

Answer: The average speed during his journey to school is 12 km/hour.

Scores

Action	Stages of solution	Number of points
A	Translation of exercise's text	1
B	Introduction of notations and writing the assumptions	1
C	Computation the average speed on the whole way to school	1
D	Execution of transformations	1
E	Giving the solution and translating it into English	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Exercice 1. A L'ecole (5 points)

	Première moitié	Deuxième moitié
Vitesse	10	15
Parcours $s>0$	$\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{2}s$
Temps $t>0$	t_1	t_2

$v=\frac{s}{t}$, donc $t=\frac{s}{v}$. La vitesse recherchée $v=\frac{s}{t_1+t_2}$. Après avoir substitué nous avons :

$$v_{moyenne}=\frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{10}+\frac{\frac{1}{2}s}{15}}=\frac{s}{\frac{1}{20}s+\frac{1}{30}s}=\frac{s}{\frac{30s+20s}{600}}=s\cdot\frac{600}{50s}=12$$

Réponse: La vitesse moyenne sur tout le parcours est de 12km/h.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction de l'exercice	1
B	Introduction des notations mathématiques, formulation des hypothèses	1
C	Détermination d'une vitesse moyenne sur tout le parcours	1
D	Exécution des transformations	1

Tarea 1. A la escuela (5 puntos)

	Primera mitad	Segunda mitad
Velocidad	10	15
Camino $s\succ 0$	$\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{2}s$
Tempo $t\succ 0$	t_1	t_2

$v=\frac{s}{t}$, entonces $t=\frac{s}{v}$. La velocidad buscada:

$v_{śr}=\frac{s}{t_1+t_2}$. Después de haber sustituido, tenemos:

$$v_{śr}=\frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{10}+\frac{\frac{1}{2}s}{15}}=\frac{s}{\frac{1}{20}s+\frac{1}{30}s}=\frac{s}{\frac{30s+20s}{600}}=s\cdot\frac{600}{50s}=12\,\mathrm{R}$$

espuesta: La velocidad media en todo el camino es 12 km/h.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea	1
B	Introducción de las marcas, apuntación de la hipótesis	1
C	Inscripción de la velocidad media en todo el camino	1
D	Ejecución de las transformaciones	1
E	Presentación de la respuesta y su traducción en la lengua extranjera	1

Esercizio 1. A Scuola (5 punti)

	Prima metà	Seconda metà
Velocità	10	15
Strada $s \succ 0$	$\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{2}s$
Tempo $t \succ 0$	t_1	t_2

$v = \frac{s}{t}$ dunque $t = \frac{s}{v}$

La velocità ottenuta $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2}$. Dopo la sostituzione abbiamo:

$$v_{śr} = \frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{10} + \frac{\frac{1}{2}s}{15}} = \frac{s}{\frac{1}{20}s + \frac{1}{30}s} = \frac{s}{\frac{30s + 20s}{600}} = s \cdot \frac{600}{50s} = 12$$

Risposta: La velocità media durante tutta la strada è di 12 km/h.

Puntuación

N. attivita	Tappe della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione dell'esercizio	1
B	Introduzione delle indicazioni, annotazione delle premesse	1
C	Annotazione della velocità media su tutta la strada	1
D	Esecuzione dei convertimenti	1
E	Soluzione con la traduzione in lingua straniera	1

Aufgabe 1. Zur Schule (5 Punkte)

	Erste Hälfte	Zweite Hälfte
Geschwindigkeit	10	15
Weg $s \succ 0$	$\frac{1}{2}s$	$\frac{1}{2}s$
Zeit $t \succ 0$	t_1	t_2

$v = \frac{s}{t}$ also $t = \frac{s}{v}$

Die gesuchte Geschwindigkeit $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2}$. Nach der Substitution haben wir:

$$v_{śr} = \frac{s}{\frac{\frac{1}{2}s}{10} + \frac{\frac{1}{2}s}{15}} = \frac{s}{\frac{1}{20}s + \frac{1}{30}s} = \frac{s}{\frac{30s + 20s}{600}} = s \cdot \frac{600}{50s} = 12$$

Antwort: Die Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem ganzen Weg beträgt 12 km/h.

Punktwertung

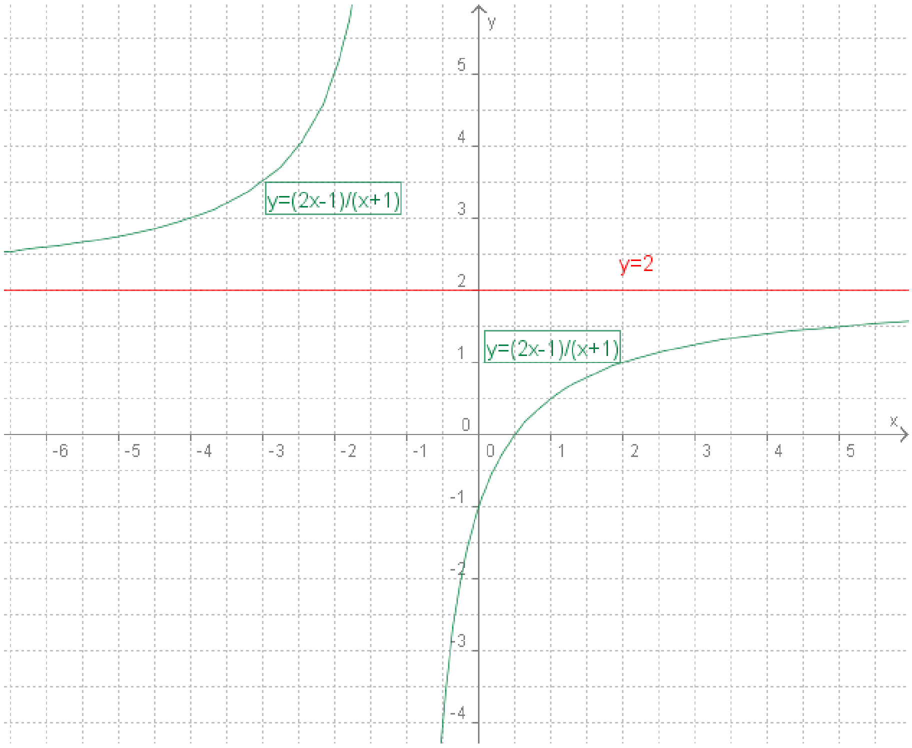
Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe	1
B	Einführung der Bezeichnungen, Niederschreiben von Voraussetzungen	1
C	Niederschreiben der Durchschnittsgeschwindigkeit auf der ganzen Strecke	1
D	Ausführung von Umformungen	1
E	Antwortangabe und -übersetzung in eine fremde Sprache	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Przesuwamy hiperbolę raz! (6 punktów)

$$y=\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2(x+1)-3}{x+1}=-\frac{3}{x+1}+2=-\left(\frac{3}{x+1}-2\right)$$

Wykres funkcji $y=\frac{3}{x}$ należy przesunąć o wektor $\vec{w}=[-1;-2]$, a następnie przekształcić przez symetrię względem osi odciętych.
Uwaga: uczniowie mogą podawać inne, prawidłowe przekształcenia,
np. przesunięcie o wektor $[-1;0]$, symetria względem osi odciętych, przesunięcie o wektor $[0;2]$
Szkic wykresu:[36]



Równanie $\frac{2x-1}{x+1}=2$ nie ma rozwiązań.

Sprawdzenie: $\frac{2x-1}{x+1}=2, x\in R/\{-1\}$

$2x-1=2(x+1)\Leftrightarrow 2x-1=2x+2\Leftrightarrow -1=2$ - sprzeczność.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przekształcenie wzoru do postaci kanonicznej	1
B	Opisanie wszystkich przekształceń	1
C	Sporządzenie wykresu	2
D	Odczytanie z wykresu rozwiązania równania	1
E	Sprawdzenie otrzymanego wyniku	1

[36] Wykres sporządziła Helena Ewert – Fechner w programie GEONExT

Zadanie 3. Lanie wody (6 punktów)

	Pierwsza rura	Druga Rura
Objętość zbiornika	700	700
Czas $t>16$	$t-16$	t
Ilość wody wlanej w ciągu 1 godz, $x>0$	$x+5$	x

Zbiornik zostanie napełniony, gdy iloczyn ilości wody wlanej przez jedna godzinę przez liczbę godzin będzie równy objętości zbiornika.

$\begin{cases}(t-16)(x+5)=700\\ tx=700\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xt+5t-16x-80=700\\ t=\dfrac{700}{x}\end{cases}$ po podstawieniu i redukcji mamy:

$-4x^2-20x+875=0$. Rozwiązaniami równania są: $x_1=12{,}5 \vee x_2=-17{,}5$; rozwiązanie x_2 jest sprzeczne z założeniem. W ciągu jednej godziny przez pierwszą rurę wleje się 17,5m^3 wody a przez drugą 12,5m^3, czyli przez obie razem 30m^3. Wobec tego czas potrzebny do napełnienia basenu to $\frac{700}{30}=23\frac{1}{3}$ godziny.

Odpowiedź: Pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie przez 23 godziny i 20 minut.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
B	Ułożenie układu równań	2
C	Rozwiązanie układu	1
D	Sprawdzenie rozwiązania z założeniem	1
E	Obliczenie czasu, podanie odpowiedzi	1

Zadanie 4. Prostopadłościan (5 punktów)

Niech b będzie długością jednej krawędzi prostopadłościanu, $b>0$.
Objętość prostopadłościanu $V_1=b(b+4)(b+6)=b^3+10b^2+24b$.

Objętość sześcianu $V_2=(b+3)^3=b^3+9b^2+27b+27$.

Z treści zadania: $V_1<V_2$, czyli po redukcji $b^2-3b-27<0 \Leftrightarrow b\in\left(\frac{3-3\sqrt{13}}{2};\frac{3+3\sqrt{13}}{2}\right)$,

po uwzględnieniu założeń $0<b<\frac{3+3\sqrt{13}}{2}$, gdzie $\frac{3+3\sqrt{13}}{2}\approx 6{,}91$.

Odp. Objętość prostopadłościanu jest mniejsza od objętości sześcianu, gdy $b\in\left(0;\frac{3+3\sqrt{13}}{2}\right)$

Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie w najprostszej postaci objętości prostopadłościanu	1
B	Zapisanie w najprostszej postaci objętości sześcianu	1
C	Zapisanie w najprostszej postaci nierówności	1
D	Rozwiązanie nierówności z uwzględnieniem założeń	1
E	Prawidłowe przybliżenie	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” – „Wiele mian i jedna hi…hiperbola”

Zadanie 1.

W tym zadaniu należy: [37]

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercise 1 . At the visit (5 points)

Ania wanted to visit Ola because of Ola’s Birthday. She left home too late so, the one third of distance to Ola’s home she went with the speed 5 km/hour. She was afraid of coming too early so the last part of distance she went with the speed 3 km/hour. What is the average speed of Ania on the whole distance to Ola’s home?

Exercice 1. En visite (5 points)

Anne va à l’anniversaire d’Alexandre. Elle est partie tard et a parcouru un tiers de son chemin à la vitesse de 5km/h. Elle s’est cependant rendue compte qu’elle arriverait en avance. Elle a donc marché à 3km/h durant le reste du parcours. Quelle est la vitesse moyenne d’Anne sur tout le parcours?

Tarea 1. Con una visita (5 puntos)

Anita se apresta al cumpleaños de Ola. Ha salido tarde y una tercera parte del camino iba con la velocidad de 5 km/h. Sin embargo, se ha orientado que vendrá demasiado temprano y la parte restante del camino iba con la velocidad de 3 km/h.
¿Cuál est la velocidad media de Anita en todo el camino?

Esercizio 1. La visita (5 punti)

Ania va al compleanno di Ola. È uscita tardi e una terza parte camminava con la velocità di 5 km/h. Ma si è reso conto che sarebbe arrivata troppo presto e poi andava con la velocità di 3 km/h. Qual’è la velocità media Ania su tutta la strada?

Aufgabe 1. Zu Besuch (5 Punkte)

Ania zieht zum Geburtstag von Ola aus. Sie ging spät heraus und ein Drittel des Weges ging sie mit der Geschwindigkeit 5 km/h. Sie merkte aber, dass sie zu früh kommt, und den Rest des Weges ging sie mit Geschwindigkeit 3 km/h. Was ist Anias Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem ganzen Weg?

[37] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 2. Działania na ułamkach (6 punktów) [38]

Zapoznaj się z metodą sprowadzania ułamków do wspólnego mianownika:

a) $$\frac{2}{3x^2-12}-\frac{4}{2-x}+\frac{5}{6x^2+6x-12}=\left\{\begin{array}{c} 3x^2-12=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2) \\ 2-x=-x+2=-(x-2) \\ 6x^2+6x-12=6\left(x^2+x-2\right)=\left[\Delta=9; x_1=-2 \vee x_2=1\right]=6(x+2)(x-1) \end{array}\right. =$$

$$\frac{2}{3(x-2)(x+2)}+\frac{4}{x-2}+\frac{5}{6(x+2)(x-1)}=\frac{2\cdot 2(x-1)}{3(x-2)(x+2)\cdot 2(x-1)}+\frac{4\cdot 3(x+2)\cdot 2(x-1)}{(x-2)\cdot 3(x+2)\cdot 2(x-1)}$$

$$+\frac{5(x-2)}{6(x+2)(x-1)\cdot(x-2)}=\frac{4x-4+24\left(x^2+2x-x-2\right)+5x-10}{6(x+2)(x-2)(x-1)}=\frac{4x-4+24x^2+24x-48+5x-10}{6(x+2)(x-2)(x-1)}$$

$$=\frac{24x^2+33x-62}{6(x+2)(x-2)(x-1)}$$, gdzie $x\neq -2 \wedge x\neq 2 \wedge x\neq 1$

b) $$\frac{2}{27x^3-8}+\frac{3}{2-3x}-\frac{x+1}{9x^2+6x+4}=\left\{\begin{array}{c} 27x^3-8=(3x)^3-2^3=(3x-2)\left(9x^2+6x+4\right) \\ 2-3x=-3x+2=-(3x-2) \\ 9x^2+6x+4=\{\Delta \prec 0\} \end{array}\right\}=$$

$$\frac{2}{(3x-2)\left(9x^2+6x+4\right)}-\frac{3}{3x-2}-\frac{x+1}{9x^2+6x+4}=\frac{2}{(3x-2)\left(9x^2+6x+4\right)}-\frac{3\cdot\left(9x^2+6x+4\right)}{(3x-2)\cdot\left(9x^2+6x+4\right)}$$

$$-\frac{2\cdot(3x-2)}{\left(9x^2+6x+4\right)\cdot(3x-2)}=\frac{2-27x^2-18x-12-6x+4}{(3x-2)\cdot\left(9x^2+6x+4\right)}=\frac{-27x^2-24x-6}{(3x-2)\left(9x^2+6x+4\right)}$$, gdzie $x\neq\frac{2}{3}$

Wykonaj działania sprowadzając ułamki do najmniejszego możliwego wspólnego mianownika

a) $\frac{3}{2x^2-50}-\frac{2}{2x^2-9x-5}+\frac{1}{1-4x^2}$

b) $\frac{4}{1-x^3}+\frac{1}{x^2-1}-2$

Zadanie 3. Przesuwamy hiperbolę dwa! (4 punkty)[39]

Podaj wzór funkcji, której wykres otrzymasz przesuwając wykres funkcji $y=f(x)$ o wektor $\vec{v}=[-1;-2]$ a następnie przekształcając go symetrycznie względem osi rzędnych, gdy:

a) $f(x)=-\frac{2}{x}$

b) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$

[38] Zadanie własne Anny Rybak
[39] Zadanie własne Anny Rybak

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Współ w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. Miejsca zerowe (4 punkty)[40]

Oblicz współrzędne punktów przecięcia się wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych.
Podaj miejsca zerowe tej funkcji

$$f(x)=\frac{x^2+7x+10}{2-3x-2x^2}$$

Zadanie 5. Pierwiastek wielomianu (3 punkty)[41]

Liczba $-\frac{1}{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu: $W(x)=2x^3-x^2+\left(2\sqrt{2}-5\right)x-2+\sqrt{2}$.
Znajdź pozostałe pierwiastki tego wielomianu.

Zadanie 6. Działania na wielomianach (3 punkty)[42]

Znajdź wielomian $W(x)$ i podaj jego stopień wiedząc, że:
podwojony iloraz $W(x)$ przez $P(x)=2x-3$ pomniejszony o kwadrat $T(x)=2x-1$ jest równy $Q(x)=x^5-5x^3+2x-1$

Zadanie 7. Prostopadłościany (4 punkty)[43]

Na pewno znasz wzór skróconego mnożenia: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
Możesz wyobrazić sobie sześcian o krawędzi $x=a+b$, czyli x^3 to oczywiście objętość takiego sześcianu. Sześcian ten można „złożyć” z ośmiu brył:

- Jednego sześcianu o krawędzi a
- Jednego sześcianu o krawędzi b
- Trzech prostopadłościanów o krawędziach a, a, b
- Trzech prostopadłościanów o krawędziach a, b, b

Zaznacz te bryły na rysunku sześcianu o krawędzi $x=a+b$. Jaka jest suma objętości tych brył?
Zaproponuj ilustrację graficzną wzorów: $(a+b)^2$ oraz $(a-b)^2$.

Zadanie 8. Praca w ogródku (4 punkty)[44]

Tomek i Darek maja skosić trawnik.
Pracując sam Tomek będzie pracował o jeden dzień dłużej, a Darek sześć razy dłużej niż gdyby kosili razem. Ile czasu trwało by koszenie trawnika przez obydwu chłopców jednocześnie?

[40] Zadanie własne Anny Rybak
[41] Zadanie własne Anny Rybak
[42] Zadanie własne Anny Rybak
[43] Zadanie własne Anny Rybak
[44] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 9. Jedzie pociąg (6 punktów)[45]

Dwa pociągi towarowe wyjechały z miast A i B oddalonych od siebie o 540 km.
Pociąg jadący z miasta A do miasta B wyjechał o godzinę wcześniej nią pociąg jadący z miasta B do miasta A i jechał z prędkością o 9 km/h mniejszą.
Pociągi te minęły się w połowie drogi.
Oblicz, z jakimi prędkościami jechały te pociągi.

Zadanie 10. Wielomiany (4 punkty)[46]

Wskaż, które z funkcji są wielomianami, odpowiedź uzasadnij. Dla każdego z wielomianów podaj jego stopień i wyraz wolny:

$P(x)=\sqrt{3}x^4-7x^5+\frac{1}{2}x-\left(x^3-2\right)^2$

$S(x)=3\sqrt{x}-x^2+2$

$K(x)=\frac{2}{x}-3x^3+5x-6$

$G(x)=\left(2x^2+3\right)^2-4x^4-12x^2$

Zadanie 11. Hiperbola czy nie hiperbola? (4 punkty)[47]

Naszkicuj wykres, podaj dziedzinę i zbiór wartości funkcji $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$

Zadanie 12. Czy umiesz odejmować? (3 punkty)[48]

Oblicz sumę współczynników wielomianu a następnie zapisz go w najprostszej postaci.
$P(x)=(W(x))^3-2(W(x))^2-\left(W(x)+6x^2\right)^2$, gdzie $W(x)=2x-1$

[45] Zaczerpnięto z [1]
[46] Zadanie własne Anny Rybak
[47] Zadanie własne Anny Rybak
[48] Zadanie własne Anny Rybak

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" – „Wiele mian i jedna hi…hiperbola"

Zadanie 1. W odwiedziny (5 punktów)

Ania wybiera się na urodziny do Oli.
Wyszła późno i jedną trzecią drogi szła z prędkością 5 km/godz.
Zorientowała się jednak, że przyjdzie za wcześnie i pozostałą część drogi szła z prędkością 3 km/godz. Jaka jest średnia prędkość Ani na całej drodze?

Zadanie 1. W odwiedziny (5 punktów)

	Pierwsza część	Druga część
Prędkość	5	3
Droga $s>0$	$\frac{1}{3}s$	$\frac{2}{3}s$
Czas $t>0$	t_1	t_2

$v=\frac{s}{t}$, więc $t=\frac{s}{v}$

Szukana prędkość $v_{śr}=\frac{s}{t_1+t_2}$. Po podstawieniu mamy:

$$v_{śr}=\frac{s}{\frac{\frac{1}{3}s}{5}+\frac{\frac{2}{3}s}{3}}=\frac{s}{\frac{1}{15}s+\frac{2}{9}s}=\frac{s}{\frac{13}{45}s}=\frac{45}{13}=3\frac{6}{13}$$

Odpowiedź: Średnia prędkość Ani na całej drodze to $3\frac{6}{13}$ km/godz.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania	1
B	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
C	Zapisanie średniej prędkości na całej trasie	1
D	Wykonanie przekształceń	1
E	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercice 1. At the visit (5 points)

	First part	Second part
speed	5	3
Distance $s>0$	$\frac{1}{3}s$	$\frac{2}{3}s$
Time $t>0$	t_1	t_2

$v=\frac{s}{t}$ so, $t=\frac{s}{v}$ The seeked speed $v_{śr}=\frac{s}{t_1+t_2}$.

After substitution we have:

$$v_{śr}=\frac{s}{\frac{\frac{1}{3}s}{5}+\frac{\frac{2}{3}s}{3}}=\frac{s}{\frac{1}{15}s+\frac{2}{9}s}=\frac{s}{\frac{13}{45}s}=\frac{45}{13}=3\frac{6}{13}$$

Answer: The average speed is $3\frac{6}{13}$ km/hour.

Scores

Action	Stages of solution	Number of points
A	Translating of exercise's text	1
B	Notations and assumptions	1
C	Counting the average speed on the whole distance	1
D	Transforming of translations	1
E	Giving the solution in English	1

Exercice 1. En visite (5 points)

	Première moitié	Deuxième moitié
Vitesse	5	3
Parcours $s>0$	$\frac{1}{3}s$	$\frac{2}{3}s$
Temps $t>0$	t_1	t_2

$v=\frac{s}{t}$, donc $t=\frac{s}{v}$

La vitesse recherchée $v=\frac{s}{t_1+t_2}$. Après avoir substitué nous avons $v_{moyenne}=\frac{s}{\frac{\frac{1}{3}s}{5}+\frac{\frac{2}{3}s}{3}}=\frac{s}{\frac{1}{15}s+\frac{2}{9}s}=\frac{s}{\frac{13}{45}s}=\frac{45}{13}=3\frac{6}{13}$

Réponse: La vitesse moyenne d'Anne sur tout le parcours est de $3\frac{6}{13}$ km/h.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction de l'exercice	1
B	Introduction des notations mathématiques, formulation des hypothèses	1
C	Détermination d'une vitesse moyenne sur tout le parcours	1
D	Exécution des transformations	1
E	Réponse et sa traduction en langue étrangère	1

Tarea 1. Con una visita (5 puntos)

	Primera mitad	Segunda mitad
Velocidad	5	3
Camino $s>0$	$\frac{1}{3}s$	$\frac{2}{3}s$
Tempo $t>0$	t_1	t_2

$v=\frac{s}{t}$ entonces $t=\frac{s}{v}$

La velocidad buscada: $v_{śr}=\frac{s}{t_1+t_2}$.

Después de haber sustituido tenemos:

$$v_{śr}=\frac{s}{\frac{\frac{1}{3}s}{5}+\frac{\frac{2}{3}s}{3}}=\frac{s}{\frac{1}{15}s+\frac{2}{9}s}=\frac{s}{\frac{13}{45}s}=\frac{45}{13}=3\frac{6}{13}$$

Respuesta: La velocidad media de Anita en todo el camino es $3\frac{6}{13}$ km/h.

Puntuación

Numerro de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción de la tarea	1
B	Introducción de las marcas, apuntación de la hipótesis	1
C	Inscripción de la velocidad media en todo el camino	1
D	Ejecución de las transformaciones	1
E	Presentación de la respuesta y su traducción en la lengua extranjera	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Esercizio 1. La visita (5 punti)

	Prima parte	Seconda parte
Velocità	5	3
Strada $s > 0$	$\frac{1}{3}s$	$\frac{2}{3}s$
Tempo $t > 0$	t_1	t_2

$v = \frac{s}{t}$ dunque $t = \frac{s}{v}$

Velocità cercata $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2}$. Dopo la sostituzione abbiamo:

$$v_{śr} = \frac{s}{\frac{\frac{1}{3}s}{5} + \frac{\frac{2}{3}s}{3}} = \frac{s}{\frac{1}{15}s + \frac{2}{9}s} = \frac{s}{\frac{13}{45}s} = \frac{45}{13} = 3\frac{6}{13}$$

Risposta: La velocità media di Ania su tutta la strada è di $3\frac{6}{13}$ km/h.

Pointage

Numéro de l'activité	Tappe della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione dell'esercizio	1
B	Introduzione delle indicazioni, annotazione delle premesse	1
C	Annotazione della velocità media su tutta la strada	1
D	Esecuzione dei convertimenti	1
E	Soluzione con la traduzione in lingua straniera	1

Aufgabe 1. Zu Besuch (5 Punkte)

	Erster Teil	Zweiter Teil
Geschwindigkeit	5	3
Weg $s > 0$	$\frac{1}{3}s$	$\frac{2}{3}s$
Zeit $t > 0$	t_1	t_2

$v = \frac{s}{t}$ also $t = \frac{s}{v}$

Die gesuchte Geschwindigkeit $v_{śr} = \frac{s}{t_1 + t_2}$.

Nach der Substitution haben wir:

$$v_{śr} = \frac{s}{\frac{\frac{1}{3}s}{5} + \frac{\frac{2}{3}s}{3}} = \frac{s}{\frac{1}{15}s + \frac{2}{9}s} = \frac{s}{\frac{13}{45}s} = \frac{45}{13} = 3\frac{6}{13}$$

Antwort: Anias Durchschnittsgeschwindigkeit auf dem ganzen Weg ist $3\frac{6}{13}$ km/h.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe	1
B	Einführung der Bezeichnungen, Niederschreiben von Voraussetzungen	1
C	Niederschreiben der Durchschnittsgeschwindigkeit auf der ganzen Strecke	1
D	Ausführung von Umformungen	1
E	Antwortangabe in einer fremden Sprache	1

Zadanie 2. Działania na ułamkach (6 punktów) [49]

a) $$\frac{3}{2x^2-50}-\frac{2}{2x^2-9x-5}+\frac{1}{1-4x^2}=\left\{\begin{array}{c} 2x^2-50=2(x^2-25)=2(x-5)(x+5) \\ 2x^2-9x-5=\left\{\Delta=121, x_1=5 \vee x_2=1\frac{1}{2}\right\}=(x-5)(2x+1) \\ 1-4x^2=-(4x^2-1)=-(2x+1)(2x-1) \end{array}\right\}$$

$$=\frac{3}{2(x+5)(x-5)}-\frac{2}{(x-5)(2x+1)}-\frac{1}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{3(2x+1)(2x-1)-4(x+5)(2x-1)-2(x+5)(x-5)}{2(x+5)(x-5)(2x+1)(2x-1)}=$$

$$\frac{2x^2-36x+67}{2(x+5)(x-5)(2x+1)(2x-1)}$$, gdzie $x\neq 5 \wedge x\neq -5 \wedge x\neq \frac{1}{2} \wedge x\neq -\frac{1}{2}$

b) $$\frac{4}{1-x^3}+\frac{1}{x^2-1}-2=\left\{\begin{array}{c} 1-x^3=(1-x)(1+x+x^2) \\ x^2-1=-(1+x)(1-x) \end{array}\right\}=\frac{4}{(1-x)(1+x+x^2)}-\frac{1}{(1+x)(1-x)}-\frac{2}{1}$$

$$=\frac{4(1+x)-(1+x+x^2)-2(1-x)(1+x+x^2)(1+x)}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)}=\frac{2x^4+2x^3-x^2+x+1}{(1-x)(1+x+x^2)(1+x)}$$, gdzie

$x\neq 1 \wedge x\neq -1$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	a) Rozkład każdego z mianowników na czynniki, podanie założeń	1
B	Sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika	1
C	Wykonanie działań na licznikach ułamków	1
D	b) Rozkład każdego z mianowników na czynniki, podanie założeń	1
E	Sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika	1
F	Wykonanie działań na licznikach ułamków	1

Zadanie 3. Przesuwamy hiperbolę dwa! (4 punkty) [50]

a) $$f(x)=-\frac{2}{x}\xrightarrow{\vec{v}=[-1;-2]}y=-\frac{2}{x+1}-2\xrightarrow{S_{OY}}y=-\frac{2}{-x+1}-2=\frac{2}{x-1}-2$$

b) $$f(x)=\frac{x+1}{x-2}\xrightarrow{\vec{v}=[-1;-2]}y=\frac{x+2}{x-1}-2\xrightarrow{S_{OY}}y=\frac{-x+2}{-x-1}-2=\frac{-x-4}{x+1}$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	a) Zapisanie wzoru funkcji po przesunięciu	1
B	Zapisanie wzoru funkcji po symetrii	1
C	b) Zapisanie wzoru funkcji po przesunięciu	1
D	Zapisanie wzoru funkcji po symetrii	1

[49] Zadanie własne Anny Rybak
[50] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 4. Miejsca zerowe (4 punkty)[51]

$-2x^2-3x+2\neq 0;\Delta=25;x_1=\frac{1}{2}\vee x_2=-2$, więc $D=R\setminus\left\{\frac{1}{2};-2\right\}$

Punkt przecięcia z osią rzędnych: $f(0)=\frac{10}{2}=5$, więc $P_1=(0;5)$

Punkt przecięcia z osią odciętych:

$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^2+7x+10}{2-3x-2x^2}=0\Leftrightarrow x^2+7x+10=0$; $\Delta=9;x_1=-5;x_2=-2\notin D$, więc $P_2=(-5;0)$.

Miejsce zerowe: $x=-5$.

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie współrzędnych P_1	1
B	Rozwiązanie równania $f(x)=0$ z uwzględnieniem dziedziny	1
C	Zapisanie współrzędnych P_2	1
D	Podanie miejsca zerowego	1

Zadanie 5. Pierwiastek wielomianu (3 punkty)

$\left(2x^3-x^2+\left(2\sqrt{2}-5\right)x-2+\sqrt{2}\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)=2x^2-2x+2\sqrt{2}-4$ (Uczniowie wykonują dzielenie pisemnie lub schematem Hornera, mogą również skorzystać z równości wielomianów).

$2x^2-2x+2\sqrt{2}-4=0;\Delta=36-16\sqrt{2}=\left(4\sqrt{2}-2\right)^2$ więc pierwiastki to $x_1=\sqrt{2}\vee x_2=1-\sqrt{2}$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie dzielenia	1
B	Obliczenie pozostałych pierwiastków	1
C	Wykorzystanie równości $36-16\sqrt{2}=\left(4\sqrt{2}-2\right)^2$ do zapisania rozwiązań w najprostszej postaci	1

Zadanie 6. Działania na wielomianach (3 punkty)

$\frac{|2W(x)}{P(x)}-(T(x))^2=Q(x)$. Po podstawieniu, wykonaniu redukcji i uporządkowaniu otrzymujemy wielomian stopnia szóstego: $W(x)=x^6-1{,}5x^5-5x^4+11{,}5x^3-8x^2+3x$

Punktacja

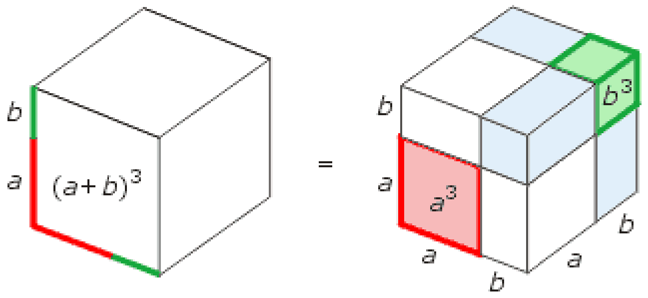
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie treści zadania jako działania na wielomianach	1
B	Wykonanie działań, redukcja wyrażeń podobnych	1
C	Uporządkowanie wielomianu, podanie jego stopnia	1

[51] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 7. Prostopadłościany (4 punkty)

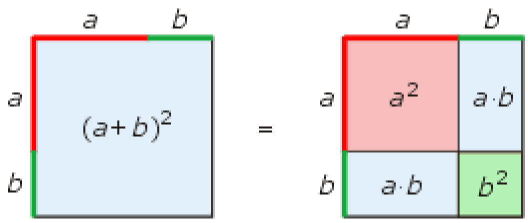
Uwaga: W klasach realizujących program na poziomie podstawowym, nauczyciel może dołączyć „rysunek" sześcianu, jednak kolejne bryły uczniowie zaznaczają samodzielnie. Ilustracja wzoru na kwadrat sumy, to prostokąt o boku $x = a + b$ podzielony na dwa kwadraty i dwa prostokąty, zaś kwadrat różnicy jest przedstawiony na rysunkach.[52]

Graficzna interpretacja wzoru na sześcian sumy:



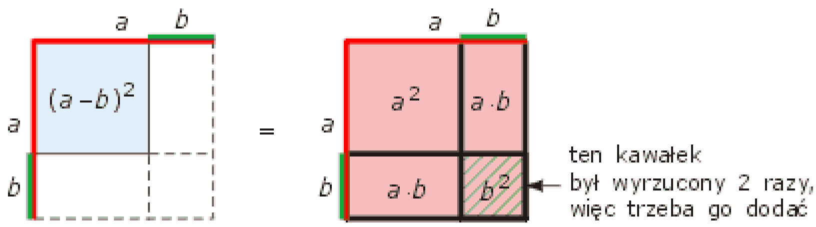
$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3b^2a$$

Kwadrat sumy - uzasadnienie wzoru przez rysunek:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Kwadrat różnicy - uzasadnienie wzoru przez rysunek:



$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zaznaczenie na rysunku sześcianu brył, podanie wniosku	1
B	Zaproponowanie ilustracji wzoru na kwadrat sumy	1
C	Zaproponowanie ilustracji wzoru na kwadrat różnicy	2

[52] ilustracje zaczerpnięto ze strony http://www.matematyka.wroc.pl/book/wzory-skr%C3%B3conego-mno%C5%BCenia

Zadanie 8. Praca w ogródku (4 punkty)

x - czas, w jakim chłopcy kosiliby razem,

$x>0$ $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{6x}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1}=\frac{5}{6x} \Leftrightarrow 6x=5x+5 \Leftrightarrow x=5$ - zgodne z założeniem.

Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenie niewiadomych, podanie założeń	1
B	Zapisanie równania wynikającego z treści zadania	1
C	Rozwiązanie równania	1
D	Sprawdzenie rozwiązania z założeniem, podanie odpowiedzi	1

Zadanie 9. Jedzie pociąg (6 punktów)

	Pociąg z A do B	Pociąg z B do A
Prędkość $y>0$	$y-9$	y
Droga	270	270
Czas $x>0$	$x+1$	x

$$\begin{cases} y-9=\frac{270}{x+1} \\ y=\frac{270}{x} \end{cases},$$

po podstawieniu $\frac{270}{x}-9=\frac{270}{x+1}$, przekształcając otrzymujemy równanie kwadratowe:

$x^2+x-30=0$, którego rozwiązaniami są liczby: $x_1=5$; $x_2=-6$,
gdzie drugie rozwiązanie jest sprzeczne z założeniem.
Otrzymujemy: $y=54$, $y-9=45$

Odpowiedź: Pociągi jechały z prędkościami: $54\frac{km}{h}$ oraz $45\frac{km}{h}$

Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie założeń	1
B	Zapisanie układu równań wynikającego z treści zadania	2
C	Rozwiązanie układu zgodnie z założeniami	2
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 10. Wielomiany (4 punkty)

$P(x)$ jest wielomianem, bo każdy z wykładników potęg zmiennej jest liczbą naturalną. Jest to wielomian stopnia szóstego o wyrazie wolnym 4.
$S(x)$ nie jest wielomianem, zmienna występuje w potędze o wykładniku nie będącym liczbą naturalną, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.
$K(x)$ nie jest wielomianem, zmienna występuje w potędze o wykładniku nie będącym liczbą naturalną, $\frac{2}{x} = 2x^{-1}$
$G(x)$ jest wielomianem, bo każdy z wykładników potęg zmiennej jest liczbą naturalną. Jest to wielomian stopnia zerowego o wyrazie wolnym 9.

Punktacja

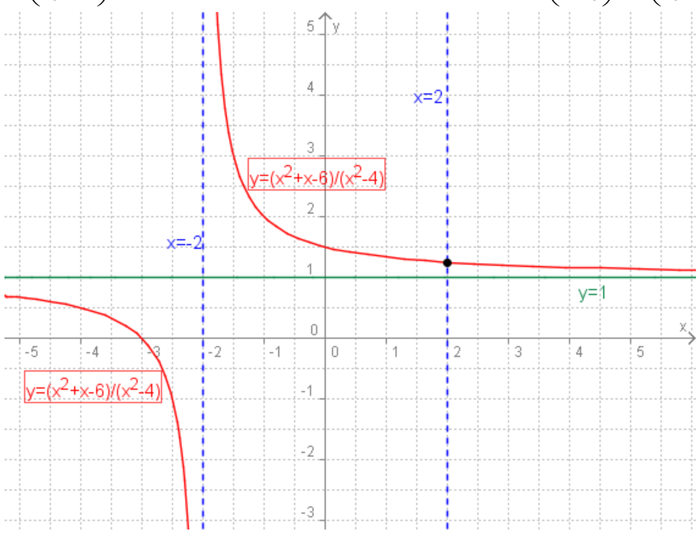
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Odpowiedź dotycząca wielomianu $P(x)$	1
B	Odpowiedź dotycząca wielomianu $S(x)$	1
C	Odpowiedź dotycząca wielomianu $K(x)$	1
D	Odpowiedź dotycząca wielomianu $G(x)$	1

Zadanie 11. Hiperbola czy nie hiperbola? (4 punkty)

$$f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2} = \frac{1}{x+2}+1,$$

gdzie $x \in (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$, czyli dziedzina $D = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;\infty)$

oraz $y \in (-\infty;1) \cup \left(1;\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4};\infty\right)$, zatem zbiór wartości $Y = (-\infty;1) \cup \left(1;\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4};\infty\right)$



Punktacja

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Uproszczenie wzoru funkcji	1
B	Przekształcenie wzoru do postaci kanonicznej	1
C	Naszkicowanie wykresu	1
D	Podanie dziedziny i zbioru wartości	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 12. Czy umiesz odejmować? (3 punkty)

Suma współczynników to $P(1) = (W(1))^3 - 2(W(1))^2 - \left(W(1) + 6 \cdot 1^2\right)^2 = -50$

Po wykonaniu działań i uporządkowaniu otrzymujemy: $P(x) = -36x^4 - 16x^3 - 12x^2 + 18x - 4$

Punktacja:

Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie sumy współczynników	1
B	Zastosowanie wzorów skróconego mnożenia	1
C	Redukcja wyrażeń podobnych, uporządkowanie wielomianów	1

Pakiet M-2.3 „Nieodparty urok ciągów; strzeż się pociągu do …”

I. Treści merytoryczne:

- definicja ciągu, rodzaje ciągów;
- różne sposoby zadawania ciągów(wzór ogólny i wzór rekurencyjny);
- podstawowe własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego;
- suma częściowa ciągu arytmetycznego i geometrycznego.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie pojęcia ciągu;
- rozróżnianie ciągów arytmetycznych i geometrycznych w konkretnych sytuacjach problemowych;
- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię;
- korzystanie z definicji ciągu arytmetycznego i geometrycznego przy rozwiązywaniu zadań praktycznych;
- obliczanie sumy kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
- utrwalanie pojęć związanych z pojęciem ciągu.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających"

[1] Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003

[2] Stachowski E., Szurek M., *I Ty zostaniesz Euklidesem. Zbiór zadań nie tylko dla Asa do klasy drugiej szkół średnich*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna Adam, Warszawa 1999

[3] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, WSiP, Warszawa 1994

[4] Gazeta Zachodnia Matura 10 maja 2001

[5] Kujon Polski, Matura, Matematyka, Gazeta Wyborcza, 12 maja 2006

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem"

[1] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G., *Matematyka 2, Podręcznik dla Liceum Ogólnokształcącego. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym* ,Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2003

[2] Stachowski E., Szurek M., *I Ty zostaniesz Euklidesem. Zbiór zadań nie tylko dla Asa do klasy drugiej szkół średnich*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna Adam, Warszawa 1999

[3] Rams S., Rams T., *Matematyka bez granic, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003

[4] Gazeta Lubuska 21 marca 2007

[5] *Matematyka, Poziom podstawowy*, Przykładowy zestaw zadań nr 2 CKE, marzec rok 2008

[6] *Próbny pisemny egzamin dojrzałości z matematyki, typy szkoły: licea zawodowe i technika 4-letnie o 10 h cyklu nauczania matematyki*, Poznań, 7 marca 2000

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

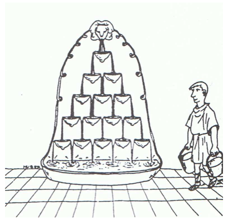
Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" - „Nieodparty urok ciągów; strzeż się pociągu do …"

Bonus – na rozgrzewkę[53]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Bonus to warm-up Roman fountain (5points)



The water is spilled in all basins of a fountain shown on the picture below. On each level the half of water pouring in the basin is poured out to two basins which are directly located under it.
During a day exactly one cubic meter is pouring out from the highest basin.

Bonus pour l'échauffement Une fontaine romaine (5 puntos)

Dans tous les bassins de la fontaine présentée sur le dessin, l'eau coule. A chaque niveau, la moitié d'eau versée dans un bassin est déversée dans chacun des deux bassins inférieurs. En une journée, un mètre cube d'eau est déversé du bassin le plus haut. Exprime en fraction d'un mètre cube d'eau, la quantité d'eau déversée de chaque bassin de la fontaine.

Suplemento para calentarse La Fuente Romana (5 points)

En todos los estanques de la fuente presentada en el dibujo transvasa agua. En cada nivel, la mitad de agua entrando al estanque se trasvasa al cada de dos estanques que se encuentran directamente debajo de él. Durante un día, un metro cúbico de agua trasvasa del estanque más alto. Traduce como una fracción del metro cúbico de agua esta cantidad de agua que trasvasa de cada estanque de la fuente.

Abbuono per riscaldarsi Fontana Romana (5 punti)

Nelle tutte le vasche della fontana dimostrata sul disegno passa l'acqua. Su ogni livello la metà dell'acqua cade nelle due vasche che Si trovano direttamente sotto. Durante un giorno dalla vasca più alta esce un metro cubo d'acqua.

Bonus zum Aufwärmen Römischer Springbrunnen (5 Punkte)

In allen Becken eines in der Abbildung dargestellten Springbrunnens läuft das Wasser über. Auf jeder Ebene fließt die Hälfte von dem in das Becken hineinfließenden Wasser in jeden von zwei sich unmittelbar darunter befundenen Becken aus. Binnen einem Tag fließt ein Kubikmeter Wasser aus dem obersten Becken aus.

[53] Zaczerpnięto z [1] – zadanie 2 strona 8

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1. Plus - minus (6 punktów)[54]

Oblicz sumę ułamków:

a) $\frac{3}{1\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{3}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{3}{301\cdot 304}=$

b) $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{4}{281\cdot 285}=$

Zadanie 2. Konkurs plastyczny (5 punktów)

W konkursie plastycznym przyznano nagrody na łączną kwotę 12400zł. Najwyższa nagroda wynosiła 6400zł, a najniższa 400zł. Wiadomo ponadto, że iloraz wartości dwóch dowolnych kolejnych nagród był taki sam. Ile nagród przyznano?

Zadanie 3. Wpasuj się w konwencję… (2 punkty)

Zaproponuj wzór na n-ty wyraz ciągu, którego kolejnymi wyrazami są:

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6},\ldots$

b) $4, 2, 4, 2, 4, 2,\ldots$

Zadanie 4. Olimpiada (5 punktów)[55]

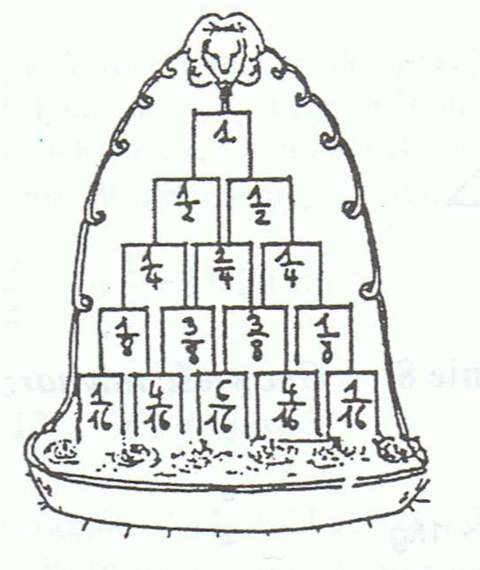
Drużyna polskich olimpijczyków podczas igrzysk olimpijskich w Moskwie zdobyła 32 medale. Z zestawienia liczby medali złotych, srebrnych i brązowych, w podanej kolejności, odczytanego z tabeli wynika, że jeżeli liczbę medali srebrnych zmniejszymy o 5, a pozostałe pozostawimy bez zmiany, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego. Ponadto liczba medali złotych jest pięć razy mniejsza od liczby medali brązowych. Wyznacz liczbę medali złotych, srebrnych i brązowych zdobytych przez polskich olimpijczyków na tych igrzyskach.

[54] Zaczerpnięto z [2]
[55] Zaczerpnięto z [4]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” - „Nieodparty urok ciągów; strzeż się pociągu do …”

Bonus na rozgrzewkę. Rzymska fontanna [56] (5 punktów)

We wszystkich basenach fontanny przedstawionej na rysunku przelewa się woda. Na każdym poziomie połowa wody wlewającej się do basenu wylewa się do każdego z dwóch basenów znajdujących się bezpośrednio pod nim. W ciągu dnia jeden metr sześcienny wody wylewa się z najwyższego basenu.
Wyraź, jako ułamek metra sześciennego wody, tę ilość wody, która wylewa się z każdego basenu fontanny.
Rozwiązanie:



Rysunek 1 – ***ilustracja rozwiązania we wszystkich wersjach językowych***[57]

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Rozłożenie ułamków na poszczególne poziomy fontanny	2
C	Odpowiedź pisemna w języku obcym	1

Bonus to warm-up. Roman fountain (5points)

Express the water’s amount pouring out from each basin as the fraction of a cubic meter.

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation into Polish	2
B	Assigning the fractions to each basin for each level	2
C	Writing the answer in English	1

[56] Zaczerpnięto z [1] – zadanie 2 strona 8
[57] Rysunek – ilustrujący rozwiązanie jest taki sam we wszystkich wersjach językowych

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bonus pour l'échauffement Une fontaine romaine (5 points)

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en polonais	2
B	Disposition des fractions sur les niveaux successifs de la fontaine	2
C	Réponse écrite en langue étrangère	1

Suplemento para calentarse . La fuente romana (5 puntos)

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución	Puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Repartición de las fracciones en niveles respectivos de la fuente	2
C	Respuesta escrita en la lengua extranjera	1

Abbuono per riscaldarsi Fontana Romana (5 punti)

Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione in polacco	2
B	Disposizione delle frazioni per ogni livello della fontana	2
C	Risposta scritta in lingua straniera	1

Bonus zum Aufwärmen Römischer Springbrunnen (5 Punkte)

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	2
B	Umlegung der Bruchzahlen auf einzelne Springbrunnenebenen	2
C	Schriftliche Antwort in fremder Sprache	1

Zadanie 1. Plus- minus *(6 punktów)*

Sumę można obliczyć następująco:

a) $$\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\ldots+\frac{3}{301\cdot304}=\frac{4-1}{4\cdot1}+\frac{7-4}{7\cdot4}+\frac{10-7}{10\cdot7}+\ldots+\frac{304-301}{304\cdot301}+\frac{307-304}{307\cdot304}=$$
$$\frac{4}{4\cdot1}-\frac{1}{4\cdot1}+\frac{7}{7\cdot4}-\frac{4}{7\cdot4}+\frac{10}{10\cdot7}-\frac{7}{10\cdot7}+\ldots+\frac{304}{304\cdot301}-\frac{301}{304\cdot301}+\frac{307}{307\cdot304}-\frac{304}{307\cdot304}=$$
$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{301}-\frac{1}{304}+\frac{1}{304}-\frac{1}{307}=1-\frac{1}{307}=\frac{306}{307}$$

b) $$\frac{4}{1\cdot5}+\frac{4}{5\cdot9}+\frac{4}{9\cdot13}+\ldots+\frac{4}{281\cdot285}=\frac{5-1}{5\cdot1}+\frac{9-5}{9\cdot5}+\frac{13-9}{13\cdot9}+\ldots+\frac{281-277}{281\cdot277}+\frac{285-281}{285\cdot281}=$$
$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{277}-\frac{1}{281}+\frac{1}{281}-\frac{1}{285}=1-\frac{1}{285}=\frac{284}{285}$$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punkty
A	Zapisanie ułamków w postaci różnic a)	1
B	Redukcja a)	1
C	Zapisanie wyniku a)	1
D	Zapisanie ułamków w postaci różnic b)	1
E	Redukcja b)	1
F	Zapisanie wyniku b)	1

Zadanie 2. Konkurs plastyczny (5 punktów)

Mamy ciąg geometryczny. Oznaczmy: $a_1=6400$, $a_n=400$, $S_n=12400$

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^n}{1-q}=\frac{a_1-a_1q^{n-1}\cdot q}{1-q}=\frac{a_1-a_n\cdot q}{1-q}=\frac{6400-400q}{1-q}$$

Mamy, więc: $\frac{6400-400q}{1-q}=12400$, czyli: $6400-400q=12400-12400q$, zatem $12000q=6000$,

stąd $q=\frac{1}{2}$. Następnie: $a_n=6400\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=400$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{16}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$, zatem $n=5$

Odpowiedź: Przyznano 5 nagród.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punkty
A	Rozpoznanie ciągu geometrycznego i przyjęcie poprawnych oznaczeń	1
B	Zapisanie związku na sumę częściową	1
C	Wyznaczenie ilorazu ciągu	2
D	Wyznaczenie ilości nagród	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3. Wpasuj się w konwencję… (2 punkty)

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$

b) $a_n = 3 + (-1)^{n+1}$, gdzie $n \geq 1$, $n \in N$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Podanie wzoru ogólnego w a)	1
B	Podanie wzoru ogólnego w b)	1

Zadanie 4. Olimpiada (5 punktów)

Oznaczmy:
x - liczba medali złotych
y - liczba medali srebrnych,
32-(x+y)- liczba medali brązowych
$a_1 = x,\ a_2 = y,\ a_3 = 32 - (x+y)$ to kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego

Z warunków zadania mamy: $\begin{cases} 5x = 32 - (x+y) \\ 2(y-5) = x + 32 - (x+y) \end{cases}$

Otrzymujemy: $\begin{cases} x = 3 \\ y = 14 \end{cases}$

Odpowiedź:
Polacy na tych igrzyskach zdobyli: 3 medale złote, 14 srebrnych i 15 brązowych medali.

Punktacja

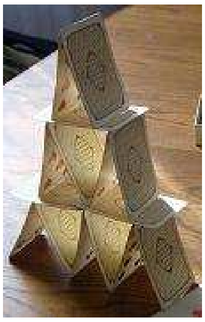
Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punkty
A	Oznaczenie ilości poszczególnych medali i zapis związków na ciąg arytmetyczny	1
B	Zbudowanie pełnego układu równań	2
C	Wyznaczenie ilości medali poszczególnych kolorów	2

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" – „Nieodparty urok ciągów; strzeż się pociągu do …"

W tym zadaniu[58] należy[59]:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercise 1. High uphill (6 points)



Wiktor is very conscientious and patient. He is going to built the card house just like the picture shows. He wants to built possibly the greatest house using all his cards. The boy has got 5 decks of cards where every deck has 52 cards. Unfortunately, the building plummeted before the project finishing. How many floors (levels) will the Wiktor's building have in the case the project's success?

Exercice 1.Très En Haut (6 points)

Victor est très consciencieux et patient. Il prévoit de faire un chateau de cartes comme sur le dessin. Cela doit être une grande maison et pour la construire Victor utilisera toutes les cartes qu'il possède. Le garçon a compté que ses 5 jeux de cartes de 52 cartes chacun, c'est exactement le nombre qu'il lui faut pour réaliser son projet. Malheureusement, avant que Victor ait terminé la construction, elle s'est écroulée. Combien d'étages (niveaux) devait avoir le chateau de cartes que Victor avait prévu de construire?

Tarea 1. Subiendo arriba (6 puntos)

Victor es muy concienzudo y paciente.Tiene idea de construir una casita de naipes de la misma manera que presenta el dibujo. Será una casita grande construida utilizando todos los naipes que tiene Victor. El chico ha calculado que sus 5 juegos de 52 naipes cada uno, son exactamente tantos naipes que necesita él para realizar su proyecto. Desgraciadamente, antes de que Victor termine su construcción, ella se ha roto. ¿Cuántos pisos (niveles)debía tener la casita,que intentaba de construir Victor?

Esercizio 1. Sempre Più Alto (6 punti)

Wiktor è molto scrupoloso e paziente. Lui vuole costruire un castello di carte, di tale modo qual'è dimostrato sul disegno. Dece essere un castello grandissimo per cui, bisogna usare tutte le carte da gioco che ha Wiktor. Il ragazzo ha calcolato che i suoi 5 mazzi di 52 carte ogniono fanno esattamete il numero necessario per realizzare il progetto. Purtroppo, prima di finire il progetto di Wiktor, la costruzione ha caduto a pezzi. *Quanti piani (livelli) doveva avere il castello di Wiktor?*

[58] Zaczerpnięto z [1] - zadanie 3, strona 133
[59] Zdjęcia wykonała Iwona Derendarz

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Aufgabe 1. Hoch hinaus (6 Punkte)

Viktor ist sehr gewissenhaft und geduldig. Er beabsichtigt, ein Kartenhaus zu bauen, in der Art wie es in der Abbildung dargestellt wird. Es soll ein großes Haus werden, zu dessen Entstehung alle Spielkarten benutzt werden, die Viktor hat. Der Junge hat ausgerechnet, dass seine 5 Kartenspiele mit jeweils 52 Karten genau so viel sind, wie man zur Verwirklichung des Projekts braucht. Leider, ehe er mit der Konstruktion fertig wurde, fiel sein Bauwerk auseinander.
Wie viele Stockwerke (Etagen) sollte das Kartenhaus haben, das sich Viktor bauen wollte?

Zadanie 2. Wpasuj się w konwencję… (3 punkty)[60]

Zaproponuj wzór na n-ty wyraz ciągu, którego kolejnymi wyrazami są:

a) $-8,\ -1,\ 0,\ 1,\ 8,\ 27,\ 64,...$

b) $2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 3, 3, 2,...$

Wskazówka: zbadaj najpierw ciąg $a_n = \frac{1+(-1)^m}{2}$, gdzie $m = \frac{n^2(n+1)}{2}$ $n \geq 1,\ \ n \in N$

Zadanie 3. A może jednak…? (3 punkty)[61]

Wykaż, że żaden z wyrazów ciągu $a_n = \frac{n^3+2n^2+n-3}{n^2+5}$ nie równa się 2.

Zadanie 4. Cofanka (2 punkty)[62]

Oblicz a_1, jeżeli wiesz, że:

a) $a_{2010} = 2010$ oraz $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$

b) $a_5 = 29$ oraz $a_{n+1} = 2a_n + 3$ dla $n \geq 1$

Zadanie 5. Sito (4 punkty)[63]

Ciąg arytmetyczny określony jest wzorem $a_n = \frac{1}{4}(3n+1)$, dla $n \geq 1$

a) Sprawdź, którym wyrazem ciągu (a_n) jest liczba $37\frac{3}{4}$.

b) Wśród pięćdziesięciu początkowych wyrazów ciągu (a_n) są wyrazy będące liczbami całkowitymi. Oblicz sumę wszystkich tych wyrazów.

---

[60] Zaczerpnięto z [2] - zadania 5.4.8, 5.5.8 strona 134
[61] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 5.10.3 strona 136
[62] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 5.24 strona 140
[63] Zaczerpnięto z [3]

Zadanie 6. Uogólnienie (4 punkty)[64]

a) Oblicz: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}}=$

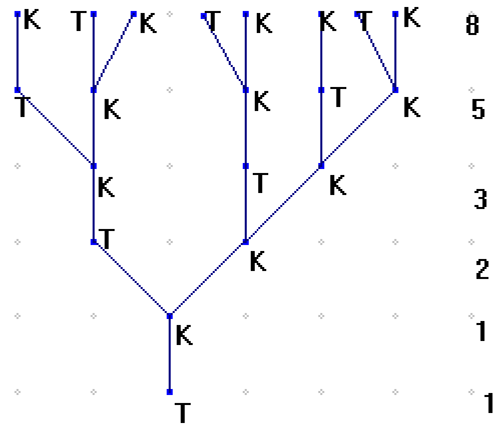
b) Rozwiąż równanie: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=10$

Zadanie 7. Truteń (4 punkty)[65]

Samiec pszczoły, truteń, rodzi się z niezapłodnionego jaja samicy (królowej)- nie ma ojca. Natomiast królowa ma dwoje rodziców. Rysunek[66] obok przedstawia drzewo genealogiczne trutnia -(K oznacza matkę, T - ojca).
Naszkicuj dwa poprzednie pokolenia przodków trutnia i sprawdź, że liczba przodków w kolejnych pokoleniach równa się kolejnym liczbom Fibonacciego:

$$f_n=\begin{cases} f_1=1, \quad f_2=1 \\ f_{n+2}=f_n+f_{n+1} \end{cases}$$

Wypisz 15 kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego.



Zadanie 8. Groch z kapustą (5 punktów)[67]

Długości a, b, c boków trójkąta prostokątnego, którego obwód jest równy 24 tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz:

a) Długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego.

b) Wartość wyrażenia $\sin\alpha+\sin\beta-2\sin\alpha\sin\beta$, gdzie α, β są miarami kątów ostrych trójkąta.

Zadanie 9. Piętruski (4 punkty)[68]

Uprość wzór na ogólny wyraz ciągu. Oblicz a_5, $n\geq 1$, $n\in N$

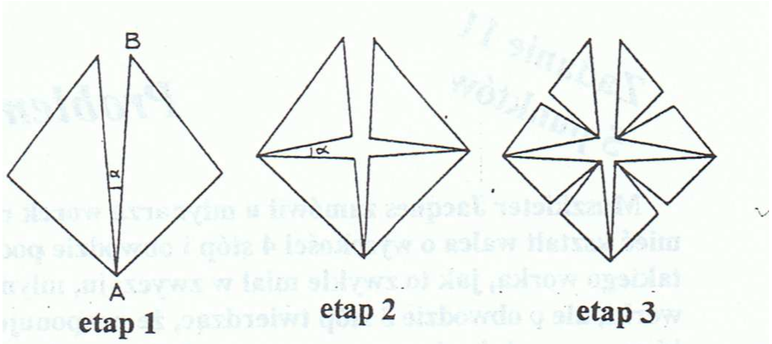
a) $a_n=\dfrac{2-\dfrac{2}{n^3+1}}{1-\dfrac{n-1}{n+1}}$

b) $a_n=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}}$

[64] Zaczerpnięto z [4]
[65] Zaczerpnięto z [5] - zadanie 3, strona 182
[66] Rysunek wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri
[67] Zaczerpnięto z [6]
[68] Zaczerpnięto z [2[- zadania 5.7.3, 5.7.4 strona 136

Zadanie 10. Latający fraktal (6 punktów)[69]

Fraktalem nazywamy figurę geometryczną, którą otrzymujemy powtarzając te same czynności.
Na rysunku[70] pokazano trzy pierwsze etapy konstrukcji „latające fraktale”. Narysowane tam trójkąty są przystające, a dwa kolejne mają tylko jeden wspólny wierzchołek.

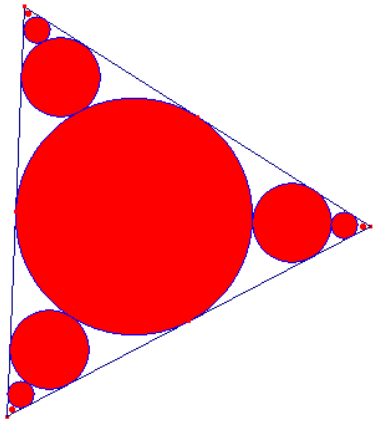


Przyjmijmy, że $\alpha = 12^o$ i $|AB| = 15cm$.

Po obliczeniu kątów trójkątów zbuduj figurę, jaką otrzymamy w następnym etapie.

Zadanie 11. Ornamenty (6 punktów)[71]

W trójkąt równoboczny o boku 1m wpisano koła (dokładnie10 kół), jak na rysunku[72]:



Oblicz pole zacieniowanej figury.

Zadanie 12. Łańcuszek szczęścia (3 punkty)[73]

Co kilka lat obiega Polskę „łańcuszek szczęścia”.
Przybiera on różne formy. Jedna z najprostszych jest następująca. Dostajesz pocztą listę np. sześciu osób. Pierwszej osobie wysyłasz np.10zł i skreślasz jej nazwisko z listy, a na końcu dopisujesz swoje. Tak sporządzoną listę wysyłasz do sześciu innych osób, z których każda ma powtórzyć Twoją procedurę. W ten sposób Twoje nazwisko znajdzie się na przedostatnim miejscu na 6 listach.

W następnym etapie na drugim od końca na 36 listach, wreszcie na $6^5 = 7766$listach na pierwszym miejscu. W krótkim czasie powinieneś otrzymać 7766 razy tyle pieniędzy, ile wysyłałeś.
Dlaczego nie jest to pewny sposób na dojście do fortuny, nawet przy założeniu, że każdy, kto otrzymał listę, wysyła ją dalej zgodnie z instrukcją?

[69] Zaczerpnięto z [1] - zadanie 7 strona 49
[70] Zeskanowana ilustracja z [1]
[71] Zadanie własne Iwony Derendarz
[72] Rysunek wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri
[73] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 5.84 strona 156

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” – „Nieodparty urok ciągów; strzeż się pociągu do …”

Zadanie 1. Wysoko do góry (6 punktów)

Wiktor jest bardzo sumienny i cierpliwy. Zamierza zbudować domek z kart, w taki sposób jak przedstawiono na rysunku. Ma to być wielki domek, do zbudowania, którego zostaną wykorzystane wszystkie karty do gry, jakie ma Wiktor.
Chłopiec policzył, że jego 5 talii po 52 karty każda, to dokładnie tyle kart, ile potrzeba do realizacji projektu.
Niestety, zanim Wiktor ukończył konstrukcję, jego budowla rozpadła się.
Ile pięter (poziomów) miał mieć domek, który zamierzał zbudować Wiktor?

Zadanie 1. Wysoko do góry (6 punktów)

Oznaczmy przez C_n ilość kart potrzebną do zbudowania n piętrowego domku z kart.

Wtedy mamy: $C_1 = 2,\ C_2 = 2+1+2\cdot 2,\ C_3 = 2+1+2\cdot 2+2+3\cdot 2$

Ogólnie: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Mamy, więc kolejne wyrazy ciągu:

$C_1 = 2,\ C_2 = 2+3\cdot 1+2 = 7,\ C_3 = 7+3\cdot 2+2 = 15,\ C_4 = 15+3\cdot 3+2 = 26,\ C_5 = 26+3\cdot 4+2 = 40,$
$C_6 = 40+3\cdot 5+2 = 57,\ C_7 = 57+3\cdot 6+2 = 77,\ C_8 = 77+3\cdot 7+2 = 100,\ C_9 = 100+3\cdot 8+2 = 126,$
$C_{10} = 126+3\cdot 9+2 = 155,\ C_{11} = 155+3\cdot 10+2 = 187,\ C_{12} = 187+3\cdot 11+2 = 222,$
$C_{13} = 222+3\cdot 12+2 = 260$

Zatem z 260 kart można zbudować 13 piętrowy domek.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wyznaczenie wzoru rekurencyjnego	2
C	Obliczenie sumy kart na 13 kondygnacjach	1
D	Odpowiedź pisemna w języku obcym	2

Exercise 1. High uphill (6 points)

Denote by C_n the number of cards needful for building a house with *n* levels.

Then: $C_1 = 2,\ C_2 = 2+1+2\cdot 2,\ C_3 = 2+1+2\cdot 2+2+3\cdot 2$

Generally: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Hence, the consecutive words of a sequence are:

$C_1 = 2,\ C_2 = 2+3\cdot 1+2 = 7,\ C_3 = 7+3\cdot 2+2 = 15,\ C_4 = 15+3\cdot 3+2 = 26,\ C_5 = 26+3\cdot 4+2 = 40,$
$C_6 = 40+3\cdot 5+2 = 57,\ C_7 = 57+3\cdot 6+2 = 77,\ C_8 = 77+3\cdot 7+2 = 100,\ C_9 = 100+3\cdot 8+2 = 126,$
$C_{10} = 126+3\cdot 9+2 = 155,\ C_{11} = 155+3\cdot 10+2 = 187,\ C_{12} = 187+3\cdot 11+2 = 222,$
$C_{13} = 222+3\cdot 12+2 = 260$

So, using 260 cards we can built a house with 13 floors.

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation into Polish	2
B	Computing the sequence’s rule recursively	2
C	Counting the sum of cards on 13 levels	1
D	Writing the solution in English	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Exercice 1. Très En Haut (6 points)

Soit C_n le nombre de cartes dont on a besoin pour construire le chateau de cartes de n étages.

Nous avons alors: $C_1 = 2,\ C_2 = 2+1+2\cdot 2,\ C_3 = 2+1+2\cdot 2+2+3\cdot 2$

En général: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Nous avons donc les termes suivants de la suite:

$C_1 = 2,\ C_2 = 2+3\cdot 1+2 = 7,\ C_3 = 7+3\cdot 2+2 = 15,\ C_4 = 15+3\cdot 3+2 = 26,\ C_5 = 26+3\cdot 4+2 = 40,$
$C_6 = 40+3\cdot 5+2 = 57,\ C_7 = 57+3\cdot 6+2 = 77,\ C_8 = 77+3\cdot 7+2 = 100,\ C_9 = 100+3\cdot 8+2 = 126,$
$C_{10} = 126+3\cdot 9+2 = 155,\ C_{11} = 155+3\cdot 10+2 = 187,\ C_{12} = 187+3\cdot 11+2 = 222,$
$C_{13} = 222+3\cdot 12+2 = 260$

Ainsi avec 260 cartes pouvons-nous construire une maison de 13 étages.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduction en polonais	2
B	Détermination de la formule récurrente	2
C	Calcul de la somme des cartes sur 13 étages	1
D	Réponse écrite en langue étrangère	1

Tarea 1. Subiendo arriba (6 puntos)

Marquemos por C_n la cantidad de naipes indispensable para construir una casita con pisos de naipes.

Entonces tenemos: $C_1 = 2,\ C_2 = 2+1+2\cdot 2,\ C_3 = 2+1+2\cdot 2+2+3\cdot 2$

En total: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Tenemos entonces los términos de la serie siguientes:

$C_1 = 2,\ C_2 = 2+3\cdot 1+2 = 7,\ C_3 = 7+3\cdot 2+2 = 15,\ C_4 = 15+3\cdot 3+2 = 26,\ C_5 = 26+3\cdot 4+2 = 40,$
$C_6 = 40+3\cdot 5+2 = 57,\ C_7 = 57+3\cdot 6+2 = 77,\ C_8 = 77+3\cdot 7+2 = 100,\ C_9 = 100+3\cdot 8+2 = 126,$
$C_{10} = 126+3\cdot 9+2 = 155,\ C_{11} = 155+3\cdot 10+2 = 187,\ C_{12} = 187+3\cdot 11+2 = 222,$
$C_{13} = 222+3\cdot 12+2 = 260$

Entonces se puede construir la casita con 260 naipes.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Determinación de la fórmula recurrente	2
C	Cálculo de la suma de los naipes en 13 niveles (pisos)	1
D	Respuesta escrita en la lengua extranjera	1

Esercizio 1. Sempre Più Alto (6 punti)

Determiniamo come C_n il numero di carte necessario per costruire il castello di n piani.

Cosi abbiamo: $C_1 = 2,\ C_2 = 2+1+2\cdot 2,\ C_3 = 2+1+2\cdot 2+2+3\cdot 2$

In generale: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Dunque abbiamo i termini consecutivi della sequenza :

$C_1 = 2,\ C_2 = 2+3\cdot 1+2 = 7,\ C_3 = 7+3\cdot 2+2 = 15,\ C_4 = 15+3\cdot 3+2 = 26,$

$C_5 = 26+3\cdot 4+2 = 40,\ C_6 = 40+3\cdot 5+2 = 57,\ C_7 = 57+3\cdot 6+2 = 77,\ C_8 = 77+3\cdot 7+2 = 100,$

$C_9 = 100+3\cdot 8+2 = 126,\ C_{10} = 126+3\cdot 9+2 = 155,\ C_{11} = 155+3\cdot 10+2 = 187,$

$C_{12} = 187+3\cdot 11+2 = 222,\ C_{13} = 222+3\cdot 12+2 = 260$

Allora con 260 carte si può costruire il castello di13 piani.

Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Punti
A	Traduzione in polacco	2
B	Espressione della formula di recorenza	2
C	Calcolo delle carte su 13 livelli	1
D	Risposta scritta in lingua straniera	1

Aufgabe 1. Römischer Springbrunnen (6 Punkte)

Bezeichnen wir durch C_n die Kartenmenge, die man zur Entstehung von einem n-stöckigen Kartenhaus braucht.

Wir haben dann: $C_1 = 2,\ C_2 = 2+1+2\cdot 2,\ C_3 = 2+1+2\cdot 2+2+3\cdot 2$

Allgemein: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Wir haben also nächste Folgenglieder:

$C_1 = 2,\ C_2 = 2+3\cdot 1+2 = 7,\ C_3 = 7+3\cdot 2+2 = 15,\ C_4 = 15+3\cdot 3+2 = 26,$

$C_5 = 26+3\cdot 4+2 = 40,\ C_6 = 40+3\cdot 5+2 = 57,\ C_7 = 57+3\cdot 6+2 = 77,\ C_8 = 77+3\cdot 7+2 = 100,$

$C_9 = 100+3\cdot 8+2 = 126,\ C_{10} = 126+3\cdot 9+2 = 155,\ C_{11} = 155+3\cdot 10+2 = 187,$

$C_{12} = 187+3\cdot 11+2 = 222,\ C_{13} = 222+3\cdot 12+2 = 260$

Folglich kann man mit 260 Karten ein Häuschen mit 13 Stockwerken bauen.

Punktwertung

Tätigkeits nummer.	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	2
B	Bestimmung periodischer Formel	2
C	Summenberechnung von Karten auf 13 Stockwerken	1
D	Schriftliche Antwort in fremder Sprache	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Wpasuj się w konwencję… (3 punkty)

a) $a_n = (n-3)^3$

b) $a_n = \frac{5+(-1)^m}{2}$, gdzie $m = \frac{n^2(n+1)}{2}$ $n \geq 1,\ n \in N$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Podanie wzoru ogólnego w a)	1
B	Podanie wzoru ogólnego w b)	2

Zadanie 3. A może jednak…? (3 punkty)

Załóżmy, że $a_n = 2$, wtedy $\frac{n^3+2n^2+n-3}{n^2+5} = 2$

Mamy $n^3+2n^2+n-3 = 2n^2+10$, czyli: $n^3+n-13=0$

Zauważmy, że $n(n^2+1)=13$ gdzie $n \in N$.

Liczba 13 jest pierwszą, zatem albo $\begin{cases} n=1 \\ n^2+1=13 \end{cases}$ albo $\begin{cases} n=13 \\ n^2+1=1 \end{cases}$.

Oba układy są sprzeczne. Zatem $a_n \neq 2$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie równania(lub nierówności) i doprowadzenie do najprostszej postaci	1
B	Wykazanie, że równanie nie ma rozwiązań(lub nierówność zawsze spełniona)	2

Zadanie 4. Cofanka (2 punkty)

a) Zauważmy, że $a_n = \frac{1}{a_{n+1}}$,

więc $a_{2009} = \frac{1}{a_{2010}} = \frac{1}{2010}$, $a_{2008} = \frac{1}{a_{2009}} = \frac{1}{\frac{1}{2010}} = 2010$, zatem $a_1 = \frac{1}{2010}$

b) Zauważmy, że $a_n = \frac{a_{n+1}-3}{2}$

mamy więc: $a_4 = \frac{29-3}{2} = 13$, $a_3 = \frac{13-3}{2} = 5$, $a_2 = \frac{5-3}{2} = 1$, $a_1 = \frac{1-3}{2} = -1$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
1	Wyznaczenie pierwszego wyrazu	1
2	Wyznaczenie pierwszego wyrazu	1

Zadanie 5. Sito (4 punkty)

a) $a_n = 37\frac{3}{4}$, otrzymujemy równanie $\frac{1}{4}(3n+1) = 37\frac{3}{4}$, czyli $3n+1=151$, Odpowiedź: jest to 50-ty wyraz ciągu.

b) $a_n = \frac{3n+1}{4}$. Mamy $a_1 = 1,\ a_5 = 4,\ a_9 = 7 \ldots$ wyrazy całkowite tworzą też arytmetyczny ciąg (b_n), w którym $b_1 = 1,\ r = 3$, czyli $b_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$, $3n-2 < 37\frac{3}{4}$, więc $n < 13\frac{1}{4}$

Mamy, zatem $n = 13,\ b_{13} = 1+12\cdot 3 = 37$ oraz $S_{13} = \frac{1+37}{2}\cdot 13 = 247$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie n=50	1
B	Wyznaczenie podciągu o wyrazach całkowitych(pierwszy wyraz i różnica)	1
C	Wyznaczenie ilości wyrazów tego ciągu	1
D	Obliczenie ich sumy	1

Zadanie 6. Uogólnienie (4 punkty)

Ad a)

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}} =$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{50}+\sqrt{51}}\cdot\frac{\sqrt{50}-\sqrt{51}}{\sqrt{50}-\sqrt{51}} =$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{50}-\sqrt{51}}{-1} = -1+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\ldots-\sqrt{50}+\sqrt{51} = \sqrt{51}-1$$

Ad b) analogicznie, dla $x > 0$

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} + \ldots + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{-1} =$$

$$\sqrt{x+1}-1$$

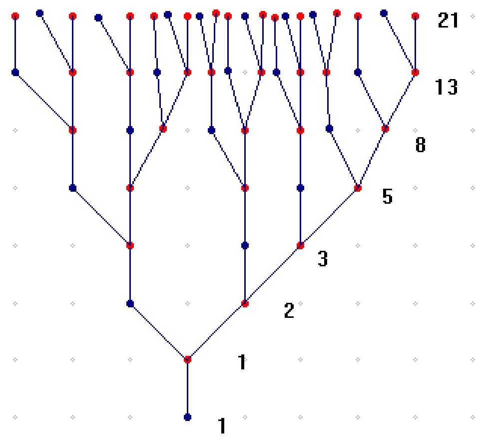
Otrzymujemy równanie: $\sqrt{x+1}-1 = 10$, $\sqrt{x+1} = 11$, $x+1 = 121$, czyli $x = 120$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Usunięcie niewymierności z mianowników ułamków a)	1
B	Wyznaczenie sumy a)	1
C	Wyznaczenie zwiniętej postaci równania	1
D	Podanie rozwiązania równania	1

Zadanie 7. Truteń (4 punkty)

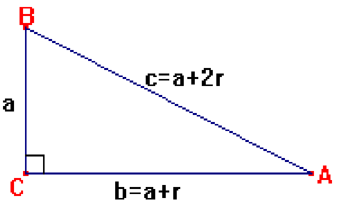
Początkowe wyrazy tego ciągu to: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...[74]:



Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie 15 wyrazów ciągu Fibonacciego	1
B	Dorysowanie dwóch pokoleń przodków trutnia	3

Zadanie 8. Groch z kapustą (5 punktów)



a) Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku[75]::

Mamy: $a+a+r+a+2r=24$

$3a+3r=24$; $b=a+r=8$, czyli $r=8-a$

Z twierdzenia Pitagorasa: $(a+2r)^2=a^2+(a+r)^2$

Po podstawieniu: $(16-a)^2=a^2+64$, otrzymujemy $a=6$ i $r=2$

Boki trójkąta mają, zatem długości $\begin{cases} a=6 \\ b=8 \\ c=10 \end{cases}$ Porównując pole ΔABC

otrzymujemy: $\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$, gdzie h oznacza wysokość opuszczoną na bok c.

$6\cdot 8=10\cdot h$, czyli $h=4.8$

b) $\sin\alpha+\sin\beta-2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}-2\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}=\frac{6}{10}+\frac{8}{10}-2\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{35}{25}-\frac{24}{25}=\frac{11}{25}$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punków
A	Wykonanie rysunku, przyjęcie oznaczeń jak dla ciągu arytmetycznego, zapisanie obwodu trójkąta	1
B	Wyznaczenie a i r	1
C	Podanie długości boków trójkąta	1
D	Wyznaczenie wysokości	1
E	Podanie wartości sumy b)	1

[74] Rysunek wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri
[75] Rysunek wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri

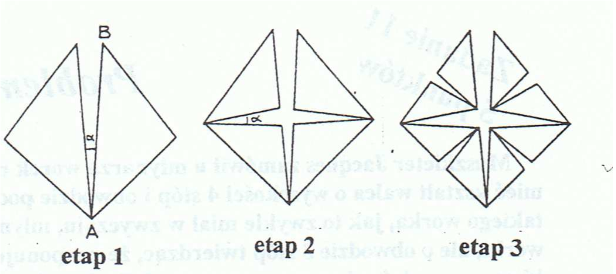
Zadanie 9. Piętruski (4 punkty)

a) $a_n = \dfrac{n^3}{n^2 - n + 1}$, $a_5 = \dfrac{125}{21}$ b) $a_n = \dfrac{3n+2}{2n+1}$, $a_5 = \dfrac{17}{11}$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie wzoru ciągu i obliczenie piątego wyrazu a)	2
B	Wyznaczenie wzoru ciągu i obliczenie piątego wyrazu b)	2

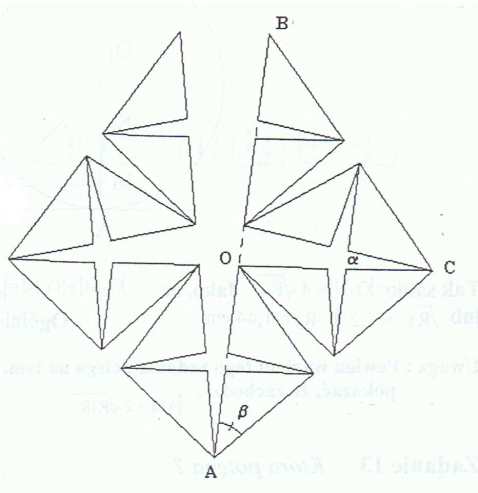
Zadanie 10. Latający fraktal (6 punktów) [76]



Obliczając kąt korzystamy z tego, że trójkąty są równoramienne:

$\angle AOC + \angle COB = 180^o$, więc $\angle AOC = 180^o - 2\beta$ i $\angle COB = 180^o - (2\beta + \alpha)$,

co daje: $180^o - 4\beta - \alpha = 0$, stąd: $\beta = \dfrac{180^o - \alpha}{4} = 45^o - \dfrac{\alpha}{4} = 45^o - \dfrac{12^o}{4} = 42^o$ [77]



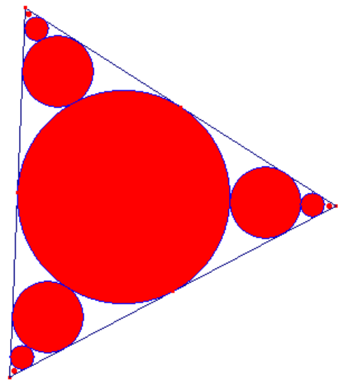
Miara kąta wewnętrznego w trójkącie równoramiennym wynosi: $180^o - 2 \cdot 42^o = 180^o - 84^o = 96^o$.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie kątów trójkąta	3
B	Wykonanie i naklejenie na karcie odpowiedz fraktala	3

[76] Zeskanowana ilustracja z [1]
[77] Zeskanowana ilustracja z [1]

Zadanie 11. Ornamenty (6 punktów)



Promienie kół tworzą ciąg geometryczny.[78]
Oznaczmy promienie kół r_n :
$r_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$; $r_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{18}$; $r_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{18}=\frac{\sqrt{3}}{54}$ itd.
Długości promieni wynikają z podobieństwa kół i skali podobieństwa $\frac{1}{3}$.

Pola kół tworzą ciąg (P_n): $P_1=\pi r_1^2=\pi\cdot\frac{3}{36}=\frac{1}{12}\pi$,

$P_2=\pi r_2^2=\pi\cdot\frac{3}{324}=\frac{1}{108}\pi$, $P_3=\pi r_3^2=\pi\cdot\frac{3}{2916}=\frac{1}{972}\pi$ …również ciąg geometryczny o ilorazie $q=\frac{1}{9}$.

Otrzymujemy sumę pól: $S=S_4+2S_3$, gdzie $S_4=P_1+P_2+P_3+P_4$ zaś $S_3=P_2+P_3+P_4$

Mamy: $S_4=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^4}{1-\frac{1}{9}}=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1-\frac{1}{6561}}{\frac{8}{9}}=\frac{\pi}{12}\cdot\frac{6560}{6561}\cdot\frac{9}{8}=\frac{205\pi}{2187}$, $2S_3=2\cdot\frac{\pi}{108}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^3}{1-\frac{1}{9}}=\frac{91\pi}{4374}$.

Uzyskujemy sumę: $S=\frac{167\pi}{1458}$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie długości promieni kół i stwierdzenie ciągu geometrycznego	1
B	Wyznaczenie pól poszczególnych kół	2
C	Obliczenie sumy pól	3

Zadanie 12. Łańcuszek szczęścia (3 punkty)

Liczba osób uczestniczących w grze rośnie lawinowo.
Po krótkim czasie nie ma już nowych ludzi, do których można wysyłać kartki.
Pozostali mogą, co najwyżej wysyłać sobie pieniądze nawzajem.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Udzielenie wyczerpującej odpowiedzi na pytanie zadania	3

[78] Rysunek wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri

Pakiet M-2.4 „Kombinuj dziewczyno”

I. Treści merytoryczne:

- permutacje z powtórzeniami i bez powtórzeń (bez nazywania - z reguły mnożenia);
- kombinacje;
- wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń (bez nazywania - z reguły mnożenia);
- algebra zbiorów (suma zbiorów).

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię;
- zliczanie ilości możliwości z użyciem reguły mnożenia;
- zastosowanie silni i symbolu newtona przy rozwiązywaniu prostych problemów kombinatorycznych;
- zastosowanie algebry zdarzeń do rozwiązywania problemów kombinatorycznych.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające(1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy , asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1] Gerstenkorn T., Śródka T., *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980
[2] Pawlak R., Pawlak H., Rychlewicz A., Rychlewicz A., Żylak K., Fabiańczyk M., *Matematyka Krok po Kroku Zbiór zadań dla klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona, Łódź
[3] Zakrzewski M., Żak T., *Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek*, Oficyna Wydawnicza Quadrivium, s. c., Wrocław 1994

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1] Ligman J., Stachowski E., Zalewska A., *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla uczniów szkół średnich*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna „Adam” Warszawa 1987
[2] Gerstenkorn T., Śródka T., *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, Państwowe wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980
[3] Pawlak R., Pawlak H., Rychlewicz A., Rychlewicz A., Żylak K., Fabiańczyk M., *Matematyka Krok po Kroku Zbiór zadań dla klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum,* Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona, Łódź
[4] Zakrzewski M., Żak T., *Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek,* Oficyna Wydawnicza Quadrivium, s. c., Wrocław 1994

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" - „Kombinuj dziewczyno…!"

Bonus na rozgrzewkę Reklama (5 punktów)[79]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Bonus pour l'échauffement PublicitÉ (5 points)

« Un milion de menus complets ! » - annonce la publicité d'un restaurant. Réellement, il n'y a que dix entrées, douze soupes, vingt plats principaux, vingt desserts et vingt-cinq sortes de vin. Est-ce que tu as le droit de te sentir escroqué ? Justifie ta réponse par un calcul.

Bonus to warm-up Promotion (5 points)

„Milion kinds of dinner in our menu!" - says some advertising of the restaurant. In fact in the restaurant there are ten appetizers, twelve soups, twenty meat dishes, twenty desserts and twenty five kinds of wine. Do you have the law to feel frisked? Substantiate your answer using the bill.

Suplemento para calentarse Publicidad (5 puntos)

„¡ Millón de menus de la comida!"- dice la publicidad de un restaurant. De verdad ahí hay solamente diez entradas, doce sopas, veinte platos, veinte postres y veinticinco especies de vino. ¿Puedes sentirte engañado? Apoya tu respuesta con el cálculo.

Abbuono per riscaldarsi Pubblicità (5 punti)

„Un milione di piatti !"- dice la pubblicità di un ristorante. In realtà qui ci sono solo dieci antipasti, dodici zuppe, venti secondi piatti, venti dessert e venti vini. Puoi pensare che ti lasci ingannare ? La risposta deve essere sostenuto del calcolo.

Bonus zum Aufwärmen Werbung (5 Punkte)

„Million Mittagssätze!"- verkündet die Werbung von einem Restaurant. In Wirklichkeit gibt es dort nur zehn Vorspeisen, zwölf Suppen, zwanzig zweiter Gänge, zwanzig Nachspeisen Und fünfundzwanzig Weinsorten. Hast du Recht, dich betrogen zu fühlen? Beleg die Antwort mit einer Rechnung.

---

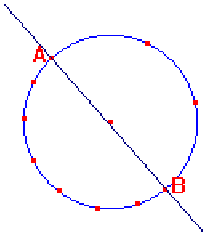
[79] Zaczerpnięto z [1] - zadanie 6 strona 15

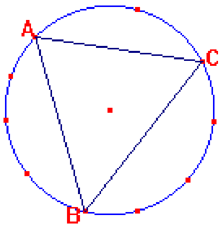
Zadanie 1. Ile? (4 punkty)[80]

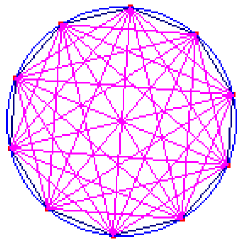
a) Ile można narysować prostych, które przechodzą przez dwa spośród 10 punktów leżących na okręgu?

b) Ile trójkątów można narysować wybierając jako wierzchołki trzy punkty spośród 10 punktów leżących na okręgu?

c) Ile przekątnych ma dziesięciokąt, którego wierzchołki leżą na okręgu?[81]

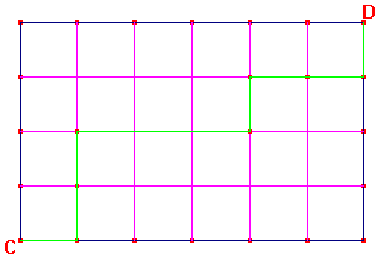


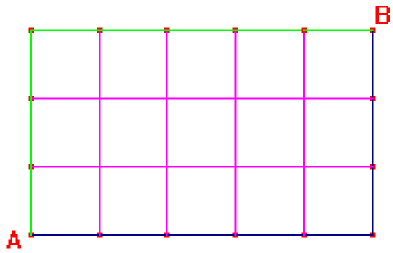




Zadanie 2. TAXI (3 punkty)[82]

Po liniach diagramu możemy posuwać się tylko do góry (*G*) lub w prawo (*P*). Aby dojść z punktu *A* do punktu *B*, możemy wybrać drogę *GGGPPPPP*. [83]





Liczba wszystkich dróg od *A* do B jest równa $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

Ile jest różnych dróg wiodących z punktu *C* do Punktu *D*?

Zadanie 3. Cztery nagrody (3 punkty)[84]

Iloma sposobami można rozdzielić cztery różne nagrody między trzech pracowników, jeżeli nawet wszystkie nagrody mogą przypaść jednemu pracownikowi?

Zadanie 4. Opera (4 punkty)[85]

W pewnej operze każda z 6 ról ma 3 obsady. Na ile sposobów można skompletować obsadę przedstawienia przy założeniu, że:

a) Każdy obsadzony jest tylko w jednej roli?

b) Jeden ze śpiewaków obsadzony jest w dwu rolach, których nie może wykonywać jednocześnie?

---

80 Zadanie własne Iwony Derendarz
81 Rysunki wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri
82 Zaczerpnięto z [2] - zadanie 21 strona 33
83 Diagramy wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri
84 Zaczerpnięto z [3] - zadanie 2.58 strona 55
85 Zaczerpnięto z [1] - zadanie 6 strona 20

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” – „Kombinuj dziewczyno…!

Bonus na rozgrzewkę Reklama (5 punktów)

„Milion zestawów obiadowych!”- głosi reklama pewnej restauracji. Naprawdę jest tam tylko dziesięć przystawek, dwanaście zup, dwadzieścia drugich dań, dwadzieścia deserów i dwadzieścia pięć gatunków win. Czy masz prawo czuć się oszukany? *Odpowiedź poprzyj rachunkiem.*

Bonus na rozgrzewkę Reklama (5 punktów) – szkic rozwiązania

Odpowiedź: Nie, bo $10 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 25 = 1200000$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Rozwiązanie zadania	2
C	Odpowiedź pisemna w języku obcym	1

Bonus pour l’échauffement PublicitÉ (5 points)

Nie, bo $10 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 25 = 1200000$

Pointage

Numéro de l’activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en polonais	2
B	Solution de l’exercice	2
C	Réponse écrite en langue étrangère	1

Bonus to warm-up Promotion (5 points)

We don’t have such law because $10 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 25 = 1200000$ it gives over a milion of dinners.

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation into Polish	2
B	Solution	2
C	Writing of solution in English	1

Suplemento para calentarse Publicidad (5 puntos)

No, porque $10 \cdot 20 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 25 = 1200000$

Puntuaction

Numero de la actividad	Etapas de la solución	Puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Solución de la tarea	2
C	Respuesta escrita en la lengua extranjera	1

Abbuono per riscaldarsi Pubblicità (5 punti)

No, perché $10 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 25 = 1200000$

Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Punti
A	Traduzione in polacco	2
B	Soluzione dell’esercizio	2
C	Risposta scritta in lingua straniera	1

Bonus zum Aufwärmen Werbung (5 Punkte)

Nein, weil $10 \cdot 12 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 25 = 1200000$

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Aufgabeübersetzung ins Polnische	2
B	Aufgabenlösung	2
C	Schriftliche Antwort in der Fremdsprache	1

Zadanie 1. Ile? (4 punkty)

a) $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$ b) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$

c) $n = 10 \Rightarrow \binom{n}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Podanie rozwiązania a)	1
B	Podanie rozwiązania b)	1
C	Podanie rozwiązania c)	2

Zadanie 2. Taxi (3 punkty)

Przykładowe przejście: PGGPPPGPPG

Takich przejść mamy: $\frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie przykładowego przejścia	1
B	Podanie rozwiązania zadania	2

Zadanie 3. Cztery nagrody (3 punkty)

Nagrody	I	II	III	IV
Możliwości	3	3	3	3

Zatem: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$

Odpowiedź:

Nagrody można rozdzielić na 81 sposobów.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie przykładowego przyporządkowania	1
B	Podanie rozwiązania zadania	2

Zadanie 4. Opera (4 punkty)

Rola	I	II	III	IV	V	VI
Możliwość obsadzenia	3	3	3	3	3	3

a) Zatem: $3^6 = 729$

b) Rozważmy te dwie role. W zasadzie można je obsadzić na $3 \cdot 3 = 9$ sposobów, ale trzeba odrzucić możliwość obsadzenia obu ról przez naszego śpiewaka, co daje 8 możliwości. Pozostałe cztery role można obsadzić na $3^4 = 81$ sposobów. Łącznie $8 \cdot 81 = 648$.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie rozwiązania a)	1
B	Podanie rozwiązania zadania b)	3

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Kombinuj dziewczyno…!

Zadanie 1. (5 punktów)[86]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercice 1. Ah, ces enfants… (5 points)

Petit Arthur a cinq paires de chaussures. Pour mettre ses chaussures, il adopte deux règles:
Il ne met jamais la chaussure gauche au pied gauche et la chaussure droite au pied droit.
Il ne met jamais les deux chaussures d'une même paire.
Il peut mettre ses chaussures de combien de façons ?

Exercise 1. Oh, these kids… (5 points)

A little Arturek has 5 pairs of shoes. Shoeing he always heads two rules:
He never dress the left shoe to the left foot and the right shoe to the right foot.
He never dress two shoes from the same pair.
How many combinations has Arturek got dressing shoes to his feet?

Tarea 1. Ay, Estos niños … (5 puntos)

El pequeño Arturo tiene cinco pares de zapatos. Poniendo los zapatos se dirige de dos principios:
Nunca pone un zapato izquierdo al pie izquierdo ni un zapato derecho al pie derecho
Nunca pone dos zapato del mismo par. ¿Cuántas maneras de poner zapatos a los dos pies hay?

Esercizio 1. Ah questi bambini… (5 punti)

Piccolo Arturek ha cinque paia di scarpe. Quando le mette ha due principi:
Non mette mai la scarpa sinistra sul piede sinistro neanche destra sul destro.
Non mette mai due scarpe dello stesso paio.
A quanti modi puo mettere le scarpe su due piedi ?

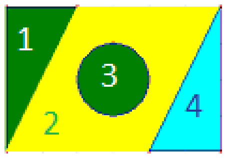
Aufgabe 1. Ach, diese Kinder … (5 Punkte)

Der kleine Arthur hat 5 Paar Schuhe. Wenn er die Schuhe anzieht, richtet er sich nach zwei Regeln:
Er zieht nie den linken Schuh an den linken Fuß und den rechten Schuh an den rechten Fuß an.
Er zieht nie zwei Schuhe von dem selben Paar an.
Auf wie viele Weisen kann er die Schuhe an beide Füße anziehen?

[86] Zaczerpnięto z [1] – zadanie 9 strona 15

Zadanie 2. Malowanka (2 punkty)[87]

Każdą z ponumerowanych figur 1, 2, 3 i 4 należy pomalować jednym kolorem tak, aby sąsiadujące figury miały inne kolory. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli mamy:



a) 4 kredki różnego koloru?
b) 6 kredek różnego koloru?

Zadanie 3. Problem przedszkolaka (4 punkty)[88]

Mamy 8 cukierków, które chcemy podzielić między troje dzieci tak, aby każde z nich otrzymało, co najmniej 1 cukierek. Aby utworzyć 3 niepuste podzbiory, możemy oddzielić cukierki, kładąc np. ołówek i gumkę na dwóch wybranych spośród 7 miejsc miedzy cukierkami.


[89]

Liczba wszystkich możliwych sposobów podziału cukierków jest równa:

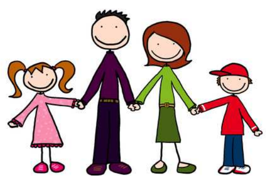
liczbie 2 - elementowych kombinacji zbioru 7 – elementowego $\binom{7}{2} = 21$.

a) Na ile sposobów możemy podzielić 10 cukierków między czworo dzieci tak, aby każde z nich otrzymało, co najmniej 1 cukierek?
b) Na ile sposobów możemy podzielić 14 cukierków między pięcioro dzieci tak, aby każde z nich otrzymało, co najmniej 1 cukierek?

Zadanie 4. Sumo (4 punkty)[90]

W zawodach w sumo, rozgrywanych systemem „każdy z każdym", odbyły się 83 walki. Dwóch zawodników, spośród 15 startujących, wycofało się przed zakończeniem zawodów, rozegrawszy po trzy walki każdy. Czy zawodnicy, którzy wycofali się przed zakończeniem zawodów walczyli ze sobą? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. Chodzi lis koło drogi…(5 punktów)[91]



Iloma sposobami można ustawić dziesięć osób jednym rzędzie, a iloma „w koło"? (Zakładamy, że miejsca na okręgu są ponumerowane). Czy wynik ulegnie zmianie, jeżeli osoby tworzące okrąg zaczną się po nim poruszać, trzymając się za ręce? (Tzn. miejsca na okręgu nie są ponumerowane).

[87] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 12 strona 38
[88] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 14 strona 38
[89] Zdjęcie wykonała Iwona Derendarz
[90] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 22, strona 39
[91] Zaczerpnięto z [3] - zadanie 1.4.7, strona 13

Zadanie 6. Przekątne (4 punkty)

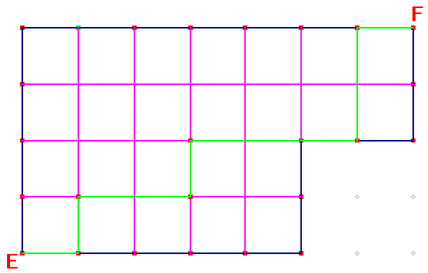
Ile boków ma wielokąt wypukły o 65 przekątnych?

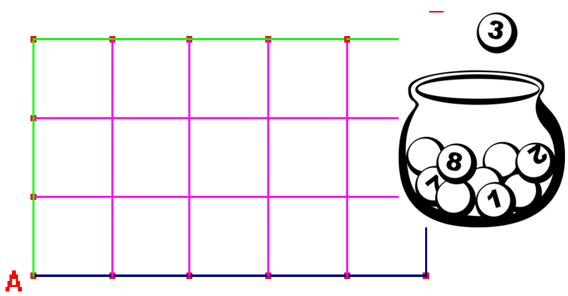
Zadanie 7. Wycieczka (2 punkty)

Ze schroniska na szczyt prowadzą 4 różne szlaki turystyczne. Marcin i Krzysiek planują wycieczkę schronisko – szczyt – schronisko. Marcin upiera się nie powtarzać szlaku w czasie zejścia ze szczytu. Krzyśkowi jest obojętne, czy przy zejściu powtórzy szlak. Na ile sposobów może zaplanować wycieczkę Marcin, a na ile Krzysiek?

Zadanie 8. Taxi (5 punktów)[92]

Po liniach diagramu[93] możemy posuwać się tylko:
do góry (*G*) lub w prawo (*P*).
Aby dojść z punktu *A* do punktu *B*, możemy wybrać drogę *GGGPPPPP*. Liczba wszystkich dróg od *A* do B jest równa $\frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$
Ile jest różnych dróg wiodących z punktu *E* do Punktu *F*?





Zadanie 9. Sąd (5 punktów)[94]

Każdy z siedmiu uczestników ma dwie kule: czarną i białą, i wrzuca do urny dokładnie jedną z nich.

a) Ile istnieje różnych możliwych układów kul w urnie?
b) Ile istnieje możliwych układów, jeśli każdemu z uczestników wolno wstrzymać się od głosu?

Zadanie 10. Trójkąciki (4 punkty)[95]

Na płaszczyźnie danych jest 9 punktów, z których:

- Dokładnie cztery leżą na jednej prostej.
- Z pozostałych żadne trzy nie leżą na jednej prostej.
- Żadne dwa z tych pozostałych z żadnymi z tych czterech punktów leżących na prostej, nie leżą na jednej prostej.

Znaleźć liczbę trójkątów, które można otrzymać łącząc punkty po trzy.

[92] Zaczerpnięto z [2] - zadanie 21, strona 33
[93] Diagramy wykonała Iwona Derendarz w programie Cabri
[94] Zaczerpnięto z [4] - zadanie 2.55, strona 55
[95] Zaczerpnięto z [4] - zadanie 2.54, strona 55

Zadanie 11. Wymagający pasażerowie (4 punkty)[96]

W przedziale wagonu kolejowego są naprzeciw siebie dwie ławki, z których każda ma pięć ponumerowanych miejsc.
Z dziesięciu pasażerów:

- Czterech chce siedzieć w kierunku jazdy twarzą,
- A trzech – plecami.

Iloma sposobami można rozmieścić tych pasażerów?

Zadanie 12. A to plemię! (6 punktów)[97]

Na pewnej wyspie mieszka 300 dzikusów, z których każdy jest matematykiem, filozofem lub ludożercą.

- Połowa ludożerców zajmuje się filozofią.
- Połowa filozofów matematyką.
- Połowa matematyków to ludożercy.

Wiedząc, że żaden z ludożerców nie zajmuje się filozofią i matematyką, odpowiedz na pytanie, z ilu osób składają się te grupy.

[96] Zaczerpnięto z [4] - zadanie 2.59, strona 55
[97] Zaczerpnięto z [1] - zadanie 9, strona 42

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" – „Kombinuj dziewczyno…!"

Zadanie 1. Ach te dzieci… (5 punktów)[98]

Mały Arturek ma pięć par butów.
Wkładając buty kieruje się dwiema zasadami:

- Nigdy nie wkłada lewego buta na lewą nogę ani prawego na prawą
- Nigdy nie wkłada dwóch butów z tej samej pary

Na ile sposobów może włożyć buty na obie nogi?

Zadanie 1. Ach te dzieci… (5 punktów)[99]

Z założeń wynika, że zawsze wkłada lewy but na prawą nogę (ma tu 5 możliwości), a prawy but na lewą nogę (znów 5 możliwości). Łącznie $5 \cdot 5 = 25$. W pięciu przypadkach będą to buty z tej samej pary, a więc ostatecznie $25 - 5 = 20$

Odpowiedź: Arturek ma 20 możliwości włożenia butów na obie nogi.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Analiza możliwości Arturka wynikająca z pierwszego warunku (25)	1
C	Podanie pełnego rozwiązania zadania	1
D	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercice 1. Ah, Ces Enfants… (5 points)

Selon sa règle, Arthur met toujours sa chaussure gauche au pied droit (5 possibilités) et sa chaussure droite au pied gauche (encore une fois 5 possibilités). En tout $5 \cdot 5 = 25$. Dans les cinq cas, cela sera la même paire de chaussures, donc finalement $25 - 5 = 20$.
Réponse: Petit Arthur a 20 possibilités de mettre les chaussures à ses deux pieds.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en polonais	2
B	Analyse des possibilités de petit Arthur, résultant de la première condition (25)	1
C	Solution entière de l'exercice	1
D	Réponse en langue étrangère	1

[98] Zaczerpnięto z [1] – zadanie 9 strona 15
[99] Zaczerpnięto z [1] – zadanie 9 strona 15

Exercise 1. Oh, these kids... (5 points)

From the assumption the left shoe is always on the right leg (5 possibilities) and the right shoe is always on the left leg (5 possibilities). Together $5 \cdot 5 = 25$ pairs.
In five of these 25 cases we get the same pair. So, $25 - 5 = 20$.
Answer: Arturek has got 20 possibilities of shoeing.

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translating into Polish	2
B	Analysis of possibilities following from the first condition (25)	1
C	Giving full solution of exercise	1
D	Giving the solution in English	1

Tarea 1. Ay, estos niños ... (5 puntos)

De la hipotesis resulta que siempre pone el zapato izquierdo al pie derecho (aqui tiene 5 posibilidades), y el zapato derecho al pie izquierdo (otra vez 5 posibilidades).
Junto $5 \cdot 5 = 25$. En los cinco casos serán zapatos del mismo par, entonces finalmente $25 - 5 = 20$.
Respuesta: Arturito tiene 20 posilidades de poner zapatos a los dos pies.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de la solución	Puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Análisis de las posibilidades de Arturito resultando de la primera condición (25)	1
C	Solución de la tarea	1
D	Respuesta escrita en la lengua extranjera	1

Esercizio 1. Ah questi bambini... (5 punti)

Dalle premesse risulta che mette sempre la scarpa sinistra sul piede destro (ci sono 5 possibilità) e la scarpa destra sul piede sinistro (di nuovo 5 possibilità). Inclusivamente $5 \cdot 5 = 25$. In cinque casi saranno le scarpe dello stesso paio, Allora in fin dei conti $25 - 5 = 20$.
Risposta: Arturek ha 20 possibilità di mettere le scarpe su due piedi.

Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Punti
A	Traduzione in polacco	2
B	Analisi delle possibilità di Arturek che risulta dalla prima condizione (25)	1
C	La soluzione completa dell'esercizio	1
D	La risposta nella lingua straniera	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Aufgabe 1. Ach, diese kinder… (5 Punkte)

Aus den Voraussetzungen ergibt sich, dass Arthur immer den linken Schuh an den rechten Fuß (hier hat er 5 Möglichkeiten), und den rechten Schuh an den linken Fuß (wiederum 5 Möglichkeiten) anzieht. Zusammen $5 \cdot 5 = 25$. In fünf Fällen werden das die Schuhe von dem selben Paar, also schließlich $25 - 5 = 20$

Antwort: Der kleine Arthur hat 20 Möglichkeiten, Schuhe an beide Füße anzuziehen.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	2
B	Die sich aus der ersten Voraussetzung herleitende Analyse von Arthurs Möglichkeiten (25)	1
C	Angabe der vollständigen Aufgabenlösung	1
D	Angabe der Antwort in der Fremdsprache	1

Zadanie 2. Malowanka (2 punkty)

a) Mamy: $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ możliwości

b) Mamy: $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 750$ możliwości

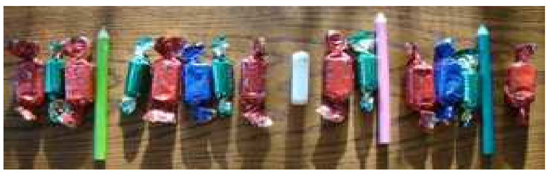
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Podanie rozwiązania a)	1
B	Podanie rozwiązania b)	1

Zadanie 3. Problem przedszkolaka (4 punkty)

a) $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$ [100]

b) $\binom{13}{4} = \frac{13!}{4! \cdot 9!} = 715$ [101]



Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Podanie rozwiązania a)	2
B	Podanie rozwiązania b)	2

[100] Zdjęcie wykonała Iwona Derendarz

[101] Zdjęcie wykonała Iwona Derendarz

Zadanie 4. Sumo (4 punkty)

Tak. Pozostałych 13 zawodników rozegrało między sobą $\binom{13}{2}=\frac{13!}{2!\cdot 11!}=78$ walk. Gdyby dwaj zawodnicy, którzy się wycofali, nie walczyli ze sobą, to walk w zawodach byłoby $78+6=84$.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby walk zawodników pozostałych w turnieju	1
B	Podanie odpowiedzi i uzasadnienia rozwiązania zadania	3

Zadanie 5. Chodzi lis koło drogi…(5 punktów)

a) Dziesięć osób w rzędzie można ustawić na $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=10!=3628800$ sposobów, na tyle samo można ustawić ich w koło, przy założeniu, że osoby nie krążą po okręgu koła.

b) Jeśli osoby będą się poruszać, to liczy się tylko ich położenie względem siebie, permutacje, które w trakcie krążenia przechodzą jedna w drugą, uważamy za jednakowe.

Z każdej takiej permutacji dzięki obrotowi można otrzymać dziesięć nowych.

Stąd takich permutacji jest dziesięć razy mniej, czyli: $\frac{10!}{10}=9!=362880$.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Podanie rozwiązania a)-osoby w rzędzie	2
B	Podanie rozwiązania b)-osoby w koło	3

Zadanie 6. Przekątne (4 punkty)

Liczba przekątnych wynosi: $\frac{n(n-3)}{2}=65$, gdzie $n\in N, n>3$.

Otrzymujemy równanie: $n^2-3n-130=0$, $\Delta=529$, $n_1=-10\notin N$, $n_2=13$.

Odpowiedź: Wielokąt ma 13 boków.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie równania wynikającego z warunków zadania	1
B	Rozwiązanie równania z uwzględnieniem jego dziedziny	3

Zadanie 7. Wycieczka (2 punkty)

		Wejście	Zejście	Ilość sposobów zaplanowania wycieczki
Ilość możliwości	Marcin	4	3	$4\cdot 3=12$
Ilość możliwości	Krzysiek	4	4	$4\cdot 4=16$

Odpowiedź: Marcin może zaplanować wycieczkę na 12, a Krzysiek 16 sposobów

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby możliwości Marcina	1
B	Zapisanie liczby możliwości Krzyśka	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 8. Taxi (5 punktów)

$$\frac{11!}{4!\cdot 7!}-1-4-6-6\cdot 3=301$$

Odpowiedź: Różnych dróg wiodących z punktu *E* do Punktu *F* jest 301

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby możliwości przy pełnym prostokącie	1
B	Wyznaczenie liczby możliwości, których nie mamy, jeśli wyjęto 4 węzły	3
C	Podanie poprawnej odpowiedzi	1

Zadanie 9. Sąd (5 punktów)

a) Istnieje 8 różnych możliwych układów kul w urnie – (7 białych i 0 czarnych lub 1 czarna i 6 białych, lub 2 czarne i 5 białych lub …lub 7 czarnych i 0 białych),

b) 36 - Nie będzie ani jednej kuli lub będzie 1 kula - to daje dwie możliwości, lub będą 2 kule - co daje 3 możliwości,… aż do siedmiu kul- co daje 8 możliwości,

Zatem: 1+2+3+4+5+6+7+8=36

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Rozwiązanie punktu a)	2
B	Rozwiązanie punktu b)	3

Zadanie 10. Trójkąciki (4 punkty)

$$\binom{5}{3}+4\cdot\binom{5}{2}+5\cdot\binom{4}{2}=80$$

Odpowiedź: Łącząc punkty po trzy można otrzymać 80 trójkątów.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby możliwości dla poszczególnych rodzajów trójkątów	3
B	Podanie sumy	1

Zadanie 11. Wymagający pasażerowie (4 punkty)

Odpowiedź:

Pasażerowie jadący twarzą do kierunku ruchu mają $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2$ możliwości

Pasażerowie jadący plecami do kierunku ruchu: $5\cdot 4\cdot 3$, pozostali mają 3! sposobów na zajęcie pozostałych w przedziale miejsc.

To daje (reguła mnożenia) $120\cdot 60\cdot 6=43200$sposobów rozmieszczenia

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby możliwości dla poszczególnych grup pasażerów po 1 punkcie	3
B	Wyznaczenie liczby możliwości (iloczynu)	1

Zadanie 12. A to plemię! (6 punktów)

Odpowiedź:

Z warunków zadania mamy od razu $\frac{1}{2}L \le F$,
ale skoro połowa filozofów zajmuje się matematyką,
a nikt z ludożerców nie zajmuje się jednocześnie filozofią i matematyką,
to $\frac{1}{2}L \le \frac{1}{2}F$, więc $L \le F$.

Podobnie $F \le M$, $M \le L$, skąd $L = F = M$.

Z założenia mamy $|L \cap F| = |F \cap M| = |L \cap M| = \frac{1}{2}|L|$.

Stąd

$$300 = |F \cup L \cup M| = |F| + |L| + |M| - |F \cap L| - |F \cap M| - |L \cap M| + |F \cap L \cap M| = 3|L| - 3 \cdot \frac{1}{2}|L| + 0$$

$300 = \frac{3}{2}|L|$ skąd $|L| = |M| = |F| = 200$.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Uzyskanie wniosku, że grupy są tak samo liczne	2
B	Zapisanie, że liczności $L \cap F = L \cap M = F \cap M = \frac{1}{2}L$	1
C	Uzyskanie $\lvert L \cup F \cup M \rvert$	2
D	Podanie poprawnej odpowiedzi	1

Pakiet M-2.5 „Miary - wizyta u krawca"

I. Treści merytoryczne:

- definicja ciągu, rodzaje ciągów;
- związki między bokami i kątami wielokątów, odległość punktów, nierówność trójkąta;
- własności trójkątów, czworokątów i innych wielokątów, uma miar kątów wielokąta;
- styczna do okręgu, kąt wpisany, kąt dopisany, kąt środkowy i związki między tymi kątami;
- wielokąt wpisany w okrąg, wielokąt opisany na okręgu. własności wielokątów foremnych;
- wzajemne położenie okręgów; warunki styczności okręgów;
- przystawanie i podobieństwo figur.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności korzystania ze związków między kątem środkowym, kątem wpisanym i kątem między styczną i cięciwą;
- wykorzystywanie własności figur przystających i figur podobnych;
- kształcenie umiejętności znajdowania związków miarowych w figurach płaskich;
- kształcenie umiejętności wyznaczania związków miarowych dla figur płaskich;
- kształcenie umiejętności przeprowadzenia prostego rozumowania dedukcyjnego;
- kształcenie umiejętności analizowania informacji, formułowania hipotez oraz ich weryfikacji;
- kształcenie wyobraźni i sprawności manualnej - konstruowanie, wycinanie, naklejanie różnych figur płaskich w celu tworzenia z nich nowych konfiguracji, itp.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających"

[1] Matematyka Bez Granic Etap finałowy konkursu - 7 marca 2007

[2] Matematyka Bez Granic Etap wstępny – edycja 2007

[3] http://www.zadania.info

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem"

[1] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G., Matematyka *Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym 2,* Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2003

[2] Bańkowska E., Stankiewicz D., *Matematyka w zastosowaniach. Zbiór zadań dla szkół średnich*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001

[3] Matematyka Bez Granic –*Zadania treningowe* grudzień 2005

[4] Matematyka Bez Granic - *Konkursu* - 7 marca 2007

[5] Matematyka Bez Granic –*Zadania treningowe* grudzień 2007

[6] Matematyka Bez Granic - *Edycja 2008-2009*

[7] Matematyka Bez Granic - Etap finałowy konkursu – 26 lutego 2008

[8] http://www.zadania.info

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

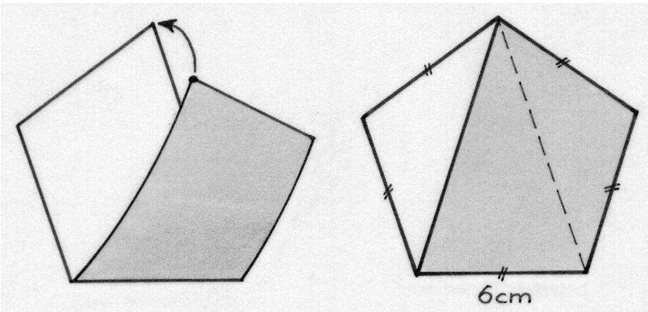
Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" - „Miary - wizyta u krawca"

Bonus na rozgrzewkę - Origami[102]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Bonus to warm-up - Origami (7 points)



[103] Ela has a piece of paper of a quadrangle shape and she is folding it once overlapping some vertex of this quadrangle on the opposite one. She is obtaining in this way a regular pentagon with the side's length 6 cm. Calculate measures of quadrangle angles and lengths of all quadrangle sides and then stick the folded quadrangle in the pentagon form on the card with the solution.

Bonus pour l'échauffement Origami (7 points)

Elisabeth a pris un morceau de papier en forme de quadrangle et l'a plié une fois, en superposant un sommet du quadrangle sur le sommet opposé. Ainsi, a-t-elle obtenu un pentagone régulier dont le côté est de 6cm. Calculer les angles et les côtés du quadrangle. Ensuite, le plier de façon à en faire un pentagone et le coller sur la feuille-réponse.

Prima para calentarse Origami (7 puntos)

Isabel tomó una pieza de papel en forma del cuadrángulo y la plegó de una sola vez, poniendo una cúspide del cuadrángulo sobre la de enfrente. De esta manera obtuvo un pentágono regular del lado de 6 cm. Hay que calcular los ángulos y las longitudes de lados del cuadrángulo. Luego, plegando, transformarlo en el pentágono y pegarlo sobre la hoja con la solución.

Bonus zum Aufwärmen Origami (7 Punkte)

Ela nahm ein Stück Papier in Form von einem Viereck und legte ihn einmal zusammen, indem sie einen Scheitel des Vierecks auf den gegenüberliegenden Scheitel legte. Sie bekam auf diese Weise ein regelmäßiges Fünfeck mit 5 cm langen Seiten. Berechne die Ecken und Seitenlänge des zusammengelegten Vierecks. Baue dann daraus so ein Fünfeck zusammen und klebe es an das Blatt Papier mit der Lösung an.

---

[102] Zaczerpnięto z [1]
[103] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania

Abbuono per riscaldarsi - Origami (7 punktów)

Ela ha preso un pezzo di carta nella forma di un quadrilatero e poi l'ha piegato un volta, mettendo un vertice del quadrilatero sul vertice opposto. Cosi ha ottenuto il pentagono regolare con il lato lungo di 6 cm. Calcolare gli angoli e la lunghezza dei lati del quadrilatero piegato. Poi farne il pentagono simile incollandolo sulla foglia con la soluzione.

Zadanie 1. Krzyż Maltański (8 punktów)[104]

[105] Aby narysować Krzyż Maltański wystarczy:
wykreślić cztery okręgi, których środkami są wierzchołki kwadratu o boku 8 cm i które przechodzą przez środek kwadratu. Te cztery okręgi przecinają boki kwadratu w 8 punktach będących wierzchołkami ośmiokąta. Krzyż jest, więc ograniczony przez łuki okręgów i przez te boki ośmiokąta, które nie pokrywają się z bokami kwadratu.Narysuj i pokoloruj taki krzyż. Czy wspomniany ośmiokąt jest foremny ? Odpowiedź uzasadnij.

Zadania 2. Dwa w rogu (3 punkty)[106]

W kąt o mierze 60° wpisano dwa okręgi styczne zewnętrznie. Promień mniejszego okręgu ma długość 1. Oblicz długość promienia drugiego okręgu.

Zadanie 3. Trójkąty (6 punktów)[107]

Dany jest trójkąt równoramienny o tej własności, że dwusieczna jednego z jego kątów, dzieli go na dwa trójkąty równoramienne. Ewa i Michał wyznaczyli po jednym takim trójkącie. Obydwa mają różne kształty. Ewa narysowala swój z użyciem ekierki i cyrkla. Michał, zanim narysował swój za pomocą linijki i kątomierza, musiał najpierw wykonać obliczenia miar kątów. Narysuj dwa trójkąty postepując raz, jak Ewa, a drugi raz, jak Michał. Czy istnieją jeszcze inne takie trójkąty, różne od tych znalezionych przez Ewę i Michała? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Cztery kółka (4 punkty)[108]

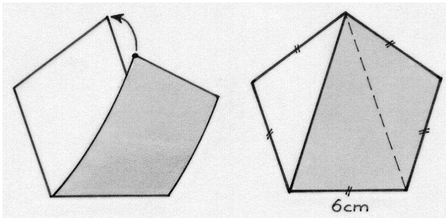
Dane są cztery okręgi. Każdy z nich jest styczny zewnętrznie do dokładnie dwóch spośród trzech pozostałych okręgów.

a) Uzasadnij, że środki tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, w który można wpisać okrąg.
b) Udowodnij, że punkty styczności tych okręgów są wierzchołkami czworokąta, na którym można opisać okrąg.

[104] Zaczerpnięto z [2]
[105] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania
[106] Zaczerpnięto z [3]
[107] Zaczerpnięto z [2]
[108] Zaczerpnięto z [3]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" - „Miary - wizyta u krawca"

Bonus na rozgrzewkę Origami (7 punktów) [109]

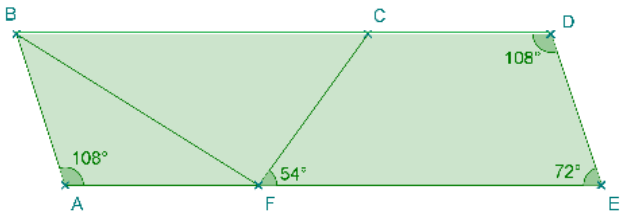


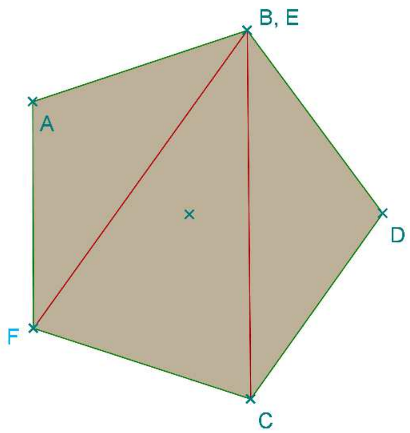
Ela wzięła kawałek papieru w kształcie czworokąta i złożyła go jednokrotnie, nakładając jeden wierzchołek czworokąta na przeciwległy.
Otrzymała w ten sposób pięciokąt foremny o boku długości 6 cm.
Obliczyć kąty i długości boków składanego czworokąta.
Następnie złożyć z niego taki pięciokąt i przykleić go na kartce z rozwiązaniem.

Bonus na rozgrzewkę Origami (7 punktów) [110]

Kąty pięciokąta foremnego mają po 108°. Początkowy czworokąt musi mieć, więc dwa takie kąty naprzeciw siebie. Niech będą to *A* i *D*. Z symetrii pięciokąta foremnego wynika, że przeciwległe boki czworokąta są równoległe, zatem dwa pozostałe kąty mają po 72°. Boki wynoszą wtedy:

$\left|\overline{BF}\right| = 12 \cdot \sin 54° \approx 9{,}7\ (cm)$; $\left|\overline{AE}\right| = 16 + 12 \cdot \sin 54° \approx 15{,}7\ (cm)$





111

Istnieją istotnie różne i prostsze rozwiązania.

Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
C	Obliczenie kątów czworokąta, zauważenie, że czworokąt musi mieć boki równoległe	0,5
D	Obliczenie długości boków czworokąta	0,5
E	Wycięcie czworokąta o wyznaczonych bokach i kątach i złożenie pięciokąta	2
F	Przetłumaczenie rozwiązania na język obcy	2

[109] Zaczerpnięto z [1]
[110] Zaczerpnięto z [1]
[111] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner w programie CaRMetal

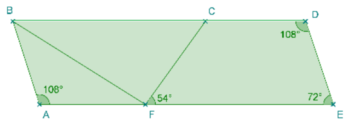
Bonus to warm-up Origami (7 points)

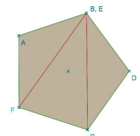
The measure of every angle in a regular pentagon is 108°. So, the quadrangle should have two opposite angles, each of 108°. Let it be the angles at the vertices *A* and *D*. From the symmetry of pentagon we get the parallel opposite sides of quadrangle. Hence, the measure of two other angles is 72° per every angle. And the lengths of sides are equal to

$$\left|\overline{BF}\right| = 12 \cdot \sin 54° \approx 9{,}7\ (cm);$$

$$\left|\overline{AE}\right| = 16 + 12 \cdot \sin 54° \approx 15{,}7\ (cm)$$

[112]





Of course, there are many different and simpler solutions of this exercise.

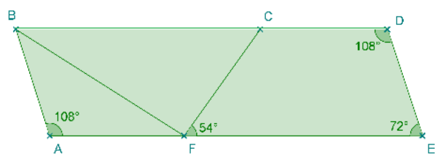
Scores

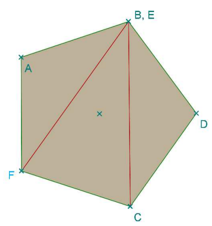
Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of the exercise text into Polish	1
B	Making a picture and introduction of notations	1
C	Calculating of quadrangle angles, noticing the fact that the quadrangle should have the parallel opposite sides.	0,5
D	Calculating the lengths of quadrangle sides.	0,5
E	Cutting out the appriopriate quadrangle with the right angles and sides. Folding it into pentagon.	2
F	Translation the solution into English.	2

Bonus pour l'échauffement Origami (7 points)

Les angles d'un pentagone régulier font chacun 108°. Le quadrangle initial doit en avoir deux - l'un en face de l'autre. *A* et *D* sont ces angles. Il en résulte de la symétrie que les deux côtés opposés d'un quadrangle sont parallès, donc chacun des deux angles restant font 72°.[113]

Les côtés mesurent alors: $\left|\overline{BF}\right| = 12 \cdot \sin 54° \approx 9{,}7\ (cm)$; $\left|\overline{AE}\right| = 16 + 12 \cdot \sin 54° \approx 15{,}7\ (cm)$





Il existe des solutions véritablement différentes et plus faciles.

Pointage

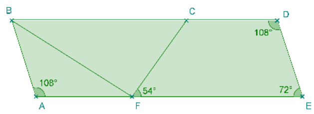
Numero de l'actividad	Solution étape par étape	Points
A	Traduire l'exercice en polonais	1
B	Faire un dessin, introduire les symboles	1
C	Compter les angles du quadrangle, remarquer qu'un quadrangle doit avoir des côtés parallèles	0,5
D	Calculer la longueur des côtés du quadrangle	0,5
E	Découper un quadrangle avec les côtés et les angles désignés, plier un pentagone	2
F	Traduire la solution en langue étrangère	2

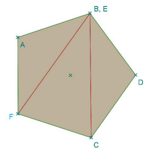
[112] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[113] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Prima para calentarse Origami (7 puntos)

Los ángulos del pentágono regular tienen cada uno 108°. El cuadrángulo inicial debe tener entonces dos tales ángulos de enfrente. Que lo sean A y D. De la simetría del pentágono regular resulta que los lados opuestos son paralelos, entonces dos ángulos que quedan, tienen cada uno 72°.

Los lados son entonces: $\left|\overline{BF}\right| = 12 \cdot \sin 54° \approx 9{,}7\ (cm)$; $\left|\overline{AE}\right| = 16 + 12 \cdot \sin 54° \approx 15{,}7\ (cm)$





[114]

Existen efectivamente las soluciones diferentes y más sencillas.

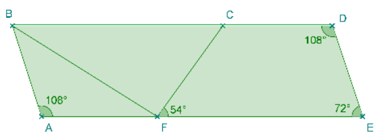
Puntuación

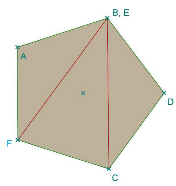
Numero de la actividad	Etapas de solución de tarea	Puntos
A	Traducción de la tarea en polaco	1
B	Realización del dibujo, introducción de las designaciones	1
C	Cálculo de los ángulos del cuadrángulo; observación que el cuadrángulo debe tener los lados paralelos	0,5
D	Cálculo de la longitud de lados del cuadrángulo	0,5
E	Recorte del cuadrángulo con lados y ángulos determinadosy realización del pentágono	2
F	Traducción de la solución en la lengua extranjera	2

Bonus zum Aufwärmen Origami (7 Punkte)

Die Ecken von einem regelmäßigen Fünfeck haben jeweils 108 Grad. Der Anfangsviereck soll also zwei gleiche gegenüberliegende Ecken haben. Seien es *A* und *D*. Aus der Symmetrie eines regelmäßigen Fünfecks ergibt sich, dass die gegenüberliegenden Viereckseiten miteinander parallel sind, also zwei übrige Ecken jeweils 72 Grad haben.

Seitenlänge betragen dann: $\left|\overline{BF}\right| = 12 \cdot \sin 54° \approx 9{,}7\ (cm)$; $\left|\overline{AE}\right| = 16 + 12 \cdot \sin 54° \approx 15{,}7\ (cm)$





[115]

Es gibt wesentlich verschiedene und einfachere Lösungen.

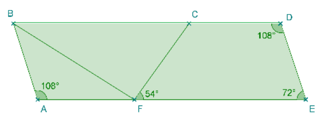
Punktwertung

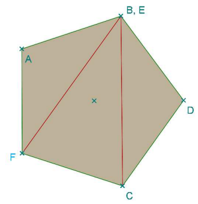
Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	1
B	Ausführung der Zeichnung, Einführen der Bezeichnungen	1
C	Berechnung von Ecken des Vierecks; Bemerkung , dass ein Viereck parallele Seiten haben muss.	0,5
D	Berechnung von Seitenlängen des Vierecks.	0,5
E	Ausschnitt von einem Viereck, der bemessene Seiten und Ecken hat, und Zusammenlegen eines Fünfecks.	2
F	Lösungsübersetzung in eine Fremdsprache	2

[114] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[115] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Abbuono per riscaldarsi Origami (7 punti)

Ogni angolo del pentagono regolare ha 108°.
Allora all'inizio il quadrilatero deve avere due angoli di questa misura all'opposito.
Siano gli angoli A e D. Dalla simetria del pentagono regolare risulta che i lati oppositi del quadrilatero sono paralleli, allora due angoli restante devono avere 72° ognuno.
Dunque i lati fanno: $BF = 12 \cdot \sin 54^0 \approx 9{,}7\ (cm)$; $AE = 6 + 12 \cdot \sin 54^0 \approx 15{,}7\ (cm)$
Ma esistono anche altre soluzioni più facili .





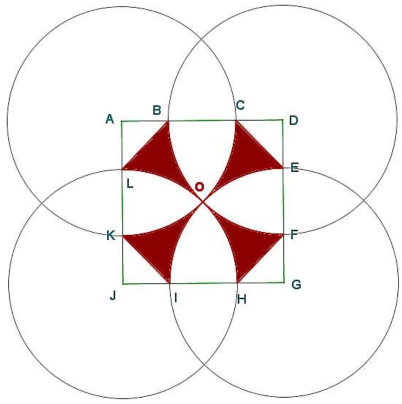
Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione dell'esercizio	Punti
A	Traduzione dell'esercizio nella lingua polacca	1
B	Preparazione del disegno, introduzione delle indicazioni	1
C	Calcolo degli angoli di quadrilatero, osservazione che il quadrilatero deve avere i lati paralleli	0,5
D	Calcolo dei lati del quadrilatero	0,5
E	Talio del quadrilatero con angoli e lati indicati e poi piegamento del pentagono	2
F	Traduzione della soluzione nella lingua straniera	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1. Krzyż Maltański (8 punktów)[116]

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku.
Bok kwadratu $\blacksquare ADGJ$ $\blacksquare ADGJ$ ma długość 8, więc jego przekątne mają długość $8\sqrt{2}$ $8\sqrt{2}$



Promienie r okręgów są równe połowie przekątnej kwadratu,
czyli $r=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$. $r=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}=4\sqrt{2}$Zatem
$AO=AC=BD=4\sqrt{2}$ $AO=AC=BD=4\sqrt{2}$
Zauważamy, że
$AC+BD=AB+BC+BC+CD=AD+BC$
czyli $AC+BD=AD+BC$, stąd otrzymujemy
$4\sqrt{2}+4\sqrt{2}=8+BC$ zatem
$BC=8\sqrt{2}-8=8\left(\sqrt{2}-1\right)$ $BC=8\sqrt{2}-8=8\left(\sqrt{2}-1\right)$
W trójkącie ΔABL ΔABL prostokątnym i równoramiennym mamy:
$AL=AB=AD-BD=8-4\sqrt{2}$
$BL=AB\sqrt{2}=\left(8-4\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=8\sqrt{2}-8=8\left(\sqrt{2}-1\right)$
$BL=AB\sqrt{2}=\left(8-4\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}=8\sqrt{2}-8=8\left(\sqrt{2}-1\right)$, zatem $BL=BC$ $BL=BC$
Osie symetrii kwadratu są jednocześnie osiami symetrii ośmiokąta $BCEFHIKL$ $BCEFHIKL$.
Z symetrii ośmiokąta $BCEFHIKL$ $BCEFHIKL$, otrzymujemy równość wszystkich ośmiu jego boków.
Ponieważ trójkąt ΔABL ΔABL jest prostokątny i równoramienny, to $|\sphericalangle ABL|=|\sphericalangle ALB|=45^\circ$ $|\sphericalangle ABL|=|\sphericalangle ALB|=45^\circ$, stąd otrzymujemy $|\sphericalangle LBC|=|\sphericalangle KLB|=180^\circ-45^\circ=135^\circ$ $|\sphericalangle LBC|=|\sphericalangle KLB|=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.
W ten sposób można pokazać, że wszystkie kąty ośmiokąta mają miarę po 135° każdy.
Wniosek: Ten ośmiokąt ma 8 równych boków i 8 równych kątów, więc jest foremny.

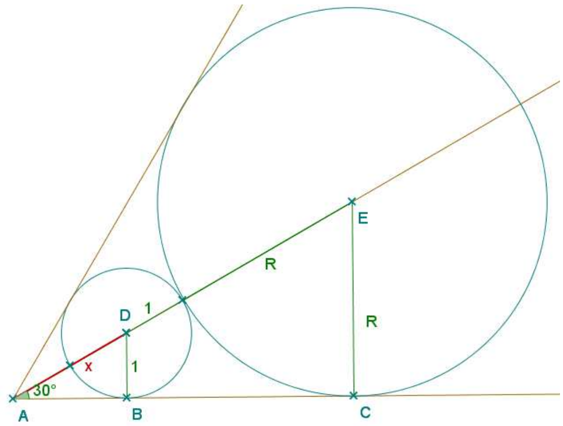
Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Narysowanie i pokolorowanie krzyża maltańskiego.	2
B	Wyznaczenie promienia rysowanych okręgów	1
C	Obliczenie długości odcinków i stwierdzenie ich równości (*BL*=*BC*).	2
D	Stwierdzenie, równości boków ośmiokąta, bo osie symetrii kwadratu są osiami symetrii ośmiokąta	1
E	Obliczenie miar kątów ośmiokąta	1
F	Stwierdzenia, że ośmiokąt jest foremny i uzasadnienie	1

[116] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 2 Dwa w rogu (3 punkty)

Sposób I[117]



Dane i oznaczenia:

Okręgi $o_1(D;1)$ i $o_2(E;R)$ zewnętrznie styczne oraz styczne do ramion kąta o mierze $60°$

$|\overline{AD}| = x$; $|CE| = R$; $|\overline{AE}| = x + 1 + R$

Szukane: R

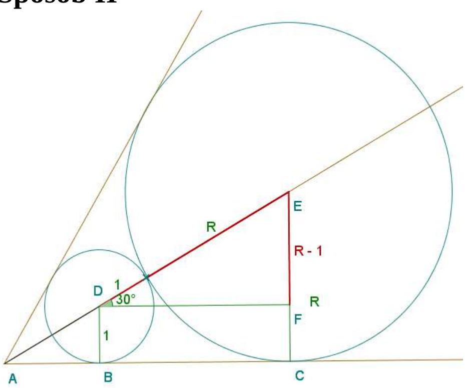
Rozwiązanie

W ΔABD: $\dfrac{|\overline{DB}|}{|\overline{AD}|} = \sin 30° \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2$

Zauważamy, że $\Delta ABD \sim \Delta ACE$. Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy:

$$\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{AD}|} = \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{AE}|} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{R}{2+1+R} \Leftrightarrow 3 + R = 2R \Leftrightarrow R = 3$$

Sposób II [118]



Tym razem rozważamy trójkąt prostokątny ΔDEF :

Zauważamy, że: jego przeciwprostokątna DE ma długość $R + 1$, a przyprostokątna $FE = R - 1$.

Ponieważ, $|\sphericalangle FDE| = 30°$

Korzystamy z definicji sinusa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i otrzymujemy:

$$\frac{|\overline{FE}|}{|\overline{DE}|} = \sin 30° \Leftrightarrow \frac{R-1}{R+1} = \frac{1}{2} \quad \text{zatem } 2R - 2 = R + 1 \Leftrightarrow R = 3$$
,

Odpowiedź: Długość promienia drugiego okręgu jest równa 3

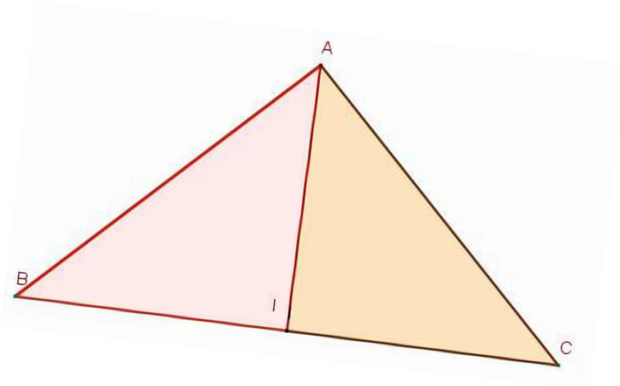
Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, oznaczenia, zapisanie danych	1
B	Wyznaczenie promienia większego okręgu	2

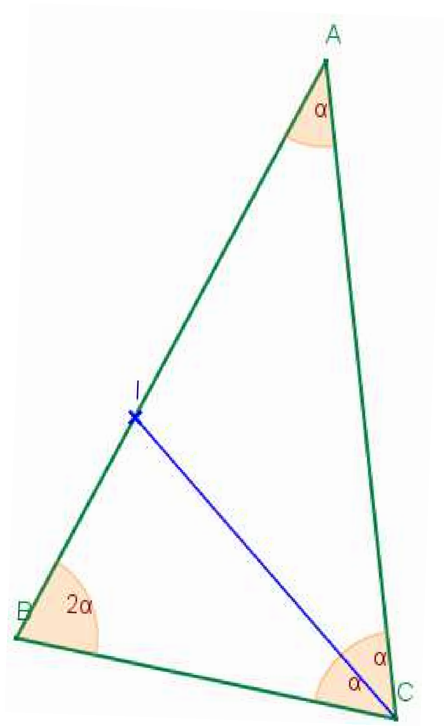
[117] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[118] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 3. Trójkąty (6 punktów)

Przypadek pierwszy– konstrukcja Ewy: [119]
Dwusieczna $\overline{AI}$ jest poprowadzona z wierzchołka A trójkąta równoramiennego BAC, w którym ramiona $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ są równe.
Trójkąty : ΔBAI oraz ΔCAI są przystające i prostokątne.
Jeśli są równoramienne, to ich kąty ostre mają miarę $45°$ stąd kąt $\measuredangle BAC$ ma miarę 90°.
Zatem początkowy trójkąt równoramienny ΔBAC był prostokątny.



Przypadek drugi – konstrukcja Michała: [120]
Dwusieczna $\overline{CI}\,\overline{CI}$ jest poprowadzona z wierzchołka C trójkąta równoramiennego ABC, w którym ramiona $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ są równe.
Jeśli trójkąt ΔBIC jest równoramienny, to równymi ramionami mogą być jedynie $\overline{BC}$ i $\overline{CI}$. Niech miara kąta $|\measuredangle ICB| = \alpha$. Wtedy $|\measuredangle ICA| = \alpha$ oraz $|\measuredangle BCA| = 2\alpha$, bo $\overline{CI}$ jest dwusieczną $\measuredangle BCA$.
$|\measuredangle CBA| = 2\alpha$, bo kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe. Jeśli $\overline{CI}$ ma podzielić dany trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, to ΔCIA też musi być równoramienny, którego ramionami mogą być tylko $\overline{CI}$ oraz $\overline{AI}$. Zatem $|\measuredangle IAC| = |\measuredangle ICA| = \alpha$
Z powyższego wynika, że suma miar kątów ΔBAC wynosi $2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha$ otrzymujemy w tym trójkącie zależności:
$5\alpha = 180°$, stąd $\alpha = 36°$. Zatem w trójkącie równoramiennym ΔABC kąty równe mają po 72°, a kąt $\measuredangle BAC$ ma miarę 36°.
Czyli drugi poszukiwany trójkąt ma kąt przy wierzchołku równy 36° a kąty przy podstawie mają miary 72°.



*Otrzymaliśmy, więc tylko dwa możliwe przypadki (*Innej możliwości nie ma.*):*
Jeśli dwusieczna kąta zawartego między ramionami dzieli trójkąt równoramienny na dwa trójkąty równoramienne, to dany trójkąt równoramienny jest prostokątny.
Jeśli dwusieczna kąta przy podstawie trójkąta równoramiennego dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne, to jego kąty mają miary : 72°; 72°; 36°.

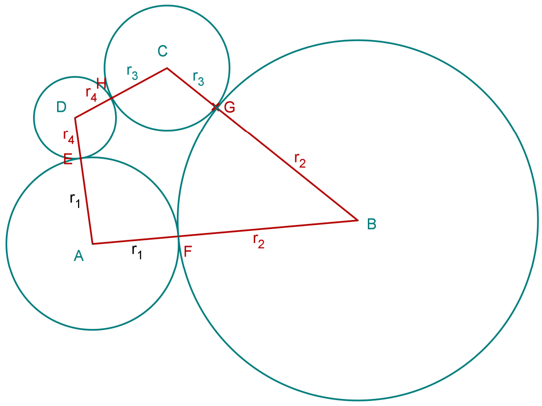
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie konstrukcji sposobem Ewy	2
B	Wykonanie konstrukcji sposobem Michała	3
C	Wykazanie, że innych możliwości nie ma	1

[119] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: GEONExT
[120] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: GEONExT

Zadanie 4. Cztery kółka (4 punkty)

Ad 1.



Rysunek[121] - dorysujmy odcinki łączące środki danych okręgów.

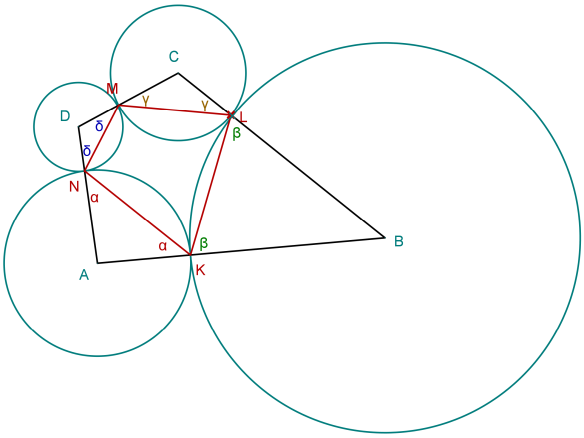
Odległość środków okręgów stycznych zewnętrznie jest równa sumie ich promieni,więc:

$AB + CD = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$ i $BC + DA = r_2 + r_3 + r_1 + r_4$

Zatem: $AB + CD = BC + DA$ (*równość sum przeciwległych boków*), czyli warunek wystarczający na to, aby w czworokąt można było wpisać okrąg.

Ad 2.

Rysunek[122] - dorysujmy odcinki łączące środki danych okręgów oraz punkty styczności.



Jeżeli oznaczymy kąty ostre trójkątów równoramiennych:

W ΔAKN:	W ΔBKL:
$\|\angle ANK\| = \|\angle AKN\| = \alpha$	$\|\angle BKL\| = \|\angle BLK\| = \beta$

W ΔCLM:	W ΔDMN:
$\|\angle CLM\| = \|\angle CML\| = \gamma$	$\|\angle DMN\| = \|\angle DNM\| = \delta$

Z rysunku i powyższych oznaczeń odczytujemy:

$|\angle NKL| = 180° - \alpha - \beta$; $|\angle KLM| = 180° - \beta - \gamma$; $|\angle LMN| = 180° - \gamma - \delta$; $|\angle MNK| = 180° - \alpha - \delta$

Z tych równości otrzymujemy:

$|\sphericalangle NKL| + |\sphericalangle LMN| = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ oraz $|\sphericalangle KLM| + |\sphericalangle MNK| = 360° - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

zatem $|\sphericalangle NKL| + |\sphericalangle LMN| = |\sphericalangle KLM| + |\sphericalangle MNK|$, co kończy dowód, bo równość sum przeciwległych kątów czworokąta jest warunkiem wystarczającym na to, żeby na czworokącie $\lozenge KLMN$ dało się opisać okrąg.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Dowód podpunktu 1	2
B	Dowód podpunktu 2	2

[121] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[122] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Miary - wizyta u krawca"

Zadanie 1 [123]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Exercise 1. Jam-jars (7 points) [124]

The housewife makes the jam putting four jars in a round pot (see the picture). The jars are of cylinder form with base's diameter length $12\ cm$. Distances between the jars are possibly the smallest. Calculate the length of radius R in the pot's base.

Exercice 1. Assaisonnements (7 points)

La maîtresse de maison, en faisant des « assaisonnements », met quatre pots cylindriques ayant pour base 12 cm de diamètre, dans une casserole ronde (comme sur le dessin ci-dessus). Les distances entre chaque pot sont les plus petites possibles. Calcule la longueur du rayon R de la base de la casserole.

Tarea 1. Encurtidos (7 puntos)

La dueña de casa, haciendo „encurtidos", mete en una olla redonda (como vemos en el presente dibujo) cuatro tarros en forma de cilindro con el diámetro de la base de la longitud de $12\ cm$. Las distancias entre los tarros respectivos son las más pequeñas de las posibles. Calcula la longitud del radio R de la base de esta olla.

Aufgabe 1. Tunken (7 Punkte)

Eine Hausfrau legt bei der Vorbereitung von „Tunken" in ein rundes Glas (wie in der dargestellten Abbildung) vier Gläser in Form vom Zylinder hinein, dessen Basis einen Durchmesser von hat. Die Abstände zwischen einzelnen Gläsern sind am kleinsten von den Möglichen. Berechne den Radius der Grundfläche des Topfes.

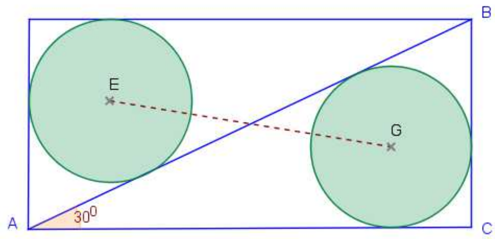
Esercizio 1. Le Confiture (7 punti)

Facendo le confiture la padrona mette nel pentolone rotondo (come dimostrato sulla foto) quattro barattoli col diametro della base di $12\ cm$. La distanza tra i barattoli è minima. Calcoli la lunghezza del raggio R della base di pentolone.

---

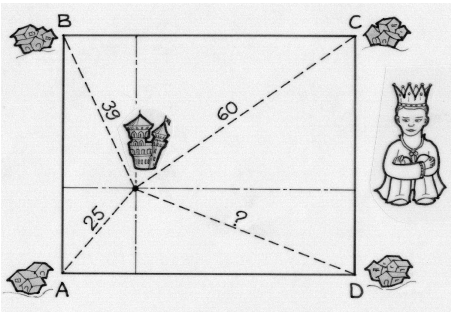
[123] Zaczerpnięto z [3] – Zadanie 5.17, strona 45
[124] Zdjęcia wykonała Helena Ewert - Fechner

Zadanie 2. Klomb i fontanny (5 punktów)[125]



Na rysunku[126] poniżej przedstawiony został szkic części parku. Dwie fontanny wpisano w prostokątny klomb kwiatów. Są one styczne do linii przekątnej klombu. Wiedząc, że przekątna klombu ma długość $AB = 10m$ oraz tworzy ona z jednym z boków klombu kąt o mierze $30°$, wyznacz odległość środków tych fontann.

Zadanie 3. Wyrocznia na odległość (4 punkty)[127]



[128] Królestwo króla Anzelma liczy sobie cztery miasteczka: A, B, C, D, które położone są w wierzchołkach prostokąta. Jego zamek znajduje się wewnątrz prostokąta oddalony o:

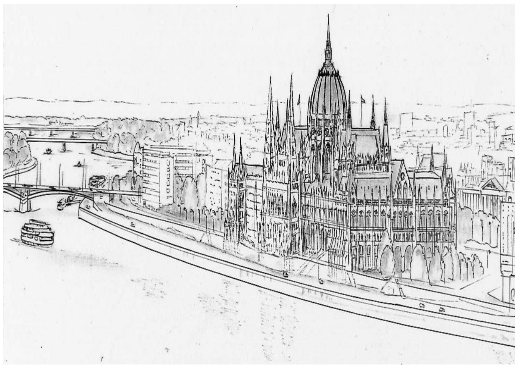
- 25 km od A,
- 39 km od B,
- 60 km od C.

Anzelm zastanawia się, w jakiej odległości od zamku położone jest miasteczko D. W tej sprawie skonsultował się ze swoim ministrem Żyropatem i oto odpowiedź, jaką otrzymał:

W czterech prostokątnych różnych trójkątach, Sławetne twierdzenie zastosujesz,
Cztery objawione dodasz równości, Sprytnie wyrażenia pogrupujesz,
Wtedy na karcie odpowiedź zagości

Obliczyć odległość z zamku do miasteczka D.

Zadanie 4. Z Budapesztu(4 punkty)[129]



[130] Fasada Parlamentu w Budapeszcie jest ozdobiona rozetą. Oto sposób wykonania jej szkicu :

- Narysować 3 okręgi o promieniu 3 cm parami styczne.
- Narysować duży okrąg styczny do trzech pozostałych, który ma po jednym punkcie styczności z każdym z nich.
- Wymazać trzy małe łuki znajdujące się w środku rozety, ograniczone przez punkty styczności trzech małych okręgów.

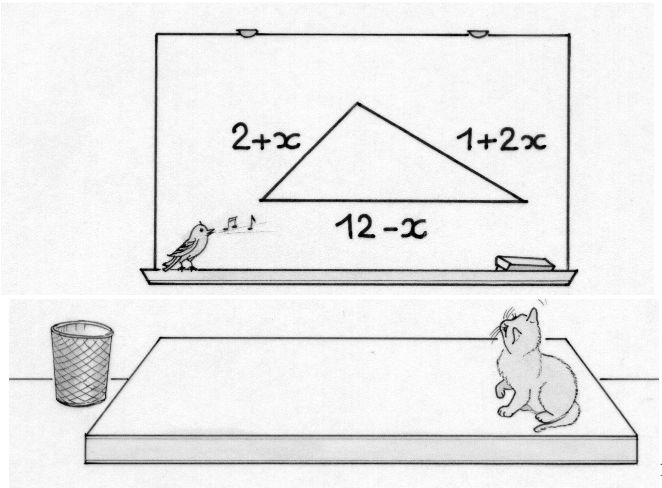
Na karcie odpowiedzi narysować rozetę i obliczyć promień dużego okręgu.

---

125 Zaczerpnięto z [2]
126 Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
127 Zaczerpnięto z [4]
128 Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania
129 Zaczerpnięto z [5]
130 Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania

Zadanie 5. Problem egzystencjalny (5 punktów)[131]

Stefan zobaczył ten trójkąt na czarnej tablicy.

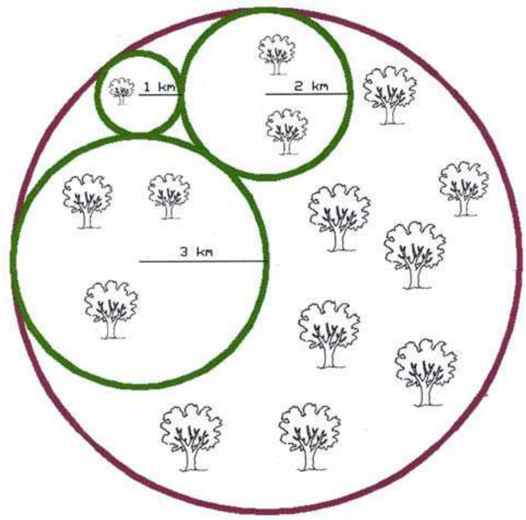


132

Dla jakich wartości x można zbudować taki trójkąt ? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6. Bieg przyjaciół (4 punkty)[133]

Luca i Andrea idą pobiegać do parku, gdzie znajdują się 4 okrągłe bieżnie, jedna duża zewnętrzna i trzy małe wewnątrz tej dużej, wszystkie stykają się ze sobą, tak jak to przedstawiono na rysunku. Bieżnie wewnętrzne mają promienie $1\,km$, $2\,km$ i $3\,km$. Luca przebiega cały dystans zewnętrznej bieżni w 3 godziny. Andrea przebiega wszystkie trzy wewnętrzne bieżnie, zwracając uwagę, aby nie przebiec ponownie tych odcinków, którymi już biegł i również jemu zajęło to trzy godziny.
Który z przyjaciół był szybszy? Uzasadnijcie odpowiedź.
(*Tekst zaproponowany przez klasę 2B średnią 'IISS "De Pace" – Lecce – zwyciężczyni konkursu Angela Bernasconi 2008*)



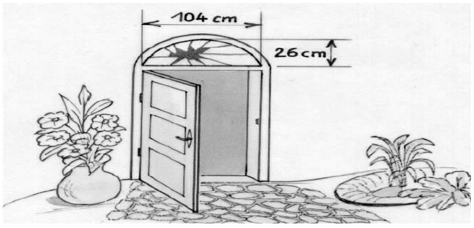
134

[131] Zaczerpnięto z [6]
[132] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania
[133] Zaczerpnięto z [7]
[134] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania

Zadanie 7. Średnie? A co na to geometria? (4 punkty)[135]

Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich x, y zachodzi następująca zależność między średnią arytmetyczną a geometryczną: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. Kiedy te średnie są równe?

Zadanie 8. Panienka z okienka (5 punktów)[136]



[137] Elżbieta musi wymienić zepsutą szybkę nad drzwiami wejściowymi. Szybka jest: ograniczona odcinkiem o długości $104\,cm$ i łukiem koła, a wysokość szybki wynosi $26\,cm$. Szklarz chce poznać promień łuku koła, aby wyciąć nową szybkę, zamówioną u niego przez Elżbietę.
Obliczyć promień łuku koła..

Zadanie 9. Dwie cięciwy (3 punkty) [138]

Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz okręgu tak, że odcinki jednej z nich mają długości 8 i 6, a odcinki drugiej pozostają w stosunku 2:3. Podaj długości odcinków drugiej cięciwy.

Zadanie 10. Wspólna styczna (4 punkty) [139]

Odległość między środkami okręgów o promieniach 2 i 7 wynosi 13. Prosta k jest styczna do obu okręgów w punktach A i B. Oblicz długość odcinka AB.

Zadanie 11. Cztery dwusieczne (3 punkty) [140]

Uzasadnij, że punkty przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych prostokąta $ABCD$ są wierzchołkami kwadratu.

[141]

Zadanie 12. Dwie dwusieczne (2 punkty) [142]

Dane są dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Wykaż, że dwusieczne tych kątów przetną się w punkcie należącym do okręgu.

---

[135] Zaczerpnięto z [1] - Strona 200, zadanie 5
[136] Zaczerpnięto z [8]
[137] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania
[138] Zaczerpnięto z [2]
[139] Zaczerpnięto z [2]
[140] Zaczerpnięto z [2]
[141] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: GEONExT
[142] Zaczerpnięto z [2]

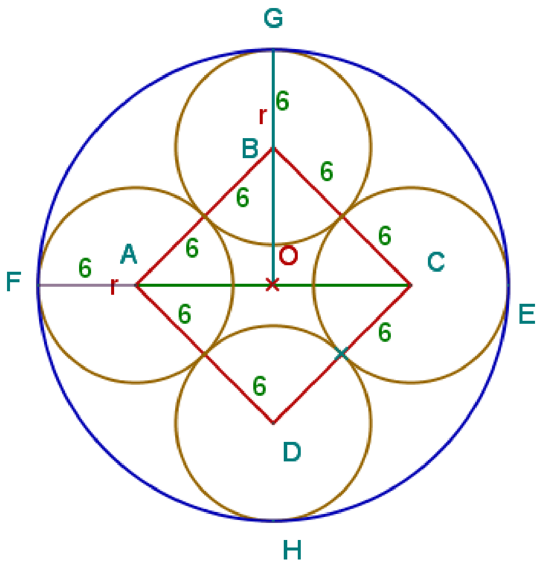
Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" – „Miary - wizyta u krawca"

Zadanie 1. Zaprawy (7 punktów)

Gospodyni robiąc „zaprawy" umieszcza w okrągłym garnku (jak na przedstawionym rysunku) cztery słoiki w kształcie walca o średnicy podstawy długości $12\ cm$. Odległości między poszczególnymi słoikami są najmniejsze z możliwych.
Oblicz długość promienia R podstawy garnka.

Zadanie 1. Zaprawy (7 punktów)

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku[143],



gdzie punkty A, B, C, D są środkami podstaw słoików.
Otrzymujemy kwadrat $\blacksquare ABCD$ o boku długości $12\ cm$ - np. $|\overline{AB}| = 6 + 6$

Przekątna tego kwadratu jest równa $|\overline{AC}|$, gdzie $|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2} \Rightarrow |\overline{AC}| = 12\sqrt{2}$

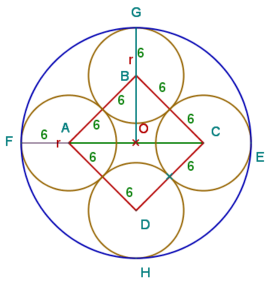
r - długość promienia garnka jest równa
$r = |\overline{OA}| + |\overline{AF}|$, gdzie $|\overline{OA}| = 6$, a $|\overline{AF}| = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2}$
zatem $r = 6 + 6\sqrt{2} = 6 \cdot (1 + \sqrt{2})$, czyli $r \approx 14{,}48\ cm$
Odpowiedź: Promień podstawy garnka ma długość około 14,5*cm*

Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
C	Obliczenie długości boku kwadratu i jego przekątnej	1
D	Obliczenie długości promienia	1
E	Podanie odpowiedzi	1
F	Przetłumaczenie rozwiązania na język obcy	2

[143] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Exercise 1. Jam-jars (7 points)



We take the notation just as on the picture[144], above, where the points A, B, C, D are the centers of jar bases.
We obtain a square $\blacksquare ABCD$ with side's length $12\ cm$ ($|\overline{AB}| = 6 + 6$).
The square's diagonal is equal to $\left|AC\right|$ $|\overline{AC}|$,

where $\left|AC\right| = \sqrt{\left|AB\right|^2 + \left|BC\right|^2} \Rightarrow \left|AC\right| = 12\sqrt{2}$ $|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2}$

r - radius of pot's base is equal to: $r = |\overline{OA}| + |\overline{AF}|$,
where $|\overline{OA}| = 6$ and $|\overline{AF}| = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2}$.

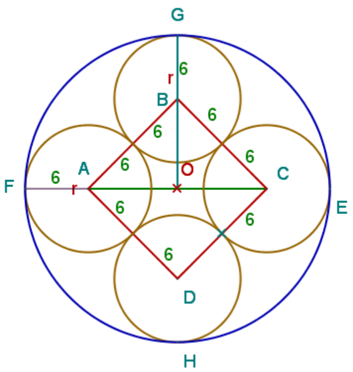
Hence, $r = 6 + 6\sqrt{2} = 6 \cdot (1 + \sqrt{2})$. Thus, $r \approx 14{,}48cm$ $r \approx 14{,}48\ cm$

Answer: The length of radius in the pot's base is about $14{,}5cm$

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of the exercise text into Polish	1
B	Making the picture and introduction of notations	1
C	Calculating lengths of a side and a diagonal of square	1
D	Calculating of radius length	1
E	Giving the answer	1
F	Translation of the solution into English	2

Exercice 1. Assaisonnements (7 points)



[145],Soient les points A, B, C, D les milieux des bases des pots, comme l'indiquent les symboles sur le dessin ci-dessus. Ainsi, obtenons-nous un carré $\blacksquare ABCD$ dont le côté est de $12\ cm$ - p.ex.

$|\overline{AB}| = 6 + 6$ $\left|AB\right| = 6 + 6$ La diagonale de ce carré est égale à .

$\left|AC\right|$ $|\overline{AC}|$

où $\left|AC\right| = \sqrt{\left|AB\right|^2 + \left|BC\right|^2} \Rightarrow \left|AC\right| = 12\sqrt{2}$ $|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2}$

r - la longueur du rayon de la casserole est égale à

$r = \left|OA + \left|AF\right|\right|$ $r = |\overline{OA}| + |\overline{AF}|$, où $\left|OA\right| = 6$ $|\overline{OA}| = 6$, et

$\left|AF\right| = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ $|\overline{AF}| = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2}$ donc

$r = 6 + 6\sqrt{2} = 6 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$ $r = 6 + 6\sqrt{2} = 6 \cdot (1 + \sqrt{2})$, cela veut dire $r \approx 14{,}48cm$ $r \approx 14{,}48\ cm$

Réponse: Le rayon de la base de la casserole a une longueur d'environ $14{,}5cm$

Pointage $14{,}5cm$

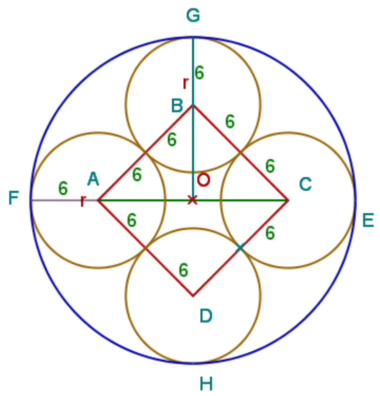
Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire l'exercice en polonais	1
B	Faire un dessin, introduire les symboles	1
C	Calculer la longueur d'un côté du carré et de sa diagonale	1
D	Calculer la longueur du rayon	1

[144] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[145] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

E	Donner la réponse	1
F	Traduire la solution en langue étrangère	2

Tarea 1 Encurtidos (7 puntos)



[146] Admitimos las designaciones como en el dibujo en el cuál los puntos A, B, C, D son centros de las bases de tarros. Obtenemos el cuadrado $\blacksquare ABCD$ del lado de la longitud de $12\ cm$ - por ejemplo: $|\overline{AB}| = 6+6\left|\overline{AB}\right| = 6+6\ |\overline{AB}| = 6+6$. La diagonal de este cuadrado es igual a $\left|\overline{AC}\right|\ |\overline{AC}|$ donde

$$|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2}|\overline{AC}| = 12\sqrt{2}$$

$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2} \Rightarrow \left|\overline{AC}\right| = 12\sqrt{2}$ r - la longitud del radio de olla es igual a $r = \left|\overline{OA} + \left|\overline{AF}\right|\right|$ donde $\left|\overline{OA}\right| = 6\ |\overline{OA}| = 6$, a

$\left|\overline{AF}\right| = \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\ |\overline{AF}| = \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}$entonces

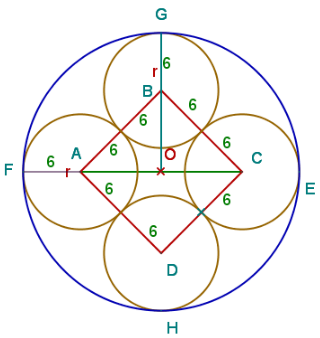
$r = 6+6\sqrt{2} = 6\cdot\left(1+\sqrt{2}\right) r = 6+6\sqrt{2} = 6\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$es decir $r \approx 14{,}48\ cm$.

Respuesta: El radio de la base de olla tiene la longitud cerca de $14{,}5cm$.

Puntuación

Numero de la acticidad	Etapas de solución de tarea	Puntos
A	Traducción de la tarea en polaco	1
B	Realización del dibujo, introducción de las designaciones	1
C	Cálculo de la longitud del lado del cuadrado y de su diámetro	1
D	Cálculo de la longitud del radio	1
E	Comunicación de la respuesta	1
F	Traducción de la solución en la lengua extranjera	2

Aufgabe 1. Tunken (7 Punkte)



[147] Wir nehmen die Bezeichnungen so wie in der Abbildung an, wo die Punkte A, B, C, D Mittel der Grundflächen sind, wir bekommen ein Quadrat $\blacksquare ABCD$ mit Seitenlänge $12cm$ - z.B. $\left|\overline{AB}\right| = 6+6$. Die Diagonale des Quadrats ist gleich $\left|\overline{AC}\right|$

wo $\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2} \Rightarrow \left|\overline{AC}\right| = 12\sqrt{2}$, r der Radius des Topfes ist gleich $r = \left|\overline{OA} + \left|\overline{AF}\right|\right|$, wo $\left|\overline{OA}\right| = 6$, und $\left|\overline{AF}\right| = \frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ folglich

$r = 6+6\sqrt{2} = 6\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$, also $r \approx 14{,}48cm$

Die Antwort: Der Radius der Grundfläche des Topfes hat die Länge von etwa $14{,}5cm$

Punktwertung

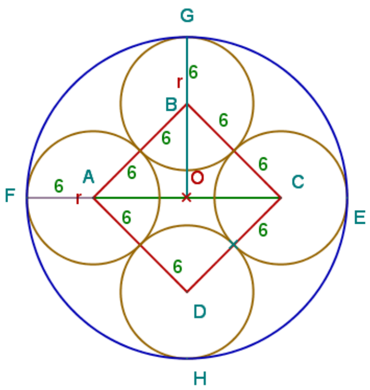
Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnische	1
B	Ausführung der Zeichnung, Einführen der Bezeichnungen	1

[146] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[147] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

C	Berechnung der Seitenlänge des Quadrats und seiner Diagonale	1
D	Berechnung der Radiuslänge	1
E	Angabe der Lösung	1
F	Lösungsübersetzung in eine Fremdsprache	2

Esercizio 1 La Confiture (7 punti)



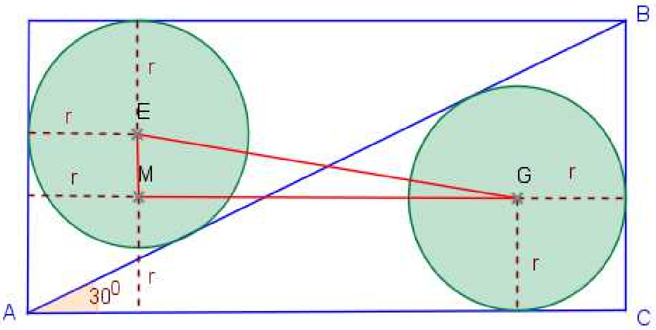
Prendiamo le indicazioni come sul disegno, dove i punti A, B, C, D sono centri delle basi di barattoli. Otteniamo il quadrato $\blacksquare ABCD$ col lungo di $12\ cm$ - p.es. $|\overline{AB}| = 6 + 6$
La diagonale di questo quadrato fa $|\overline{AC}|$ dove
$|\overline{AC}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 + |\overline{BC}|^2}$; $|\overline{AC}| = 12\sqrt{2}$
r - la lunghezza del raggio di pentolone fa
$r = |\overline{OA}| + |\overline{AF}|$,
dove $|\overline{OA}| = 6$, a $|\overline{AF}| = \frac{1}{2} \cdot 12\sqrt{2}$ dunque
$r = 6 + 6\sqrt{2} = 6 \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right)$, czyli $r \approx 14{,}48\ cm$
Risposta: Il raggio della base di pentolone misura circa $14{,}5 cm$

Punteggio

N. attivita	Rappe della soluzione dell’esercizio	Punti
A	Traduzione dell’esercizio nella lingua polacca	1
B	Preparazione del disegno, introduzione delle indicazioni	1
C	Calcolo Della lunghezza di lato del quadrato e della sua diagonale	1
D	Calcolo della lunghezza di raggio	1
E	Risposta adatta	1
F	Traduzione della soluzione nella lingua straniera	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Klomb i fontanny (5 punktów)



[148] **Dane i oznaczenia:**
Prostokąt o przekątnej
$AB = 10\ m$ $|\angle BAC| = 30^0$
Koła (o równych promieniach) styczne do ramion prostokąta i do jego przekątnej *(jak na rysunku)*
Punkty E; G są środkami tych kół.
Szukane:
Odległość środków tych kół, $|\overline{EG}|$=?

Długość odcinka $\overline{EG}$ wyliczymy z trójkąta prostokątnego ΔEGM , ale najpierw musimy wyliczyć długości boków prostokąta oraz promień okręgu wpisanego w ΔABC. Boki wyliczamy z podanego kąta i długości przeciwprostokątnej $|\overline{AB}| = 10$. $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad |\overline{AC}| = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

$\frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \sin 30° = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad |\overline{BC}| = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$ Promień okręgu wpisanego w ΔABC wyliczamy

ze wzoru: $P = pr$, gdzie P oznacza pole trójkąta; p - połowę obwodu trójkąta, r - promień okręgu wpisanego w trójkąt

$$r = \frac{\frac{|\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}|}{2}}{\frac{|\overline{AC}| + |\overline{BC}| + |\overline{AB}|}{2}} = \frac{5\sqrt{3} \cdot 5}{5\sqrt{3} + 5 + 10} = \frac{25\sqrt{3}}{15 + 5\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3} \cdot (3 - \sqrt{3})}{9 - 3} = \frac{15\sqrt{3} - 15}{6} = \frac{5\sqrt{3} - 5}{2}$$

Możemy teraz obliczyć długości przyprostokątnych trójkąta ΔEGM

$$|\overline{EM}| = |\overline{BC}| - 2 \cdot r = 5 - 2 \cdot \frac{5\sqrt{3} - 5}{2} = 10 - 5\sqrt{3} \qquad |\overline{MG}| = |\overline{AC}| - 2 \cdot r = 5\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{5\sqrt{3} - 5}{2} = 5\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 5 = 5$$

Teraz do ΔEMG stosujemy twierdzenie Pitagorasa

$$\left(|\overline{EG}|\right)^2 = \left(|\overline{EM}|\right)^2 + \left(|\overline{MG}|\right)^2 = \left(10 - 5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 5^2\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 5^2 \cdot \left(4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1\right) = 5^2 \cdot \left(8 - 4\sqrt{3}\right)$$

$\left(|\overline{EG}|\right)^2 = 5^2 \cdot 4 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 5^2 \cdot 2^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)$, Zatem szukana odległość jest

równa $|\overline{EG}| = \sqrt{5^2 \cdot 2^2 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right)} = 10 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Odpowiedź: Odległość środków fontann wynosi $10 \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}\ m$

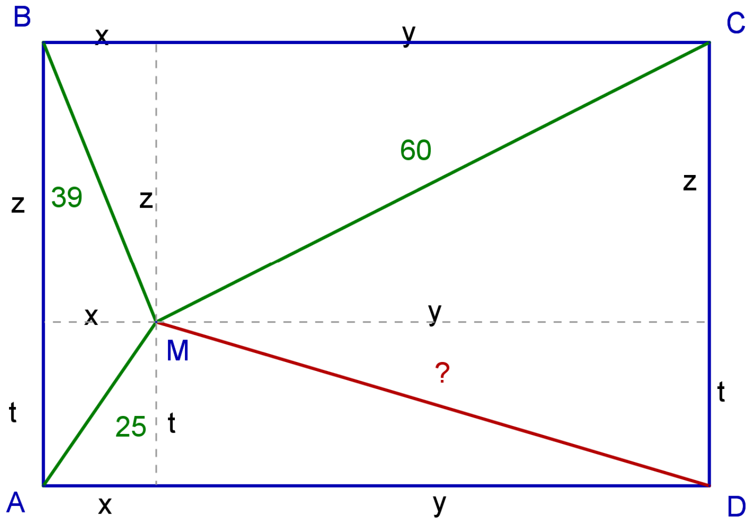
Punktacja

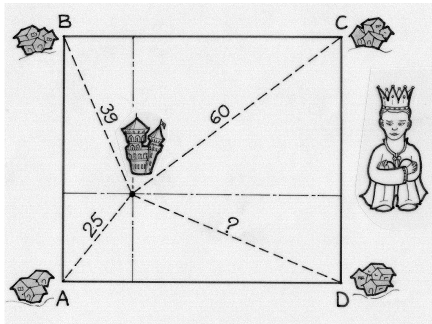
Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku z pomocniczymi liniami, wprowadzenie oznaczeń, plan rozwiązania	1
B	Obliczenie boków prostokąta i jednocześnie boków ΔABC	1
C	Obliczenie długości promienia okręgu wpisanego w ΔABC	1
D	Obliczenie długości przyprostokątnych ΔEGM	1
E	Obliczenie odległości środków fontann i podanie odpwiedzi	1

[148] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 3. Wyrocznia na odległość (4 punkty)

[149] Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:





Dane i oznaczenia:

Szukane:

Zamek znajduje się w punkcie M.

$|AM| = 25$ $\qquad |BM| = 39$ $\qquad |CM| = 60$ $\qquad |MD| = ?$

Przez punkt M prowadzimy prostopadłe do boków prostokąta. Te proste wraz z odcinkami łączącymi zamek z miasteczkami podzieliły królestwo na trójkąty prostokątne. Ich przyprostokątne oznaczamy: $x;\ y;\ t;\ z$. Otrzymaliśmy cztery rodzaje trójkątów prostokątnych, stosując do nich twierdzenie Pitagorasa otrzymujemy następujące relacje:

$x^2 + z^2 = 39^2\ (*)$ $\qquad y^2 + z^2 = 60^2\ (**)$ $\qquad x^2 + t^2 = 25^2\ (***)$ $\qquad y^2 + t^2 = |MD|^2\ (****)$

Dodając powyższe równania stronami, otrzymujemy:

$$x^2 + z^2 + y^2 + z^2 + x^2 + t^2 + y^2 + t^2 = 39^2 + 60^2 + 25^2 + |MD|^2;$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 = 1521 + 3600 + 625 + |MD|^2 \Rightarrow 2 \cdot \left(\overbrace{x^2 + t^2}^{(***)} + \overbrace{y^2 + z^2}^{(**)} \right) = 5746 + |MD|^2$$

Uwzględniamy $(^{***})$ i $(^{**})$ mamy: $2 \cdot (625 + 3600) = |MD|^2 + 5747 \Rightarrow 2 \cdot (25^2 + 60^2) = |MD|^2 + 5746$

$\Rightarrow |MD|^2 = 2 \cdot 4225 - 5746 \Rightarrow |MD|^2 = 2704 \Rightarrow |MD| = \sqrt{2704} \Rightarrow |MD| = 52$

Odpowiedź: Odległość, która dzieli zamek od miasteczka D wynosi 52 km.

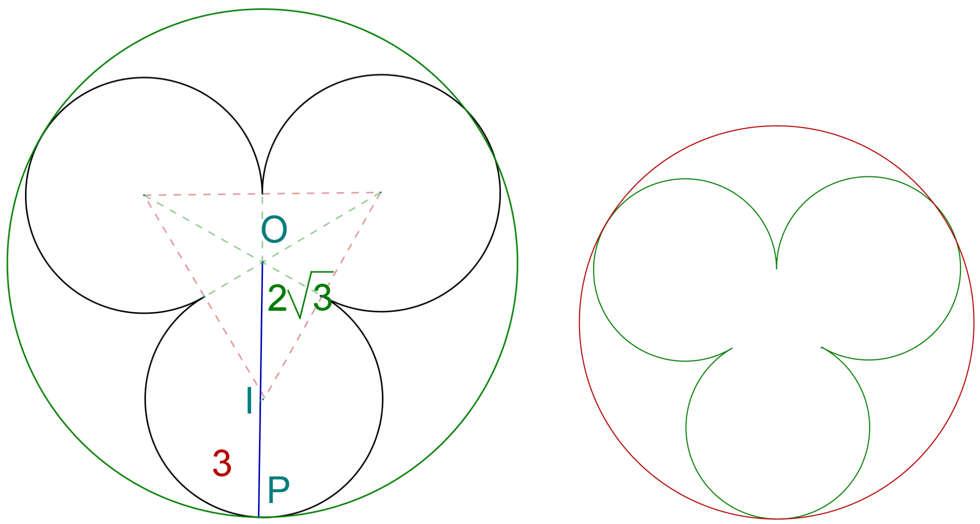
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Zapisanie relacji wynikających z twierdzenia Pitagorasa	1
C	Dodanie równań stronami i pogrupowanie wyrazów	1
D	Wyznaczenie z równania wartości $\lvert MD \rvert$ i podanie odpowiedzi	1

[149] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 4. Z Budapesztu (4 punkty) [150]



Środki trzech małych okręgów tworzą trójkąt równoboczny o boku $a = 2 \cdot 3cm = 6cm$
Środek O dużego okręgu jest też środkiem ciężkości i punktem przecięcia się wysokości tego trójkąta.

W trójkącie równobocznym długość środkowej wynosi: $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

Punkt O jest położony w dwóch trzecich tej środkowej, więc $|\overline{OI}| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}cm$
Zatem promień dużego okręgu wynosi: $|\overline{OP}| = |\overline{OI}| + |\overline{IP}| = 2\sqrt{3} + 3(\approx 6{,}5cm)$
Odpowiedź:

Promień dużego okręgu w przybliżeniu równa się $6{,}5cm$.

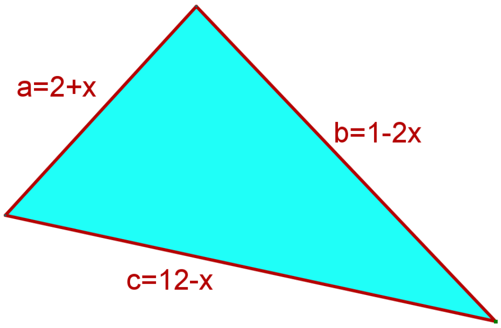
Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punków
A	Narysowanie 3 okręgów parami styczne o promieniu 3 cm	0,5
B	Narysowanie dużego okręgu stycznego do trzech pozostałych, który ma po jednym punkcie styczności z każdym z nich.	1
C	Wymazanie trzech małych łuków w środku rozety	0,5
D	Obliczenie środkowej trójkąta, którego wierzchołkami są środki małych okręgów	1
E	Obliczenie długości promienia dużego okręgu	1

[150] Rysunki wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 5. Problem egzystencjalny (5 punktów)

Wprowadzamy oznaczenia[151] : $a = 2 + x;\ b = 1 + 2x;\ c = 12 - x$



Liczby dodatnie $a,\ b,\ c$ są długościami boków trójkąta tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

$$(*)\ a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0 \wedge a + b > 0 \wedge b + c > a \wedge a + c > b$$

Uwzględniając przyjęte oznaczenia otrzymujemy, że jeśli taki trójkąt istnieje to muszą być spełnione wszystkie poniższe warunki:

$a > 0 \Leftrightarrow 2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -2$;

$b > 0 \Leftrightarrow 1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -0{,}5$;

$c > 0 \Leftrightarrow 12 - x > 0 \Leftrightarrow x < 12$

$a + b > c \Leftrightarrow 2 + x + 1 + 2x > 12 - x \Leftrightarrow 3 + 3x > 12 - x \Leftrightarrow 4x > 9 \Leftrightarrow x > 2{,}25$

$b + c > a \Leftrightarrow 1 + 2x + 12 - x \Leftrightarrow 2 + x \Leftrightarrow x + 13 > 2 + x \Leftrightarrow 13 > 2$ co oznacza, że warunek jest prawdziwy dla wszystkich x

$a + c > b \Leftrightarrow 2 + x + 12 - x > 1 + 2x \Leftrightarrow 14 > 1 + 2x \Leftrightarrow 2x < 13 \Leftrightarrow x < 6{,}5$

Zbiorem rozwiązań wszystkich nierówności jest przedział $(2{,}25; 6{,}5)$, co oznacza, że taki trójkąt istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (2{,}25; 6{,}5)$

Odpowiedź :

Trójkąt o bokach $(2 + x); 1(+2x); (12 - x)$ istnieje dla $x \in (2{,}25; 6{,}5)$

Punktacja

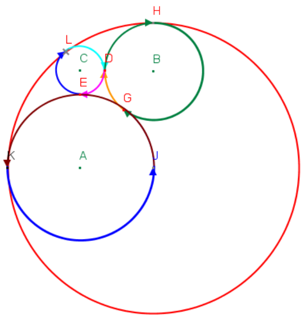
Czynność	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przyjęcie oznaczeń, zapisanie nierówności trójkąta	1
B	Rozwiązanie otrzymanego układu nierówności	3
C	Podanie odpowiedzi	1

[151] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 6. Bieg przyjaciół (4 punkty)

Okręgi, które są bieżniami oznaczamy: [152]

Luca biega po okręgu $o(J;\,R)$; Andrea po okręgach: $o(A;\,3)$; $o(B;\,2)$; $o(C;1)$.



Okręgi: $o(A;\,3)$; $o(B;\,2)$; $o(C;1)$ są parami zewnętrznie styczne ponadto każdy z nich jest wewnętrznie styczny do $o(J;\,R)$. Czas biegu to $3\,h$.

Rozstrzygnij, który z przyjaciół jest szybszy?

Andrea może przebiec wszystkie trzy wewnętrzne bieżnie, tak, aby nie przebiec ponownie tych odcinków, którymi już biegł.

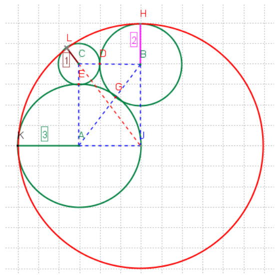
Może to być na przykład trasa: $ELDHGJKEGDE$,

Jej długość równa jest sumie obwodów trzech małych okręgów.

Zatem Andrea pokonuje trasę długości

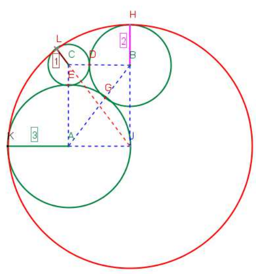
$s_A = 2\pi\cdot 1 + 2\pi\cdot 2 + 2\pi\cdot 3 = 2\pi + 4\pi + 6\pi = 12\pi\ (km)$

zajęło mu to trzy godziny, więc biegł z prędkością: $v_A = \frac{12\pi}{3}\left[\frac{km}{h}\right] = 4\pi\left[\frac{km}{h}\right]$.



Okręgi: $o(A;\,3)$; $o(B;\,2)$; $o(C;1)$ są parami zewnętrznie styczne wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środków każdej pary okręgów równa jest sumie długości promieni tych okręgów.

Otrzymujemy, zatem: $|AB| = 3 + 2 = 5$; $|BC| = 2 + 1 = 3$; $|AC| = 3 + 1 = 4$



Zauważamy, że $|AC|^2 + |BC|^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$ oraz $|AB|^2 = 5^2 = 25$ czyli, że w ΔABC suma kwadratów dwóch jego boków równa jest kwadratowi trzeciego boku, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa ΔABC jest prostokątny.

Następnie zauważamy, że czworokąt $ACBJ$ jest prostokątem.

Każdy z okręgów: $o(A;\,3)$; $o(B;\,2)$; $o(C;1)$ zawiera się w $k(J;\,R)$ i jest wewnętrznie styczny do $o(J;\,R)$. Odległości środka J od środków tych okręgów muszą być równe różnicy promieni. Promień zewnętrznego okręgu oznaczyliśmy przez R, uwzględniając oznaczenia na rysunku mamy: $R = |JK| = |JL| = |JH|$. Otrzymujemy stąd:

$|JC| = R - 1 \Rightarrow R = |JC| + 1$, ale $|JC| = |AB| = 5$, stąd $R = 5 + 1 = 6$

$|JB| = R - 2 \Rightarrow R = |JB| + 2$, ale $|JB| = |AC| = 4$, stąd $R = 4 + 2 = 6$

$|JA| = R - 3 \Rightarrow R = |JA| + 3$, ale $|JA| = 3$, stąd $R = 3 + 3 = 6$

Luca przebiegł dystans równy długości obwodu dużego okręgu, czyli $s_L = 2\pi\cdot R = 2\pi\cdot 6 = 12\pi\ (km)$. Luca swój dystans pokonał w trzy godziny, zatem biegał z prędkością: $v_L = \frac{12\pi}{3}\left[\frac{km}{h}\right] = 4\pi\left[\frac{km}{h}\right] = v_A$.

Odpowiedź:

Żaden z przyjaciół nie był szybszy, ponieważ prędkości, z jaką biegali są równe: $v_A = 4\pi\left[\frac{km}{h}\right] = v_L$.

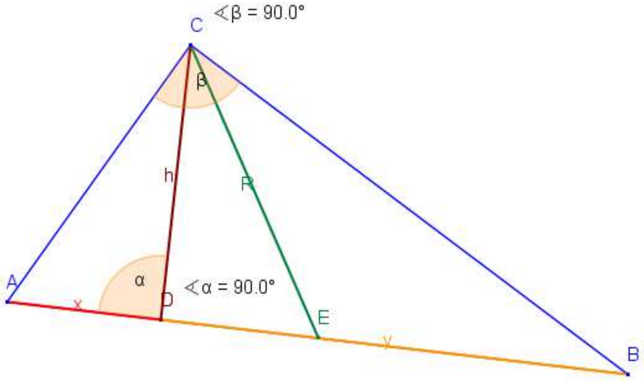
[152] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Obliczenie dystansu (lub prędkości), jaki pokonał Andrea	1
C	Obliczenie promienia dużego okręgu	1
D	Obliczenie dystansu (lub prędkości), jaki pokonał Luca. Odpowiedzi z uzasadnieniem	1

Zadanie 7. Średnie? A co na to geometria? (4 punkty)

Dane, rysunek[153] i oznaczenia:



Wykazać, że $(x < 0 \ i \ y > 0) \to \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$.

Rozważamy trójkąt prostokątny ΔABC, w którym:

$|\angle ACB| = 90°$, a wysokość $|\overline{CD}| = h$.

Przyjmujemy, że:

$0 < x < y$; $|\overline{AD}| = x$; $|\overline{DB}| = y$.

Punkt E jest środkiem odcinka $\overline{AB}$, czyli przeciwprostokątnej.

$\overline{CE}$ jest środkową trójkąta ΔABC

Zauważamy, że ΔADC jest podobny do ΔCDB.

Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy:

$$\frac{|CD|}{|AD|} = \frac{|DB|}{|CD|} \leftrightarrow \frac{h}{x} = \frac{y}{h} \leftrightarrow h^2 = x \cdot y, \text{ zatem } h = \sqrt{x \cdot y}.$$

W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest średnicą okręgu opisanego na tym trójkącie, zatem punkt E jest środkiem tego okręgu.

Otrzymujemy, więc $|AB| = 2R$ oraz $|AB| = x + y$, zatem $R = \frac{x+y}{2}$, stąd $2R = x + y$.

Z kolei ΔCDE jest trójkątem prostokątnym, w którym, $R > h$ bo przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej, zatem $\frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y}$.

Jeśli $x = y$, to punkty D i E się pokrywają, a trójkąt ΔABC jest prostokątny i równoramienny i $|CD| = |CE|$, stąd $h = R$, czyli $\sqrt{x \cdot y} = \frac{x+y}{2}$

Odpowiedź:

Dla dowolnych dodatnich liczb x; y prawdziwa jest nierówność $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$, przy czym równość zachodzi, gdy $x = y$.

Punktacja

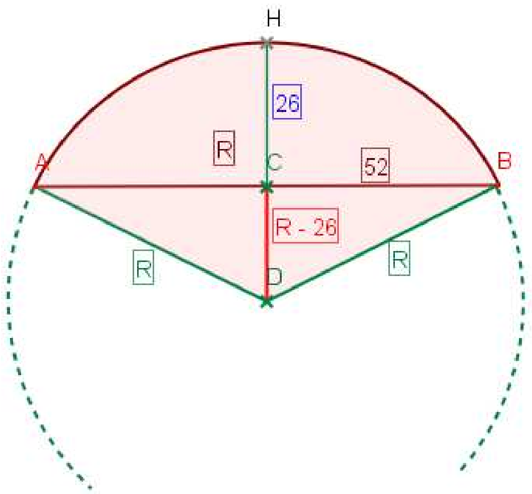
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Wykazanie, że w trójkącie prostokątnym wysokość jest średnią geometryczną rzutów x; y prostokątnych przyprostokątnych na przeciwprostokątną	1
C	Wyrażenie promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym przez x *oraz* y	1
D	Porównanie wysokości i promienia okręgu opisanego na trójkącie, sformułowanie wniosku.	1

[153] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: GEONExT

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 8. Panienka z okienka (5 punktów)

Dane i oznaczenia jak na rysunku[154]:
Niech D będzie środkiem okręgu, który zawiera łuk AHB,
punkt C jest środkiem odcinka $\overline{AB}$, odcinek $\overline{DC}$ zawiera się w symetralnej odcinka $\overline{AB}$
$\left|\overline{AB}\right| = 104\ cm \Rightarrow \left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{CB}\right| = 52\ cm \Rightarrow \left|\overline{HC}\right| = 26\ cm$
Szukany promień oznaczamy przez R. Zatem $|DA| = |DH| = |DB| = R$



Zgodnie z treścią zadania i przyjętymi oznaczeniami otrzymujemy $|DC| = |DH| - |HC|$, zatem
$|DC| = R - 26$
Stosując twierdzenie Pitagorasa do trójkąta prostokątnego ΔDCB otrzymujemy:
$|DC|^2 + |CB|^2 = |DB|^2$, a stąd $(R-26)^2 + 52^2 = R^2$, następnie mamy
$R^2 - 2\cdot 26\cdot R + 26^2 + (2\cdot 26)^2 = R^2 \Leftrightarrow 2\cdot 26\cdot R = 26^2\cdot(1+4)$
$R = \dfrac{5\cdot 26^2}{2\cdot 26} = \dfrac{5\cdot 26}{2} = 5\cdot 13 = 65$
Rozwiązaniem tego równania jest $R = 65\ cm$
Odpowiedź:
Szybkę należy wyciąć z okręgu o promieniu $R = 65\ cm$

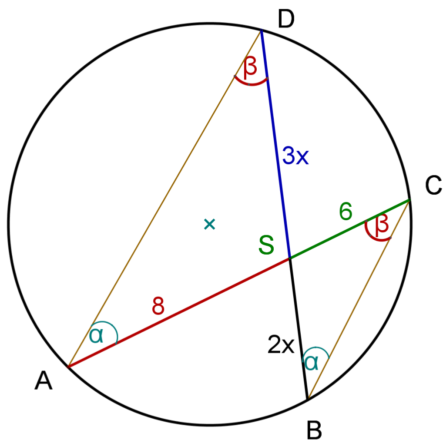
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Zapisanie zależności $\left|DC\right| = R - 26$	1
C	Prawidłowe równanie	1
D	Rozwiązanie równania i odpowiedź	2

[154] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: GEONExT

Zadanie 9. Dwie cięciwy (3 punkty)

Rysunek[155], dane i oznaczenia:



Dane cięciwy:

$\overline{AC}$ i $\overline{BD}$

$\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{S\}$- cięciwy przecinają się w punkcie S

$$\left|\overline{AS}\right| = 8$$

$$\left|\overline{SC}\right| = 6$$

$$\left|\overline{SD}\right| = 2x$$

$$\left|\overline{BS}\right| = 3x$$

$$x > 0 \Rightarrow D = R_+$$

Sposób I

Jeżeli połączymy końce narysowanych cięciw oraz zaznaczymy kąty wpisane oparte na tych samych łukach, to widać, że otrzymamy dwa trójkąty podobne ΔASD oraz ΔBSC.
Z podobieństwa tych trójkątów otrzymujemy:

$$\frac{AS}{SD} = \frac{BS}{SC} \Leftrightarrow \frac{8}{3x} = \frac{2x}{6} \quad \left| \cdot 3x \right.$$

$$8 = \frac{2x}{6} \cdot 3x \Leftrightarrow 8 = x^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2} \notin D$$

Zatem $\left|\overline{BS}\right| = 4\sqrt{2}$ i $\left|\overline{DS}\right| = 6\sqrt{2}$

Sposób II

Mogliśmy też od razu skorzystać z twierdzenia o odcinkach siecznych:

$$\left|\overline{AS}\right| \cdot \left|\overline{SC}\right| = \left|\overline{BS}\right| \cdot \left|\overline{SD}\right| \Leftrightarrow 8 \cdot 6 = 2x \cdot 3x \quad \left| : 6 \right.$$

$$8 = x^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2} \vee x = -2\sqrt{2} \notin D$$

Zatem $\left|\overline{BS}\right| = 4\sqrt{2}$ i $\left|\overline{DS}\right| = 6\sqrt{2}$

Odpowiedź:

Długości odcinków drugiej cięciwy wynoszą: $4\sqrt{2}$ i $6\sqrt{2}$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Prawidłowe równanie	1
C	Rozwiązanie równania i odpowiedź	1

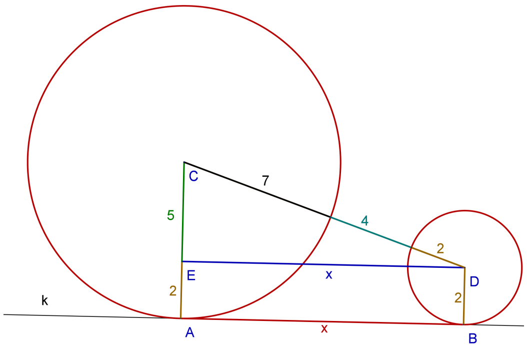
[155] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 10. Wspólna styczna (4 punkty)

Dane:
Okręgi: $o(C;7)$ i $o(D;2)$
Prosta k, styczna do tych okręgów w punktach A i B
Oblicz:
Odległość punktów A i B, czyli $|AB|$

Trzeba dorysować odcinek *(niebieski)* $\overline{ED}$, który jest równoległy do prostej k, prostopadły do $\overline{CA}$ i taki, że $|\overline{ED}| = |\overline{AB}|$. Rozważamy dwa przypadki:

I – okręgi leżą po tej samej stronie prostej k [156]



W trójkącie prostokątnym ∇CED
na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

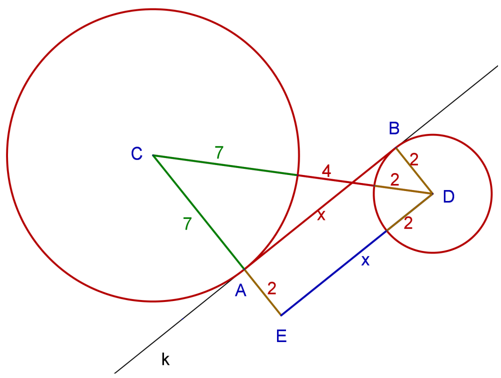
$$|\overline{CE}|^2 + |\overline{ED}|^2 = |\overline{CD}|^2$$

$$5^2 + x^2 = 13^2$$

$$25 + x^2 = 169$$

$$x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$$

II - okręgi leżą po przeciwnych stronach prostej k [157]



W drugiej sytuacji
analogicznie – też rozważamy na trójkąt ∇CED

$$|\overline{CE}|^2 + |\overline{ED}|^2 = |\overline{CD}|^2$$

$$9^2 + x^2 = 13^2$$

$$81 + x^2 = 169$$

$$x^2 = 88 \Rightarrow x = 2\sqrt{22}$$

Odpowiedź:

Odległość punktów A i B, czyli $|AB| = 12$ lub $|AB| = 2\sqrt{22}$

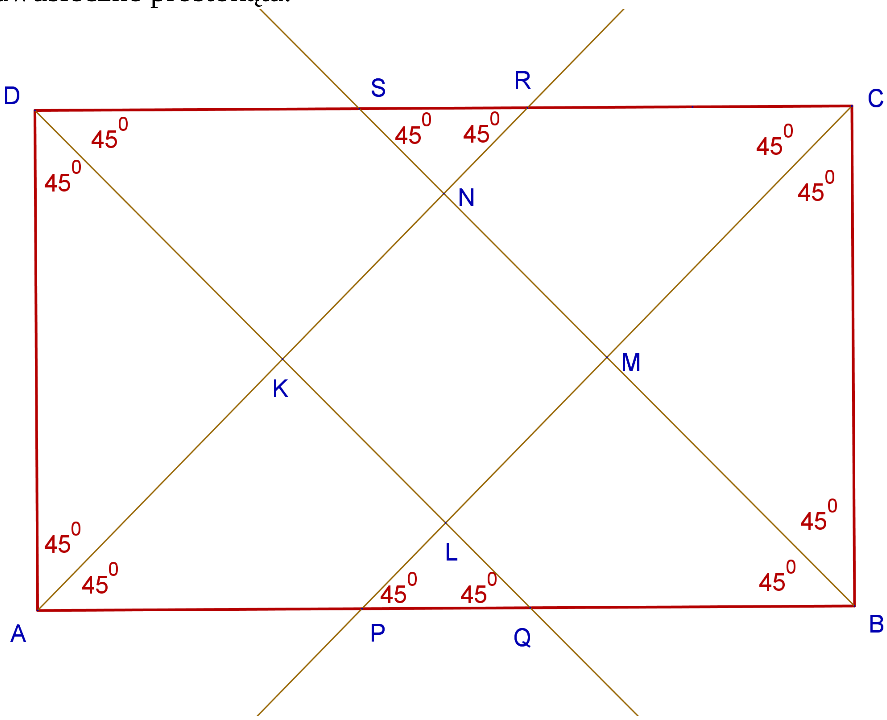
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie danych, wprowadzenie oznaczeń, zauważenie, że są dwa przypadki	1
B	Prawidłowe rozwiązanie I przypadku – łącznie z rysunkiem	1,5
C	Prawidłowe rozwiązanie II przypadku – łącznie z rysunkiem	1,5

[156] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[157] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

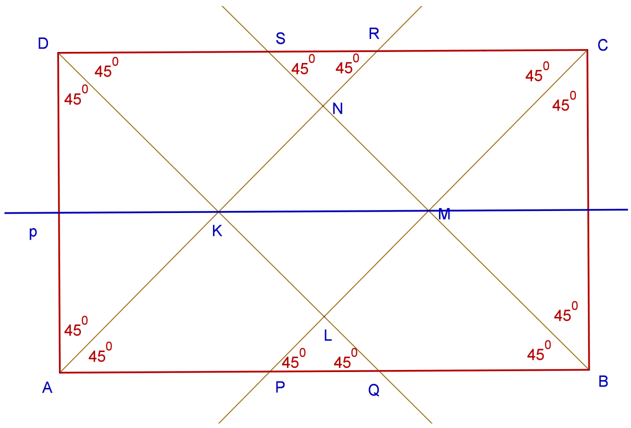
Zadanie 11. Cztery dwusieczne (3 punkty)

[158],Dorysujmy dwusieczne prostokąta:



Zauważmy, że każdy z trójkątów ΔAKD; ΔPQL; ΔBMC; ΔRNS ma dwa kąty równe 45°, więc są to trójkąty prostokątne i równoramienne.
To oznacza, że każdy z kątów czworokąta *KLMN* jest prosty, jest to więc prostokąt.
Pozostało wykazać, że tak naprawdę jest to kwadrat.

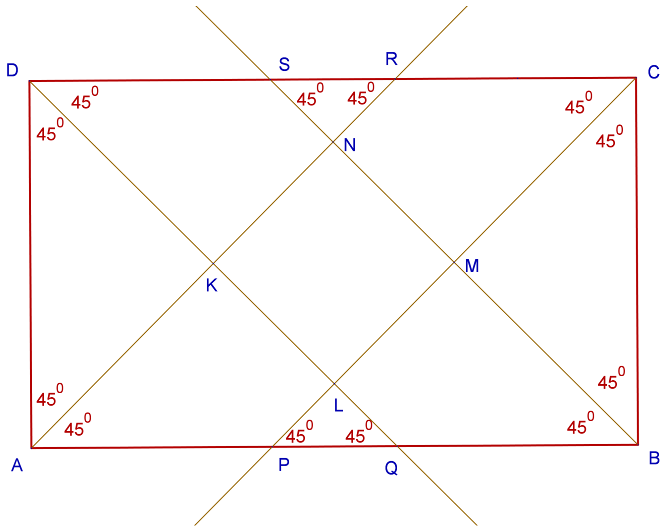
Sposób I[159]



Zauważmy, że prosta p przechodząca przez środki boków *AD* i BC jest osią symetrii całego narysowanego obrazka, tzn. w symetrii względem tej prostej na siebie przechodzi zarówno prostokąt, jak i jego dwusieczne.
Ponadto prosta ta zwiera przekątną *KM* prostokąta *KLMN*. To oznacza, że jest to także oś symetrii tego prostokąta. To kończy dowód, bo prostokąt, w którym przekątna jest osią symetrii musi być kwadratem.

[158] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal
[159] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Sposób II[160]



Pokażemy, że dwa sąsiednie boki prostokąta $KLMN$ są równe, co będzie oznaczało, że musi to być kwadrat.

Zauważmy, że trójkąty ΔDAQ i ΔADR są przystające (oba mają równe kąty i wspólny bok AD).

Zatem $AQ = DR$. To oznacza, że $RC = QB$. Analogicznie pokazujemy, że $DS = AP$.

Mamy, więc $SR = DC - DS - RC = AB - AP - QB = PQ$

To z kolei oznacza, że trójkąty ∇PQL i ∇SNR są przystające. Zatem

$KL = DQ - DK - LQ = PC - CM - PL = LM$ co kończy dowód.

Sposób III

Tak jak poprzednio zauważamy, że $RC = QB$.

Teraz rozważamy równoległoboki $\lozenge APCR$ i $\lozenge QBSD$. Mają one równe kąty i równe długości boków, co oznacza, że są przystające. W takim razie mają równe wysokości, czyli $KL = LM$

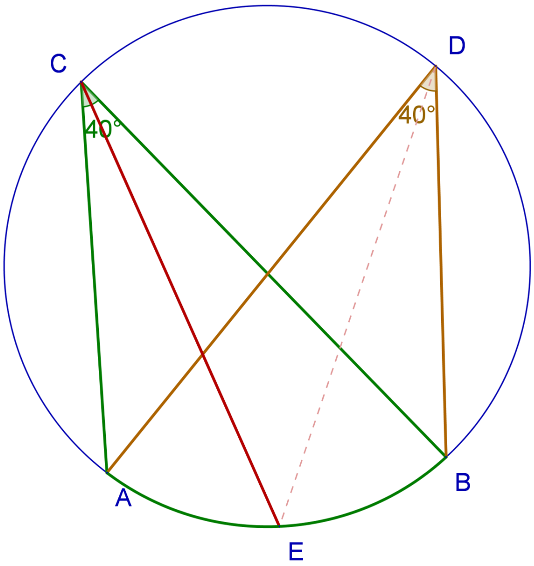
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku i zaznaczenie kątów o mierze $45°$	1
B	Wykazanie, że czworokąt jest prostokątem	1
C	Wykazanie, że prostokąt jest kwadratem	1

[160] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu: CarMetal

Zadanie 12. Dwie dwusieczne (2 punkty)

Zaczynamy od rysunku i niech $\angle ACB$ i $\angle ADB$ będą oparte na tym samym łuku.



Jeżeli poprowadzimy dwusieczną kąta ACB, to jej punkt przecięcia E z okręgiem, podzieli łuk AB na dwie równe części.
W takim razie prosta DE jest dwusieczną kąta ADB.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sporządzenie rysunku i oznaczenia	1
B	Wykazanie, że dwusieczne przecinają się w tym samym punkcie okręgu	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Pakiet M - 2.6 „Ścinki, wycinki … wizyta u krawca dwa”

I. Treści merytoryczne:

- pola trójkątów, czworokątów i innych wielokątów;
- pole koła, pole wycinka koła;
- przystawanie i podobieństwo figur. pola figur przystających i pola figur podobnych;
- okrąg wpisany w kąt. wielokąt wpisany w okrąg, wielokąt opisany na okręgu;
- wielokąty foremne;
- wzajemne położenie okręgów;
- twierdzenie Pitagorasa.

II. Cele szczegółowe:

- doskonalenie umiejętności sporządzania rysunków ilustrujących treść zadania;
- doskonalenie umiejętności sporządzania konstrukcji geometrycznych;
- kształcenie umiejętności wykorzystywania własności figur przystających i figur podobnych, w tym umieszczonych w kontekście praktycznym;
- kształcenie umiejętności wyznaczania pól figur płaskich;
- kształcenie umiejętności rozumowania przez analogię;
- kształcenie wyobraźni i sprawności manualnej - konstruowanie, wycinanie, naklejanie różnych figur płaskich w celu tworzenia z nich nowych konfiguracji, itp.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy , asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1] Dyda B., Romanowicz Z., *Zdania dla przyszłych olimpijczyków*, Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław 2008
[2] http://www.zadania.info

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1] Dyda B., Romanowicz Z., *Zdania dla przyszłych olimpijczyków*, Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław 2008
[2] Matematyka Bez Granic, Etap finałowy konkursu, 7 marca 2007
[3] Matematyka Bez Granic, Etap finałowy konkursu, 10 luty 2009
[4] http://www.zadania.info

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Ścinki, wycinki … wizyta u krawca dwa”

Bonus na rozgrzewkę „Trochę białego, trochę zielonego?”[161]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Bonus to warm-up Some white, some green? (7 points)

Some rectangle white paper card (with the vertices$ABCD$ $ABCD$) has area 20 cm2. The card was folded overlapping the opposite vertices A and C. After it the pentagon $BCD'EF$ was obtained with area $BCD'EF$ 12 cm2. The both sides of this pentagon was painted with a green colour. Next, the pentagon was unfolded obtaining again a rectangle. The one side of the rectangle was bicoloured. What is the area of white part of this rectangle?

Bonus pour l’échauffement Un Peu De Blanc, Un Peu De Vert? (7 points)

Une feuille de papier blanche et rectangulaire, de sommets $ABCD$ et dont l’aire est de 20 cm2 a été pliée de façon à superposer les deux sommets opposés A et C. Ainsi, a-t-on créé un pentagone $BCD'EF$$BCD'EF$ dont l’aire est de 12 cm2 que l’on a d’abord colorié en vert des deux côtés et puis que l’on a déplié en retrouvant le rectangle initial. Un côté du rectangle est maintenant bicolore. Quelle est l’aire de la partie blanche ?

Bonus zum Aufwärmen Ein bisschen Weiß, ein bisschen Grün? (7 Punkte)

Ein rechteckiges, weißes Blatt Papier mit Scheiteln: und einer Fläche von 20 cm2 wurde gebogen und auf solche Weise zusammengelegt, dass zwei gegenüberliegende Scheiteln A und C sich berührten. Auf diese Weise entstand ein Fünfeck mit einer Fläche von 12 cm2, der von beiden Seiten mit grüner Farbe bemalt und danach ausgebreitet wurde. Damit hat man den Ausgangsrechteck bekommen. Eine Seite des Rechtecks ist jetzt zweitfarbig. Was ist die Fläche des weißen Teils?

Prima para calentarse Un Poco De Blanco, Un Poco De Verde (7 puntos)

Una hoja de papel rectangular blanca con las cúspides: $ABCD$ $ABCD$ y el área de 20 cm2 fue doblada de esta manera que las dos cúspides opuestas A y C se juntaron.Así, se formó un pentágono $BCD'EF$ $BCD'EF$ de área de 12 cm2 que pintaron de ambos lados de color verde y después desplegaron obteniendo el rectángulo inicial. Una parte del rectángulo es ahora de dos colores. ¿Cuál es el área de la superficie de la parte blanca?

Abbuono per riscaldarsi Un Po’ Di Bianco, Un Po’ Di Verde? (7 punti)

Una foglia bianca rettangolare coi vertici: $ABCD$ e la superficie di 20 cm^2 viene piegata di tale modo, che si sono toccati due vertici oppositi A e C. Cosi si è formato il pentagono $BCD'EF$ con la superficie di 12 cm^2, il quale viene dipinto da due parti co nil colore verde, e poi l’hanno piegato, ottenendo di nuovo lo stesso rettangolo iniziale. Una parte del rettangolo è adesso bicolore. Qual’è la superficie della parte bianca?

[161] Zaczerpnięto z [1] - Zadanie 72, Strona 50

Zadanie 1. W pierścieniu (3 punkty)[162]

Na sześciokącie foremnym opisano okrąg i w ten sześciokąt wpisano okrąg. Pole powstałego pierścienia jest równe $2\pi\ dm^2$. Oblicz pole powierzchni wielokąta.

Zadanie 2. Dwa w kącie (6 punktów)[163]

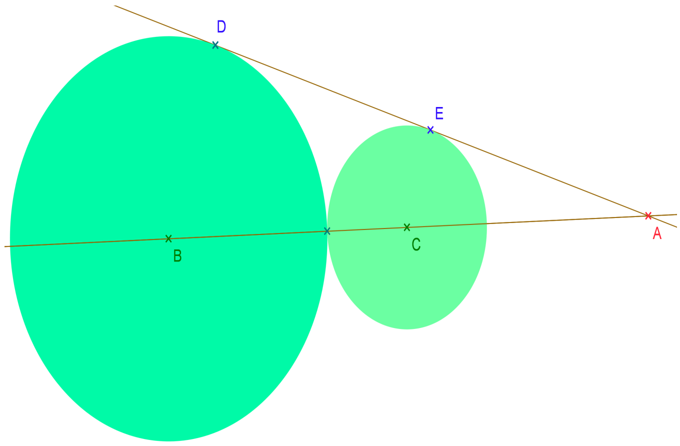
Ramiona kąta o mierze 60° przecięto prostą $pr.k$ prostopadłą do jednego z ramion kąta i wpisano dwa koła styczne do obu ramion tego kąta i prostej $pr.k$. Oblicz stosunek pól tych kół.

Zadanie 3. Środki takie same, a jakie pola? (5 punktów)[164]

Udowodnij, że jeżeli środki boków dwóch czworokątów wypukłych pokrywają się, to pola tych czworokątów są równe.

Zadanie 4. Dwa koła, a gdzie trójkąt? (5 punktów)[165]

Dane są 2 styczne zewnętrznie koła[166]:



$k_1(B;R)$ i $k_2(C;r)$ o promieniach R i r ($R > r$) oraz środkach B i C.
Do tych kół poprowadzono wspólną styczną, która jest styczna do tych kół odpowiednio w punktach D i E $(D \neq E)$.

Oblicz pole trójkąta ΔABD, gdzie A jest punktem przecięcia się prostych $pr.BC$ i $pr.DE$.

[162] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie nr 2111107
[163] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie nr 6918455
[164] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie nr 2132558
[165] Zaczerpnięto z [2] - Zadanie nr 319888
[166] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

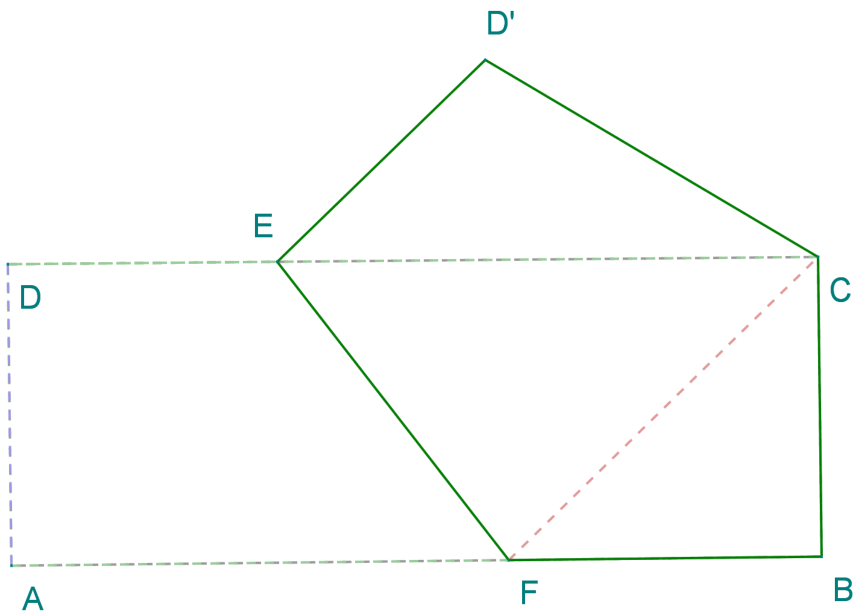
Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” - „Ścinki, wycinki … wizyta u krawca dwa”

Bonus na rozgrzewkę Trochę białego, trochę zielonego? (7 punktów)

Prostokątną, białą kartkę papieru o wierzchołkach: $ABCD$ $ABCD$ i polu 20 cm^2 zgięto i złożono w ten sposób, że zetknęły się dwa przeciwległe wierzchołki A i C.
W ten sposób powstał pięciobok $BCD'EF$ $BCD'EF$ o polu 12 cm^2, który pomalowano z obu stron zieloną farbą, a następnie rozłożono, otrzymując wyjściowy prostokąt.
Jedna strona prostokąta jest teraz dwukolorowa.
Jakie jest pole powierzchni białej części?

Bonus na rozgrzewkę Trochę białego, trochę zielonego? (7 punktów)

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku: [167]



Pomalowano na zielono powstały po złożeniu kartki pięciobok $BCD'EF$.
Pomalowano z obu stron, czyli łącznie 24 cm^2 papieru.
Po rozłożeniu mamy łącznie 40 cm^2 papieru (dwie strony po 20 cm^2),
czyli biała część zajmuje $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$.

Odpowiedź:

Pole powierzchni białej części prostokąta wynosi $16cm^2$

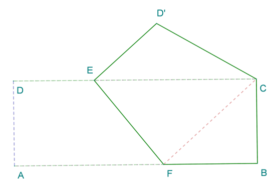
Punktacja

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	2
C	Wykonanie obliczeń i odpowiedź	2
D	Przetłumaczenie rozwiązania na język obcy	2

[167] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Bonus to warm-up Some white, some green? (7 points)

We take the notation as on the picture below[168]



We know, that after the folding a pentagon $BCD'EF$ $BCD'EF$ was painted with green.

Two sides are painted so, the painted area is equal to 24 cm^2.

After unfolding we have 40 cm^2 of paper (two sides, each of 20 cm^2).

Thus, white part has the area:

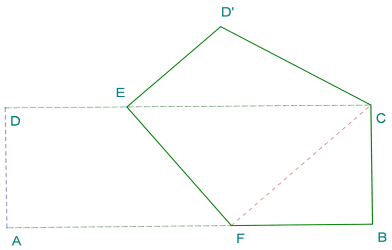
$40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$ $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$.

Answer: The area of white part of this rectangle is $16cm^2$ $16cm^2$

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of exercise's text into Polish	1
B	Making the picture, introduction of notations	2
C	Calculations and the answer	2
D	Translation of solution into English	2

Bonus pour l'échauffement Un peu de blanc, un peu de vert? (7 points)



Soit le dessin ci-dessous: [169]:

On a colorié en vert le pentagone $BCD'EF$ formé après avoir plié la feuille de papier.

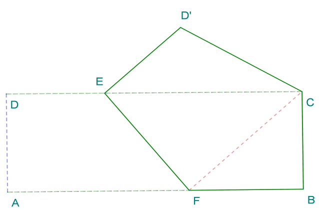
On a colorié les deux côtés, soit en tout, 24 cm^2 de papier.Après l'avoir déplié, nous totalisons 40 cm^2 de papier (deux feuilles de 20 cm^2), donc la partie blanche occupe $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$ $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$

Réponse: L'aire de la partie rectangulaire blanche est de $16cm^2$

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire l'exercice en polonais	1
B	Faire un dessin, introduire les symboles	2
C	Faire les calculs et donner la réponse	2
D	Traduire la solution en langue étrangère	2

Bonus zum Aufwärmen Ein bisschen Weiß, ein bisschen Grün? (7 Punkte)



Nehmen wir Bezeichnungen wie auf der Zeichnung an. [170]: Mit Grün wurde das nach der Zusammensetzung von dem Blatt entstandene Fünfeck $BCD'EF$ bemalt. Es wurde zweiseitig bemalt, also insgesamt 24 cm^2 Papier. Nach dem Ausbreiten haben wir insgesamt 40 cm^2 Papier (zwei Seiten mit jeweils 20 cm^2), also der weiße Teil belegt . $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$

Antwort: Die Fläche des weißen Rechteckteils beträgt $16cm^2$.

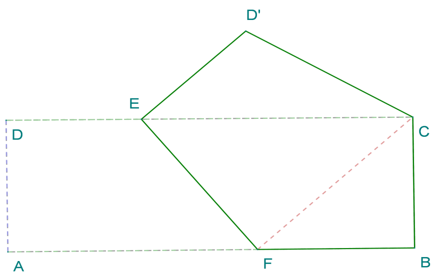
Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnische	1
B	Ausführung der Zeichnung, Einführen der Bezeichnungen	2

[168] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[169] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[170] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

C	Ausführung von Berechnungen und Antwort	2
D	Lösungsübersetzung in eine Fremdsprache	2

Prima para calentarse Un Poco De Blanco, Un Poco De Verde (7 puntos)



Admitimos las designaciones como en el dibujo: [171]:

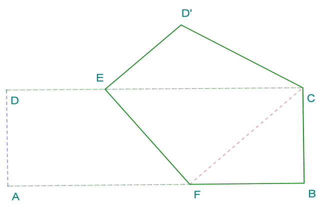
Pintaron de color verde el pentágono $BCD'EF$ for mado después de haber plegado la hoja de papel.
Pintaron de ambos lados, a saber conjuntamente 24 cm^2 de papel. Después de haber desplegado tenemos juntos 40 cm^2 de papel (dos partes 20 cm^2 cada una), es decir la parte blanca ocupa: $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$ $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$.

Respuesta: El área de la superficie blanca de la parte del rectángulo es $16cm^2$ $16cm^2$.

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de solución de tarea	Puntos
A	Traducción de la tarea en polaco	1
B	Realización del dibujo, introducción de las designaciones	1
C	Realización de cálculos y respuesta	2
D	Traducción de la solución en la lengua extranjera	2

Abbuono per riscaldarsi Un Po' Di Bianco, Un Po' Di Verde? (7 punti)



Prendiamo le indicazioni come sul disegno :
Dopo aver piegato la foglia hanno dipinto il pentagono ottenuto $BCD'EF$.
Dipinto da due parti, allora insieme 24 cm^2 di foglia. Dopo la spiegazione abbiamo 40 cm^2 della foglia (due parti di 20 cm^2), dunque la parte bianca fa $40cm^2 - 24cm^2 = 16cm^2$.

Risposta: La superficie Della parte bianca del rettangolo fa $16cm^2$

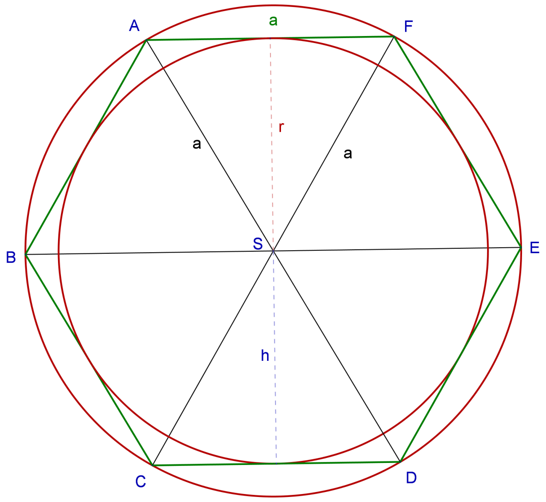
Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Punti
A	Traduzione dell'esercizio nella lingua polacca	1
B	Preparazione del disegno, introduzione delle indicazioni	2
C	Esecuzione dei calcoli e la risposta	2
D	Traduzione della risposta nella lingua polacca	2

[171] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 1. W pierścieniu (3 punkty)

[172]:Sześciokąt składa się z sześciu przystających trójkątów równobocznych, o bokach równych a.



Promień okręgu opisanego na sześciokącie jest równy a, a promień okręgu wpisanego r jest równy wysokości h trójkąta równobocznego, czyli jest równy $r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Pole pierścienia jest równe $2\pi \ dm^2$ oraz różnicy pól:

dużego koła $P_{D\_kola} = \pi \cdot a^2$ i małego koła ($P_{M\_kola} = \pi \cdot \frac{3a^2}{4}$)

Porównujemy daną wartość pola pierścienia z różnicą pól kół i otrzymujemy równanie:

$\left(2\pi = \pi \cdot a^2 - \pi \cdot \frac{3a^2}{4}\right) \Rightarrow \left(2 \cdot \pi = \frac{\pi \cdot a^2}{4} \quad \bigg| \cdot \frac{4}{\pi}\right)$, stąd $a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Zatem pole pojedynczego trójkąta równobocznego obliczamy ze wzoru: $P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$$P_\Delta = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow P_\Delta = \frac{4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4}, \text{ stąd } P_\Delta = 2\sqrt{3}.$$

Pole sześciokąta jest 6 razy większe, czyli wynosi. $P_{szesciokata} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Odpowiedź: Pole powierzchni sześciokąta jest równe $12\sqrt{3} \ dm^2$.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, wprowadzenie oznaczeń boków sześciokąta i trójkątów	1
B	Ułożenie równania, w którym niewiadomą jest bok sześciokąta	1
C	Obliczenie boku trójkąta i sześciokąta oraz pola trójkąta	2
D	Wyznaczenie pola sześciokąta, odpowiedź	1

[172] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Dwa w kącie (6 punktów)

Dane:

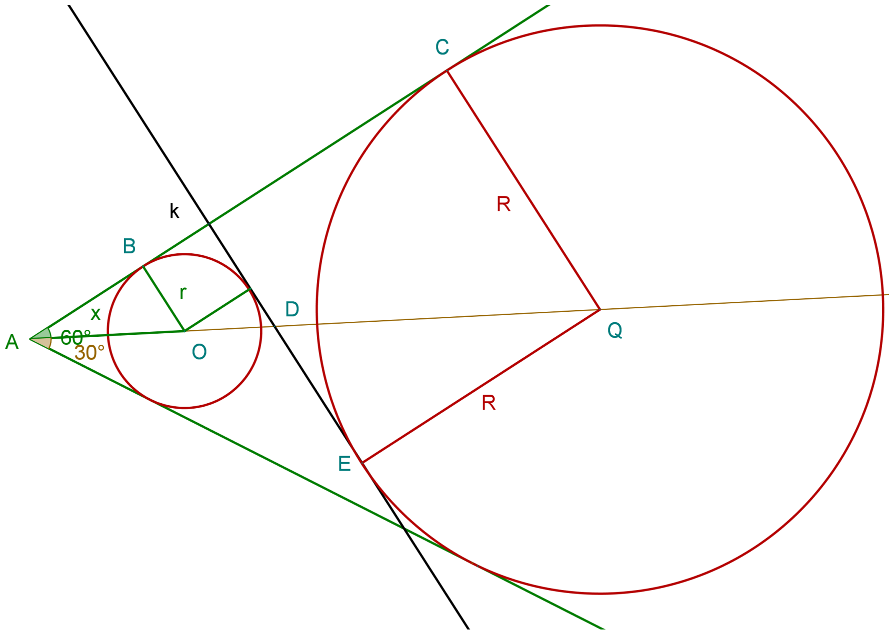
Kąt o mierze 60°; prosta $pr.k \perp pr.AC$.

Koła $k_1(O;\, r)$ i $k_2(Q;\, R)$ są styczne do ramion kąta i do prostej $pr.k$

Obliczyć:

Stosunek pól tych kół tzn. $\dfrac{P_{k_1(O;\,r)}}{P_{k_2(Q;\,R)}}$

Tak jak na rysunku[173]: oznaczmy $|AO| = x$.



Koła są figurami podobnymi, skala podobieństwa równa jest stosunkowi promieni.
Stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa.
Wykorzystamy fakt, że okręgi są jednocześnie styczne do ramion kąta i do prostej $pr.k$.
Warunki styczności pozwalają na dwa sposoby:
wyznaczyć długość odcinka x w zależności od r i R,
następnie otrzymamy, zależność między r i R.

Po pierwsze, z trójkąta ΔAOB mamy $\dfrac{|BO|}{|AO|} = \sin 30^\circ \Rightarrow \dfrac{r}{x} = \dfrac{1}{2}$, zatem $x = 2r$ $(^*)$.

Podobnie uzasadniamy, że $|AQ| = 2R$.

Drugi sposób wyliczenia x to równość: $x = |AO| = |AQ| - OQ = 2R - |OD| - |DQ|$

[173] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Długości odcinków $|OD|$ i $|DQ|$ wyliczamy następująco:

Z trójkąta ΔDEQ mamy: $\frac{R}{|DQ|} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |DQ| = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Podobnie $|OD| = \frac{2\sqrt{3}r}{3}$

Mamy, zatem z (**) i powyższych równości $x = 2R - \frac{2\sqrt{3}R}{3} - \frac{2\sqrt{3}r}{3}$,

korzystamy z (*): $x = 2r$, więc otrzymujemy:

$$2r = 2R - \frac{2\sqrt{3}R}{3} - \frac{2\sqrt{3}r}{3} \quad \Big| \cdot \frac{3}{2};$$

czyli $3r = 3R - \sqrt{3}R - \sqrt{3}r$,

stąd $3r + \sqrt{3}r = 3R - R\sqrt{3}$,

zatem $r(3+\sqrt{3}) = R(3-\sqrt{3}) \quad \Big| \cdot \frac{1}{R(3+\sqrt{3})}$,

czyli $\frac{r}{R} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})^2}{9-3} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}$,

stąd stosunek pól: $\frac{P_{k_1(O;\,r)}}{P_{k_2(Q;\,R)}} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = (2-\sqrt{3})^2$

Stosunek pól jest równy kwadratowi stosunku promieni, czyli $(2-\sqrt{3})^2$.

Odpowiedź:

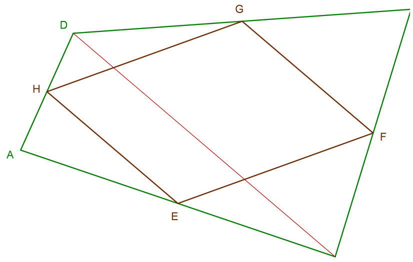
Stosunek pól tych kół jest równy $(2-\sqrt{3})^2$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczna punktów
A	Rysunek, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Wyrażenie x w zależności od r	1
C	Wyrażenie x w zależności od R	1
D	Porównanie otrzymanych wyrażeń i obliczenie stosunku długości promieni	2
E	Wyznaczenie stosunku pól i podanie odpowiedzi	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

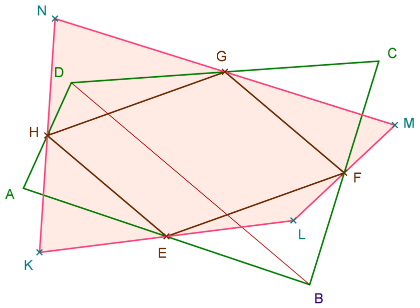
Zadanie 3. Środki takie same, a jakie pola? (5 punktów)



Rozważamy dowolny czworokąt wypukły $\lozenge ABCD$. [174]:
Udowodnimy, że pole czworokąta $\lozenge EFGH$ powstałego przez połączenie środków jego boków jest równe połowie pola wyjściowego czworokąta to znaczy $P_{\lozenge EFGH} = \frac{1}{2} \cdot P_{\lozenge ABCD}$. Fakt ten w szczególności oznacza, że środki boków jednoznacznie wyznaczają pole czworokąta, czyli to, co jest treścią naszego zadania, to znaczy jednocześnie udowodnimy twierdzenie:

Założenie: Punkty E, F, G, H są środkami boków czworokątów: $\lozenge ABCD$ i $\lozenge KLMN$

Teza: Pola czworokątów $\lozenge ABCD$ i $\lozenge KLMN$ są równe $P_{\lozenge ABCD} = P_{\lozenge KLMN}$ [175]:



Niech E, F, G, H będą środkami boków czworokąta $\lozenge ABCD$ i poprowadźmy przekątną $\overline{BD}$. Odcinki $\overline{GF}$ i $\overline{HE}$ łączą środki boków w trójkątach ΔGFC i ΔHEA, zatem: $\Delta GFC \sim \Delta DBC$ w skali: $k = \frac{|\overline{GF}|}{|\overline{DB}|} = \frac{1}{2}$, więc $\frac{P_{\Delta GFC}}{P_{\Delta DBC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, stąd

$P_{\Delta GFC} = \frac{1}{4} P_{\Delta DBC}\ ^{(*)}$ $\Delta HEA \sim \Delta DBA$ w skali: $k = \frac{|\overline{HE}|}{|\overline{DB}|} = \frac{1}{2}$,

więc $\frac{P_{\Delta HEA}}{P_{\Delta DBA}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, stąd $P_{\Delta HEA} = \frac{1}{4} P_{\Delta DBA}\ ^{(**)}$ Dodając równości $^{(*)}$ i $^{(**)}$ stronami mamy:

$P_{\Delta GFC} + P_{\Delta HEA} = \frac{1}{4} P_{\Delta DBC} + \frac{1}{4} P_{\Delta DBA} = \frac{1}{4}\left(P_{\Delta DBC} + P_{\Delta DBA}\right) = \frac{1}{4} P_{\lozenge ABCD}$ Podobnie pokazujemy,

że $P_{\Delta HGD} + P_{\Delta FEB} = \frac{1}{4} P_{\lozenge ABCD}$. Mamy, zatem:

$$P_{\lozenge EFGH} = P_{\lozenge ABCD} - \left(P_{\Delta GFC} + P_{\Delta HEA} + P_{\Delta HGD} + P_{\Delta FEB}\right) = P_{\lozenge ABCD} - \left(\frac{1}{4} P_{\lozenge ABCD} + \frac{1}{4} P_{\lozenge ABCD}\right),$$

czyli $P_{\lozenge EFGH} = P_{\lozenge ABCD} - \frac{1}{2} P_{\lozenge ABCD} = \frac{1}{2} P_{\lozenge ABCD}$, tak, więc otrzymaliśmy, że $P_{\lozenge ABCD} = 2 \cdot P_{\lozenge EFGH}$, gdzie punkty $E; F; G; H$ są środkami jego boków. Postępując analogicznie otrzymamy $P_{\lozenge KLMN} = 2 \cdot P_{\lozenge EFGH}$.

Zatem $P_{\lozenge KLMN} = P_{\lozenge ABCD}$,.co oznacza, że czworokąty, których środki boków się pokrywają mają równe pola. c.b.d.o.

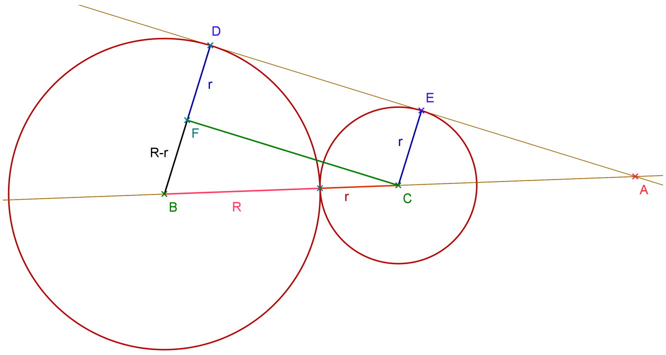
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, oznaczenia	1
B	Wyznaczenie pola czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków danego	2
C	Wykazanie, że pole czworokąta wypukłego, równe jest dwom polom czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków danego czworokąta	1
D	Wniosek	1

[174] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[175] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 4. Dwa koła, a gdzie trójkąt? (5 punktów)

Dorysujmy do podanego rysunku[176]: promienie okręgów oraz rzut F punktu C na prostą $pr.BD$



Policzymy najpierw pole trójkąta ΔBCD (duży trójkąt ΔABD jest do niego podobny w znanej skali, więc to wystarczy do obliczenia jego pola).
Znamy jedną przyprostokątną oraz przeciwprostokątną tego trójkąta, możemy, więc policzyć drugą przyprostokątną.

$|FC|^2 = |BC|^2 - |BF|^2$, czyli $|FC|^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$, zatem

$|FC|^2 = [(R+r)+(R-r)]\cdot[(R+r)-(R-r)]$,

więc $|FC|^2 = 2\cdot R\cdot 2\cdot r = 4Rr \Rightarrow |FC| = 2\sqrt{Rr}$

Mamy, zatem $P_{\Delta BCF} = \frac{1}{2}\cdot|BF|\cdot|FC|$, czyli $P_{\Delta BCF} = \frac{1}{2}\cdot(R-r)\cdot 2\sqrt{Rr} = (R-r)\sqrt{Rr}$

Trójkąt ΔABD jest podobny do trójkąta ΔCBF w skali $\frac{|BD|}{|BF|} = \frac{R}{R-r}$.

Stosunek pól figur podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa, zatem mamy:

$$\frac{P_{\Delta ABD}}{P_{\Delta CBF}} = \left(\frac{R}{R-r}\right)^2$$

$$P_{\Delta ABD} = \left(\frac{R}{R-r}\right)^2\cdot P_{\Delta BCF} \qquad P_{\Delta ABD} = \left(\frac{R}{R-r}\right)^2\cdot(R-r)\cdot\sqrt{Rr} \qquad P_{\Delta ABD} = \frac{R^2\cdot\sqrt{Rr}}{R-r}$$

Odpowiedź: Pole trójkąta jest równe $P_{\Delta ABD} = \frac{R^2\cdot\sqrt{Rr}}{R-r}$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, oznaczenia	1
B	Wyznaczenie przyprostokątnej małego trójkąta	1
C	Wyznaczenie pola małego trójkąta	1
D	Wyznaczenie skali podobieństwa trójkątów	1
E	Obliczenie pola dużego trójkąta i odpowiedź	1

[176] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” – „Ścinki, wycinki … wizyta u krawca dwa”

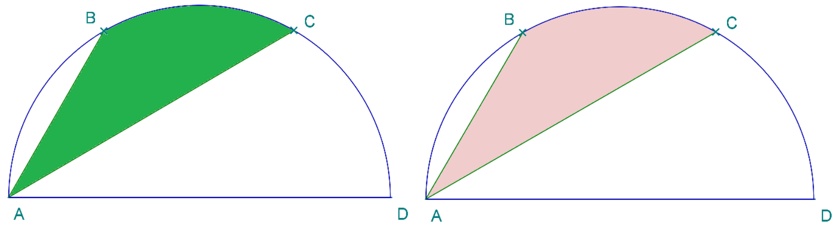
Zadanie 1 [177]

W tym zadaniu należy:

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej

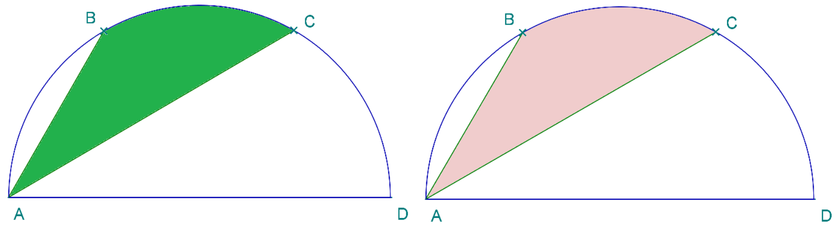
Exercise 1. Triangle not too right (7 points) [178]

Figure out the half circle with a radius of 10 cm. The points *B* *B* and *C* *C* divide a half-circle *AD* *AD* into three equal parts. Calculate the area of painted curvilinear triangle.



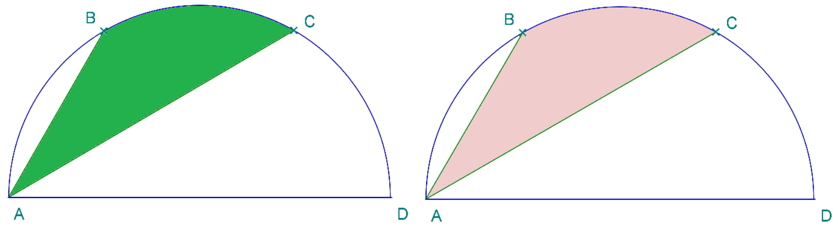
Exercice 1. Triangle pas tout à fait droit (7 points) [179]

Figure sur le demi-cercle avec un rayon de 10 cm. Les points *B* *B* et *C* *C* partagent le demi-cercle *AD* en trois parties égales. Calcule l’aire coloriée du triangle courbe.



Tarea 1. El triángulo no muy simple (7 puntos) [180]

Calcule el semicírculo con un radio de 10 cm. Los puntos *B* y *C* dividen el semicírculo *AD* *AD* en tres partes iguales. Calcula el área cubierta de pintura del triángulo de línea curva.

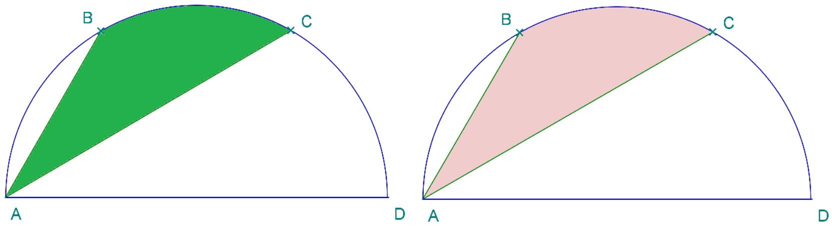


---

[177] Zaczerpnięto z [1] – Zadanie 75, Strona 51
[178] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[179] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[180] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

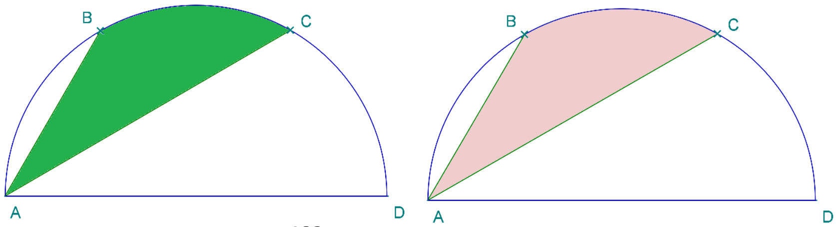
Aufgabe. Nicht besonders einfaches Dreieck (7 Punkte) [181]

Abbildung aus dem Halbkreis mit einem Radius von 10 cm. Punkte B und C teilen einen Halbkreis in drei gleiche Teile. Berechne die bemalte Fläche des krummlinigen Dreiecks.

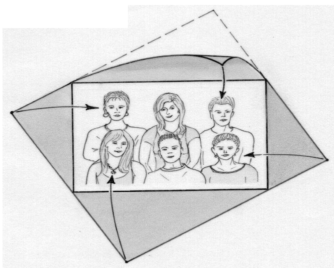


Esercizio 1 Triangolo Non Troppo Regolare (7 punti)

I punti e dividono il semicerchio AD in tre parti uguali. Calcolare la superficie del triangolo curvilineo colorato.

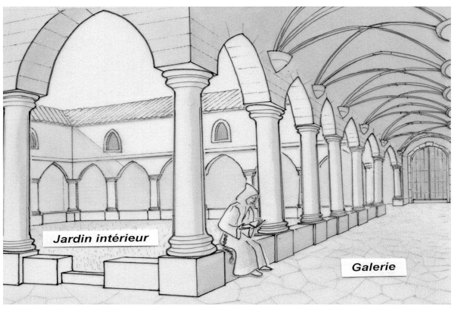


Zadanie 2. Zapakować? (5 punktów)[182]



[183] Adam w czasie przyjęcia zrobił zdjęcia swoim przyjaciołom. Mają one kształt prostokąta o szerokości $9\,cm$ i długości $13cm$. Adam chciałby je ofiarować przyjaciołom. Każde zdjęcie zawinął w prostokątny arkusz papieru w następujący sposób: zdjęcie ułożył tak, żeby każdy jego róg dotykał brzegu kartki, a wystające rogi kartki zagiął. Okazało się, że idealnie zakrywają one zdjęcie, nie nakładając się na siebie nawzajem i nie zostawiając wolnej powierzchni. Wyznacz wymiary arkusza papieru.

Zadanie 3. Średniowieczna technika (5 punktów)[184]



[185] W celu skonstruowania kwadratowych wewnętrznych dziedzińców klasztornych o harmonijnych wymiarach, średniowieczni architekci korzystali z następującej techniki:

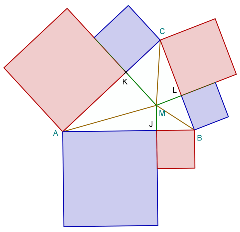
- rysowali okrąg i wpisany weń kwadrat, aby określić wielkość wewnętrznego dziedzińca,
- następnie rysowali drugi kwadrat o bokach stycznych do okręgu i równoległych do boków pierwszego kwadratu.

Powierzchnia zawarta między bokami obu kwadratów tworzyła galerię
Przedstawić na rysunku szkic dziedzińca. Porównać pola dziedzińca i galerii.

---

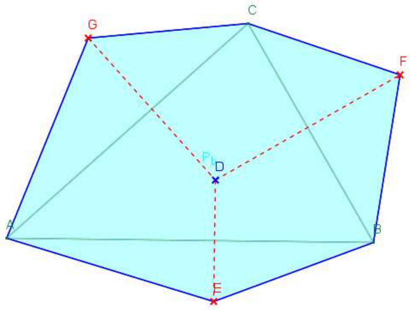
[181] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[182] Zaczerpnięto z [2]
[183] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania
[184] Zaczerpnięto z [2]
[185] Rysunek zaczerpnięto z zamieszczonej w Internecie treści zadania

Zadanie 4. Piekło – niebo (5 punktów)[186]



M jest dowolnym punktem wewnątrz ostrokątnego ΔABC. Z punktu M dzielimy trójkąt ABC na 6 trójkątów prostokątnych. Otrzymujemy w ten sposób punkty J, K, L, dzięki którym można zbudować 6 kwadratów, tak, jak pokazano na przedstawionym rysunku. [187]
Porównaj Sumę powierzchni kwadratów różowych z sumą powierzchni kwadratów niebieskich (bez mierzenia długości!).
Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 5. Piekło – niebo - ziemia (3 punkty) [188][189]



Punkt D, będący punktem wewnętrznym trójkąta ABC, przekształcamy przez symetrię względem prostych zawierających boki AB; BC; AC otrzymując odpowiednio punkty E; F; G
Udowodnij, że pole sześciokąta $AEBFCG$ jest dwa razy większe od pola trójkąta ABC.

Zadanie 6. Wpis - opis (3 punkty)[190]

Pole koła wpisanego w sześciokąt foremny wynosi $9\,cm^2$.
Oblicz pole koła opisanego na tym sześciokącie.

Zadanie 7. Pole do pola… (3 punkty) [191]

W sześciokącie foremnym połączono środki sąsiednich boków otrzymując ponownie sześciokąt foremny. Oblicz stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta.

Zadanie 8 .Od kątów i boków do pola (6 punków) [192]

Oblicz pole czworokąta wypukłego $ABCD$, w którym:
kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $\measuredangle A = 90°$, $\measuredangle B = 75°$,$\measuredangle C = 60°$, $\measuredangle D = 135°$, a boki AB i AD mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

Zadanie 9. Pole wycinka (3 punkty) [193]

Promień okręgu wpisanego w wycinek koła o kącie środkowym $60°$ ma długość 2. Oblicz pole tego wycinka.

Zadanie 10. Czy tylko deltoid? (3 punkty) [194.] [195]

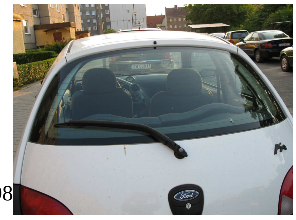
Na okręgu o promieniu 5 opisano deltoid o obwodzie 30. Oblicz pole deltoidu.

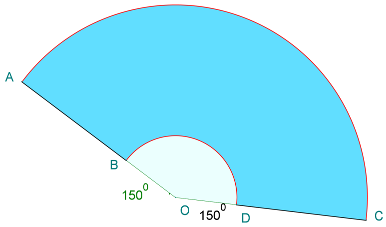
---

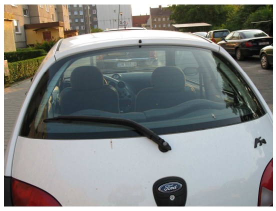
[186] Zaczerpnięto z [3]
[187] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[188] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 1552465
[189] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[190] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 5152824
[191] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 9924155
[192] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 7873550
[193] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 5297788
[194] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 4883249
[195] Ciasto z zakalcem!!

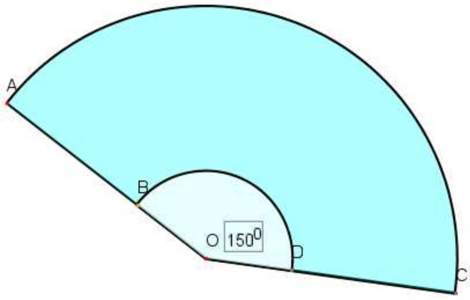
Zadanie 11. Ile oczyści? (3 punkty) [196]

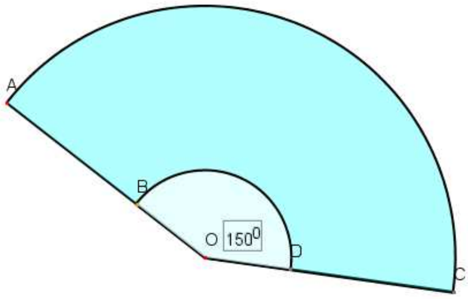
Rysunek[197] przedstawia kształt obszaru zakreślanego przez wycieraczkę samochodową.

[198] 









Wiedząc, że $|\sphericalangle AOC| = 150°$ oraz $|\overline{AB}| = |\overline{BO} = 0{,}3\ m|$ oblicz, jakie jest pole obszaru oczyszczanego przez wycieraczkę. Przyjmując, że $\pi \approx 3{,}14$ podaj wynik z dokładnością do $0{,}01\,m$.

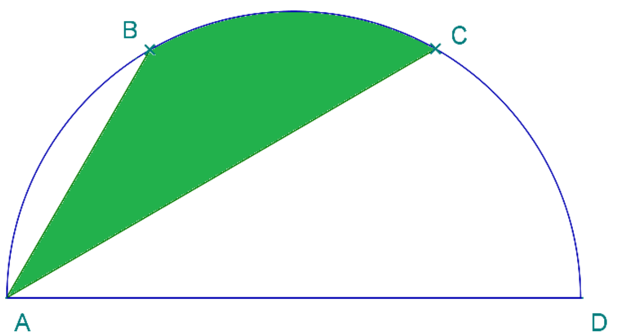
Zadanie 12. Zależy czy nie zależy? (4 punky) [199]

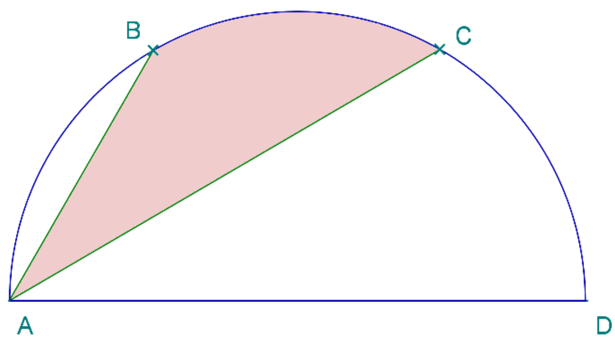
Dany jest okrąg $o_1(O;\, R)$. Kreślimy cięciwę $\overline{AB}$ nieprzechodzącą przez środek okręgu o_1, a następnie rysujemy $o_2(O;\, r)$ - okrąg o_2 współśrodkowy z okręgiem o_1 i styczny do cięciwy $\overline{AB}$. Okręgi o_1 i o_2 ograniczają pierścień kołowy. Uzasadnij, że pole pierścienia kołowego nie zależy od długości promienia okręgu o_1 (zależy tylko od długości cięciwy *AB*).

[196] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 742667
[197] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu GEONExT
[198] Zdjęcia wykonała Helena Ewert – Fechner
[199] Zaczerpnięto z [4] - Zadanie nr 7389711

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” – „Ścinki, wycinki … wizyta u krawca dwa”

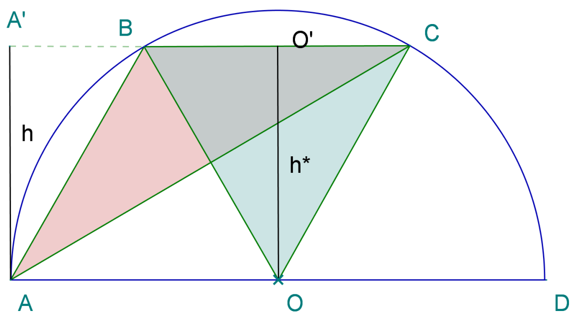
Zadanie 1. Trójkąt niezbyt prosty (7 punktów)





Rysunek przedstawia połówkę koła o promieniu $R = 10cm$ $R = 10cm$.
Punkty B B i C C dzielą półokrąg AD AD na trzy równe części.
Oblicz zamalowane pole trójkąta krzywoliniowego.

Zadanie 1. Trójkąt niezbyt prosty (7 punktów)



Łuki AB i BC mają jednakową długość,
więc punkty B i C są równoodległe od średnicy $\overline{AD}$ $\overline{AD}$.
Stąd odcinki $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ $\overline{AD}$ są równoległe $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Oznaczmy przez O środek odcinka $\overline{AD}$ $\overline{AD}$.
Trójkąty ΔBCA ΔBCA i ΔBCO ΔBCO mają wspólny bok $\overline{BC}$ $\overline{BC}$, a wysokości tych trójkątów opuszczone na ten bok są jednakowej długości, ponieważ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.
Oznacza to, że pola powierzchni trójkątówŁ ΔBCA i ΔBCO ΔBCO są jednakowe (patrz rysunek)[200].

Szukane pole jest, więc równe polu wycinka koła BCO BCO, czyli pola całego koła.
Obliczamy stąd

$$P_{trójkąta\ krzywoliniowego\ ABC} = \frac{1}{6} \cdot 10^2 \pi = \frac{50\pi}{3}\ (cm^2) \quad P_{Trójkąróják\ zywoliniowegoABC} = \frac{1}{6} \cdot 10^2 \pi = \frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$$

Odpowiedź: Pole trójkąta krzywoliniowego ABC jest równe $\frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$ $\frac{50\pi}{3}\ (cm^2)$

Punktacja

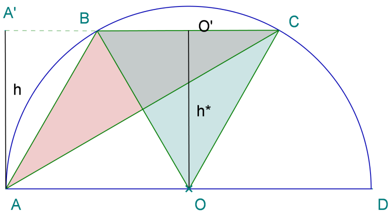
Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba

[200] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

		punktów
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
C	Zauważenie, że: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ pola trójkątów ΔBCA $\boldsymbol{\Delta BCA}$ i $\boldsymbol{\Delta BCO}$ ΔBCO są jednakowe	1
D	Stwierdzenie, że szukane pole jest równe polu wycinka koła i jego obliczenie	2
E	Podanie rozwiązania i odpowiedzi w języku obcym	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Exercise 1. Triangle not too Right (7 points)



The arcs AB and BC has the same length, so the points B and C are in the same distance from the diameter $\overline{AD}\overline{AD}$. Thus, the segments $\overline{BC}\overline{AD}$. and $\overline{AD}\overline{AD}$ $\overline{AD}$ are parallel, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}\overline{BC}||\overline{AD}$). Denote by O the center of $\overline{AD}\,\overline{AD}$. The triangles ΔBCA ΔBCA and ΔBCO ΔBCO have a common side $\overline{BC}\,\overline{BC}$ and the altitudes of these triangles going to this side are of the same length (because of $\overline{BC}||\overline{AD}$)$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. So, areas of triangles ΔBCA and ΔBCO ΔBCO are equal (see the picture above) [201]. The searched area is equal to area of

circle's segment BCO BCO, namely it is of the whole circle.
We calculate:

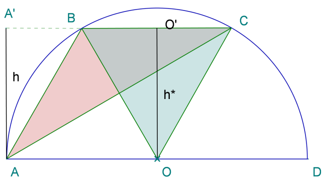
$$P_{trójkąta\ krzywoliniowego\ ABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\ (cm^2)\quad P_{\text{curvilinear triangle } ABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right).$$

Answer: An area of curvilinear triangle $ABC$$ABC$ is equal to $\frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$

$\frac{50\pi}{3}\ (cm^2)$
Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of the exercise's text into Polish	1
B	Picture and notations	1
C	Noticing the facts: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, the areas of ΔBCA ΔBCA and ΔBCO ΔBCO are the same	1
D	Calculating the searched area, noticing that it is equal to the area of circle's segment	2
E	Giving the solution and the answer in English language	2

Exercice 1 Triangle pas tout à fait droit (7 points)



Les arcs *AB* et *BC* ont la même longueur, donc les points *B* et *C* sont équidistants de la diagonale $\overline{AD}\,\overline{AD}$. Ainsi, les segments $\overline{BC}$ et $\overline{AD}$ sont-ils parallèles : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Désignons par *O* la moitié du segment $\overline{AD}\,\overline{AD}$. Les triangles ΔBCA ΔBCA et ΔBCO ΔBCO ont le même côté $\overline{BC}$, et les hauteurs de ces triangles rabattues sur ce côté sont de la même longueur, puisque $\overline{BC} \parallel \overline{AD}\,\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Ceci veut dire que les aires des triangles ΔBCA et ΔBCO ΔBCO sont identiques (voir le dessin) [202]. L'aire recherchée est égale à l'aire du segment du cercle BCO, donc à $\frac{1}{6}$ de l'aire de tout le cercle. Nous calculons alors $A_{Triangle.......ABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$.

Réponse: L'aire du triangle courbe ABC est égale à $\frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Pointage $P_{trójkąta\ krzywoliniowego\ ABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\ (cm^2)$

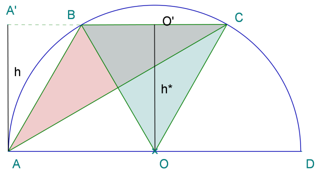
---

[201] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[202] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Numéro de l’activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire l’exercice en polonais	1
B	Faire un dessin, introduire les symboles	1
C	Remarquer que : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ les aires des triangles ΔBCA ΔBCA et ΔBCO ΔBCO sont identiques	1
D	Constater que l’aire recherchée est égale à l’aire de segment du cercle, la calculer	2
E	Donner la solution et la réponse en langue étrangère	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tarea 1. El triángulo no muy simple (7 puntos)



Los arcos *AB* i *BC* tienen la misma longitud, entonces los puntos *B* i *C* son en la misma distancia del diámetro $\overline{AD}\overline{AD}$. De ello, los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{AD}\overline{AD}$ son paralelos $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Designemos por O el centro del segmento $\overline{AD}\overline{AD}$. Los triángulos $\Delta BCA\,\Delta BCA$ i ΔBCO ΔBCO tienen un lado común $\overline{BC}\,\overline{BC}$ y las alturas de estos triángulos que bajan sobre este lado, son de la misma longitud porque $\overline{BC} \parallel \overline{AD}\,\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Esto significa que las áreas de la superficie de los triángulos ΔBCA i ΔBCO ΔBCO son iguales (mira el dibujo)[203]. El área buscada es entonces igual al área

del recorte del círculo BCO BCO, es decir del área de todo el círculo. De ello, calculamos:

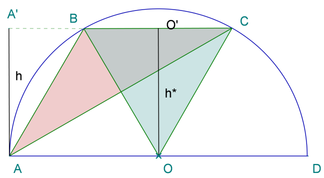
$$P_{trójkąta\ krzywoliniowego\ ABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\,(cm^2)\quad P_{Trójkąrójk\ zywoliniow\ egoABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right).$$

Respuesta : El área del triángulo de línea curva ABC es igual a $\frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de solución de tarea	Puntos
A	Traducción de la tarea en polaco	1
B	Realización del dibujo, introducción de las designaciones	1
C	Observación, que: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ - áreas de los triángulos $\Delta BCA\,\Delta BCA$ i ΔBCO ΔBCO son identicas	1
D	Constatación que el área buscada es igual al área del recorte del círculo y su cálculo	2
E	Comunicación de la solución y la respuesta en la lengua extranjera	2

Aufgabe 1. Nicht besonders einfaches Dreieck (7 Punkte)



Die Bogen *AB* und *BC* sind von gleicher Länge, also Punkte *B* und *C* sind parallel zum Durchmesser $\overline{AD}$. Von daher sind die Segmente $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ parallel $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Bezeichnen wir mit *O* den Mittelpunkt des Segments $\overline{AD}$. Die Dreiecke ΔBCA und ΔBCO haben eine gemeinsame Spite $\overline{BC}$, und die auf diese Seite heruntergelassenen Höhen von diesen Dreiecken sind von gleicher Länge, denn $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Das bedeutet, dass die Flächen von den Dreiecken und sind gleich (siehe die Zeichnung). Das bedeutet, dass die Flächen von den Dreiecken ΔBCA und ΔBCO sind gleich (siehe die Zeichnung)[204]. Die gesuchte Fläche ist also der Fläche des Kreises BCO gleich, also $\frac{1}{6}$ der Fläche des ganzen Kreises. Wir berechnen daher $A_{Triangle.......ABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Antwort: Die Fläche des krummlinigen Dreiecks ABC ist gleich $\frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Punktwertung

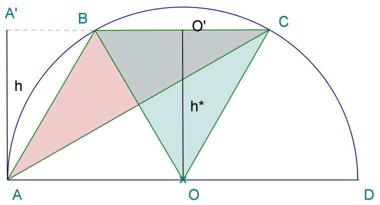
Tätigkeits nummer	Etappe der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnische	1

[203] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal
[204] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

B	Ausführung der Zeichnung, Einführen der Bezeichnungen	1
C	Bemerkung, dass: die Flächen von Dreiecken und gleich sind.	1
D	Feststellung, dass die gesuchte Fläche der Fläche des Kreissektors gleich ist, und ihre Berechnung	2
E	Lösungs- und Antwortangabe in einer Fremdsprache	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Esercizio 1 Triangolo Non Troppo Regolare (7 punti)



Gli archi AB e BC hanno la stessa lunghezza, allora i punti B e C sono distanti dello stesso modo dal diametro $\overline{AD}$. Con questo i segmenti $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ sono paralleli $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Indichiamo come O il centro del segmento $\overline{AD}$. I triangoli ΔBCA i ΔBCO hanno il lato comune $\overline{BC}$, e l'altezza di questi triangoli rovesciata su questo lato ha la stessa lunghezza, perché $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$. Questo vuol dire che le superfici dei triangoli ΔBCA e ΔBCO sono uguali (guardare il disegno). La superficie ricercata è uguale al ritaglio del circolo BCO, ovvero di superficie di tutto il circolo. Con questo possiamo calcolare

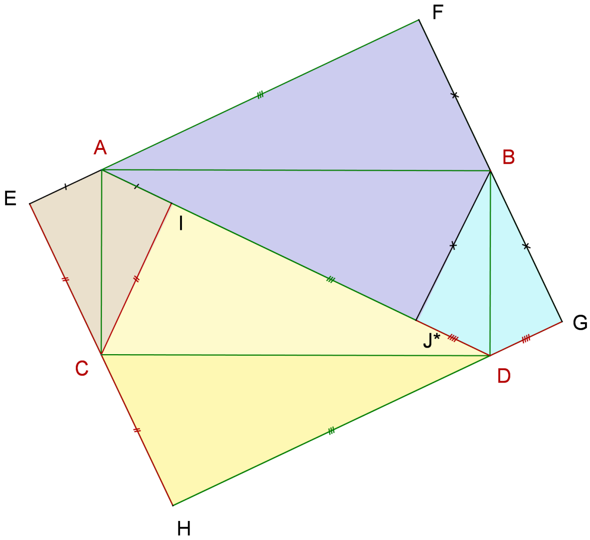
$$P_{Trójkąrójk\ zywoliniowegoABC} = \frac{1}{6}\cdot 10^2\pi = \frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right).$$

Risposta: La superficie del triangolo curvilineo fa $\frac{50\pi}{3}\left(cm^2\right)$

Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Punti
A	Traduzione dell'esercizio nella lingua polacca	1
B	Preparazione del disegno, introduzione delle indicazioni	1
C	Osservazione che: $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ di superficie dei triangoli ΔBCA e ΔBCO sono uguali	1
D	Stwierdzenie, że szukane pole jest równe polu wycinka koła i jego obliczenie	2
E	Traduzione della risposta e della soluzione nella lingua polacca	2

Zadanie 2. Zapakować? (5 punktów)



[205]

Punkty *E*,*I* są symetryczne do siebie względem prostej *AC*,

zatem: $|\overline{AE}| = |\overline{AI}|$ oraz $|\overline{EC}| = |\overline{IC}|$.

Zauważamy, również, że $|\overline{AF}| = |\overline{AJ*}| = |\overline{ID}|$, zatem $|\overline{EF}| = |\overline{AI}| + |\overline{ID}| = |\overline{AD}|$

$|\overline{AD}|$jest przekątną prostokąta o bokach długości: $9\ cm\ i\ 13\ cm$ zatem po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa do trójkąta prostokątnego np.ΔACD otrzymujemy:

$|\overline{AD}|^2 = 9^2 + 13^2 = 81 + 169 = 250$,

zatem $|\overline{EF}| = |\overline{AD}| = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}cm$.

Zauważamy, że pole czworokąta *EHGF* z jednej strony równe jest podwojonemu polu prostokąta $ABDC$, czyli: $P_{czworokąta\ EHGF} = 2 \cdot P_{prostokąta\ ABCD} = 2 \cdot 9 \cdot 13$,

a z drugiej jest iloczynem długości jego boków.

Stąd otrzymujemy $|\overline{EF}| = |\overline{EH}| = 2 \cdot 9 \cdot 13$, zatem $|\overline{EH}| = \frac{2 \cdot 9 \cdot 13}{5\sqrt{10}} = \frac{117\sqrt{10}}{25}$

Odpowiedź:

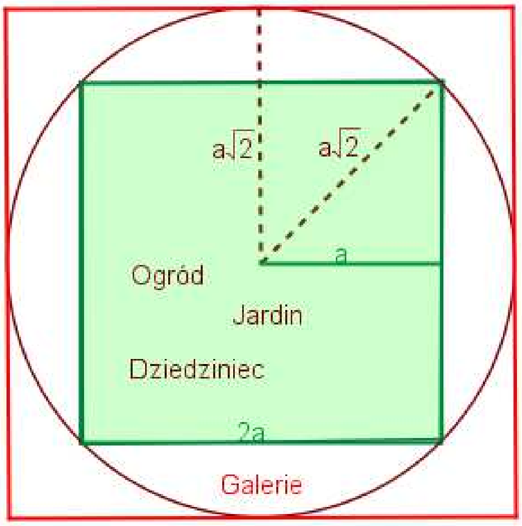
Arkusz papieru jest prostokątem o wymiarach: $5\sqrt{10}cm \times \frac{117\sqrt{10}}{25}\ cm$

Możliwe są inne rozumowania.

Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń.	1
B	Obliczenie długości przekątnej zdjęcia.	1
C	Wskazanie równych odcinków i trójkątów przystających	1
D	Wyznaczenie pola szukanego czworokąta	1
E	Wyznaczenie długości boków arkusza papieru i podanie odpowiedzi	1

[205] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 3. Średniowieczna technika



Niech:

a będzie połową boku dziedzińca - ogrodu (*jardin*). [206],

wtedy bok dziedzińca (małego kwadratu) jest równy $2a$.

Wówczas promień okręgu i zarazem połowa boku dużego kwadratu to $a\sqrt{2}$.

Wtedy bok dużego kwadratu jest równy $2a\sqrt{2}$

Niech:

P_D oznacza pole dużego kwadratu

P_J oznacza pole dziedzińca

P_G oznacza pole galerii

Wtedy

$P_D = (2a\sqrt{2})^2 = 8a^2$

$P_J = (2a)^2 = 4a^2$

Zatem $P_G = P_D - P_J = 8a^2 - 4a^2 = 4a^2$

Odpowiedź:

Pole galerii jest równe $4a^2$, czyli tyle samo, co pole ogrodu. *(za tę konstatację 1 pkt).*

Punktacja

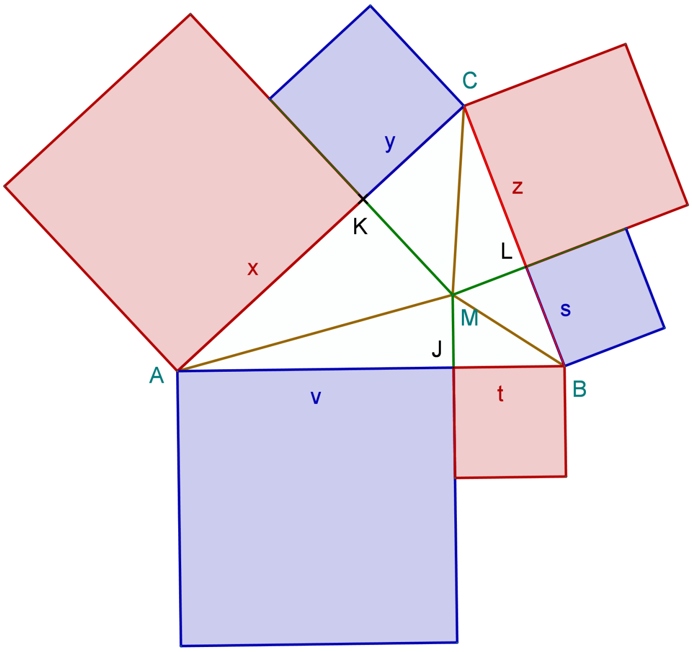
Czynności	Etap rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przedstawienie na rysunku szkicu dziedzińca	1
B	Przyjęcie oznaczenia długości boku dziedzińca i wyznaczenie długości boku galerii	1
C	Obliczenie pola galerii i pola dziedzińca	1,5
D	Stwierdzenie równości pól dziedzińca i galerii odpowiedź	1,5

[206] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 4. Piekło – niebo (5 punktów)

Uzupełniamy rysunek[207] i wprowadzamy oznaczenia:

$|BL| = s$ $\quad |JB| = t$ $\quad |AJ| = v$ $\quad |AK| = x$ $\quad |KC| = y$ $\quad |CL| = z$



Wtedy suma powierzchni kwadratów różowych jest równa: $P_{K\_r} = t^2 + x^2 + z^2$

a suma powierzchni kwadratów niebieskich: $P_{K\_n} = s^2 + v^2 + y^2$

Trójkąty prostokątne to: ΔAJM ; ΔMJB ; ΔBLM ; ΔMLC ; ΔCKM ; ΔAKM .

Dla każdego z nich stosujemy twierdzenie Pitagorasa, przekształcamy otrzymaną równość i otrzymujemy:

W ΔBLM : $s^2 = |BM|^2 - |LM|^2$; W ΔMJB : $t^2 = |BM|^2 - |JM|^2$

W ΔAJM : $v^2 = |AM|^2 - |JM|^2$; W ΔAKM : $x^2 = |AM|^2 - |KM|^2$

W ΔCKM : $y^2 = |CM|^2 - |KM|$; *W* ΔMLC : $z^2 = |CM|^2 - |LM|^2$

Stąd: $P_{K\_r} = t^2 + x^2 + z^2 = t^2 = |BM|^2 - |JM|^2 + |AM|^2 - |KM|^2 + |CM|^2 - |LM|^2$

$P_{K\_n} = s^2 + v^2 + y^2 = |BM|^2 - |LM|^2 + |AM|^2 - |JM|^2 + |CM|^2 - |KM|$.

Zauważamy, że $P_{K\_r} - P_{K\_n} = 0$, bo składniki sum są takie same.

Wniosek: ponieważ $P_{K\_r} - P_{K\_n}$ $P_{K\_r} - P_{K\_n} = 0$, więc $P_{K\_r} = P_{K\_n}$

Odpowiedź:

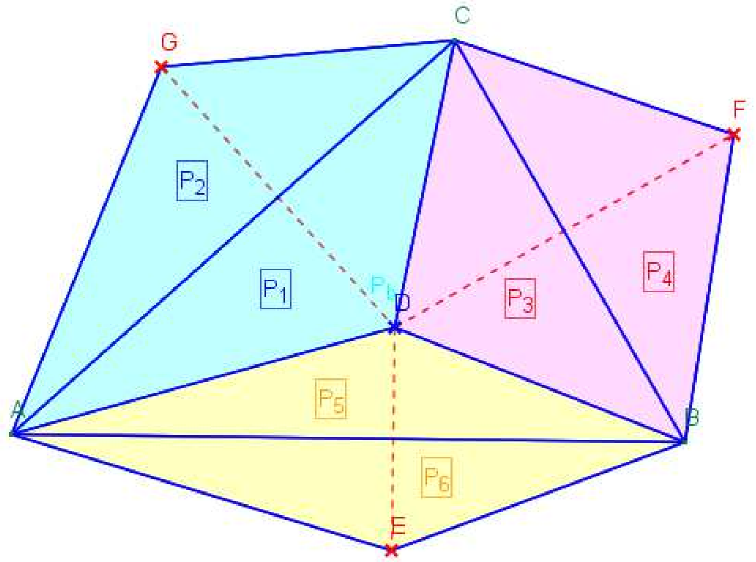
Suma powierzchni kwadratów różowych jest równa sumie powierzchni kwadratów niebieskich.

Punktacja

Cyznność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Uzupełnienie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Wyznaczenie pól poszczególnych kwadratów	2
C	Wyznaczenie P_{K_r} oraz P_{K_n}	1
D	Porównanie sum i odpowiedź	1

[207] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 5. Piekło – niebo - ziemia (3 punkty)



Dane i oznaczenia:

ΔABC

$D \in \Delta ABC$

$S_{pr.AB}(D) = E$

$S_{pr.BC}(D) = F$

$S_{pr.AC}(P) = G$

Wykaż, że:

$$Pole_{sz.AEBFCG} = 2 \cdot Pole_{\Delta ABC}$$

Zauważamy, że:

$$Pole_{sz.AEBFCG} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 \text{ (oznaczenia jak na rysunku)}$$ [208]

$$P_{\Delta ABC} = P_1 + P_3 + P_5$$

Zauważamy, że trójkąty następujące trójkąty są przystające:

$$\Delta BDA \equiv \Delta BEA\,;\ \Delta BDC \equiv \Delta BFC\,;\ \Delta CDA \equiv \Delta CGA$$

Trójkąty przystające mają pola równe, więc

$$P_1 = P_2\,;\ P_3 = P_4\,;\ P_5 = P_6$$

Zatem $Pole_{sz.AEBFCG} = 2 \cdot (P_1 + P_3 + P_5) = 2 \cdot P_{\Delta ABC}$ c.b.d.o

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Wskazanie trójkątów przystających i stwierdzenie równości ich pól	1
C	Wyznaczenie pola sześciokąta i stwierdzenie, że pole sześciokąta = 2 pola trójkąta	1

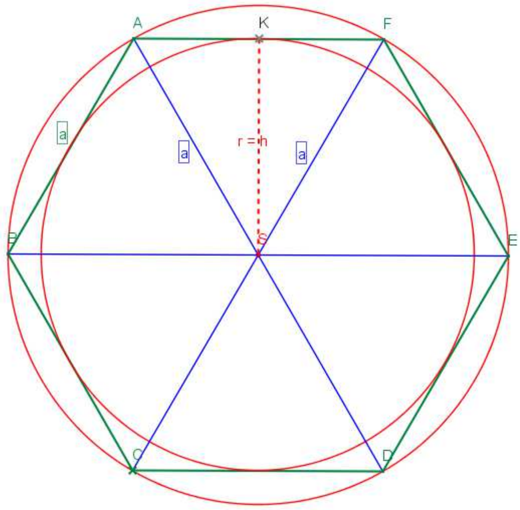
[208] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu GEONExT

Zadanie 6. Wpis - opis (3 punkty)

Pole koła wpisanego w sześciokąt foremny, oznaczamy P_{Kola_Wpis}, więc $P_{kola\_Wpis} = 9\ cm^2$

Szukane pole oznaczamy przez P_{Kola_Opis}

Sześciokąt składa się z sześciu przystających trójkątów równobocznych, oznaczmy ich bok przez a



.[209]

Promień okręgu opisanego na sześciokącie jest równy a,
a promień r okręgu wpisanego to wysokość h trójkąta równobocznego.

Sposób I: Wysokość w trójkącie równobocznym to $r = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$,

ze wzoru na pole koła $P_{kola} = \pi \cdot r^2$; z treści zadania $P_{kola} = 9\ cm^2$

Z powyższych związków otrzymujemy równanie:

$\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9$, więc $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{\pi}$, stąd $\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \quad \Big| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$, czyli $a = \frac{6}{\sqrt{3\pi}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}$

Zatem pole koła opisanego wynosi: $P_{Kola\_Opis} = \pi \cdot a^2 = \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \pi \cdot \frac{4 \cdot 3}{\pi} = 12$

Sposób II: Stosunek promieni kół opisanego i wpisanego jest równy $k = \frac{R}{r} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, jest skala podobieństwa tych kół. Zatem stosunek pól tych kół jest kwadratem tej liczby, czyli wynosi

$\frac{P_{Kola\_Opis}}{P_{Kola\_Wpis}} = k^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{3}$. Tak, więc pole koła opisanego jest równe $P_{Kola\_Opis} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12$

Odpowiedź: Pole koła opisanego na tym sześciokącie jest równe $12cm^2$

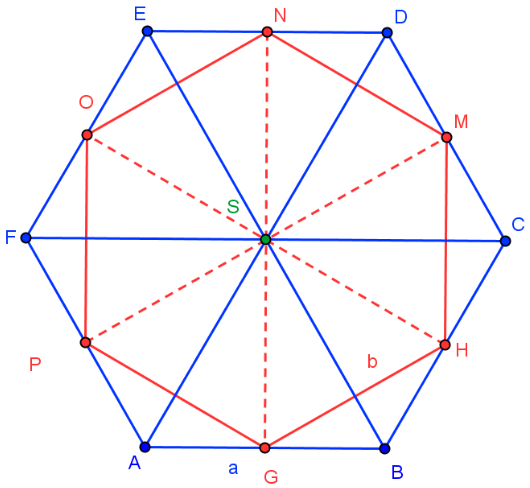
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Obliczenie pola koła	2

[209] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu GEONExT

Zadanie 7. Pole do pola…(3 punkty)[210]

Rysunek pomocniczy[211]:



Sześciokąt foremny składa się z sześciu trójkątów równobocznych,
oznaczmy długość ich boku przez a.

W takim razie pole sześciokąta jest równe $P_{D\_sz} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}$

Boki b trójkątów równobocznych, z których składa się mniejszy sześciokąt są równe wysokości h w większych trójkątach równobocznych $b = h$, czyli $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Zatem pole mniejszego sześciokąta jest równe $P_{M\_sz} = 6 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$,

$$P_{M\_sz} = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 4} = \frac{9\sqrt{3} \cdot a^2}{8}.$$

Szukany stosunek jest, więc równy $\frac{P_{M\_sz}}{P_{D\_sz}} = \frac{\frac{9\sqrt{3} \cdot a^2}{8}}{\frac{3\sqrt{3} \cdot a^2}{2}} = \frac{3}{4}$.

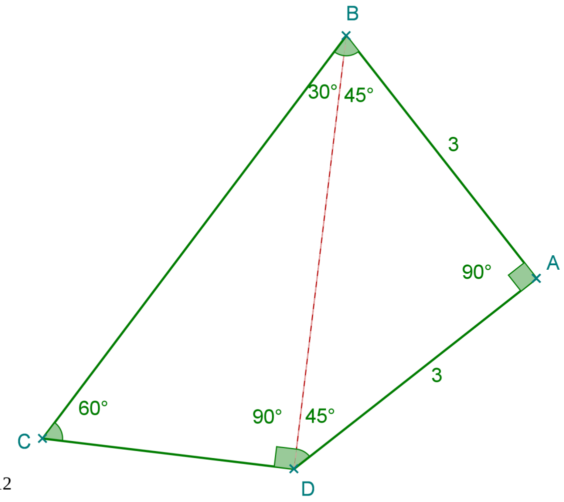
Odpowiedź: Stosunek pól: otrzymanego i wyjściowego sześciokąta jest równy $\frac{3}{4}$.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, wprowadzenie oznaczeń, zapisanie wzajemnych zależności	1
B	Obliczenie stosunku pól sześciokątów	2

[210] *Uczniowie mogę skorzystać z faktu, że sześciokąty foremne są podobne a stosunek pół figur podobnych równy jest kwadratowi skali podobieństwa*
[211] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu GeoGebra

Zadanie 8. Od kątów i boków do pola… (3 punkty)



Rysunek pomocniczy[212]

Dane: Czworokąt wypukły $\lozenge ABCD$

$|\sphericalangle BAD| = 90^\circ$; $|\sphericalangle ABC| = 75^\circ$; $|\sphericalangle BCD| = 60^\circ$; $|\sphericalangle CDA| = 90^\circ$; $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = 3\,cm$

Obliczyć: $P_{\lozenge ABCD}$

W czworokącie $\lozenge ABCD$ prowadzimy przekątną $\overline{BD}$, zatem czworokąt $\lozenge ABCD$ jest sumą trójkątów: ΔABD i ΔBCD, stąd jego pole jest równe sumie pól tych trójkątów, czyli $P_{\lozenge ABCD} = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD}$.

Trójkąt ΔABD jest równoramienny i prostokątny, zatem jego kąty przy wierzchołkach B i D są równe 45^0. W połączeniu z podanymi w treści zadania miarami kątów, daje to nam: $\sphericalangle BDC = 90^\circ$ oraz $\sphericalangle CBD = 30^\circ$.

Pole trójkąta ΔABD jest równe: $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Pozostaje, zatem obliczyć pole trójkąta prostokątnego ΔBCD, więc jego pole równe jest połowie iloczynu przyprostokątnych. Przyprostokątna $\overline{BD}$ jest przeciwprostokątną w ΔABD, stąd $|\overline{BD}| = \sqrt{|\overline{AB}|^2 + |\overline{BD}|^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Drugą przyprostokątną obliczymy korzystając z funkcji trygonometrycznych w ΔBCD. Zauważamy, że $tg \sphericalangle CBD = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{BD}|}$. Mamy stąd $|\overline{CD}| = |\overline{BD}| \cdot tg 30^\circ$, czyli $|\overline{CD}| = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$. Zatem $P_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{3}$. Obliczamy pole czworokąta $\lozenge ABCD$: $P_{\lozenge ABCD} = P_{\Delta ABD} + P_{\Delta BCD} = \frac{9}{2} + 3\sqrt{3}$

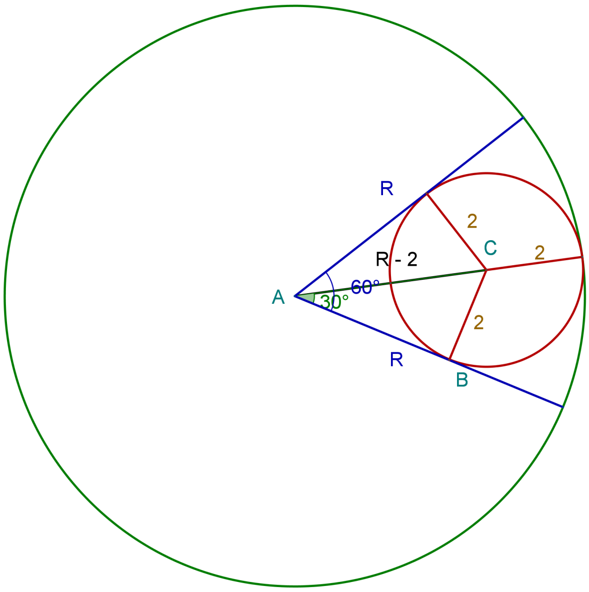
Odpowiedź: Pole czworokąta $\lozenge ABCD$ jest równe $\left(\frac{9}{2} + 3\sqrt{3}\right) cm^2$

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek i oznaczenia zgodne z treścią zadania	1
B	Obliczenie pola ΔABD	2
C	Obliczenie pola ΔCBD	2
D	Obliczenie pola czworokąta i odpowiedź	1

[212] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 9. Pole wycinka (3 punkty)

Tak jak na rysunku[213]
Oznaczamy promień dużego okręgu przez R,
$|\overline{BC}| = 2$; $|\overline{AC}| = R - 2$.



W trójkącie ΔABC mamy: $\dfrac{|\overline{BC}|}{|\overline{AC}|} = \sin 30°$,

stąd $\dfrac{2}{R-2} = \dfrac{1}{2}$, czyli $4 = R - 2 \Rightarrow R = 6$

Pole wycinka koła o kącie środkowym $60°$

to $\left(\dfrac{60°}{360°} = \dfrac{1}{6}\right)$ część pola koła,

czyli $P = \dfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot R^2 = \dfrac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^2 = 6 \cdot \pi$

Odpowiedź: Pole tego wycinka 6π

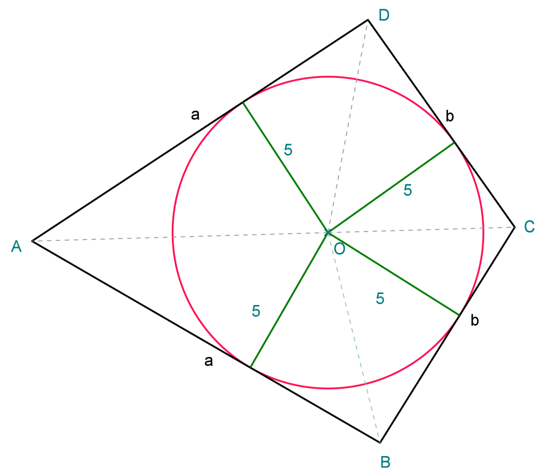
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Punkty
A	Rysunek i oznaczenia zgodne z treścią zadania	1
B	Obliczenie promienia koła	1
C	Obliczenie pola wycinka koła i odpowiedź	1

[213] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Zadanie 10. Czy tylko deltoid? (3 punkty)[214]

Rysunek[215]



Dane:

Deltoid $\Diamond ABCD$ opisany na okręgu $o(O;5)$

$\left|\overline{AB}\right|+\left|\overline{BC}\right|+\left|\overline{CD}\right|+\left|\overline{DA}\right|=30$

Oblicz

pole deltoidu $P_{\Diamond ABCD}$

Rozwiązanie:

Jeżeli połączymy środek O okręgu wpisanego w czworokąt z jego wierzchołkami, to otrzymamy cztery trójkąty $\Delta AOD;\ \ \Delta DOC;\ \ \Delta COB;\ \ \Delta BOA$, których sumą jest deltoid.

Zatem pole deltoidu równe jest sumie pól tych trójkątów.

Wysokości tych trójkątów równe są promieniowi okręgu.

Zatem

$$P_{\Diamond ABCD}=P_{\Delta AOD}+P_{\Delta DOC}+P_{\Delta COB}+P_{\Delta BOA}=\frac{1}{2}\left|\overline{AD}\right|\cdot 5+\frac{1}{2}.\left|\overline{DC}\right|\cdot 5+\frac{1}{2}.\left|\overline{CB}\right|\cdot 5+\frac{1}{2}.\left|\overline{BA}\right|\cdot 5$$

$$\Rightarrow P_{\Diamond ABCD}=\frac{1}{2}\left(\left|\overline{AD}\right|+\left|\overline{DC}\right|+\left|\overline{CB}\right|+\left|\overline{BA}\right|\right)\cdot 5=\frac{1}{2}\cdot 30\cdot 5=75 .$$

Powyżej skorzystaliśmy z podanego obwodu czworokąta (deltoidu).

Odpowiedź: Pole deltoidu jest równe 75 jednostek kwadratowych.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek i oznaczenia zgodne z treścią zadania	1
B	Zapisanie pola deltoidu jako sumy pól trójkątów	1
C	Obliczenie pola deltoiduź	1

[214] **Ciasto z zakalcem!!**

[215] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwagi:

1. Otrzymaliśmy wzór na pole czworokąta opisanego na okręgu
   $P_{\Diamond ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(\left|\overline{AD}\right| + \left|\overline{DC}\right| + \left|\overline{CB}\right| + \left|\overline{BA}\right| \right)}_{Obwód\ czworokązw} \cdot \overset{r}{5}$, co interpretujemy:
   „Pole czworokąta równe jest iloczynowi połowy jego obwodu przez promień okręgu wpisanego w ten czworokąt” i zapisujemy w postaci $P_{\Diamond} = p \cdot r$, gdzie p jest połową obwodu czworokąta, a r jest promieniem okręgu wpisanego w ten czworokąt.
2. Jeżeli znamy ten wzór, to oczywiście mogliśmy od razu z niego skorzystać.
3. W rozwiązaniu nie korzystaliśmy z informacji, że czworokąt jest deltoidem.
4. Czy ważne jest to, że wielokąt jest czworokątem? Jak obliczysz pole wielokąta opisanego na okręgu o danym promieniu r, jeśli znasz obwód tego wielokąta?

Sprostowanie!!

Ciasto z zakalcem!!

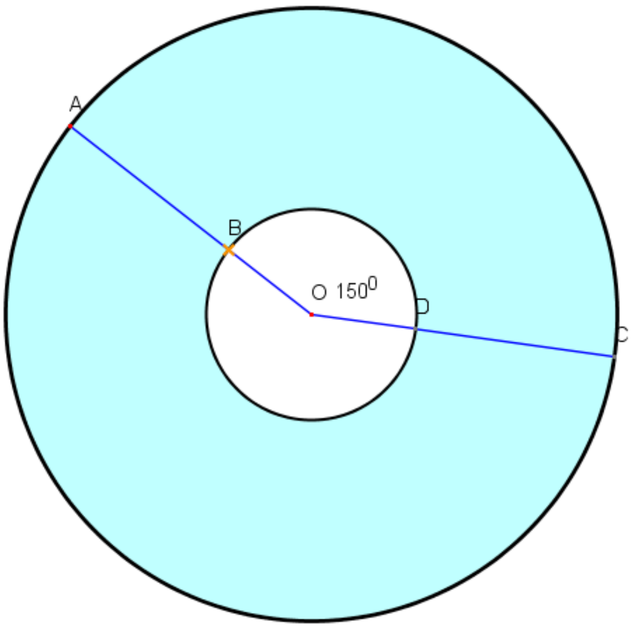
W powyższym rozwiązaniu zadania:
Otrzymujemy, że pole deltoidu wpisanego w okrąg o promieniu 5 jest równe 75.
Pozornie wszystko jest w porządku,
…obliczenia poprawne,
…wyniki zgodne z obliczeniami,
ale...
…dociekliwy uczeń zauważy, że pole koła, na którym ten deltoid jest opisany wynosi:
$25\pi \approx 78{,}53982$, czyli więcej niż 75, a więc mamy sprzeczność.
Szukamy więc błędu najpierw w obliczeniach, nie znajdujemy,…
…zaraz, zaraz... a obwód koła?
no tak obwód jest równy $2\pi r = 2\pi \cdot 5 = 10\pi \approx 31{,}41593$ czyli więcej niż 30 znowu sprzeczność!!
Wniosek: W zadaniu mamy błędne dane!!
Możliwe rozwiązania:

I. Podajemy uczniom zadanie z błędnymi danymi:
   1. Jeśli uczniowie stwierdzą, że dane są błędne i w związku z tym nie będą obliczali pola, to takie rozwiązanie należy ocenić najwyżej.
   2. Jeśli uczniowie rozwiązali zadanie tak jak w propozycji rozwiązań, to przy najbliższej okazji należy uczniom zwrócić uwagę na oczywiste sprzeczności - może uczniowie sami odkryją, że coś nie gra i ustalą dlaczego.

II. Podajemy uczniom do rozwiązania zadanie z poprawnymi danymi, czyli takimi, że:
   Obwód wielokąta i promień koła powinny być takie, aby $2\pi r$ było mniejsze od obwodu wielokąta np.
   „Na okręgu o promieniu 5 opisano deltoid o obwodzie 60. Oblicz pole deltoidu.”

Autorki skłaniają się do I rozwiązania,
warto wdrażać uczniów do analizowania danych oraz otrzymanych wyników.

Zadanie 11. Ile oczyści? (3 punkty)



[216]

Promień $|OA|$ całego koła jest równy:

$$|OA| = |AB| + |BO| = 0{,}3 + 0{,}3 = 0{,}6$$

Całe koło o promieniu $|OA|$ ma pole:

$$P_{K\_OA} = \pi \cdot |OA|^2 = \pi \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}36 \cdot \pi$$

Pole mniejszego koła, o promieniu $|OB|$ jest równe

$$P_{K\_OB} = \pi \cdot (|OB|)^2 = \pi \cdot (0{,}3)^2 = 0{,}09 \cdot \pi$$

Zatem pole całego pierścienia kołowego jest równe

$$P_{C\_PIERSC} = P_{K\_OA} - P_{K\_OB} = 0{,}36 \cdot \pi - 0{,}09 \cdot \pi = 0{,}27 \cdot \pi$$

Wycieraczki czyszczą kawałek pierścienia kołowego, odpowiadający kątowi 150°.
Jaka to jest część całego pierścienia? – To taka sama część, jaką 150° jest częścią 360°.

Zatem interesujące nas pole jest równe $P_{Oczyszcz} = \frac{150^\circ}{360^\circ} \cdot P_{C\_PIERSC} = \frac{5}{12} \cdot 0{,}27 \cdot \pi \approx 0{,}35$

Odpowiedź:

Pole obszaru oczyszczanego przez wycieraczkę jest równe $0{,}35\ m^2$

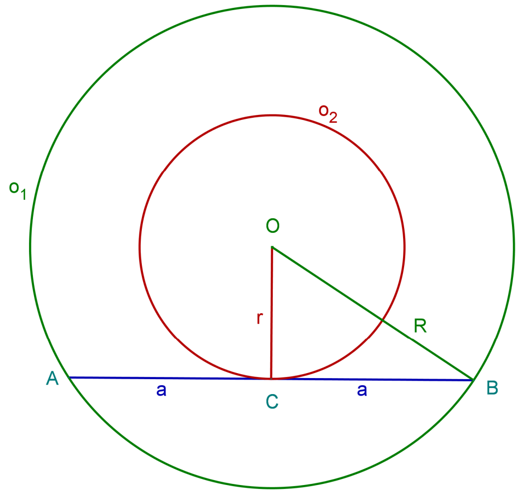
Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie pola pierścienia kołowego	1
B	Obliczenie pola oczyszczanego przez wycieraczkę.	1
C	Odpowiedź i podanie wyniku z żądaną dokładnością	1

[216] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu GEONExT

Zadanie 12. Zależy czy nie zależy? (4 punkty)

Tak jak na rysunku[217]



oznaczmy:
Promienie okręgów o_2 i o_1 odpowiednio przez r i R,
oraz długość cięciwy przez $2a$.
Pole pierścienia kołowego jest równe różnicy pól dużego i małego, koła, czyli:

$$P_{PIERSC} = P_{K_1} - P_{K_2} \quad P_{PIERSC} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) \ ^{(*)}$$

W trójkącie prostokątnym ΔBCO na mocy twierdzenia Pitagorasa mamy:

$$\left|\overline{OC}\right|^2 + \left|\overline{CB}\right|^2 = \left|\overline{OB}\right|^2,$$

ale zgodnie z oznaczeniami na rysunku:

$$\left|\overline{OC}\right| = r; \ \left|\overline{CB} = a\right| \text{ i } \left|\overline{OB} = R\right|,$$

zatem otrzymujemy:

$$r^2 + a^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - r^2 = a^2 \ ^{(**)}$$

Z równości $^{(*)}$ i $^{(**)}$ otrzymujemy, że:

$P_{PIERSC} = \pi \cdot a^2$, gdzie $2a$ jest długością cięciwy, zatem pole pierścienia zależy tylko od długości cięciwy, czyli nie zależy od promieni okręgów.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek i oznaczenia	1
B	Wyznaczenie pola pierścienia kołowego	1
C	Zapisanie różnicy kwadratów promieni, jako kwadrat połowy cięciwy	1
D	Podanie pola pierścienia jako funkcji długości cięciwy	1

[217] Rysunek wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu CaRMetal

Pakiet M - 2.7 „Co robić, żeby nic nie robić?” - „Kapitaliki”

I. Treści merytoryczne:

- podstawowe własności ciągów arytmetycznego i geometrycznego;
- suma częściowa ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
- procenty, punkty procentowe;
- procent prosty, procent składany;
- pojęcia: stopa procentowa, kapitalizacja odsetek, lokaty, kredyty, giełda, renta, systematyczne oszczędzanie.

II. Cele szczegółowe:

- doskonalenie umiejętności sporządzania rysunków ilustrujących treść zadania;
- stosowanie wzorów, przekształcanie wzorów;
- stosowanie procentów prostych i składanych;
- odczytywanie i analiza danych przedstawionych w tabeli lub na wykresie;
- umiejętność obliczania rat kredytu, kosztu kredytu, wartości kapitału;
- umiejętność obliczania wartości portfela inwestycyjnego;
- odczytywanie i analiza danych przedstawionych w tabeli lub na wykresie;
- analiza i interpretacja otrzymanych wyników;
- korzystanie z kalkulatora prostego lub graficznego.

III. Proponowane metody i formy pracy

Metoda: praca w grupach, burza mózgów.
Forma pracy: wspólnym frontem.
Środki dydaktyczne: karty pracy, gry dydaktyczne.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy , asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”

[1] Kachniewski M., Majewski B., Wasilewski P., *Rynek Kapitałowy i Giełda Papierów Wartościowych*, FERK, Warszawa 2008, www.kapital.edu.pl
[2] www.ferk.pl - Zbiór Zadań "Giełda w Matematyce"
[3] traugutt.net/lo/pliki/mat_fin.ppt – Zadanie maturalne

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Uczniowie pracują w zespołach zadaniowych (grupy 4 – 5 osobowe).
3. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
4. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
5. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
6. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
7. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
8. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”

[1] Kachniewski M., Majewski B., Wasilewski P., *Rynek Kapitałowy i Giełda Papierów Wartościowych*, FERK, Warszawa 2008, www.kapital.edu.pl
[2] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów Zbiór zadań do II klasy*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna - Krzysztof Pazdro, Warszawa 2000
[3] www.ferk.pl - Zbiór Zadań "Giełda w Matematyce"
[4] http://www.wkuwanko.tekstomania.pl/20081212113552.zip
[5] http://traugutt.net/lo/pliki/mat_fin.ppt

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Co robić, żeby nic nie robić?” - „Kapitaliki”

W tym zadaniu należy: [218]

1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Bonus to warm-up And how much on average? (6 points)

Imagine that you are a practising trader. Because of the reality some months you quote the benefits and some months you quote the losses. Using the data table below, calculate the height of a percentile profit obtained in the end of a year.
Take a month as the unit of time.

Month	Profit		Month	Profit
January	+5%		July	+9%
February	-3%		August	-1%
March	+7%		September	+1%
April	-2%		October	+4%
May	-2%		November	-2%
June	+3%		December	-3%

Bonus pour l’échauffement Et Combien En Moyenne? (6 points)

Imagine que tu es un boursicoteur actif, et comme cela arrive réellement, dans les mois particuliers, tu relèves une fois des bénéfices et une autre fois des pertes.En t’appuyant sur les donnés du tableau, compte le pourcentage des bénéfices obtenus à la fin de l’année. Le mois sera l’unité de temps.

Mois	Bénéfice		Mois	Bénéfice
Janvier	+5%		Juillet	+9%
Février	-3%		Août	-1%
Mars	+7%		Septembre	+1%
Avril	-2%		Octobre	+4%
Mai	-2%		Novombre	-2%
Juin	+3%		Décembre	-3%

Prima para calentarse ¿Y por término medio, cuánto? (6 puntos)

Imagínate que eres un inversor de bolsa, y, como sucede en la vida real, en los meses respectivos notas , una vez, los beneficios, otra vez, las perdidas.Apoyandote en los datos de la tabla, calcula el importe del beneficio procentual obtenido al fin del año. Toma el mes como unidad de tiempo.

Mes	Beneficio		Mes	Beneficio
Enero	+5%		Julio	+9%
Febrero	-3%		Agosto	-1%
Marzo	+7%		Septiembre	+1%
Abril	-2%		Octubre	+4%
Mayo	-2%		Noviembre	-2%
Junio	+3%		Diciembre	-3%

[218] Zaczerpnięto z [1]

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bonus zum Aufwärmen Und durchschnittlich wie viel? (6 Punkte)

Stell dir vor, du bist ein aktiver Börsenanleger und, so wie es in der Wirklichkeit vorkommt, notierst in einzelnen Monaten mal Gewinne mal Verluste. Berechne in Anlehnung an Daten aus der Tabelle die Höhe des am Ende des Jahres erzielten Prozentgewinns. Nehme einen Monat als eine Zeiteinheit an.

Monat	Gewinn		Monat	Gewinn
Januar	+5%		Juli	+9%
Februar	-3%		August	-1%
März	+7%		September	+1%
April	-2%		Oktober	+4%
Mai	-2%		November	-2%
Juni	+3%		Dezember	-3%

Abbuono per riscaldarsi E In Media Quanto? (6 punti)

Immagina di essere un investitore alla borsa, e come capita molto spesso nella realtà, certi mesi hai i profitti, gli altri le perdite. Guardando i dati della tabella devi calcolare l’ammontare del profitto ottenuto alla fine dell’anno. Il mese sara l’unità di misura del tempo.

Mese	Profitto		Mese	Profitto
Gennaio	+5%		Luglio	+9%
Febbraio	-3%		Agosto	-1%
Marzo	+7%		Settembre	+1%
Aprile	-2%		Ottobre	+4%
Maggio	-2%		Novembre	-2%
Giugno	+3%		Dicembre	-3%

Zadanie 1. Z różnych szuflad (12 punktów)[219]

Rozwiąż poniższe zadania i odszukaj litery, których wartości są rozwiązaniami poszczególnych równań. Utworzą one hasło. Podaj znaczenie odgadniętego hasła.
Na przykład: rozwiązanie $x=3$ oznacza, że w pole z nr „3” należy wpisać literę „x”

1	2	3	4	5	-	6	7	8	9	10		11	12	13	14

a) Wartość **k**, dla której ciąg $(k-12;\ \sqrt{2};\ k-11)$ jest geometryczny

b) Obwód **o** kwadratu o polu powierzchni $\frac{1}{4}$

c) Wartość **e**, która jest rozwiązaniem równania $e^{\frac{1}{2}} = 3$

d) Równanie kierunkowe prostej oddalonej o $2{,}5$ jednostek od prostej przechodzącej przez punkty: $A(-3;\ 9{,}5)$ i $B(5;\ 9{,}5)$

e) Wysokość **h** trójkąta równobocznego o boku $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) Rozwiązania równania: $a^2-19a+70=0$

g) Naturalne rozwiązania nierówności: $\frac{n-8}{n-7} \le 0$

h) Długość promienia **r** okręgu opisanego na kwadracie o boku $6\sqrt{2}$

i) Miejsca zerowe funkcji $f(s) = s^2 - 7s + 12$

j) Wartość parametru **b**, dla którego proste: $y = 2x - 3$ i $y = (b-9)x + 4$ są równoległe

[219] Zaczerpnięto z [1]

Zadanie 2. Co robić, żeby nic nie robić? (12 punktów)

Jak być leniwym? Co trzeba zrobić najpierw, żeby później nic nie robić?
Do tego potrzebne są pieniądze. Przydaje się też znajomość matematyki finansowej. Założenia:

- $ Chcemy wydawać 1000 zł miesięcznie
- $ Chcemy nic nie robić w wieku 40 lat

1. Przyjmując, że średnia długość życia kobiety to 80 lat, a mężczyzny 72 lata, oblicz ile pieniędzy powinien miesięcznie odkładać „do skarpety” dwudziestolatek, żeby w wieku czterdziestu lat zacząć wypłacać sobie rentę w wysokości 1000 złotych miesięcznie.
2. Ile miesięcznie należy odkładać, żeby zgromadzić potrzebną kwotę, jeśli zrezygnujemy „ze skarpety”, a pieniądze będziemy gromadzić na koncie bankowym o stałej rocznej stopie procentowej 5%. – *Wypłata renty z ochroną kapitału, zgromadzony kapitał nie zmienia się.*

   *Post scriptum…**Non omnis moriar**? - Horacy (Pieśni 3, 30, 6)*
3. Ile tak naprawdę musimy odkładać? - *Wypłata renty bez ochrony kapitału, zgromadzony kapitał maleje do zera. Po co komu w chwili śmierci zgromadzony kapitał?*

Uwaga: pieniądze wpłacamy na koniec miesiąca,
w obliczeniach nie uwzględniamy podatków, inflacji itd.

Zadanie 3. Nierówne a jednak równe? (4 punkty)[220]

Rodzeństwo Agatka (8 lat) i Jacek (10 lat) otrzymało razem w spadku 84 100 zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe.
Jak należy podzielić kwotę 84 100 zł między rodzeństwo?

Zadanie 4. Gramy na Giełdzie? (8 punków)[221]

Tabela przedstawia kursy zamknięcia dwóch spółek:

	SOKOŁÓW	HUTMEN
31 grudnia 2003	3.50	14.40
31 grudnia 2004	5.85	17.70

1. Pan Marek kupił 31 grudnia 2003 akcje spółek Sokołów i Hutmen za 4980 złotych. Ze sprzedaży wszystkich akcji 31 grudnia 2004 roku uzyskał 7050 złotych.
2. Oblicz, ile akcji Sokołowa, a ile akcji Hutmenu kupił pan Marek.
3. Siostra Pana Marka, Pani Joanna kupiła 31 grudnia 2003 roku 200 akcji Hutmenu. Ile akcji Sokołowa powinieneś kupić, aby uzyskać po roku ten sam zysk, jak Pani Asia?
4. O ile złotych wzrósł kurs akcji Sokołowa i Hutmenu z 31 grudnia 2004 roku w porównaniu z 31 grudnia 2003 roku? O ile procent wzrosły kursy akcji?
5. Brat Pana Marka, Pan Tomasz kupił 31 grudnia 2003 roku 117 akcji spółki Sokołów. Część akcji sprzedał w kwietniu 2004 roku, a pozostałe zatrzymał do końca roku. Ile akcji sprzedał w kwietniu pan Tomasz, jeśli wartość jego portfela akcji 31 grudnia 2003 roku i 31 grudnia 2004 była taka sama?
6. Sąsiadka, Pani Iwona kupiła 31 grudnia 2003 roku 300 akcji spółki Hutmen. Sprzedając je w maju następnego roku zarobiła 390 zł. Jaki był kurs akcji w chwili sprzedaży?

[220] Pomysł zaczerpnięto z [3]
[221] Zaczerpnięto z [1]

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" -
„Co robić, żeby nic nie robić?" - „Kapitaliki"
Bonus na rozgrzewkę A średnio ile? (6 punktów)

Wyobraź sobie, że jesteś aktywnym inwestorem giełdowym, i tak jak to bywa w rzeczywistości, w poszczególnych miesiącach raz notujesz zyski, raz straty.

Miesiąc	Zysk
Styczeń	+5%
Luty	-3%
Marzec	+7%
Kwiecień	-2%
Maj	-2%
Czerwiec	+3%
Lipiec	+9%
Sierpień	-1%
Wrzesień	+1%
Październik	+4%
Listopad	-2%
Grudzień	-3%

W oparciu o dane z tabeli oblicz wysokość uzyskanego procentowego zysku na koniec roku. Przyjmij miesiąc, jako jednostkę czasu.

Bonus na rozgrzewkę A średnio ile? (6 punktów)

Niech:

X oznacza zainwestowany kapitał; W - wartość kapitału na koniec roku; $Z_{\%}$ - zysk w procentach:

Wartość kapitału na koniec roku:

$$W = X \cdot (1+0{,}05)\cdot(1-0{,}03)\cdot(1+0{,}07)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1+0{,}03)\cdot$$
$$(1+0{,}09)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1+0{,}01)\cdot(1+0{,}04)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)$$

$$W = X \cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}07\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 1{,}03\cdot 1{,}09\cdot 0{,}99\cdot 1{,}01\cdot 1{,}04\cdot 0{,}98\cdot 0{,}97$$

$$W = 1{,}16158\cdot \mathrm{X}$$

$$W = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} = W - 100\%\cdot X = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X} - 100\%\cdot \mathrm{X} = 16{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} \approx 16{,}16\%\cdot X$$

Odpowiedź:

Zysk po roku inwestycji wynosił $16{,}16\%$ kapitału początkowego.

Punktacja

Czynności.	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Zastosowanie prawidłowej metody obliczenia zysku w procentach	2
C	Obliczenie zysku	1
D	Przetłumaczenie rozwiązania na język obcy	2

Bonus to warm-up And how much on average? (6 points)

Let: X denote the initial, invested capital; W - final capital in the end of a year; $Z_{\%}$ - percentile profit.
The final value of the capital in the end of a year is:

$$W = X \cdot (1+0{,}05)\cdot(1-0{,}03)\cdot(1+0{,}07)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1+0{,}03)\cdot$$
$$(1+0{,}09)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1+0{,}01)\cdot(1+0{,}04)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)$$

$$W = X \cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}07\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 1{,}03\cdot 1{,}09\cdot 0{,}99\cdot 1{,}01\cdot 1{,}04\cdot 0{,}98\cdot 0{,}97$$

$$W = 1{,}16158\cdot \mathrm{X} \Rightarrow$$

$$W = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} = W - 100\%\cdot X = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X} - 100\%\cdot \mathrm{X} = 16{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} \approx 16{,}16\%\cdot X$$

Answer: The percentile profit after a yearly investment is equal to $16{,}16\%$ of the initial capital.

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of the exercise text into Polish	1
B	Application of the right method for the interest rate calculating	2
C	Calculating of a percentile profit	1
D	Translation of a solution into English	2

Bonus pour l'échauffement Et Combien En Moyenne? (6 points)

X le capital investi; W - la valeur du capital à la fin de l'année; $Z_{\%}$ - le pourcentage des bénéfices:
La valeur du capital à la fin de l'année:

$$W = X \cdot (1+0{,}05)\cdot(1-0{,}03)\cdot(1+0{,}07)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1+0{,}03)\cdot$$
$$(1+0{,}09)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1+0{,}01)\cdot(1+0{,}04)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)$$

$$W = X \cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}07\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 1{,}03\cdot 1{,}09\cdot 0{,}99\cdot 1{,}01\cdot 1{,}04\cdot 0{,}98\cdot 0{,}97$$

$$W = 1{,}16158\cdot \mathrm{X} \Rightarrow$$

$$W = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} = W - 100\%\cdot X = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X} - 100\%\cdot \mathrm{X} = 16{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} \approx 16{,}16\%\cdot X$$

Réponse: Les bénéfices après un an d'investissement s'élèvent à $16{,}16\%$ du capital initial.

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire l'exercice en polonais	1
B	Appliquer une méthode correcte pour calculer le pourcentage des bénéfices	2
C	Calculer les bénéfices	1
D	Traduire la solution en langue étrangère	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Prima para calentarse ¿Y por término medio, cuánto? (6 puntos)

Que: X significa el capital invertido; W - valor del capital al fin del año; $Z_{\%}$ - beneficio en porcentaje:
Valor del capital al fin del año:

$$W = X \cdot (1+0{,}05)\cdot(1-0{,}03)\cdot(1+0{,}07)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1+0{,}03)\cdot$$
$$(1+0{,}09)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1+0{,}01)\cdot(1+0{,}04)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)$$

$$W = X \cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}07\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 1{,}03\cdot 1{,}09\cdot 0{,}99\cdot 1{,}01\cdot 1{,}04\cdot 0{,}98\cdot 0{,}97$$

$$W = 1{,}16158\cdot \mathrm{X} \Rightarrow$$

$$W = 116{,}157806602609\% \cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} = W - 100\% \cdot X = 116{,}157806602609\% \cdot \mathrm{X} - 100\% \cdot \mathrm{X} = 16{,}157806602609\% \cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} \approx 16{,}16\% \cdot X$$

Respuesta: Beneficio después de un año de inversión fue 16,16% del capital inicial.

Puntución

Numero de la actividad	Etapas de solución de tarea	Puntos
A	Traducción de la tarea en polaco	1
B	Aplicación del método correcto del cálculo del beneficio en porcentaje	2
C	Cálculo del beneficio	1
D	Traducción de la solución en la lengua extranjera	2

Bonus zum Aufwärmen Und durchschnittlich wie viel? (6 Punkte)

Bezeichne:

X - den Einschuss; W - den Wert des Kapitals am Ende des Jahres; $Z_{\%}$ - Gewinn in Prozenten:

Der Wert des Kapitals am Ende des Jahres:

$$W = X \cdot (1+0{,}05)\cdot(1-0{,}03)\cdot(1+0{,}07)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1+0{,}03)\cdot$$
$$(1+0{,}09)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1+0{,}01)\cdot(1+0{,}04)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)$$

$$W = X \cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}07\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 1{,}03\cdot 1{,}09\cdot 0{,}99\cdot 1{,}01\cdot 1{,}04\cdot 0{,}98\cdot 0{,}97$$

$$W = 1{,}16158\cdot \mathrm{X} \Rightarrow W = 116{,}157806602609\% \cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} = W - 100\% \cdot X = 116{,}157806602609\% \cdot \mathrm{X} - 100\% \cdot \mathrm{X} = 16{,}157806602609\% \cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} \approx 16{,}16\% \cdot X$$

Antwort: Der Gewinn nach einem Jahr Investition betrug 16,16% des Anfangskapitals.

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappen der Lösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnische	1
B	Anwendung einer richtigen Methode für die Berechnung des Gewinns in Prozenten	2
C	Berechnung des Gewinns	1
D	Lösungsübersetzung in eine Fremdsprache	2

Abbuono per riscaldarsi E In Madia Quanto ? (6 punti)

Sia:

X indica il capitale investito; W - il valore del capitale alla fine dell'anno; $Z_{\%}$ - il profitto con la percentuale:

Il valore del capitale alla fine dell'anno:

$$W = X \cdot (1+0{,}05)\cdot(1-0{,}03)\cdot(1+0{,}07)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1+0{,}03)\cdot$$
$$(1+0{,}09)\cdot(1-0{,}01)\cdot(1+0{,}01)\cdot(1+0{,}04)\cdot(1-0{,}02)\cdot(1-0{,}03)$$

$$W = X \cdot 1{,}05\cdot 0{,}97\cdot 1{,}07\cdot 0{,}98\cdot 0{,}98\cdot 1{,}03\cdot 1{,}09\cdot 0{,}99\cdot 1{,}01\cdot 1{,}04\cdot 0{,}98\cdot 0{,}97$$

$$W = 1{,}16158\cdot \mathrm{X}$$

$$W = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} = W - 100\%\cdot X = 116{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X} - 100\%\cdot \mathrm{X} = 16{,}157806602609\%\cdot \mathrm{X}$$

$$Z_{\%} \approx 16{,}16\%\cdot X$$

Risposta: Il profitto dopo un anno dell'investimento fa $16{,}16\%$ del capitale iniziale.

Punteggio

N. attivita	Tappe della soluzione	Punti
A	Traduzione dell'esercizio nella lingua polacca	1
B	Uso del metodo adatto per calcolare la percentuale del profitto	2
C	Calcolo del profitko	1
D	Traduzione della risposta nella lingua straniera	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1 Z różnych szuflad (12 punktów)

Wyznaczanie wartości przypisanych poszczególnym literom:

a) Ciąg $(k-12; \sqrt{2}; k-11)$ jest geometryczny: $\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{k-12} = \dfrac{k-11}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$2 = (k-12)\cdot(k+11) \Leftrightarrow k^2 - 23k + 130 = 0 \Leftrightarrow (k=10 \quad \vee \quad k=13)$ **k=10, k=13;**

b) Obwód o kwadratu o polu powierzchni $\frac{1}{4} \Rightarrow P = a^2 = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2};\quad bo \quad a > 0 \Rightarrow$

$o = 4\cdot a = 4\cdot\dfrac{1}{2} = 2$, **e=9;**

c) Równanie kierunkowe prostej oddalonej o $2{,}5$ jednostek od prostej przechodzącej przez pnkty: $A(-3; 9{,}5)$ i $B(5; 9{,}5)$. Równanie prostej AB: $y = 9{,}5$; Są dwie proste oddalone o $2{,}5$ od prostej AB: $y = 9{,}5 + 2{,}5$ oraz $y = 9{,}5 - 2{,}5$ **y=12, y=7;**

d) Wysokość **h** trójkąta równobocznego o boku $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; $h = a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 1$

h=1

e) Rozwiązania równania: $a^2 - 19a + 70 = 0$;
$a^2 - 19a + 70 = 0 \Leftrightarrow (a = 5 \ \vee a = 14)$; $\{\Delta = 81\}$ **a=5, a=14**

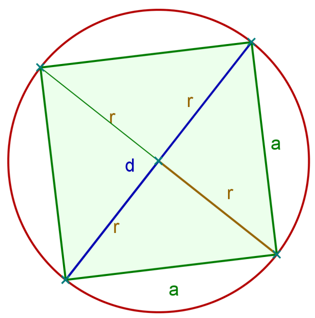
f) Naturalne rozwiązania nierówności: $\dfrac{n-8}{n-7} \le 0$

$$\begin{cases} \dfrac{n-8}{n-7} \le 0 \\ n \ne 7 \\ n \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n-8)\cdot(n-7 \le 0) \\ n \ne 7 \\ n \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \langle 7; 8 \rangle \\ n \ne 7 \\ n \in N \end{cases} \Leftrightarrow n = 8$$

g) Długość promienia r okręgu opisanego na kwadracie o boku $6\sqrt{2}$

$$a = 6\sqrt{2}$$
$$d = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 6\cdot 2 = 12$$
$$d = 2r$$
$$2r = 12$$

r=6



h) Miejsca zerowe funkcji $f(s) = s^2 - 7s + 12$

$(f(s) = s^2 - 7s + 12 \wedge f(s) = 0) \Leftrightarrow s^2 - 7s + 12 = 0$

$s^2 - 7s + 12 = 0 \Leftrightarrow (s = 3 \vee s = 4)$; $\{\Delta = 1\}$ **s=3, s=4**

i) Wartość parametru **b**, dla którego proste: $y = 2x - 3$ i $y = (b-9)x + 4$ są równoległe

Proste są równoległe $\Leftrightarrow$ ich współczynniki kierunkowe będą równe. Stąd $2 = b - 9$, zatem $b = 2 + 9 = 11$ **b=11**

Uzupełnienie diagramu:

H	O	S	S	A	-	R	Y	N	E	K		B	Y	K	A
1	2	3	4	5	-	6	7	8	9	10		11	12	13	14

Podaj znaczenie odgadniętego hasła:
Uczniowie mogą podać inne - znane im poprawne określenia hossy

- Hossa (Z Wikipedii, wolnej encyklopedii) (*http://pl.wikipedia.org/wiki/Hossa*)
- Hossa (fr. hausse, pot. rynek byka) - termin giełdowy oznaczający długotrwały wzrost kursu giełdowego papierów wartościowych lub cen towarów notowanych na giełdzie. Przeciwieństwem hossy jest bessa.
- Hossa (rynek byka) (*http://www.bankier.pl/slownik/gielda/hossa_rynek_byka.html*)
- Termin **Hossa (rynek byka)** należy do kategorii: giełda, długotrwała, silna tendencja wzrostowa na rynku, której zwykle towarzyszą wzmożone zakupy akcji

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Punkty
A	Rozwiązanie poszczególnych zadań 10 * 1p	10
B	Odszyfrowanie hasła	1
C	Podanie znaczenia odgadniętego hasła	1

Zadanie 2. Co robić, żeby nic nie robić? (12 punktów)

Ad 1.

Ile potrzeba pieniędzy, żeby w wieku 40 lat zacząć sobie wypłacać i płacić do końca życia rentę w wysokości 1000 złotych miesięcznie?

	Kobieta	Mężczyzna
Przez ile lat będzie wypłacana renta?	$80-40=40$ **(lat)**	$72-40=32$ **(lata)**
Przez ile miesięcy będzie wypłacana renta	$40\cdot12=480$ (miesięcy)	$32\cdot12=384$(miesiące)
Kwota, jaką trzeba zgromadzić	$480\cdot1000=48\,000$ zł	$384\cdot1000=384\,000$ zł
Ile lat będziesz odkładać?	20	20
Ile miesięcy będziesz odkładać?	$12\cdot20=240$	$12\cdot20=240$
Ile musisz wpłacać miesięcznie?	$480\,000:240=2\,000$ zł	$384\,000:240=1\,600$ zł

Odpowiedź:

Aby od wieku 40 lat zapewnić sobie dożywotnią 1000-złotową rentę należy zgromadzić „w skarpetce”:

- Mężczyzna 384 000 zł
- Kobieta 480 000 zł.

Aby zgromadzić „w skarpetce” odpowiednią sumę należy przez 20 lat odkładać miesięcznie:

- Mężczyzna 1 600 złotych
- Kobieta 2 000 zł

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Ad 2.
Tak mówi matematyka.
Czy na pewno? Co na to matematyka finansowa?
Pieniądze gromadzone w banku będą wciąż pracować!
Musimy, więc oszczędzić taką kwotę, która będzie zapewniała, co miesiąc odsetki w wysokości 1000 zł. Ile pieniędzy potrzebujemy zgromadzić?

K – szukana kwota jest rozwiązaniem równania: $K \cdot \frac{i}{12} = 1\,000$, gdzie i to roczna stopa procentowa

Po podstawieniu danych określonych w zadaniu otrzymujemy:

$K \cdot \frac{5\%}{12} = 1\ \ 000$, stąd $K = 1\ \ 000 \cdot \frac{12}{5\%} = 1\ \ 000 \cdot 240 = 240\ \ 000$

Wniosek:
Aby co miesiąc wypłacać odsetki w wysokości 1000 zł i nie zmniejszać swojego majątku musimy posiadać 240 000 zł i ulokować je przy rocznej stopie procentowej 5%.
Zauważmy, że w tym przypadku płeć nie ma wpływu na wysokość miesięcznych wpłat, bo wymagamy jedynie, żeby zgromadzony kapitał dawał 1000 zł odsetek miesięcznie.
Jaką kwotę należy wpłacać miesięcznie, aby zgromadzić odpowiedni kapitał?
Wpłatę miesięczną oznaczmy przez M, jej wartość wyznaczymy ze wzoru:

$K = M \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, gdzie: $K = 240000$ zł; $r = 5\%$; $n = 240$; $q = 1 + \frac{5\%}{12}$

Szukana wartość M musi, więc spełniać równanie: $240000 = M \cdot \frac{1{,}004\,166\,667^{240} - 1}{1{,}004\,166\,667 - 1}$

Odpowiedź:

Należy wpłacać miesięcznie 583,82 zł, aby w ciągu 20 lat zgromadzić na koncie bankowym kwotę 240000 zł, która umieszczona na lokacie daje miesięcznie 1000 złotych odsetek.

Ad. 3
Post scriptum…

***Non omnis moriar*?; [*Horacy (Pieśni 3, 30, 6)*]**

Komentarz do polecenia 2.
Ale, po co nam 240 000 zł w chwili śmierci? Czy nie lepiej wyjść „na zero”? Czy pomoże nam matematyka finansowa? Ile pieniędzy należy zgromadzić, aby nie chroniąc kapitału (to znaczy na koncie zostawić 0 zł), oraz co miesiąc otrzymywać rentę w wysokości 1000 zł?
Ile tak naprawdę musimy odkładać? - *Wypłata renty bez ochrony kapitału, zgromadzony kapitał maleje do zera. Po co komu w chwili śmierci zgromadzony kapitał?*
Ile, więc, tak naprawdę, należy oszczędzać, co miesiąc przez 20 lat, żeby potem już nic nie robić?
Ile potrzebujemy pieniędzy? Wartość początkowa renty płatnej z dołu

$$K_0 = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

K_0 - kapitał początkowy
a - wypłacana kwota
i - stopa procentowa za okres kapitalizacji
n - liczba okresów wypłaty (tutaj: liczba miesięcy)

Dane podstawiane do wzoru bez względu na płeć: a = 1000; i = 5%/12=0,4167%
Rachunek dla mężczyzny:

n = 384 (*32 lata x 12 miesięcy*) $K_o = 1000 \cdot \frac{1 - (1 + 0{,}004167)^{-384}}{0{,}004167} = 191383{,}5$

Mężczyzna musi zgromadzić 191 383,5 zł, by w wieku 40 lat zapewnić sobie dożywotnią rentę w wysokości 1000 zł.
Rachunek dla kobiety:

n = 480 (*40 lat x 12 miesięcy*); $K_o = 1000 \cdot \dfrac{1-(1+0{,}004167)^{-480}}{0{,}004167} = 207384{,}3$

Kobieta musi zgromadzić 207 384,3 zł, by w wieku 40 lat zapewnić sobie dożywotnią rentę w wysokości 1000 zł.

Wartość przyszła strumienia pieniędzy (kapitał początkowy = 0):

$$\sum_{j=0}^{n-1} K_j \times (1+i)^{n-j} \Rightarrow \sum_{j=0}^{239} K_j \times (1+0{,}004167)^{240-j}$$

Wynik obliczeń

Co robić, by nic nie robić?

Mężczyzna musi odkładać przez 20 lat po 464 zł, kobieta po 503 zł, aby w wieku 40 lat zacząć wypłacać sobie dożywotnią rentę w wysokości 1000 zł.

Takie rozwiązanie dała nam matematyka finansowa.

Podsumowanie

Zestawienie rozwiązań wszystkich przypadków – różne formy oszczędzania

	Matematyka		**Matematyka finansowa**			
	Pieniądze nie pracują		Pieniądze pracują			
	Kapitał nie jest chroniony [1)]		Kapitał jest chroniony [2)]		Kapitał nie jest chroniony [1)]	
	M	**K**	**M**	**K**	**M**	**K**
Potrzebna kwota	384 tys. zł	480 tys. zł	240 tys. zł	240 tys. zł	191,4 tys. zł	207,4 tys. zł
Konieczne miesięczne wpłaty	1 600 zł	2 000 tys. zł	583,82 zł	583,82 zł	464 zł	503 zł

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Obliczenie kwoty potrzebnej na wypłatę stałej renty dla kobiety	1
B	Obliczenie kwoty potrzebnej na wypłatę stałej renty dla mężczyzny	1
C	Obliczenie ile miesięcznie musi odkładać „do skarpetki” kobieta	1
D	Obliczenie ile miesięcznie musi odkładać „do skarpetki” mężczyzna	1
E	Obliczenie ile potrzeba pieniędzy, aby miesięczne odsetki wynosiły 1000 zł	2
F	Obliczenie ile miesięcznie trzeba wpłacać na konto, aby zgromadzić potrzebny kapitał	2
G	Obliczenie ile pieniędzy musi uzbierać mężczyzna, aby miesięczna renta wynosiła 1000 zł, jeśli kapitał nie będzie chroniony	1
H	Obliczenie ile pieniędzy musi uzbierać kobieta, aby miesięczna renta wynosiła 1000 zł, jeśli kapitał nie będzie chroniony	1
I	Obliczenie miesięcznej „składki” dla mężczyzny	1
J	Obliczenie miesięcznej „składki” dla kobiety	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3 Nierówne a jednak równe? (4 punkty)

Przyjmujemy oznaczenia:

K - kwota spadku, gdzie $K = 84100$*(zł)*

Niech X oznacza ułamek kwoty K dla Agatki

Zatem $(1 - X)$ będzie oznaczał ułamek kwoty K dla Jacka

Oczywiste jest, że $X + (1 - X) = 1$

Kiedy Agatka osiągnie 21 lat, to jej ułamek kwoty będzie równy:

$$X \cdot (1 + 0{,}05)^{21-8} = X \cdot (1 + 0{,}05)^{13} \quad (^{*})$$

Dla Jacka w wieku 21 lat ułamek kwoty będzie równy:

$$(1 - X) \cdot (1 + 0{,}05)^{21-10} = (1 - X) \cdot (1 + 0{,}05)^{11} \quad (^{**})$$

Warunek postawiony przez spadkodawcę – w dniu swoich 21 urodzin każde z dzieci dostanie taką samą kwotę – będzie spełniony, gdy ułamki określone w $(^{*})$ *i* $(^{**})$ będą równe

$$X \cdot (1 + 0{,}05)^{13} = (1 - X) \cdot (1 + 0{,}05)^{11} \quad \big| : (1 + 0{,}05)^{11}$$

$$X \cdot 1{,}05^{2} = 1 - X$$

$$X \cdot 1{,}1025 = 1 - X$$

$$X \cdot 1{,}1025 + X = 1$$

$$2{,}1025 \cdot X = 1 \quad \big| : 2{,}1025$$

$$X = \frac{1}{2{,}1025} \approx 0{,}475624257$$

$$1 - X \approx 0{,}524375743$$

Z kwoty K spadku Agatka powinna dostać $84100 \cdot 0{,}475624257 = 40\,000$*(zł)*,

natomiast Jacek $84100 \cdot 0{,}524375743 = 44100$*(zł)*

Odpowiedź:

W dniu 21 urodzin Jacek i Agatka dostaną taką samą kwotę, gdy ze spadku na koncie Agatki zostanie złożona kwota $40\,000$*(zł)*, zaś na koncie Jacka - $44\,100$*(zł)*

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Ułożenie równania z niewiadomą X, która jest ułamkiem kwoty dla Agatki	1
B	Rozwiązanie równania	1
C	Obliczenie kwot dla Jacka i Agatki	1
D	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 4. Gramy na Giełdzie?? (8 punków)

Ad A)

x – liczba akcji Sokołowa

y - liczba akcji Hutmenu

Przy tych oznaczeniach zdanie: „Pan Marek kupił 31 grudnia 2003 akcje spółek Sokołów i Hutmen za 4980 złotych” zapisujemy w postaci: $3{,}50 \cdot x + 14{,}4 \cdot y = 4980$

Zaś zdanie „Ze sprzedaży wszystkich akcji 31 grudnia 2004 roku uzyskał 7050 złotych”. Przybiera postać: $5{,}85 \cdot x + 17{,}70 \cdot y = 7050$.

W ten sposób uzyskaliśmy do rozwiązania układ równań:

$$\begin{cases} 3{,}50 \cdot x + 14{,}4 \cdot y = 4980 \\ 5{,}85 \cdot x + 17{,}70 \cdot y = 7050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 600 \\ y = 200 \end{cases}$$

Odpowiedź: Pan Marek kupił 600 akcji Sokołowa i 200 akcji Hutmenu.

Ad B)

Zysk uzyskany na akcjach Sokołowa:	$200 \cdot (17{,}70 - 14{,}40) = 660$ *(zł)*
Liczba akcji Hutmenu dająca ten sam zysk:	$660 : (5{,}85 - 3{,}50) = 281$

Odpowiedź: Aby uzyskać ten sam zysk należy kupić 281 akcji Hutmenu

Ad C)

Wzrost akcji Sokołowa:	$5{,}85 - 3{,}50 = 2{,}35$ *(zł)*
Procentowy wzrost akcji Sokołowa:	$\frac{2{,}35}{3{,}50} \cdot 100\% = 67{,}14\%$
Wzrost akcji Hutmenu:	$17{,}70 - 14{,}40 = 3{,}30$ *(zł)*
Procentowy wzrost akcji Hutmenu:	$\frac{3{,}30}{14{,}40} \cdot 100\% = 22{,}9\%$

Odpowiedź: Po roku kurs akcji Sokołowa wzrósł o 2,35zł, a Hutmenu o 3,30 zł.
Stanowi to odpowiednio 67% i 23%.

Ad D)

Wartość zakupionych akcji Sokołowa:	$117 \cdot 3{,}50 = 409{,}50$
x - liczba akcji sprzedanych w kwietniu:	$(117 - x) \cdot 5{,}85 = 409{,}5$ *(zł)* $\Rightarrow x = 47$ *akcji*

Odpowiedź: Pan Tomasz sprzedał w kwietniu 47 akcji

Ad E)

Wartość zakupionych akcji:	$300 \cdot 14{,}40 = 4320$ *(zł)*
Wartość sprzedanych akcji:	$4320 + 390 = 4710$ *(zł)*
Kurs akcji w chwili sprzedaży:	$4710 : 300 = 15{,}70$ *(zł)*

Odpowiedź: Kurs akcji w chwili sprzedaży wynosił 15,70 zł.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Rozwiązanie podpunktu A (układ równań, rozwiązanie, odpowiedź)	2
B	Obliczenie zysku z akcji Sokołowa, obliczenie ilości akcji Hutmenu, odpowiedź	2
C	Obliczenie wzrostu kwotowego i procentowego kursu akcji obu spółek	2
D	Obliczenie liczby akcji sprzedanych w kwietniu	1
E	Obliczenie kursu sprzedaży akcji	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” – „Co robić, żeby nic nie robić?” - „Kapitaliki”

W tym zadaniu należy: [222]

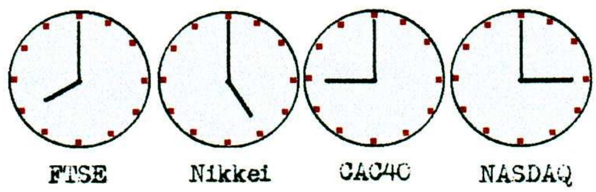
1. Przetłumaczyć treść zadania na język polski
2. Rozwiązać zadanie
3. Rozwiązanie zadania należy podać w wybranym wcześniej języku

Zadanie 1. Local time (5 points)

Some oddity

GMT is an acronym descendent from English statement Greenwich Mean Time, which denotes local time on the zero meridian going across observatory Greenwich in Great Britain.

It is 9:00 in Warsaw. The quotations on the Warsaw Stock Exchange are starting. The traders making exchange orders observe the indexes of the most known world exchanges in London, New York, Tokyo and in Paris. The picture shows the local time in every city mentioned above. It also shows the information about a time zone the given city belongs. Descramble the places, where the indexes NASDAQ, Nikkei, CAC40 and FTSE are listed.



Warsaw	**GMT + 1**
London	**GMT**
Paris	**GMT + 1**
New York	**GMT - 5**
Tokyo	**GMT + 9**

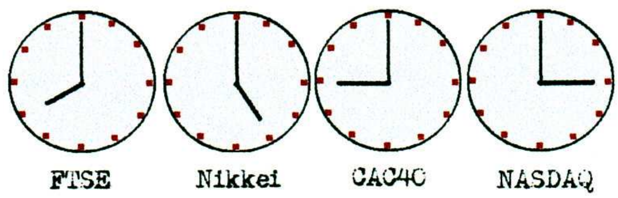
[222] Zaczerpnięto z [1]

Exercice 1. Heure locale (5 points)

Curiosité

GMT est un sigle venant de l'expression anglaise Greenwich Mean Time, signifiant l'heure locale sur le méridien, passant par l'observatoire de Greenwich en Grande Bretagne.

Il est 9 heures. Les cotations de la bourse de Varsovie viennent de commencer. Les boursicoteurs, en déposant leurs ordres, observent attentivement les comportements des indicateurs boursiers des plus importantes bourses mondiales à Londres, New York, Tokyo et Paris.
En te basant sur le dessin présentant l'heure locale dans chaque ville mentionnée et sur les informations des fuseaux horaires, déchiffre dans quelles villes sont enregistrées les indicateurs boursiers : NASDAQ, Nikkei, CAC40 i FTSE.



Varsovie	**GMT + 1**
Londres	**GMT**
Paris	**GMT + 1**
New York	**GMT - 5**
Tokyo	**GMT + 9**

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

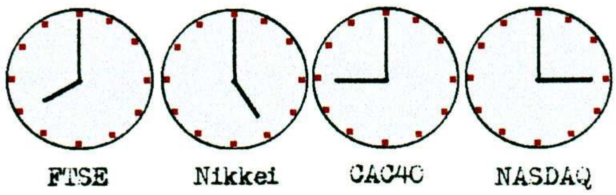
Tarea 1. Tiempo local (5 puntos)

Curiosidad

GMT es una abreviación que proviene de una expresión inglesa Greenwich Mean Time que significa el tiempo local al primer meridiano atravesando el observatorio de Greenwich en Gran Bretaña

Son las 9:00. Acaban de empezarse las cotizaciones en el parqué de Varsovia. Los inversores, dando ordenes, observan atentamente como se comportan los índices de bolsas mundiales en Londres, en Nueva York, en Tokyo y en París.

Basandóte en el dibujo que presenta el tiempo local en cada de las ciudades enumeradas así como las informaciones en qué zona de tiempo se encuentran, descifra donde son cotizados los índices respectivos - NASDAQ, Nikkei, CAC40 i FTSE.



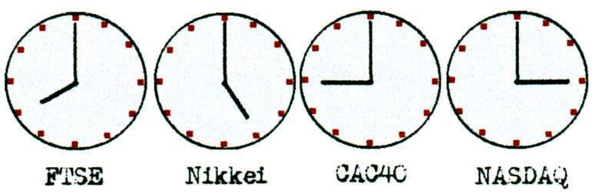
Varsovie	**GMT + 1**
Londres	**GMT**
Paris	**GMT + 1**
New York	**GMT - 5**
Tokyo	**GMT + 9**

Aufgabe 1. Lokale Zeit (5 Punkte)

Neuigkeit

GMT ist eine Abkürzung, die von einem englischen Wendung Greenwich Mean Time kommt und die die lokale Zeit am Nullmeridian bezeichnet, der durch das Observatorium von Greenwich in Großbritannien verläuft.

Es ist 9:00 Uhr. Es begannen eben Notierungen auf Warschauer Börse.. Beim Stellen eines Antrags beobachten die Anleger aufmerksam, wie sich die Aktienindizes von wichtigsten Weltbörsen in London, New York, Tokio und Paris verhalten.
Aufgrund der Abbildung, auf dem die lokale Zeit von jeder der aufgezählten Städten dargestellt ist, und aufgrund der Informationen, in welcher Zeitzone sich die Städte befinden, ,entschlüssele, wo einzelne Indizes – NASDAQ, Nikkei, CAC40 und FTSE notiert werden.



Warschau	**GMT + 1**
London	**GMT**
Paris	**GMT + 1**
New York	**GMT - 5**
Tokyo	**GMT + 9**

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

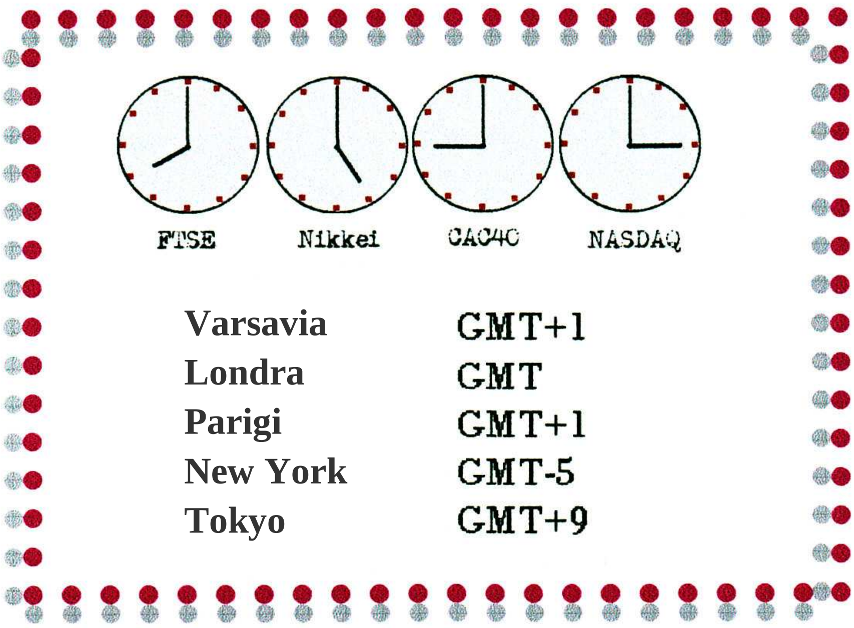
Esercizio 1 – Tempo Locale (5 punti)

Curiosità

GMT è una abbreviazione proveniendo dalla locuzione inglese Greenwich Mean Time la quale indica il tempo sul meridiano zero che attraversa l'osservatorio astronomico di Greenwich in Gran Bretagna

Sono le 9:00. Stanno cominciando le quotazioni della borsa di Varsavia. Gl'investitori fanno gli ordini osservando come stanno gli indici delle borse più importanti del mondo, queste di Londra, New York, Tokio e Parigi.

Basando sul disegno, il quale mostra il tempo locale di ogni città elencata con l'informazione nella duale zona di tempo si trovano indovina dove sono annunziati gli indici – NASDAQ, Nikkei, CAC40 i FTSE.



Zadanie 2. Równe raty kapitałowe (4 punkty)[223]

Pan Michał bierze w banku preferencyjny kredyt na rozwój swego przedsiębiorstwa. Bank oferuje mu 100 000zł oprocentowane w skali roku na 12%. Pan Michał chce go spłacić w 20 miesięcznych równych ratach kapitałowych po 5 000zł każda. Pomóż mu uzupełnić tabelę spłat. Oblicz rzeczywiste oprocentowanie kredytu.

Lp.	Zadłużenie	Odsetki	Rata	Spłata
1	100 000	1 000	5 000	6 000
2	95 000			
3				
4				
…				
20				

Zadanie 3. Równe raty (5 punktów)[224]

Pan Krzysztof bierze w banku preferencyjny kredyt na rozwój swego przedsiębiorstwa. Bank oferuje mu 100 000zł oprocentowane w skali roku na 12%. Pan Krzysztof chce go spłacić w 20 miesięcznych równych ratach. Pomóż mu obliczyć wysokość takiej raty. Jakie jest rzeczywiste oprocentowanie tego kredytu? Czy korzystniejsze są dla przedsiębiorcy równe raty kapitałowe, czy równe raty, jeśli wiadomo, że rzeczywiste oprocentowanie w przypadku równych rat kapitałowych wynosi 10,5%?

Zadanie 4. Giełda bursztynów (4 punkty) [225]

Grupa dzieci wybrała się na plażę w poszukiwaniu bursztynów[226].

Każde dziecko znalazło jakieś bursztyny, ale niektóre z nich ich tak mało, że chciały dokupić jeszcze kilka od innych. Bardzo trudno było ustalić cenę wymiany, każde dziecko upierało się przy swojej cenie, nie chciało ustąpić - wywołało to tylko hałas i kłótnie. Z opresji wybawił ich Julek, którego ojciec jest maklerem giełdowym.

Zdecydował, że:

- Każdy, kto chciałby kupić bursztyny napisze na kartce ile ich chce oraz jaką maksymalną cenę za jeden bursztyn jest gotów zapłacić.
- Ci, którzy chcieli sprzedać, pisali na kartce proponowaną liczbę bursztynów i minimalną cenę za jeden bursztyn, po jakiej chcą je sprzedać.

[223] Zadanie własne Iwony Derendarz
[224] Zadanie własne Iwony Derendarz
[225] Zaczerpnięto z [1
[226] Wszystkie zdjęcia bursztynów wykonała Helena Ewert - Fechner

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Julek pozbierał kartki i zestawił je w takiej oto tabeli:

OFERTY SPRZEDAŻY		OFERTY KUPNA	
Liczba	Minimalna cena (w zł) $CenaMin$	Liczba	Maksymalna cena (w zł) $CenaMax$
1	15	6	16
5	13	16	14
15	11	8	11
9	9	14	9
6	6	2	8

Za swój dobry pomysł i wykonaną pracę, Julek pobierał prowizję w postaci 1% wartości każdej transakcji.

Pomysł Julka był taki, aby wszyscy byli zadowoleni i nikt nie poczuł się gorszy od innych, wszyscy mieli płacić taką samą cenę za jeden bursztyn równą x,
Przy czym miała ona spełnia następujący warunek

- kupią bursztyny wszyscy, którzy podali maksymalną cenę równą lub wyższą niż x,
- sprzedadzą bursztyny wszyscy, którzy podadzą minimalną cenę równą lub niższą niż x,

<u>Zauważ</u>, że przy takiej cenie x dojdzie do maksymalnej możliwej liczby transakcji, czyli Julek najwięcej zarobi na prowizjach).
Ile wynosi szukane x? Ile Julek zarobi na pośrednictwie?

Zadanie 5. Czy na pewno więcej „Chytrusku”? (3 punkty) [227]

Wszystkim spodobał się pomysł Julka i od tej pory, co roku odbywała się giełda, w której Julek wyznaczał cenę jednego bursztynu. Kajtek, kolega Julka, podsunął mu pomysł, żeby wyznaczył wysoką cenę za jeden bursztyn. Twierdził, że wtedy wartość transakcji będzie wyższa, a zatem Julek więcej zarobi na prowizjach.
Oblicz, korzystając z danych w tabeli:

OFERTY SPRZEDAŻY		OFERTY KUPNA	
Liczba	Minimalna cena (w zł) $CenaMin$	Liczba	Maksymalna cena (w zł) $CenaMax$
1	15	6	16
5	13	16	14
15	11	8	11
9	9	14	9
6	6	2	8

- Ile osób się wymieni, jeśli Julek ustali cenę na poziomie 13 zł za bursztyn?
- Ile wtedy zarobi Julek?
- Czy jest to więcej niż w pierwotnym pomyśle Julka, jeżeli wiadomo, że przy cenie $11\,PLN$ za bursztyn, zysk Julka wyniósł $3{,}30\,PLN$?

---
[227] Zaczerpnięto z [1]

Zadanie 6. Ile zarobiłeś na akcjach? (5 punktów)[228]

Tabela przedstawia kursy zamknięcia dla spółek: TP S.A. oraz CIECH S.A.

Data	SPÓŁKA	
	TP S.A.	CIECH S.A.
31 grudnia 2008	19,09	25,39
30 grudnia 2009	15,89	37,09

a) Oblicz, dla każdej z tych spółek, o jaki procent zmienił się kurs akcji z dnia 30 grudnia 2009 roku w porównaniu z kursem z dnia 31 grudnia 2008 roku.

b) 31 grudnia 2008 roku Pan Zygmunt kupił 10 akcji spółki TP S.A., a Pan Julian 100 akcji spółki CIECH S.A. Jaką kwotę uzyskali ze sprzedaży swoich akcji 30 grudnia 2009 roku? Ile złotych zyskali?

c) Czy opłacało się kupić te akcje za kredyt o oprocentowaniu rocznym 9%?

d) Ile zarobił każdy z panów na akcjach, jeśli uwzględnimy podatek od zysków giełdowych w wysokości 19%?

e) Ile więcej warte są pieniądze, które każdy z tych panów uzyskał za akcje w grudniu 2009, od tych, które każdy z nich zainwestował w grudniu 2008 roku, jeśli inflacja wynosiła 0,7%? Uwzględnij podatek od zysków giełdowych.

Uwaga: *W zadaniu pomijamy kwestię odliczania od zysku kosztów uzyskania przychodów giełdowych. Kosztami uzyskania przychodu są: prowizja maklerska od zrealizowanych transakcji, opłata za dostęp do notowań rachunku internetowego, opłata za transakcje na rynku NFI, opłata maklerska za złożenie zapisu w imieniu klienta na akcje w ramach publicznej subskrypcji, odsetki od kredytu na zakup akcji, obligacji itp…*

Zadanie 7. Palisz, płacisz, zdrowie tracisz! (5 punktów)[229]

Ktoś zaczął palić papierosy[230] po skończeniu 18 lat i od tej pory na papierosy wydawał średnio 70 zł miesięcznie. Jeśli roczny wydatek na papierosy wpłacałby do banku w końcu każdego roku, to, jaką sumę zaoszczędziłby z końcem 60 roku życia? Zakładamy, że oprocentowanie w banku wynosi 6%, kapitalizacja odsetek następuje raz na rok.

Zadanie 8 Co Im dał Totolotek? (4 punkty)[231]

Dwaj bracia Kamil i Tomek grali w Toto Lotka. Trafili „piątkę” i otrzymali 30 000 zł. Otrzymaną kwotę podzielili po równo. Kamil wpłacił swoją część do banku na lokatę terminową oprocentowaną 10% w stosunku rocznym. Tomek 60% kwoty przeznaczył na zakup obligacji dwuletnich z oprocentowaniem 8% w stosunku rocznym i corocznie kapitalizowanych, a za resztę zakupił akcje spółki C, której po dwóch latach kurs wzrósł o 15%.
Który z braci zarobił więcej?

[228] Zadanie własne Heleny Ewert - Fechner
[229] Zaczerpnięto z [3] - Zadanie 6.142, Strona 120
[230] Zdjęcia „petów” wykonała Helena Ewert - Fechner
[231] Zaczerpnięto z [1]

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 9. Wzrost kursu (3 punkty) [232]

Wzrost kursu euro w stosunku do złotego spowodował podwyżkę ceny wycieczki zagranicznej o 5%. Ponieważ nowa cena nie była zachęcająca, postanowiono obniżyć ją o 8%, ustalając cenę promocyjną równą 1449 zł.
Oblicz pierwotną cenę wycieczki dla jednego uczestnika.

Zadanie 10. Od sestki i stopy (4 punkty) [233]

a) Od jakiej kwoty otrzymano 15 zł odsetek za okres 2 miesięcy przy stopie procentowej 18% w skali roku?

b) Przy jakiej stopie procentowej przypada 4 zł odsetek od kwoty 200 zł za 30 dni?

Zadanie 11. Podwoje (3 punkty) [234]

Po ilu latach kapitał początkowy w wysokości 750 zł złożony na 11% podwoi się?
Czy wartość kapitału początkowego jest w tym zadaniu istotna?

Zadanie 12. Grosik do Grosika (5 punktów) [235]

Krótka sprzedaż – operacja związana z obrotem akcjami polegająca na pożyczeniu akcji (za pewną opłatą) i sprzedaniu ich, a następnie po ustalonym czasie zakupie tych akcji i oddaniu pożyczającemu.
Pozwala ona realizować zyski wówczas, gdy ceny akcji spadają.

Wujek Julki, przewidując spadki na giełdzie, postanowił przedłużyć swoją lokatę o oprocentowaniu 3%. Tata Julki zdecydował się jednak wykorzystać bessę i zastosować tym razem krótką sprzedaż 100 akcji „Grosika”. Za możliwość pożyczenia akcji tata Julki miał zapłacić pod koniec roku 1% wartości akcji (liczonej na początku roku). Po upływie 12 miesięcy okazało sią, że cena jednej akcji „Grosika” spadła z 10, 05 zł do 9,67 zł.
Kto tym razem okazał się lepszym inwestorem – tata czy wujek?
Czy odpowiedź zmieniłaby się, gdyby cena spadła jedynie do 9, 99zł?

[232] Zaczerpnięto z [4
[233] Zaczerpnięto z [4]
[234] Zaczerpnięto z [4]
[235] Zaczerpnięto z [1]

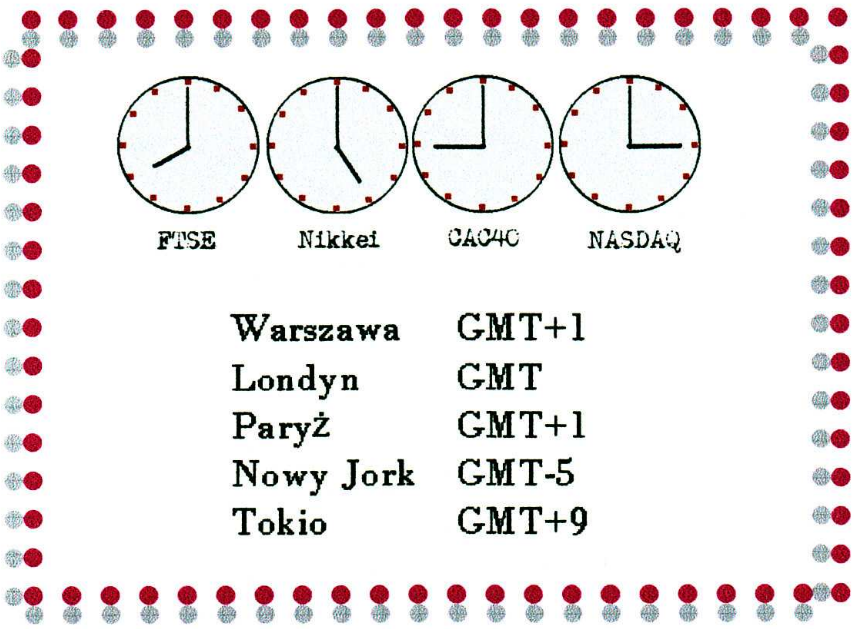
Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” – „Co robić, żeby nic nie robić?” - „Kapitaliki”

Zadanie 1. Czas lokalny (5 punktów)

Ciekawostka

GMT to skrót pochodzący od angielskiego wyrażenia Greenwich Mean Time oznaczającego lokalny czas na południku zerowym przechodzącym przez obserwatorium Greenwich w Wielkiej Brytanii.

Jest godzina 9:00. Właśnie rozpoczęły się notowania na warszawskim parkiecie.
Inwestorzy składając zlecenia bacznie obserwują, jak zachowują się indeksy najważniejszych światowych giełd w Londynie, Nowym Jorku, Tokio i Paryżu.
Na podstawie rysunku, na którym przedstawiony jet lokalny czas w każdym z wymienionych miast i informacji, w której strefie czasowej się znajdują odszyfruj, gdzie notowane są poszczególne indeksy – NASDAQ, Nikkei, CAC40 i FTSE.



Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 1. Czas lokalny (5 punktów)

Wskazówka:[236]

Skoro w Warszawie jest godzina 9:00, to w Paryżu także, w Londynie jest 8:00, w Nowym Jorku 3:00, a w Tokio 17:00.

Rozwiązanie i odpowiedź:

GIEŁDA	INDEKS
Paryska	CAC40
Londyńska	FTSE
Nowojorska	NASDAQ
Tokijska	Nikkei

Punktacja

Czynność.	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie zadania na język polski	1
B	Ustalenie aktualnego czasu w poszczególnych miastach	1
C	Przyporządkowanie Giełd i Indeksów	1
D	Przetłumaczenie rozwiązania na język obcy	2

Exercise 1. Local time (5 points)

Hint:

In Warsaw is 9:00, so in Paris is also 9.00, in London is 8:00, in New York 3:00 and in Tokyo is 17:00.

Solution and answer:

PLACE	INDEX
Paris	CAC40
London	FTSE
New York	NASDAQ
Tokyo	Nikkei

Scores

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of the exercise text into Polish	1
B	Calculating the local time in every city	1
C	Corresponding places to Indexes	1
D	Translation of a solution into English	2

[236] Zdjęcie wykonała Helena Ewert – Fechner na GPW w Warszawie w dniu 7.06.2010 roku (Canon A 2000 IS)

Exercice 1. Heure Locale (5 points)

Indication :

Puisqu'il est 9 heures à Varsovie, c'est la même heure à Paris, 8 heures à Londres, 3 heures à New York et 17 heures à Tokyo.

Solution et réponse :

Bourse	**Indeks**
parisienne	CAC40
londonienne	FTSE
new yorkaise	NASDAQ
de Tokyo	Nikkei

Pointage

Numéro de l'activité	Solution étape par étape	Points
A	Traduire l'exercice en polonais	1
B	Etablir l'heure actuelle dans toutes les villes	1
C	Attribuer les bourses aux indicateurs boursiers	1
D	Traduire la solution en langue étrangère	2

Tarea 1. Tiempo Local (5 puntos)

Instrucción:

Como en Varsovia son las $9:^{00}$, en París también, en Londres son las $8:^{00}$, en Nueva York son las $3^{:00}$ y en Tokyo son las $17^{:00}$.

Solución y respuesta:

BOLSA	**INDICE**
parisiense	CAC40
londinense	FTSE
de Nueva York	NASDAQ
de Tokyo	Nikkei

Puntuación

Numero de la actividad	Etapas de solución de tarea	Puntos
A	Traducción de la tarea en polaco	1
B	Determinación del tiempo actual en las ciudades respectivas	1
C	Puesta en orden de las Bolsas y los Indices	1
D	Traducción de la solución en la lengua extranjera	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Aufgabe 1. Lokale Zeit (5 Punkte)

Tipp:

Wenn in Warschau 9:$^{\underline{00}}$ Uhr ist, ist in Paris auch 9:$^{\underline{00}}$ Uhr, in London ist 8:$^{\underline{00}}$ Uhr, in New York 3:$^{\underline{00}}$ Uhr, und in Tokio 17:$^{\underline{00}}$

Lösung und Antwort:

Börse	**Index**
Pariser	CAC40
Londoner	FTSE
New Yorker	NASDAQ
Tokioter	Nikkei

Punktwertung

Tätigkeits nummer	Etappe der Lösung	Punktenzahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnische	1
B	Bestimmung der aktuellen Zeit in einzelnen Städten	1
C	Zuordnung von Börsen und Indizes	1
D	Aufgabenübersetzung in eine Fremdsprache	2

Esercizio 1 – Tempo Locale (6 punti) – schizzo della soluzione:

Indicazione :

Se a Varsavia sono le 9:00, Hallora a Parigi anche, a Londra sono le 8:00, ed a New York 3:00, ed a Tokio 17:00.

Soluzione e risposta :

BORSA	INDICE
di Parigi	CAC40
di Londra	FTSE
di New York	NASDAQ
di Tokio	Nikkei

Propoosta di punteggio:

N	Tappe della soluzione	Punti
1	Traduzione dell’esercizio nella lingua polacca	1
2	Determinazione del tempo nelle città differenti	1
3	Ordinazione delle Borse e degli Indici	1
4	Traduzione della risposta nella lingua straniera	2

Zadanie 2. Równe raty kapitałowe (4 punky)

Oznaczenia: Oprocentowanie miesięczne $p = \frac{12\%}{12} = 1\%$; ilość spłat: $n = 20$

Lp.	Zadłużenie	Odsetki	Rata	Spłata
1	100 000,00 zł	1 000,00 zł	5 000,00 zł	6 000,00 zł
2	95 000,00 zł	950,00 zł	5 000,00 zł	5 950,00 zł
3	90 000,00 zł	00,00 zł	5 000,00 zł	5 900,00 zł
4	85 000,00 zł	850,00 zł	5 000,00 zł	5 850,00 zł
5	80 000,00 zł	800,00 zł	5 000,00 zł	5 800,00 zł
6	75 000,00 zł	750,00 zł	5 000,00 zł	5 750,00 zł
7	70 000,00 zł	700,00 zł	5 000,00 zł	5 700,00 zł
8	65 000,00 zł	650,00 zł	5 000,00 zł	5 650,00 zł
9	60 000,00 zł	600,00 zł	5 000,00 zł	5 600,00 zł
10	55 000,00 zł	550,00 zł	5 000,00 zł	5 550,00 zł
11	50 000,00 zł	500,00 zł	5 000,00 zł	5 500,00 zł
12	45 000,00 zł	450,00 zł	5 000,00 zł	5 450,00 zł
13	40 000,00 zł	400,00 zł	5 000,00 zł	5 400,00 zł
14	35 000,00 zł	350,00 zł	5 000,00 zł	5 350,00 zł
15	30 000,00 zł	300,00 zł	5 000,00 zł	5 300,00 zł
16	25 000,00 zł	250,00 zł	5 000,00 zł	5 250,00 zł
17	20 000,00 zł	200,00 zł	5 000,00 zł	5 200,00 zł
18	15 000,00 zł	150,00 zł	5 000,00 zł	5 150,00 zł
19	10 000,00 zł	100,00 zł	5 000,00 zł	5 100,00 zł
20	5 000,00 zł	50,00 zł	5 000,00 zł	5 050,00 zł

Suma spłat tworzących ciąg arytmetyczny wynosi: $S_{20} = \frac{6\,000 + 5\,050}{2} \cdot 20 = 110\;500\,zł$

W rzeczywistości oprocentowanie kredytu wynosi: $\frac{10\,500}{100\,000} \cdot 100\% = 10{,}5\%$

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Obliczenie oprocentowania miesięcznego p=1%	1
B	Poprawne uzupełnienie tabeli spłat	1
C	Obliczenie sumy spłat	1
D	Obliczenie oprocentowania kredytu	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3. Równe raty (5 punktów)

Przyjmiemy oznaczenia:
K =100 000zł - kwota kredytu,
n = 20 ilość rat,
r=12% oprocentowanie roczne,
$p=\frac{12\%}{12}=1\%$ Oprocentowanie miesięczne, czynnik procentowy $q=1+\frac{p}{100}=1.01$,
R - poszukiwana wysokość równej miesięcznej raty, K_i - kwota zadłużenia w i-tym miesiącu:

$$K_1=K\cdot q-R$$
$$K_2=K_1\cdot q-R=(K\cdot q-R)\cdot q-R=Kq^2-Rq-R$$
$$K_3=K_2\cdot q-R=(Kq^2-Rq-R)\cdot q-R=Kq^3-Rq^2-Rq-R$$
…
$$K_n=Kq^n-Rq^{n-1}-Rq^{n-2}-Rq^{n-3}-\ldots-Rq-R$$

Po n spłatach zadłużenie $K_n=0$, możemy, więc wyznaczyć wysokość raty R:

$$Rq^{n-1}+Rq^{n-2}+\ldots Rq+R=Kq^n$$
$$R\left(q^{n-1}+q^{n-2}+..+q+1\right)=Kq^n$$
$$R=\frac{Kq^n}{q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+q+1}\text{, ewentualnie: } R=\frac{Kq^n\cdot(q-1)}{(q^n-1)}$$

Dla pana Krzysztofa równa rata wynosiłaby: $R=\frac{100\,000\cdot(1{,}01)^{20}\cdot 0{,}01}{(1{,}01)^{20}-1}=5\,541{,}53\ zł$

W ciągu 20 miesięcy mamy: $5\,541{,}53\cdot 20=110\,830{,}60\ zł$, co daje oprocentowanie:

$$\frac{10\,830{,}60}{100\,000}\cdot 100\%=10{,}8306\%.$$

$10{,}8306\%>10{,}5\%$, więc korzystniejsza jest spłata w równych ratach kapitałowych, niż w równych ratach.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Opisanie przyjętych oznaczeń	1
B	Związanie zmiennych na przynajmniej dwóch pierwszych krokach	1
C	Uogólnienie związku	1
D	Wyznaczenie wysokości raty	1
E	Obliczenie oprocentowania kredytu i porównanie rodzajów spłat	1

Zadanie 4. Giełda bursztynów (4 punktów)

Aby znaleźć cenę x, należy sprawdzać po kolei każdą całkowitą cenę z przedziału $\langle 6; 16\rangle$, aż znajdziemy taką, która spełnia warunki postawione przez Julka.

Cena **C**	Ilość ofert sprzedaży spełniających warunek ceny minimalnej $CenaMin \le C$	Łączna ilość ofert sprzedaży **S**	Ilość ofert kupna spełniających warunek ceny maksymalnej $CenaMax \ge C$	Łączna ilość ofert kupna **K**	Min(S; K)
6	6	6	2+14+8+16+6	46	6
8	6	6	2+14+8+16+6	46	6
9	6+9	15	14+8+16+6	44	15
11	6+9+15	30	8+16+6	30	30
13	6+9+15+5	35	16+6	22	22
14	6+9+15+5	35	16+6	22	22
15	6+9+15+5+1	36	16+6	22	22
16	6+9+15+5+1	36	6	6	6

Zauważamy, że: „Liczba ofert kupna równa jest liczbie ofert sprzedaży, czyli wszyscy, którzy spełniają warunek ceny dokonają transakcji przy cenie 11 zł. Liczba transakcji jest równa 30”
Podsumowanie:

Liczba transakcji przy cenie 11 zł (*Suma liczby bursztynów sprzedanych równa jest sumie liczby bursztynów kupionych*) liczba transakcji jest równa	30
Wartość wszystkich transakcji	$30*11\ PLN = 330\ PLN$
Zysk Julka	$330\ PLN * 1\% = 3{,}30\ PLN$

Odpowiedź:
Cena ustaliła się na poziomie $11\,PLN$ za bursztyn, natomiast zysk Julka wyniesie $3{,}30\,PLN$

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	0,25p za analizę każdej z ośmiu możliwości	2
B	Zapisanie wniosku – ustalenie ceny i liczby transakcji	1
C	Obliczenie wartości wszystkich transakcji i zysku Julka	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 5. Czy na pewno więcej „Chytrusku”? (3 punkty)

Liczba transakcji przy cenie 13 zł	$\min(5+15+9+6;16+6)=\min(35;\ 22)=22$
Wartość wszystkich transakcji	$22*13\ PLN=286\,PLN$
Zysk Julka	$286\,PLN*1\%=2{,}86\ PLN$

Odpowiedź:
Przy cenie $13\ PLN$ za bursztyn Julek zarobi $2{,}86\ PLN$, czyli mniej niż przy cenie $11\,PLN$ za bursztyn.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie liczby transakcji	1
B	Obliczenie wartości wszystkich transakcji i zysku Julka	1
C	Udzielenie odpowiedzi	1

Zadanie 6. Ile zarobiłeś na akcjach? (5 punktów)

Ad A.

	TP S.A.	**CIECH S.A**
Wzrost kursu akcji:	$15{,}89-19{,}09=-3{,}2$	$37{,}09-25{,}39=11{,}7$
Procentowy wzrost kursu akcji:	$\frac{-3{,}2}{19{,}09}\cdot 100\%=-16{,}76\%$	$\frac{11{,}7}{25{,}39}\cdot 100\%=46{,}08\%$

Odpowiedź: Kurs akcji spółki TP S.A. „wzrósł” o $-16{,}76\%$, a spółki CIECH S.A. wzrósł o $46{,}08\%$

Ad B.

	TP S.A.		**CIECH S.A**	
Kwota uzyskana ze sprzedaży:	10·15,89=	158,90 zł	100·37,09=	3 709,00 zł
Zysk:	10·(-3,2)=	-32,00 zł	100·11,7=	1 170,00 zł

Odpowiedź: Pan Zygmunt uzyskał ze sprzedaży: 158,90 zł, więc stracił, bo jego „zysk” wyniósł: -32,00 zł
Pan Julian ze sprzedaży uzyskał 3 709,00 zł, przy czym jego zysk wynosi: 1 170,00 zł
Ad. C. Panu Zygmuntowi nie opłacił się kredyt bez względu na oprocentowanie, bo poniósł stratę.
Pan Julian:

Odsetki od kredytu:	100·25,39·0,09=	228,51 zł
Różnica między zyskiem i oprocentowaniem kredytu:	1170 - 228,51=	941,49 zł

Odpowiedź: Panu Zygmuntowi zdecydowanie nie opłacało się branie kredytu. Natomiast Panu Julianowi opłaca się wziąć kredyt, bo odsetki od niego (228,51zł) są mniejsze niż zysk (1170,00 zł).

Ad. D.
W badanym okresie Pan Zygmunt poniósł stratę na transakcjach, w wysokości 32 zł, którą będzie mógł odliczyć od zysków w kolejnych pięciu latach.
Pan Julian:

Wielkość podatku od zysków giełdowych:	$1170\cdot 0,19=$	222,30 zł
Zysk po odliczeniu podatku:	1170-222,30=	947,70 zł

Odpowiedź: Pan Zygmunt odliczy w następnych latach poniesioną stratę, a Pan Julian zarobił 947,70 zł
Ad. E.

	Wartość pieniędzy Pana Zygmunta		Wartość pieniędzy Pana Juliana	
Zainwestowana kwota	$10\cdot 19,09=$	190,90 zł	$100\cdot 25,39$	2 539,00 zł
Kwota uzyskana ze sprzedaży akcji	$10\cdot 15,89=$	158,90 zł	$100\cdot 37,09-222,30$	3 486,70 zł
Kwota z pominięciem inflacji	$\begin{array}{c\|c} 158,9 & 100,7\% \\ \hline x & 100\% \end{array}$	$x=\dfrac{158,9\cdot 100\%}{100,7\%}$	$\begin{array}{cc} 3486,70 & 100,7\% \\ x & 100\% \end{array}$	$x=\dfrac{3486,70\cdot 100\%}{100,7\%}=$
x		157,80 zł		3 462,46 zł
Wartość pieniędzy w procentach	$\dfrac{157,80}{190,90}\cdot 100\%=$	83,24%	$\dfrac{3462,46}{2539,00}\cdot 100\%=$	136,37%

Odpowiedź: Wartość pieniędzy Pan Zygmunta zmalała o $16,76\%$, natomiast wartość pieniędzy Pana Juliana wzrosła o $36,37\%$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	A. Wyznaczenie wzrostu kursu akcji i procentowego wzrost kursu akcji dla każdej spółki	1
B	B. Obliczenie kwoty uzyskanej ze sprzedaży akcji i osiągniętego zysku	1
C	C. Uzasadnienie opłacalności kredytu dla obydwu panów	1
D	D. Obliczenie zysku po opodatkowaniu dla obydwu	1
E	E. Obliczenie wartości pieniędzy obydwu panów z uwzględnieniem inflacji	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 7. Palisz, płacisz, zdrowie tracisz! (5 punktów)

„Ktoś" palił do końca 60 roku życia, czyli 42 lata. Miesięcznie wypalał 70 zł, zatem rocznie 840 zł. Gdyby odkładać pieniądze w banku, to:
Pierwsza wpłacona kwota będzie „pracować" 42 lata, oznaczmy jej wartość po 42 latach przez K_0
Druga wpłata będzie leżała na koncie 41 lat, jej wartość po 41 latach oznaczamy przez K_1
itd.… - tak jak w tabeli poniżej:

		Wartość wpłaty K_n na koniec 60 roku życia
Pierwsza wpłata będzie leżała na koncie 42 lata	K_0	$K_0 = 840 \cdot (1+0{,}06)^{42}$
Druga wpłata będzie leżała na koncie 41 lat	K_1	$K_1 = 840 \cdot (1+0{,}06)^{41}$
Trzecia wpłata będzie leżała na koncie 40 lat	K_2	$K_2 = 840 \cdot (1+0{,}06)^{40}$
$\vdots$		
$i-ta$ wpłata będzie leżała na koncie $40-i$ lat	K_i	$K_i = 840 \cdot (1+0{,}06)^{42-i}$
$\vdots$		
41 wpłata	K_{41}	$K_{41} = 840 \cdot (1+0{,}06)$
42 wpłata	K_{42}	$K_{42} = 840$

Zaoszczędzone pieniądze oznaczmy przez K

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \cdots + K_i + \cdots + K_{41} + K_{42}$$

Składniki tej sumy są wyrazami ciągu geometrycznego, w którym: $a_1 = 840$ natomiast $q = 1+0{,}06$, zatem ze wzoru na sumę wyrazów w ciągu geometrycznym otrzymujemy:

$$K = 840 \cdot \frac{(1+0{,}06)^{42} - 1}{1+0{,}06-1} = 840 \cdot \frac{11{,}5570326741546686145754028899939 - 1}{0{,}06}$$

$$K = 840 \cdot \frac{10{,}5570326741546686145754028899939}{0{,}06} = 840 \cdot 175{,}950544569244476909590048165 5$$

$$K = 147798{,}457\ 4381653606\ 0405564045\ 902 \approx 147798{,}46$$

Odpowiedź:
„Ktoś" gdyby nie palił i zaoszczędzone w ten sposób pieniądze wpłacał do banku, to w dniu ukończenia 60 roku życia miałby do dyspozycji 147 798,46 złotych.

Punktacja

Czynność	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie ilości wpłat oraz wysokości każdej z nich	1
B	Zastosowanie wzoru na procent składany do przeliczenia wartości każdej z wpłat na koniec okresu oszczędzania - K_i	1
C	Zauważenie, że wartość zgromadzonego kapitału jest sumą ciągu geometrycznego – wyznaczenie a_1 oraz q	1
D	Podstawienie do wzoru, wykonanie obliczeń, udzielenie odpowiedzi	2

Zadanie 8. Co Im dał Totolotek? (4 punkty)

Podział kwoty:

Inwestycja każdego brata:	$30\,000:2=15\,000\,(zł)$

Obliczanie zysku Kamila:

Zysk Kamila z lokaty:	$15\,000\left((1+0{,}1)^2-1\right)=3150\ (zł)$

Obliczanie zysku Tomka:

Kwota przeznaczona na zakup obligacji dwuletnich:	$60\%\cdot 15\,000=9\,000\,(zł)$
Kwota przeznaczona na zakup akcji spółki C:	$40\%\cdot 15\,000=6\,000\,(zł)$ lub $15\,000-9\,000=6\,000\,(zł)$
Wartość obligacji po dwóch latach:	$9\,000\cdot(1+0{,}08)^2=10\,497{,}60\,(zł)$
Wartość akcji spółki C po dwóch latach:	$6\,000\cdot 1{,}15=6\,900\,(zł)$
Całkowity zysk Tomka:	$10\,497{,}60+6\,900-15\,000=2\,397{,}60\,(zł)$

Porównanie zysków i odpowiedź:
Kamil osiągnął większy zysk z inwestycji niż Tomek, bo $3150>2\,397{,}60$

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Obliczenie kwoty inwestycji dla każdego z braci	1
B	Obliczenie zysku Kamila	1
C	Obliczenie zysku Tomka	1
D	Porównania zysków i odpowiedź	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 9. Wzrost kursu (3 punkty)

Niech X oznacza pierwotną cenę wycieczki
Wtedy $X + 5\% \cdot X = X \cdot 1{,}05$ oznacza cenę wycieczki po podwyżce,
Zatem cenę promocyjna wycieczki możemy zapisać w postaci:
$X \cdot 1.05 - X \cdot 1{,}05 \cdot 8\% = X \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}92$
Z drugiej strony wiadomo, że promocyjna cena wycieczki, to 1449 zł.
Otrzymujemy, więc równanie:
$X \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}92 = 1449$
$X \cdot 0{,}966 = 1449 \quad |: 0{,}966$
$X = 1500$
Odpowiedź”
Pierwotna cena wycieczki dla jednego uczestnika wynosiła 1500*(zł)*

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie niewiadomej, zapisanie treści zadania w języku algebry	1
B	Rozwiązanie równania	1
C	Odpowiedź	1

Zadanie 10. Od sestki i stopy (4 punkty)

Ad. A)

Odsetki $O = 15$

Czas trwania lokaty $t = 2\ miesiące = 60\ dni$

Okres podstawowy $T = 360\ \ dni$

Roczna stopa procentowa $r = 18\% = 0{,}18$

Kapitał początkowy $K_0 = ?$

Wzór $O = K_0 \cdot r \cdot \frac{t}{T}$

Przekształcamy wzór $K_0 = \frac{O}{r \cdot \frac{t}{T}}$

Obliczenia

$$K_0 = \frac{15}{0{,}18 \cdot \frac{60}{360}} = \frac{15}{0{,}18 \cdot \frac{1}{6}} = 500$$

Odpowiedź:
15 zł odsetek za okres 2 miesięcy przy stopie procentowej 18% w skali roku otrzymano od kwoty 500 złotych

Ad. B)

Odsetki $O = 4$

Czas trwania lokaty $t = 30\ dni$

Okres podstawowy $T = 360\ \ dni$

Roczna stopa procentowa $r = ?$

Kapitał początkowy $K_0 = 200$

Wzór $O = K_0 \cdot r \cdot \frac{t}{T}$

Przekształcamy wzór $r = \frac{O}{K_0 \cdot \frac{t}{T}}$

Obliczenia

$$r = \frac{4}{200 \cdot \frac{30}{360}} = 0{,}24 = 24\%$$

Odpowiedź:
4 zł odsetek od kwoty 200 zł za 30 dni otrzymano przy stopie procentowej 24% w skali roku.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Poprawne rozwiązanie i odpowiedź w A)	2
B	Poprawne rozwiązanie i odpowiedź w B)	2

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 11. Podwoje (3 punkty)

Roczna stopa procentowa $r = 11\% = 0{,}11$

Kapitał początkowy $K_0 = 750$

Kapitał końcowy $K_n = 2 \cdot K_0 = 1500$

Czas trwania lokaty w latach $n = ?$

Wzór na kapitał końcowy $K_n = K_0 \cdot (1 + r \cdot n)$

$$K_n = K_0 + K_0 \cdot r \cdot n$$

Przekształcamy wzór

$$K_n - K_0 = K_0 \cdot r \cdot n$$

$$n = \frac{K_n - K_0}{K_0 \cdot r}$$

Obliczenia

$$n = \frac{1500 - 750}{750 \cdot 0{,}11} = 9$$

Odpowiedź:
Złożony w tych warunkach kapitał podwoi się po 9 latach.

Kapitał ma być podwojony, to znaczy, że $K_n = 2 \cdot K_0$. Postawiamy tak określone K_n do otrzymanego wyżej wzoru: $n = \dfrac{K_n - K_0}{K_0 * r}$. Mamy, więc: $n = \dfrac{2 \cdot K_0 - K_0}{K_0 * r} = \dfrac{K_0}{K_0 * r} = \dfrac{1}{r}$

Z powyższego wynika, że czas potrzebny na podwojenie kapitału zależy tylko od wartości stopy procentowej i nie zależy od wartości kapitału początkowego.

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Poprawne obliczenie czasu potrzebnego na podwojenie kapitału $K_0 = 750$ (zł)	2
B	Rozstrzygnięcie problemu	1

Zadanie 12. Grosik do Grosika (5 punktów)

Stopa zwrotu w przypadku rocznej lokaty (równa oprocentowaniu tej lokaty) $R_1 = 3\%$
Dochód z inwestycji taty Julka
$D_2 = 100 \cdot (10{,}05 - 9{,}67 - 1\% \cdot 10{,}05) = 100 \cdot (10{,}05 - 9{,}67 - 0{,}1005) = 27{,}95$
Zauważmy jednak, że tata Julka nie musiał w tym przypadku inwestować własnych środków – jedynie sprzedał pożyczone akcje, które później za posiadane pieniądze odkupił po niższej cenie i oddał, a różnica w cenie pokryła dodatkowo koszty pożyczki. Formalnie zatem stopa zwrotu wynosi: $R_2 = {}^{27{,}95}\!/_{0} = \infty$
Odpowiedź:
Tym razem tata Julka osiągnął wyższą stopę zwrotu.
Gdyby spadek akcji był niższy, dochód taty wyniósłby:
$D_3 = 100 \cdot (10{,}05 - 9{,}99 - 1\% \cdot 10{,}05) = 100 \cdot (10{,}05 - 9{,}99 - 0{,}1005) = -0{,}0405$
Stopa zwrotu wyniosłaby formalnie: $R_3 = {}^{-4{,}05}\!/_{0} = -\infty$
Odpowiedź: W drugim przypadku inwestycja wujka jest zyskowniejsza

Punktacja

Czynności	Etapy rozwiązania	Liczba punktów
A	Określenie stopy zwrotu z inwestycji wujka	1
B	Określenie stopy zwrotu Taty)	2
C	Odpowiedź	1
D	Rozstrzygnięcie II przypadku	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bibliografia

[1] Babiański W., Chańko L., Ponczek D., *Matematyka, podręcznik dla liceum ogólnokształcącego, kształcenie ogólne w zakresie podstawowym i rozszerzonym 1*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2007

[2] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Janocha G., Matematyka 2, *Podręcznik dla Liceum Ogólnokształcącego. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym*, Wydawnictwo Nowa Era, Warszawa 2003

[3] Bańkowska E., Stankiewicz D., *Matematyka w zastosowaniach. Zbiór zadań dla szkół średnich*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2001

[4] Bednarek W., *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1995

[5] Dyda B., Romanowicz Z., *Zdania dla przyszłych olimpijczyków*, Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław 2008

[6] Herburt I., Olszańska A., *Maturalnie, że zdasz*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 2004

[7] Gerstenkorn T., Śródka T., *Kombinatoryka i rachunek prawdopodobieństwa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1980

[8] Kłaczkow K., Kurczak M., Świda E., Mate*matyka. Zbiór zadań do liceów i techników, klasa II*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2006

[9] Kachniewski M., Majewski B., *Wasilewski P., Rynek Kapitałowy i Giełda Papierów Wartościowych*, FERK, Warszawa 2008, www.kapital.edu.pl

[10] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka dla licealistów Zbiór zadań do II klasy*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2000

[11] Ligman J., Stachowski E., Zalewska A., *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla uczniów szkół średnich*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna „Adam" Warszawa 1987

[12] Pawlak R., Pawlak H., Rychlewicz A., Rychlewicz A., Żylak K., Fabiańczyk M., *Matematyka Krok po Kroku Zbiór zadań dla klasy trzeciej liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego, technikum*, Wydawnictwo Edukacyjne Res Polona, Łódź

[13] Rams S., Rams T., Matematyka *bez granic, Część II Zadania konkursowe - etap wstępny 1998-2003*, Nowy Sącz 2003

[14] Stachowski E., Szurek M., *I Ty zostaniesz Euklidesem. Zbiór zadań nie tylko dla Asa do klasy drugiej szkół średnich*, Oficyna Wydawniczo - Poligraficzna „Adam", Warszawa 1999

[15] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

[16] Zalewska A., Stachowski E., *I ty zostaniesz Euklidesem*, Oficyna Wydawniczo – Poligraficzna „Adam", Warszawa 1995

[17] Zakrzewski M., Żak T., *Kombinatoryka, prawdopodobieństwo i zdrowy rozsądek*, Oficyna Wydawnicza Quadrivium, s. c., Wrocław 1994

[18] Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku zamieszczony na stronie internetowej CKE

[19] Kujon Polski, Matura, Matematyka, Gazeta Wyborcza, 12 maja 2006

[20] *Próbny pisemny egzamin dojrzałości z matematyki, typy szkoły: licea zawodowe i technika 4-letnie o 10 h cyklu nauczania matematyki*, Poznań, 7 marca 2000

[21] Matematyka, Poziom podstawowy, Przykładowy zestaw zadań nr 2 CKE, marzec rok 2008

[22] Matematyka Bez Granic, Etap wstępny edycja 2007

[23] Matematyka Bez Granic, Etap finałowy konkursu 7 marca 2007

[24] Matematyka Bez Granic, Edycja 2008-2009

[25] Matematyka Bez Granic, Etap finałowy konkursu 26 lutego 2008

[26] Matematyka Bez Granic, Etap finałowy konkursu 7 marca 2007

[27] Matematyka Bez Granic, Etap finałowy konkursu 10 luty 2009

[28] Matematyka Bez Granic , Zadania treningowe grudzień 2005

[29] Matematyka Bez Granic, Zadania treningowe grudzień 2007

[30] Gazeta Zachodnia Matura 10 maja 2001

[31] Gazeta Lubuska 21 marca 2007

[32] http://www.zadania.info

[33] www.ferk.pl - Zbiór Zadań "Giełda w Matematyce"

[34] traugutt.net/lo/pliki/mat_fin.ppt – Zadanie maturalne

[35] traugutt.net/lo/pliki/mat_fin.ppt – Zadanie maturalne

[36] http://traugutt.net/lo/pliki/mat_fin.ppt

[37] http://www.wkuwanko.tekstomania.pl/20081212113552.zip

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego