KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

rok zał. 1919
ptm

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wespół w zespół z Matematyką bez Granic

Materiały edukacyjne
dla uczestnika Projektu

Podręcznik III

Wespół w zespół
z Matematyką bez Granic
do matury III

III klasa szkoły ponadgimnazjalnej

Materiały edukacyjne dystrybuowane są bezpłatnie

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOPKA REDAKCYJNA

Podręcznik „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury 3”** dla klasy trzeciej szkoły ponadgimnazjalnej powstał w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego (umowa o dofinansowanie projektu w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki nr UDA-POKL.03.03.04-00-165/09).

Podręcznik został opracowany przez zespół doświadczonych nauczycieli matematyki uczestniczących w Projekcie pod kierunkiem Krystyny Białek - nauczyciela akademickiego Wydziału Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego, członka Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Redakcja:
Krystyna Białek, specjalista do spraw obsługi merytorycznej projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic”, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego

Autorzy materiałów edukacyjnych:
Iwona Derendarz, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Helena Ewert-Fechner, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Anna Rybak, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań

Tłumaczenie:
Joanna Jaros, język francuski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Elżbieta Jastrzębska, język hiszpański, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Jacek Kędziora, język włoski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Barbara Mędryk, język niemiecki, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Joanna Skowronek-Kaziów, język angielski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra

Doradztwo metodyczne:
Alicja Kozak-Wnuczek, Samorządowy Ośrodek Doskonalenia i Doradztwa, Zielona Góra

Recenzenci:
Dorota Krassowska, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski
Wojciech Saleniuk, Katolickie Liceum Ogólnokształcące, Żary

Projekt okładki:
Klara Keler

Spis treści

I. Wprowadzenie

Materiały edukacyjne pod tytułem „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury III**" opracowano w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

Podręcznik „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury III**" stanowi część trzecią materiałów edukacyjnych adresowanych do uczniów klasy trzeciej szkoły ponadgimnazjalnej kontynuujących zajęcia pozalekcyjne z matematyki w ramach Projektu, realizowanego w latach 2009 – 2012 w szkołach ponadgimnazjalnych z województw: kujawsko - pomorskiego, lubuskiego i zachodniopomorskiego.

Projekt „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" wpisuje się w ponadregionalny program rozwijania umiejętności uczniów w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem nauk matematyczno - przyrodniczych, języków obcych.

Celem projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" jest podnoszenie kompetencji kluczowych uczniów ze szkół podstawowych, gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych w zakresie kształtowania umiejętności opisywania w języku matematyki otaczającego świata, stawiania hipotez i ich weryfikowania, rozwiązywania problemów w twórczy sposób, integracji zespołu klasowego, skutecznego porozumiewania się w różnych sytuacjach, efektywnego współdziałania w zespole oraz interdyscyplinarnego spojrzenia na otaczającą nas rzeczywistość z uwzględnieniem znajomości języków obcych.

Podręcznik „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury 3**" do trzeciej klasy szkoły ponadgimnazjalnej zawiera siedem pakietów edukacyjnych zgodnych z podstawą programową kształcenia ogólnego dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych oraz standardów egzaminacyjnych. Materiały edukacyjne zawarte w podręczniku mają być źródłem do wzbogacenia treści omawianych w ramowym programie nauczania z zakresu matematyki realizowanych na zajęciach lekcyjnych w szkołach, z których pochodzą uczestnicy Projektu, rozszerzenia ich i usystematyzowania wiedzy.

Zaproponowany podział na 7 bloków tematycznych został dokonany w oparciu o podręcznik: Cewe A., Krawczyk M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R. *„Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik dla klasy 3"*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2009.

Pakiety edukacyjne zawarte w podręczniku „**Wespół w Zespół z Matematyką bez Granic do matury 3**" realizowane będą w roku szkolnym 2011/2012 na zajęciach pozalekcyjnych w klasach trzecich szkół ponadgimnazjalnych, z których pochodzą uczestnicy Projektu, pod kierunkiem nauczyciela nauczającego matematyki w danej klasie.

Materiały podane w każdym pakiecie edukacyjnym zaplanowano do realizacji na cztery godziny lekcyjne - zajęć pozalekcyjnych zwanych - „**Spotkaniami zespołów MbG**".

Zajęcia te będą realizowane w następujący sposób:

„Spotkanie 1 zespołów MbG" – 1 godzina lekcyjna,
„Spotkanie 2 zespołów MbG" – 2 godziny lekcyjne,
„Spotkanie 3 MbG" – 1 godzina lekcyjna.

„Spotkania zespołów MbG" (4 godziny lekcyjne) zawierają stałe elementy:

- zaplanowanie i podział zadań,
- realizację założonych planów,
- rozwiązanie zestawu zadań „Rozwiążmy razem", w tym jednego zadania w języku obcym,
- udokumentowanie pracy zespołów,
- podsumowanie i ocenę pracy zespłów.

Realizacja każdego pakietu edukacyjnego zostanie poprzedzona jedną godziną lekcyjną przygotowań kształtujących pożądane umiejętności (wskazane przez Autorów Pakietu) pod kierunkiem nauczyciela: spotkanie pierwsze – **„Ćwiczenia otwierające"**, spotkanie **2 i 3 – „Rozwiążmy razem"** oraz ostatnie – **„Ćwiczenia podsumowujące"** - podsumowujące postępy uczniów - rozwiązania zestawów zadań „Rozwiążmy razem" w klasie trzeciej szkoły ponadgimnazjalnej.

„Ćwiczenia otwierające" odbywają się zgodnie z terminarzem obowiązującym w danym pakiecie i są przeprowadzane na zajęciach pozalekcyjnych w szkołach, z których pochodzą uczestnicy Projektu, pod kierunkiem nauczyciela nauczającego matematyki w danej klasie.

Zadania z „Ćwiczeń otwierających" są treningiem do rozwiązywania zestawu „Rozwiążmy razem".

Rozwiązane zadania przez zespoły uczniów z każdego zestawu zadań „Rozwiążmy razem" sprawdza nauczyciel matematyki uczestniczący w Projekcie i ocenia je według otrzymanego klucza w danym pakiecie. **Arkusze rozwiązań zestawu zadań „Rozwiążmy razem" stanowią każdorazowo załącznik do raportu z realizacji danego pakietu edukacyjnego.**

Pierwsze zadanie podawane jest w języku obcym (angielskim, francuskim, niemieckim, hiszpańskim i włoskim). Należy je przetłumaczyć, rozwiązać i podać rozwiązanie w wybranym języku obcym. Rozwiązanie musi zawierać co najmniej 30 wyrazów.

W rozwiązaniu zestawu zadań „Rozwiążmy razem" uczestniczy cała klasa, pracując w odpowiednio dobranych grupach. Czas na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut.

Oceniana jest również strona graficzna i estetyka przedstawionych rozwiązań. Uczniowie mogą korzystać ze słowników językowych, przyborów geometrycznych, nożyczek, kredek i flamastrów.

Zakres współpracy z nauczycielami w zakresie realizacji pakietów edukacyjnych w ramach projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic":

- zaplanowanie terminów zajęć pozalekcyjnych,
- realizacja pakietów edukacyjnych zgodnie z wytycznymi Projektodawcy,
- przygotowanie raportu z realizacji każdego pakietu edukacyjnego:
    - podanie terminów, w których odbyły się zajęcia;
    - odnotowanie frekwencji;
    - uwagi dotyczące realizacji zajęć;
    - dane dotyczące zestawu „Rozwiążmy razem";
- przesłanie raportu wraz z listą obecności uczniów na zajęciach oraz arkuszami rozwiązań zestawu „Rozwiążmy razem" na adres Punktu Konsultacyjnego Projektu,
- aktualizacja stanu osobowego zespołu klasowego,
- współdziałanie w zakresie monitoringu i ewaluacji dotyczącej realizacji Projektu.

II. Cele edukacyjne zajęć pozalekcyjnych z zakresu matematyki

Realizacja projektu Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” - „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury III” w roku szkolnym 2011/2012 zmierzać będzie do realizacji celów ogólnych:

- stwarzanie możliwości rozwoju uzdolnień ucznia;
- rozwijanie umiejętności wnioskowania oraz stawiania i weryfikowaia hipotez;
- wspomaganie i wzmocnienie procesu edukacyjnego, jakiemu podlegają uczniowie szkół ponadgimnazjalnych;
- kształcenie umiejętności czytania tekstu matematycznego ze zrozumieniem oraz analizowania ich z wykorzystaniem pojęć i technk matematycznych;
- ugruntowanie wiedzy wyniesionej przez uczniów z lekcji matematyki;
- rozwijania umiejętności interpretowania danych;
- kształtowanie umiejętności stosowania schematów, symboli literowych, rysunków i wykresów w sytuacjach związanych z życiem codziennym;
- kształtowania wyobraźni przestrzennej;
- wyrabianie umiejętności logicznego analizowania problemu;
- dostrzegania analogii w różnych działach matematyki;
- uzyskanie pozytywnego stosunku do przedmiotu jakim jest matematyka;
- umiejętne posługiwanie się językiem matematycznym;
- kształtowanie twórczego myślenia i spostrzegawczości matematycznej;
- wyrabianie umiejętności porozumiewania się i współpracy w zespole;
- ćwiczenie umiejętności logicznej argumentacji;
- doskonalenie posługiwania się językiem obcym;
- zastosowanie języka obcego;
- uaktywnienie uczniów i zachęcanie do wysiłku umysłowego;
- przygotowanie ucznia do egzaminu maturalnego z matematyki.

Cele szczegółowe każdego pakietu edukacyjnego umieszczone są przy poszczególnych pakietach

III. Warunki organizacyjne zajęć w ramach projektu

1. Adresaci zajęć pozalekcyjnych

Zgodnie z założeniami Projektu, zajęcia pozalekcyjne przeznaczone są dla uczniów klasy trzeciej szkoły ponadgimnazjalnej, którzy chcą utrwalić, poszerzyć wiedzę oraz rozwijać i udoskonalić swoje umiejętności w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem matematyki i języków obcych, jak również chcą odnieść sukces na egzaminie maturalnym z matematyki. Są to klasy, które brały udział w Projekcie w roku szkolnym 2009/2010 i 2010/2011.

2. Wymagania wstępne

Uczeń uczestniczący w trzecim roku realizacji Projektu powinien:

- określać wartość logiczną zdania, alternatywy, koniunkcji, implikacji, równoważności zdań;
- wykonywać podstawowe działania na zbiorach i przedziałach liczbowych;
- wykonywać obliczenia na liczbach rzeczywistych;
- wykonywać działania na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- odróżniać liczby wymierne od niewymiernych;
- zamieniać ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne okresowe i odwrotnie;
- znać pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną;
- porównywać liczby rzeczywiste;
- szacować wartości wyrażeń liczbowych oraz błąd przybliżenia;
- rozwiązywać nierówności liniowe oraz ich układy i zapisywać wyniki w postaci przedziałów liczbowych;
- stosować obliczenia procentowe;
- szkicować wykresy funkcji liczbowych zadanych tabelką oraz funkcji przedziałami liniowych;
- odczytywać z dowolnego wykresu funkcji jej własności;
- znajdować na podstawie wykresu funkcji jej wartości największe (najmniejsze) w dziedzinie lub jej podzbiorze;
- przekształcać wykresy funkcji (przesunięcia, symetrie);
- wyznaczać równanie prostej na płaszczyźnie;
- rozwiązywać układy równań liniowych i znać ich interpretacje w układzie współrzędnych;
- stosować układy równań z dwiema i trzema niewiadomymi do rozwiązania zadań tekstowych;
- opisywać półpłaszczyzny za pomocą nierówności liniowych;
- stosować twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać skalę podobieństwa figur podobnych;

- wykorzystywać twierdzenie o stosunku pól figur podobnych do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- obliczać pozostałe wartości funkcji trygonometrycznych, jeśli jest znana jedna z nich;
- posługiwać się kalkulatorem przy rozwiązywaniu typowych zadań;
- dostrzegać, wykorzystywać i interpretować zależności funkcyjne;
- interpretować związki wyrażone za pomocą wzorów, wykresów, schematów, diagramów, tabel.
- prezentować z użyciem języka matematyki wyniki badań prostych zagadnień;
- znać własności funkcji kwadratowej, sporządzać jej wykres;
- wykonywać działania na wielomianach i funkcjach wymiernych;
- sporządzać wykres funkcji homograficznej;
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe;
- rozwiązywać układy równań i nierówności, z których co najmniej jedna jest stopnia drugiego;
- znać pojęcie ciągu, definicję i podstawowe własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
- znać pojęcia okręgu i koła również w ujęciu analitycznym;
- określać wzajemne położenie dwóch okręgów, prostej i okręgu;
- znać elementy przynajmniej jednego języka nowożytnego;
- czytać ze zrozumieniem, tłumaczyć wyrazy i budować proste zdania;
- biegle posługiwać się słownikiem języka obcego.

3. Sylwetka uczestnika zajęć po trzecim roku realizacji Projektu

Zakładamy, że prowadzenie zajęć pozalekcyjnych z matematyki w roku szkolnym 2011/2012 w ramach Projektu pozwoli na:

- aktywizację uczniów;
- wykształcenie postawy nieustępliwości i uporu w rozwiązywaniu zadań;
- wykształcenie u uczniów umiejętności przejrzystego przedstawiania rozumowania i uzasadniania odpowiedzi;
- wykształcenie umiejętności uzasadniania własnego stanowiska, argumentowania i przekonywania innych;
- wykształcenie umiejętności pracy w zespole;
- ułatwienie podejmowania decyzji o przyjęciu różnych ról społecznych w grupie i ich zamianę w zależności od wykonywanego zadania;
- uświadomienie uczniom użyteczności matematyki w życiu codziennym;
- właściwe zaplanowanie i wykorzystanie czasu na naukę;
- zaspokajanie i rozwijanie wielu potrzeb edukacyjnych;
- lepsze poznanie uczniów w obrębie grupy;
- integrację zespołu klasowego;
- wykorzystanie zdobytej wiedzy na egzaminie dojrzałości z matematyki.

Uczeń po realizacji materiałów edukacyjnych zawartych w podręczniku „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury III" powinien:

- znać podzbiory zbioru liczb rzeczywistych i relacje między nimi;
- obliczać procent danej liczby;
- wyznaczać sumę , różnicę i iloczyn przedziałów;
- wykonywać działania na wielomianach;
- rozwiązywać równania wielomianowe;
- rozwiązywać równania i nierówności homograficzne;
- znać definicje funkcji i odczytywać własności funkcji z wykresu;
- wykonywać działania na potęgach;
- znać definicję i własności logarytmu;
- obliczać pola powierzchni i objętości brył (wielościany, bryły obrotowe);
- określać, kiedy dana wielkość osiąga wartość najmniejszą lub największą;
- opisywać podstawowe figury na płaszczyźnie kartezjańskiej;
- opisywać przekształcenia geometryczne, określać te przekształcenia analitycznie;
- wyznaczać prawdopodobieństwa zdarzeń;
- określać wartości średnie, interpretować dane statystyczne.

4. Czas trwania zajęć w ramach realizacji Projektu

Czas trwania zajęć uzależniony jest od organizacji roku szkolnego i składa się z trzech etapów. Każdy etap obejmuje jeden rok nauki szkolnej i polega na realizacji siedmiu pakietów edukacyjnych w wymiarze 28 godzin lekcyjnych (po 4 godziny na jeden pakiet).

IV. Metody i formy uczenia się

Nauczyciele prowadzący zajęcia w ramach Projektu powinni, podczas pracy z uczniami, występować w roli tutorów i przewodników w drodze nabywania umiejętności i wiedzy, dbając o to, aby proces realizacji Projektu był dostosowany do możliwości uczestników i jednocześnie przebiegał sprawnie. W uzgadnianiu wykonywania zadań dominować powinno dążenie do rzeczowego przekonywania się, kompromisów i osiągania konsensusu.

Wskazane jest, aby nauczyciele zachęcali uczestników danego zespołu do podejmowania różnych ról społecznych i zadaniowych w ramach pracy w grupie, np.: przewodniczących, sekretarzy, ekspertów (naukowych, organizacyjnych), kierowników prac, asystentów, prezenterów, reprezentantów itp., a także, aby inspirowali młodzież do zamiany tych ról w zależności od wykonywanego zadania.

Wskazane jest także opracowanie przez każdy zespół własnego logo oraz nazwy, które będą stałymi elementami znakowania materiałów i pogłębiania identyfikacji z grupą.

Główną formą pracy z uczniami jest praca w grupach. Można też zastosować takie metody jak: dyskusja, metoda ćwiczeniowa i burza mózgów. Zakładamy, że dzięki pracy w zespołach zadaniowych uczniowie będą mieli możliwość rozwinięcia abstrakcyjnego myślenia oraz udoskonalenia umiejętności twórczego rozwiązywania problemów. Szczególne korzyści z pracy w zespole mają uczniowie mniej zdolni. Taka forma zajęć ma często decydujący wpływ na zmianę ich postawy wobec przedmiotu, zwiększa zainteresowanie zajęciami i niejednokrotnie pomaga osiągnąć lepsze wyniki w nauce. Dzięki czynnemu udziałowi w pracach i osiągnięciach zespołu zadaniowego, uczniowie nabiorą wiary we własne siły i chętnie uzupełnią braki w swoich wiadomościach z matematyki i języków obcych.

W czasie indywidualnej pracy z podręcznikiem uczeń może skorzystać z następujących porad doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań:

- Przeczytaj zadanie kilkukrotnie.
- Jeżeli zadanie dotyczy konkretnej sytuacji, postaraj się wyobrazić sobie tę sytuację. Możesz wykonać rysunek do zadania.
- Ustal, co jest niewiadomą w zadaniu i co wystarczy wiedzieć, by tę niewiadomą ustalić.
- Wyodrębnij dane z zadania i ustal, czego możesz się na podstawie tych danych dowiedzieć.
- Ułóż plan rozwiązania i wykonaj go.
- Sprawdź, czy Twoje rozwiązanie jest poprawne.

V. Pakiety edukacyjne

Pakiet M-3.1 „Ballada o potęgowej”

Potęgi i działania na potęgach o wykładniku wymiernym.

Logarytm i działania na logarytmach.

Wykresy funkcji potęgowych i wykładniczych.

Przekształcenia wykresów.

Pakiet M-3.2 „Dziś, nieodmiennie śliczna - Geometria Analityczna”

Pojęcie i umiejętność obliczania odległości punktów na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej.

Równanie prostej w postaci ogólnej i kierunkowej.

Warunki równoległości i prostopadłości prostych.

Środek i symetralna odcinka.

Równanie okręgu.

Układy równań z dwiema niewiadomymi stopnia co najwyżej drugiego.

Układy nierówności z dwiema niewiadomymi stopnia pierwszego.

Styczna do okręgu.

Parabola.

Figury podobne i ich własności.

Pola trójkąta i czworokątów.

Twierdzenie cosinusów.

Pakiet M-3.3 „Nieprawdopodobnie spokojni przed maturą”

Elementy kombinatoryki.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Parametry danych statystycznych.

Pakiet M-3.4 „Z pustego w próżne?”

Równoległość i prostopadłość w przestrzeni, wzajemne położenie prostych i płaszczyzn.

Wielościany, wielościany foremne, bryły obrotowe, siatki wielościanów i brył obrotowych.

Kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości.

Związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych również z zastosowaniem trygonometrii.

Pakiet M-3.5 „Opty - mistycznie”

Wykres i własności funkcji kwadratowej.

Najmniejsza i największa wartość funkcji; maksimum i minimum.

Związki miarowe w figurach płaskich.

Wielościany, objętość i pole powierzchni całkowitej.

Koszt, zysk przychód.

Ciągi, ciąg arytmetyczny, suma wyrazów ciągu.

Pakiet M-3.6 „Zadania nielubiane: wykaż, uzasadnij, czy istnieje…”

Pojęcie i podstawowe własności logarytmów

Prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym.

Wzory skróconego mnożenia (w szczególności sześcian sumy i suma sześcianów).

Wielomiany, rozkład wielomianu na czynniki.

Obliczanie wartości wyrażeń dla danej wartości zmiennej.

Działania na wyrażeniach wymiernych.

Wykorzystanie własności funkcji do rozwiązania zadań (w szczególności wykładniczej, logarytmicznej i trygonometrycznych).

Figury przystające i figury podobne oraz ich własności.

Związki miarowe w figurach płaskich.

Wielościany, objętość i pole powierzchni całkowitej.

Związki między ilością wierzchołków, krawędzi, przekątnych w graniastosłupach.

Pakiet M-3.7 „Groch z kapustą, czyli przypominki przedmaturalne”

Działania na potęgach.

Podstawowe własności logarytmów (w tym wzór na zmianę podstawy logarytmu).

Prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym.

Wzory skróconego mnożenia.

Wielomiany i rozkład wielomianu na czynniki.

Obliczanie wartości wyrażeń dla danej wartości zmiennej.

Działania na wyrażeniach wymiernych; porównywanie liczb, wyrażeń.

Własności funkcji, sporządzanie wykresów.

Związki miarowe w figurach płaskich.

Wielościany, objętość i pole powierzchni całkowitej.

Związki między ilością wierzchołków, krawędzi, przekątnych w graniastosłupach.

Pakiet M-3.1 „Ballada o potęgowej"

I. Treści merytoryczne:

- potęgi i działania na potęgach o wykładniku wymiernym,
- logarytm i działania na logarytmach,
- wykresy funkcji potęgowych i wykładniczych,
- przekształcenia wykresów.

II. Cele szczegółowe:

- nabywanie biegłości w rozwiązywaniu równań wykładniczych i logarytmicznych,
- kształcenie umiejętności kreślenia wykresów funkcji i zaznaczania obszarów w układzie współrzędnych,
- utrwalanie wiadomości dotyczących działań na potęgach i wzorów skróconego mnożenia.

III. Metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup (zespoły zadaniowe w innym składzie niż na poprzednich spotkaniach).
4. Praca w grupach: każdy zespół wymyśla dla siebie nazwę (związaną z matematyką, działaniami społecznymi, historycznymi lub współczesnymi postaciami świata odkryć, dokonań naukowych) oraz logo zespołu.
5. Przedstawienie nazw i logo przez poszczególne grupy.
6. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
7. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
8. Zebranie kart z rozwiązaniami.
9. Podsumowanie zajęć.
10. Zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do zestawu „Ćwiczeń otwierających”:

[1] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa III*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2004 (Zadanie 2, Zadanie 3)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”:

[1] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Wesołowska J., *„Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego 3”*, Nowa Era, Warszawa 2004 (Zadanie 12)
[2] Cewe A., Krawczyk M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropiela R., *Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik do klasy II*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2007 (Zadanie 1)
[3] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa III*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2004 (Zadanie 7; Zadanie 8; Zadanie 9)
[4] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994. (Zadanie 10; Zadanie 11)

Spotkanie 3. „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadań.
3. Nauczyciel ocenia pracę zespołów zadaniowych (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem” będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Wykresy do Pakietu M-3.1 wykonała Anna Rybak za pomocą programu Geogebra

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Ballada o potęgowej”

Exercice 1. Une aire (8 points)

L’aire P de l’espace limité par l’axe OX, le graphique de la fonction $y = \frac{1}{x}$ et les droites: $x = 1;$ $x = x_0$ est égale à $\ln x_0$. Le logarithme naturel est un logarithme dont la base est le nombre e. Tu peux calculer les valeurs de ces logarithmes en te servant d’un calculateur scientifique.

Calcule l’aire de l’espace limité par les inéquations simultanées: $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{x} \\ 3 \le x \le 9 \end{cases}$. Donne le résultat avec une précision de 0,001, note la réponse. Fais le dessin illustrant cet exercice.

Aufgabe 1. Fläche (8 Punkte)

Die Fläche P eines Gebiets, das durch die Achse OX, den Graph der Funktion $y = \frac{1}{x}$ und Geraden: $x = 1; x = x_0$ begrenzt wird, ist gleich $\ln x_0$. Ein natürlicher Logarithmus ist ein Logarithmus zur Basis e. Werte von solchen Logarithmen kannst du unter Zuhilfenahme eines wissenschaftlichen Taschenrechners berechnen.

Berechne die Fläche eines Gebiets, das durch den System der Gleichungen $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{x} \\ 3 \le x \le 9 \end{cases}$ begrenzt ist. Gebe das Ergebnis mit der Genauigkeit auf 0,001 an, schreibe die Antwort auf. Führe eine Zeichnung aus, die den Aufgabeinhalt veranschaulicht.

Esercizio 1. Il campo (8 punti)

La superficie P dell’area limitata dall’asse OX, dal diagramma della funzione $y = \frac{1}{x}$ e dalle rette: $x = 1; x = x_0$ è uguale a $\ln x_0$. Il logaritmo naturalne è il logaritmo di cui la base è il numero e. I valori dei logaritmi di questo tipo puoi calcolare usando il calcolatore scientifico.

Calcola la superficie dell’area limitata il sistema di disuguaglianza: $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{x} \\ 3 \le x \le 9 \end{cases}$. Il risultato deve essere dato con la precisione di 0,001, scrivi la risposta Fai il disegno illustrando l’esercizio.

Exercise 1. Area (8 points)

Area P of territory limited by OX axis, function $y = \frac{1}{x}$ graph and the lines: $x = 1; x = x_0$ is equal to $\ln x_0$. Natural logarithm is a logarithm with a basis equal to e. Values of such logarithms you can calculate using mathematical calculator.

Calculate the area of the territory limited by a system of inequalities: $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{x} \\ 3 \le x \le 9 \end{cases}$.

Give the result with an accuracy 0,001, write the answer and draw the picture illustrating the exercise.

Tarea 1. Área (8 puntos)

El área P de un terreno limitado por el eje OX, por la curva representativa $y = \frac{1}{x}$, así como por las líneas rectas: $x = 1$; $x = x_0$, equivale a $\ln x_0$. El logaritmo natural es un logaritmo cuya base constituye la cantidad e.
Puedes calcular los valores de tales logaritmos disfrutando de la calculadora científica.

Calcula el área P de un terreno limitado por el sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{x}. \\ 3 \le x \le 9 \end{cases}$

Presenta el resultado con la exactitud de 0,001 y nota tu respuesta. Haz un dibujo ilustrando la tarea.

Zadanie 2. No to porysujmy – raz! … (6 punktów)

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} \left(y + \frac{1}{2}x - 3\right)(y-3) = 0 \\ y = 2^{x-3} - 1 \end{cases}$

Zadanie 3. Co wyjdzie? – raz!… (5 punktów)

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek $\log_{x+1}(y-4) < 1$

Zadanie 4. Nie taki pierwiastek straszny (3 punkty)

Wykonaj działania, wynik zapisz w postaci jednego pierwiastka:

$$\frac{\left(\sqrt[5]{a^4 \cdot \sqrt{a}} \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt{a^5}}\right) \div \left(\sqrt{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt[6]{a^5}\right)}{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}}$$

Rozwiązania oraz schemat oceniania zestawu „Ćwiczeń otwierających” „Ballada o potęgowej”

Zadanie 1. Pole (8 punktów)

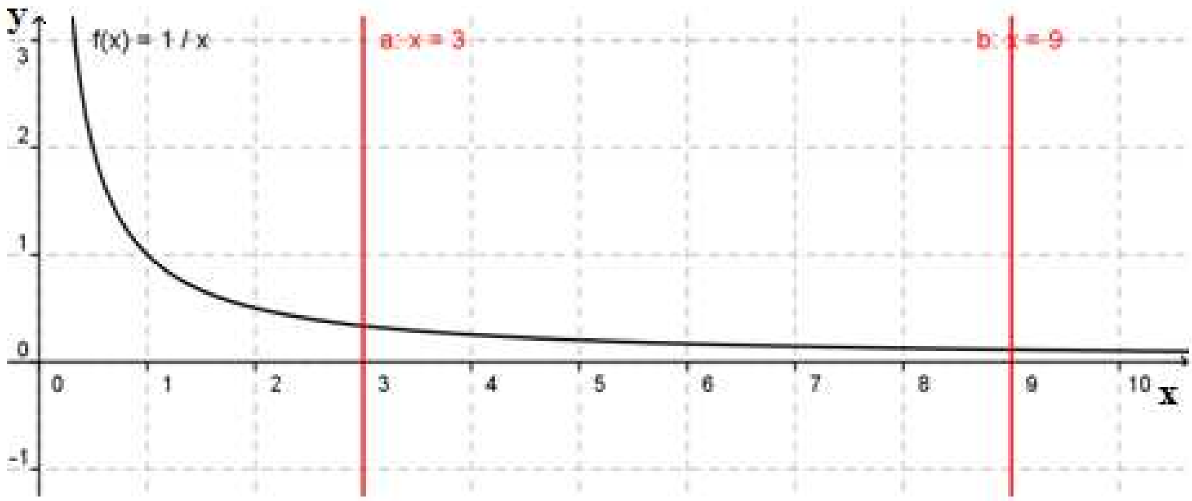
Pole P obszaru ograniczonego osią OX, wykresem funkcji $y = \frac{1}{x}$ oraz prostymi: $x = 1; x = x_0$ jest równe $\ln x_0$. Logarytm naturalny, to logarytm, którego podstawą jest liczba e. Wartości takich logarytmów możesz obliczyć korzystając z kalkulatora matematycznego.

Oblicz pole obszaru ograniczonego układem nierówności: $\begin{cases} 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \\ 3 \leq x \leq 9 \end{cases}$.

Wynik podaj z dokładnością do 0,001, zapisz odpowiedź. Wykonaj rysunek ilustrujący zadanie.

Rozwiązanie:

Rysunek do zadania:



P=$\ln 9 - \ln 3 = \ln 3 \approx 1{,}099$

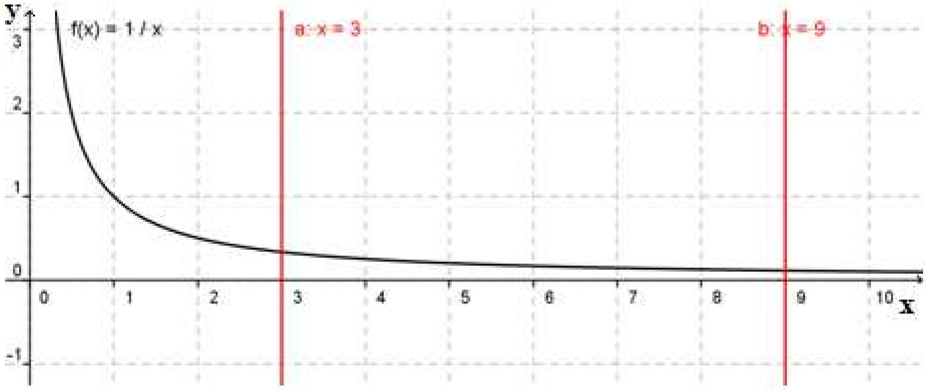
Pole obszaru to około 1,099

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne przetłumaczenie	2
B	Wykonanie rysunku ilustrującego treść zadania	2
C	Obliczenie pola z żądaną dokładnością	2
D	Podanie odpowiedzi w języku obcym	2

Exercice 1. Une aire (8 points)

Solution: Dessin pour l'exercice:



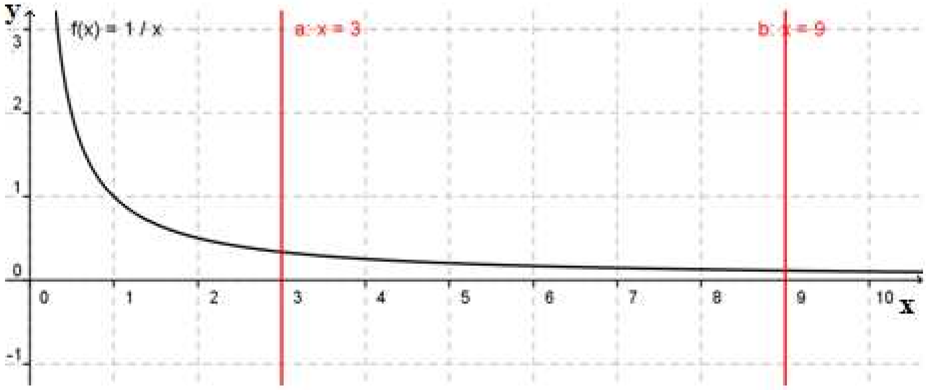
A=$\ln 9 - \ln 3 = \ln 3 \approx 1{,}099$. L'aire de l'espace est égale à peu près à 1,099

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction correcte	2
B	Dessin illustrant le contenu de l'exercice	2
C	Calcul de l'aire avec la précision demandée	2
D	Réponse correcte en langue étrangère	2

Aufgabe 1. Fläche (8 Punkte)

Lösung: Zeichnung zur Aufgabe:



P=$\ln 9 - \ln 3 = \ln 3 \approx 1{,}099$. Die Fläche des Gebiets beträgt ungefähr 1,099

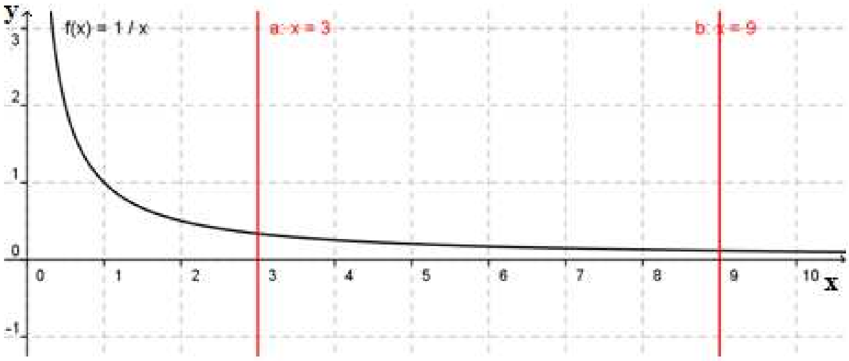
Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Richtige Übersetzung	2
B	Ausführung der Zeichnung, die den Aufgabeinhalt veranschaulicht	2
C	Berechnung der Fläche mit der verlangenden Genauigkeit	2
D	Antwortangabe in einer Fremdsprache	2

Esercizio 1. Il campo (8 punti)

Soluzione:

Disegno per l'esercizio:



P=$\ln 9 - \ln 3 = \ln 3 \approx 1{,}099$. La superficie dell'area fa circa 1,099

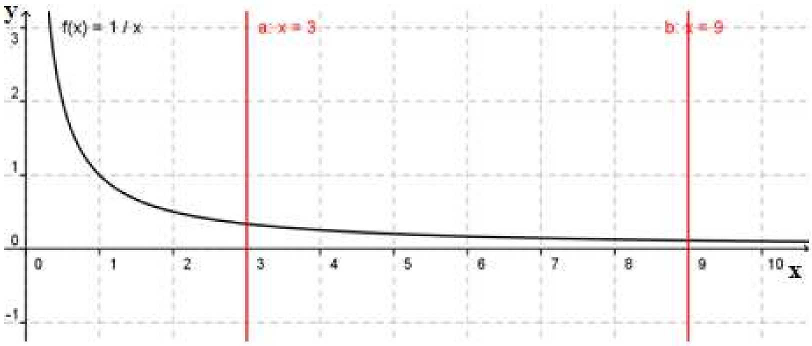
Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione corretta	2
B	Realizzazione del disegno illustrando il contenuto dell'esercizio	2
C	Calcolo della superficie con la precisione dovuta	2
D	Risposta nella lingua straniera	2

Tarea 1. Área (8 puntos)

Solución:

Dibujo para la tarea:



P=$\ln 9 - \ln 3 = \ln 3 \approx 1{,}099$. El área del terreno es cerca 1,099

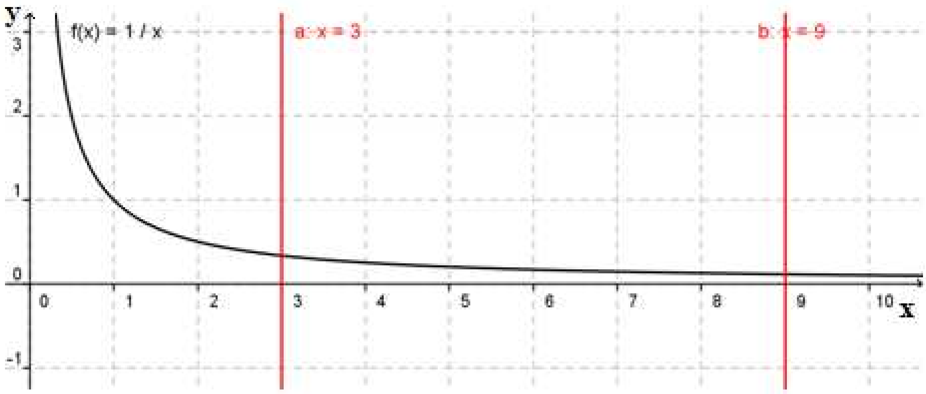
Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta	2
B	Realización del dibujo ilustrando el contenido de la tarea	2
C	Cálculo del área con la exactitud exigida	2
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	2

Exercise 1. Area (8 points)

Solution:

Picture to exercise:



P=$\ln 9 - \ln 3 = \ln 3 \approx 1{,}099$

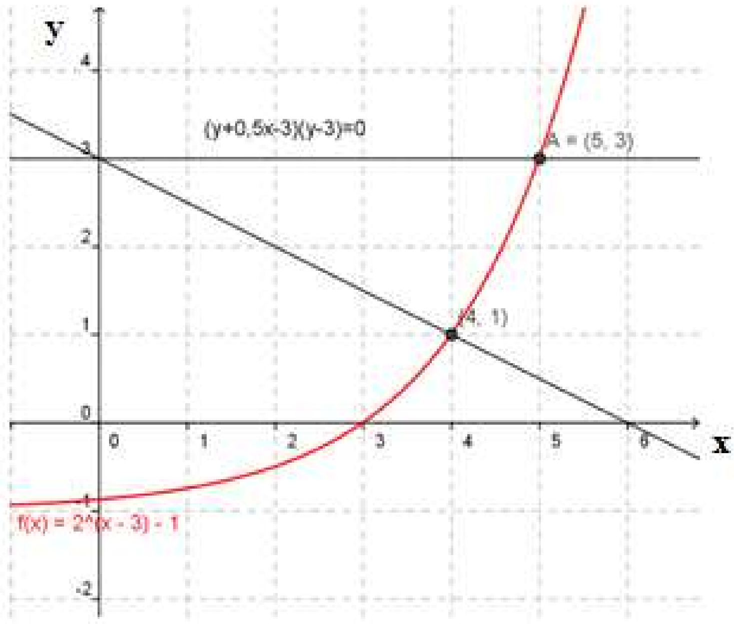
Area of this territory is about 1,099.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Correct translation	2
B	Drawing a picture illustrating the exercise's text	2
C	Calculating the area with a desired accuracy	2
D	Answer in foreign language	2

Zadanie 2. No to porysujmy – raz! … (6 punktów)

Rozwiązanie:



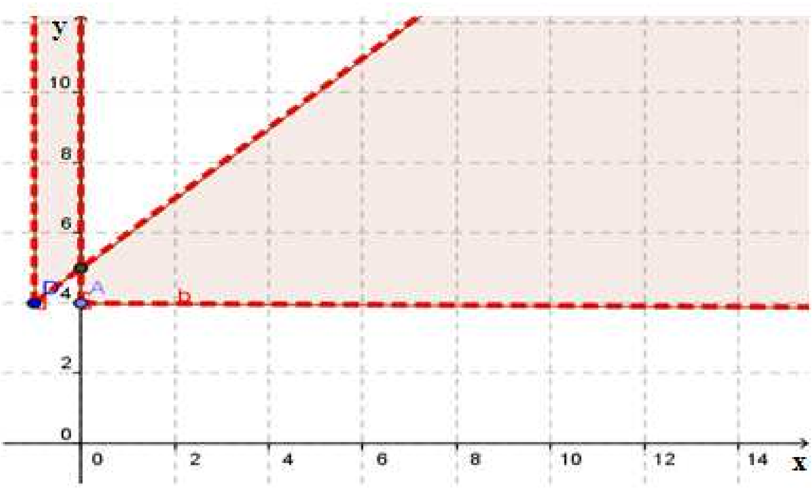
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Naszkicowanie pary prostych	2
B	Naszkicowanie wykresu funkcji wykładniczej	3
C	Zaznaczenie rozwiązania układu	1

Zadanie 3. Co wyjdzie? – raz!... (5 punktów)

Rozwiązanie:

Z definicji logarytmu $y > 4$.
Gdy $x + 1 > 1$, mamy $y - 4 < x + 1$,
natomiast dla $0 < x + 1 < 1$, mamy $y - 4 > x + 1$



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie założeń i nierówności w pierwszym przypadku	1
B	Podanie założeń i nierówności w drugim przypadku	1
C	Zaznaczenie obszaru w układzie współrzędnych	3

Zadanie 4. Nie taki pierwiastek straszny (3 punkty)

Rozwiązanie:

$$\frac{\left(\sqrt[3]{a^4\cdot\sqrt{a}}\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt{a^5}}\right)\div\left(\sqrt{\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[6]{a^5}\right)}{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a^3}}=\frac{\left(\left(a^4\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(a\cdot a^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}}\right)\div\left(\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\right)}{a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{2}}}=\sqrt[30]{\frac{1}{a^{41}}}$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie każdego pierwiastka jako potęgi	1
B	Wykonanie działań na potęgach	1
C	Zapisanie odpowiedzi w zadanej postaci	1

Spotkanie 2: Rozwiążmy razem - „Ballada o potęgowej”

Exercise 1. Decay of chemical element (6 points)

Every chemical radioactive element decays with the appropriate radial velocity. The half-life is the amount of time necessary for one-half of the radioactive element to decay. Some kind of bismuth $^{214}\mathrm{Bi}$ has the half-life equal to 20 minutes. Radioactive bismuth’s sample you are watching has 1024 grams. Built a mathematical model describing a modification of bismuth’s amount in time and calculate after what number of hours only one gram of bismuth will be radioactive.

Exercice 1. Décomposition d’un élément (6 points)

Chaque élément radioactif se décompose à sa propre vitesse.
Le temps de décomposition d’une moitié d’atomes est appelé « période de décomposition fragmentaire » de cet élément. On sait que la période de décomposition fragmentaire d’une variété de bismuth $^{214}\mathrm{Bi}$ est de 20 minutes. L’échantillon du bismuth radioactif que tu observes fait 1024 grammes. Construis le modèle mathématique décrivant le changement de la quantité du bismuth radioactif dans le temps et calcule au bout de combien d’heures seul un gramme de bismuth sera radioactif?

Tarea 1. Desintegración del elemento (6 puntos)

Cada elemento radioactivo se desintegra con su propia velocidad.El tiempo en el cuál se desintegrará la mitad de átomos se llama périodo de la desintegración media de este elemento. Sabemos que una clase de bismuto $^{214}\mathrm{Bi}$ tiene un périodo de la desintegración media de 20 minutos. La muestra del bismuto radioactivo que observas tiene 1024 gramos. Construye un módelo matemático describiendo un cambio de la cantidad del bismuto radioactivo en un tiempo y calcula después cuántas horas de observación será radioactivo solamente un gramo de bismuto.

Aufgabe 1. Zerfall eines Elements (6 Punkte)

Jedes radioaktive Element zerfällt mit einer eigenen Geschwindigkeit. Die Zeit, in der die Hälfte der Atome zerfällt, nennt man die Halbwertszeit des Elements. Man weiß, das das Isotop von Bismut $^{214}\mathrm{Bi}$ die Halbwertszeit von 20 Minuten hat. Die Probe eines radioaktiven Bismuts, die du beobachtest, hat 1024 Gramm. Baue ein mathematisches Modell, das die Veränderung der Menge des radioaktiven Bismuts in Zeit beschreibt, und berechne, nach wie vielen Stunden Beobachtung nur 1 Gramm Bismut radioaktiv wird.

Esercizio 1. La disintegrazione dell’elemento (6 punti)

Ogni elemento radioattivo si disintegra con la sua proptia velocità.
Il tempo nel quale si disintegra la metà di elementi è chiamato il periodo della disintegrazione parziale di questo elemento. Sappiamo che una specie di bismuto $^{214}\mathrm{Bi}$ ha il periodo di disintegrazione parziale di 20 minuti. Il campione del bismuto radioattivo il quale stai osservando ha 1024 grammi. Costruisci il modello matematico illustrando il cambiamento della quantitài di bismuto radioattivo nel tempo e calcola dopo quante ore di osservazione sarà radioattivo solo 1 grammo di bismuto.

Zadanie 2. Pamiętaj o wzorach (4 punkty)

Oblicz: $\left[(7-2\sqrt{10})^{\frac{1}{2}}+(7+2\sqrt{10})^{\frac{1}{2}}\right]^{-2}\cdot\left[\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{3}}-28^0\right]$.

Zadanie 3. Parzyste i nieparzyste (4 punkty)

Naszkicuj po dwa wykresy funkcji $y=x^a$ dla a będącego liczbą całkowitą ujemną nieparzystą i dwa dla a będącego liczbą całkowitą ujemną parzystą. Podaj dziedziny i zbiory wartości tych funkcji.

Zadanie 4. Takie sobie równanie (3 punkty)

Wiedząc, że

$$f(x)=2^{x-1} \text{ oraz } g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$$

rozwiąż równanie:

$$4\cdot g(2x)=\sqrt{2}\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)-12.$$

Zadanie 5. Bez rysowania (2 punkty)

Jakie przekształcenia należy wykonać, aby z wykresu funkcji $y=3^x$ otrzymać wykres funkcji $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}-2$?

Zadanie 6. Dodać czy pomnożyć? (3 punkty)

Przyjmując, że $\log_2 15=x$ oraz $\log_2 6=y$, oblicz $\log_{\frac{5}{2}}675$.

Zadanie 7. Co wyjdzie? – dwa! (6 punktów)

W prostokątnym układzie współrzędnych zaznacz zbiór tych punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają warunek $\log_2(x^2+y)\leq 1$.

Zadanie 8. No to porysujmy – dwa! (5 punktów)

Rozwiąż graficznie układ równań $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x+3\frac{1}{4} \\ y=2^x\cdot 2^{|x|} \end{cases}$.

Zadanie 9. Parrrrrametr (6 punktów)

Dla jakich wartości parametru m równanie $m\cdot 16^x+(2m-1)\cdot 4^x+2-3m=0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych?

Zadanie 10. Trzeba się wykazać (3 punkty)

Wykaż, że $2^{\log_{\sqrt[3]{25}}\sqrt{5}} = \sqrt[4]{8}$.

Zadanie 11. Działania na potęgach (5 punktów)

Wykaż, że jedynym rozwiązaniem równania $3^x + 4^x + 5^x = 6^x$ jest liczba 3.

Zadanie 12. To już ostatnie na dziś… (3 punkty)

Rozwiąż równanie $\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}} = 2$.

Rozwiązania oraz schemat oceniania zestawu „Rozwiążmy razem” „Ballada o potęgowej”

Zadanie1. Rozpad pierwiastka (6 punktów)

Każdy pierwiastek radioaktywny rozpada się z właściwą sobie prędkością. Czas, w którym rozpadnie się połowa atomów nazywamy okresem połowicznego rozpadu tego pierwiastka. Wiadomo, że pewna odmiana bizmutu ^{214}Bi ma okres połowicznego rozpadu równy 20 minut. Próbka radioaktywnego bizmutu, którą obserwujesz ma 1024 gramy.
Zbuduj model matematyczny opisujący zmianę ilości radioaktywnego bizmutu w czasie i oblicz, po ilu godzinach obserwacji radioaktywny będzie tylko 1 gram bizmutu.

Rozwiązanie:

Rozpad bizmutu opisuje funkcja $f(t) = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, gdzie t jest czasem mierzonym w godzinach. Aby obliczyć, po ilu godzinach radioaktywny będzie tylko 1 gram bizmutu należy rozwiązać równanie: $1 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, skąd otrzymujemy $t = \frac{10}{3}$.
Tylko 1 gram bizmutu będzie radioaktywny po upływie 3 godzin i 20 minut.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne przetłumaczenie	2
B	Wyznaczenie wzoru funkcji	1
C	Obliczenie czasu	1
D	Podanie prawidłowej odpowiedzi w języku obcym	2

Exercise1. Decay of chemical element (6 points)

Solution:

Bismuth’s decay is described by a function $f(t) = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, where t is the time in hours. To calculate after what number of hours only one gram of bismuth is radioactive we should solve the equation: $1 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, thus we get $t = \frac{10}{3}$.
So, the last 1 gram of bismuth will be radioactive after 3 hours and 20 minutes.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Correct translation	2
B	Determining the function’s formula	1
C	Time calculating	1
D	Right answer in foreign language	2

Exercice 1. Décomposition d'un élément (6 points)

Solution:

La décomposition du bismuth est décrite par la fonction $f(t) = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, t étant le temps mésuré en heures. Pour calculer au bout de combien d'heures seul un gramme de bismuth sera radioactif, il faut résoudre l'équation: $1 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, d'où nous obtenons $t = \frac{10}{3}$. Un gramme de bismuth sera radioactif après 3 heures et 20 minutes.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction correcte	2
B	Détermination de la formule de la fonction	1
C	Calcul du temps	1
D	Réponse correcte en langue étrangère	2

Tarea 1. Desintegración del elemento (6 puntos)

Solución:

Se describe la desintegración del bismuto por la función $f(t) = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, donde t es un tiempo medido en horas. A fin de calcular después de cuántas horas será radioactivo solamente 1 gramo de bismuto, hay que resolver una ecuación: $1 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, de dónde obtenemos $t = \frac{10}{3}$.

1 Un gramo de bismuto será radioactivo después de 3 horas y 20 minutos.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta	2
B	Determinación de la fórmula de la función	1
C	Cálculo del tiempo	1
D	Formulación de una respuesta correcta en lengua extranjera	2

Aufgabe 1. Zerfall eines Elements (6 Punkte)

Lösung:

Den Zerfall des Bismuts beschreibt die Funktion $f(t) = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, wo t die in Stunden gemessene Zeit ist. Um zu bemessen, nach wie vielen Stunden nur 1 Gramm Bismut radioaktiv wird, soll man die Gleichung: $1 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$ auflösen, daher bekommen wir $t = \frac{10}{3}$.
1 Gramm Bismut wird nach Verlauf von 3 Stunden und 20 Minuten radioaktiv.

Punktwertung:

Tätigkeit	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Richtige Übersetzung	2
B	Bestimmung einer Funktionsformel	1
C	Berechnung der Zeit	1
D	Angabe der richtigen Antwort in einer Fremdsprache	2

Esercizio 1. La disintegrazione dell'elemento (6 punti)

Soluzione:

La disinegrazione del bismuto viene descritto con la funzione $f(t) = y_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, dove t è il tempo misurato in ore.Per calcolare dopo quante ore sarà radioattivo solo 1 grammo di bismuto bisogna risolvere l'equazione: $1 = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3t}$, dove otteniamo $t = \frac{10}{3}$. 1 grammi di bismuto saranno radioattivi dopo 3 ore e 20 minuti.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione corretta	2
B	Designazione di formula della funzione	1
C	Calcolo del tempo	1
D	Risposta giusta nella lingua straniera	2

Zadanie 2. Pamiętaj o wzorach (4 punkty)

Rozwiązanie:

$$\left[\left(7-2\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(7+2\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-2}\cdot\left[\left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{1}{3}}-28^{0}\right]=$$

$$=\frac{\frac{5}{3}-1}{7-2\sqrt{10}+2\sqrt{\left(7-2\sqrt{10}\right)\left(7+2\sqrt{10}\right)}+7+2\sqrt{10}}=\frac{\frac{2}{3}}{14+2\cdot 3}=\frac{1}{30}$$

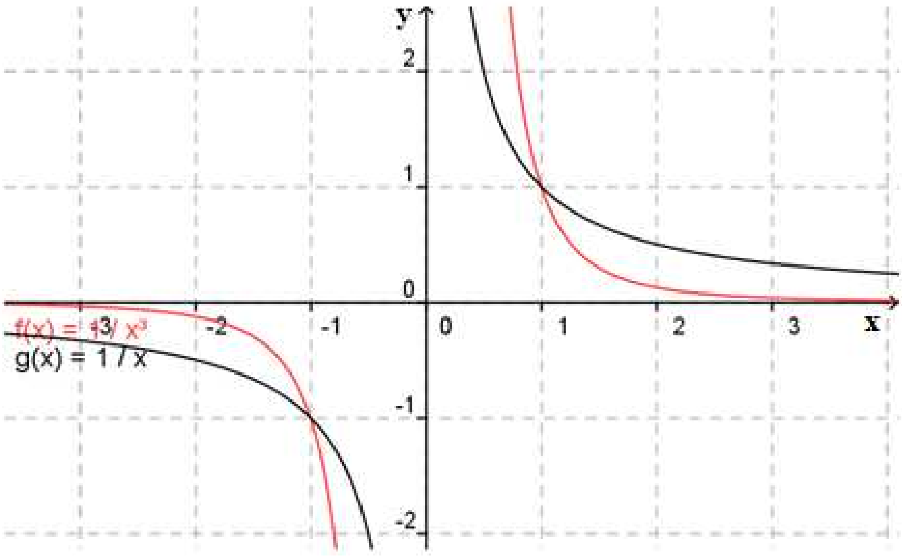
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zastosowanie wzoru na kwadrat sumy	1
B	Zastosowanie wzoru na sumę kwadratów	1
C	Obliczenie wartości w drugim nawiasie	1
D	Podanie prawidłowej odpowiedzi	1

Zadanie 3. Parzyste i nieparzyste (4 punkty)

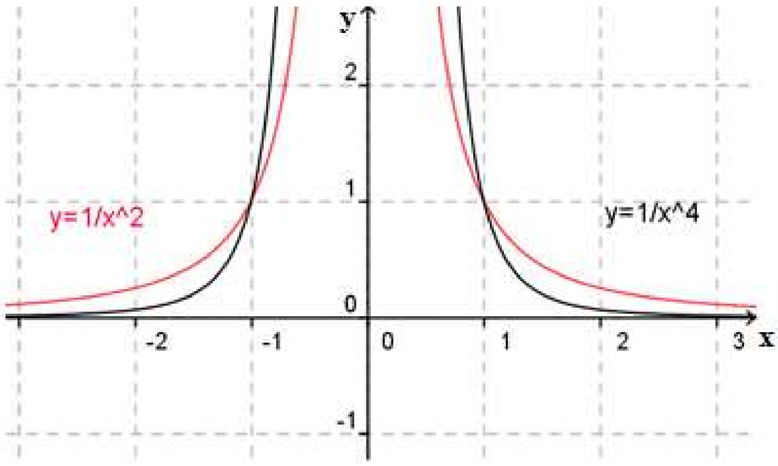
Rozwiązanie:

Wykresy:
dla a będącego liczbą całkowitą ujemną nieparzystą:



$D = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, i $Y = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Wykresy:
Dla a będącego liczbą całkowitą ujemną parzystą



$D = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, $Y = (0; \infty)$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Naszkicowanie dwóch wykresów funkcji potęgowej o wykładniku całkowitym ujemnym nieparzystym	1
B	Naszkicowanie dwóch wykresów funkcji potęgowej o wykładniku całkowitym ujemnym parzystym	1
C	Podanie dziedziny i zbioru wartości funkcji w pierwszym przypadku	1
D	Podanie dziedziny i zbioru wartości funkcji w drugim przypadku	1

Zadanie 4. Takie sobie równanie (3 punkty)

Rozwiązanie:

$$4 \cdot g(2x) = \sqrt{2} \cdot f\left(\frac{x}{2}\right) - 12$$

$4 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 3\right) = \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{x}{2}-1} - 12$ więc $2^2 \cdot 2^{-2x} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{x}{2}-1}$, czyli $x = 1$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie $g(2x)$ i $f\left(\frac{x}{2}\right)$	1
B	Wykonanie działań na potęgach	1
C	Obliczenie x	1

Zadanie 5. Bez rysowania (2 punkty)

Rozwiązanie:

Należy znaleźć obraz wykresu w symetrii względem osi rzędnych, a następnie przesunąć o wektor $\vec{u} = [-1; -2]$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ustalenie symetrii	1
B	Ustalenie współrzędnych wektora przesunięcia	1

Zadanie 6. Dodać czy pomnożyć? (3 punkty)

Rozwiązanie:

$$\log_{\frac{5}{2}} 675 = \frac{\log_2 675}{\log_2 \frac{5}{2}} = \frac{\log_2 225 + \log_2 \frac{6}{2}}{\log_2 15 - \log_2 6} = \frac{2x + y - 1}{x - y}.$$

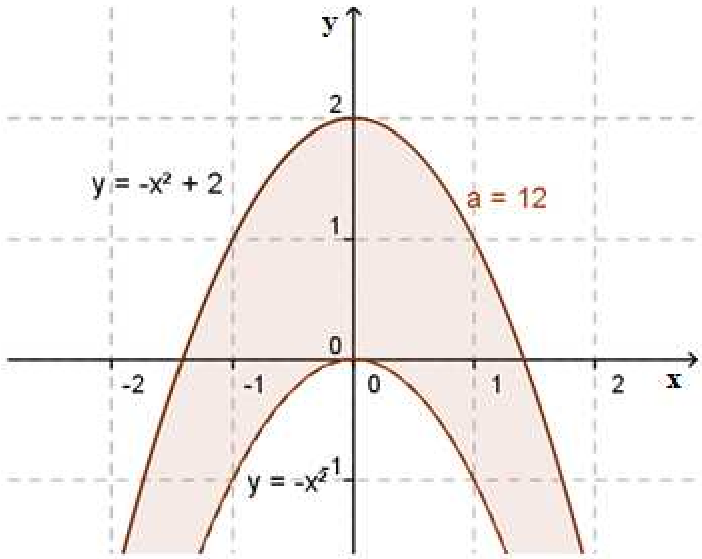
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zastosowanie wzoru na zmianę podstawy logarytmu	1
B	Zastosowanie wzorów na sumę i różnicę logarytmów	1
C	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 7. Co wyjdzie? – dwa! (6 punktów)

Rozwiązanie:

Z definicji logarytmu $y > -x^2$.
Nierówność ma postać $y \leq -x^2 + 2$

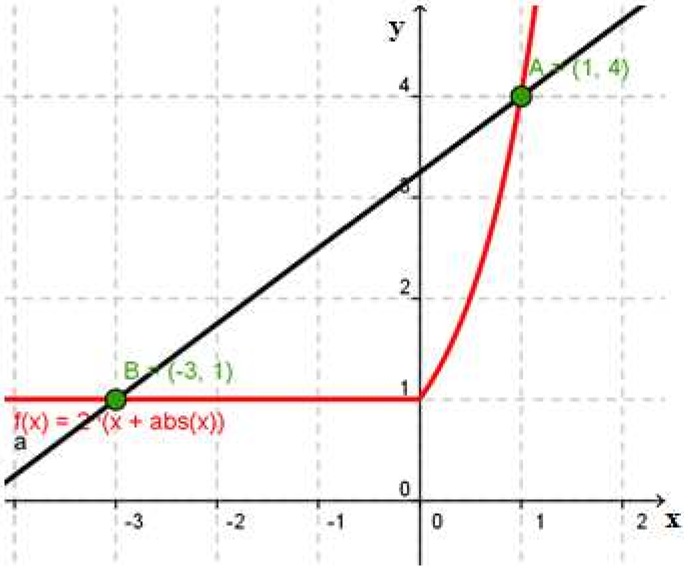


Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie założeń	1
B	Zapisanie nierówności wynikającej z treści zadania	1
C	Zaznaczenie obszaru w układzie współrzędnych	4

Zadanie 8. No to porysujmy – dwa! (5 punktów)

Rozwiązanie:



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Naszkicowanie prostej	1
B	Naszkicowanie wykresu funkcji wykładniczej	3
C	Zaznaczenie rozwiązania układu	1

Zadanie 9. Parrrrrametr (6 punktów)

Rozwiązanie:

Dla $m = 0$:

równanie jest równaniem wykładniczym postaci: $-4^x + 2 = 0$ i ma jedno rozwiązanie.

Dla $m \neq 0$

równanie po podstawieniu pomocniczej niewiadomej $4^x = t$ jest równaniem kwadratowym, które winno nie posiadać pierwiastków, lub posiadać pierwiastki ujemne, co daje alternatywę warunków: $\Delta < 0$ lub $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ t_1 + t_2 \leq 0 \\ t_1 \cdot t_2 \geq 0 \end{cases}$.

Wiedząc, że $\Delta = 16m^2 - 12m + 1$. Pierwszy warunek daje: $m \epsilon \left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}; \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)$,

zaś drugi koniunkcję: $m \epsilon \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right) \cup \left\langle\frac{3+\sqrt{5}}{8}; \infty\right)$ i $m \epsilon (-\infty; 0) \cup \left\langle\frac{1}{2}; \infty\right)$ i $m \epsilon \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Ostatecznie mamy: $m \epsilon \left\langle\frac{3-\sqrt{5}}{8}; \frac{2}{3}\right)$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zbadanie warunku $m = 0$	1
B	Zapisanie alternatywy warunków dla $m \neq 0$	1
C	Wyznaczenie m spełniających pierwszy z warunków alternatywy	1
D	Wyznaczenie m spełniających drugi z warunków alternatywy	2
E	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 10. Trzeba się wykazać (3 punkty)

Rozwiązanie: $2^{\log_{\sqrt[3]{25}} \sqrt{5}} = 2^{\log_{5^{\frac{2}{3}}} 5^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{8}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie wartości logarytmu	2
B	Zapisanie potęgi o wykładniku wymiernym jako pierwiastka	1

Zadanie 11. Działania na potęgach (5 punktów)

Rozwiązanie:

Sprawdzamy, że: $3^3+4^3+5^3=6^3$.

Jeżeli $x>3$ to

$6^x=6^3\cdot 6^{x-3}=(3^3+4^3+5^3)\cdot 6^{x-3}=3^3\cdot 6^{x-3}+4^3\cdot 6^{x-3}+5^3\cdot 6^{x-3}>3^3\cdot 3^{x-3}+4^3\cdot 4^{x-3}+5^3\cdot 5^{x-3}=3^x+4^x+5^x$

, co jest sprzeczne.

Podobnie dowodzimy, że jeśli $x<3$, to $3^x+4^x+5^x<6^x$. Zatem jedynym rozwiązaniem podanego równania jest liczba 3.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sprawdzenie, że liczba 3 jest rozwiązaniem równania	1
B	Uzasadnienie, że liczba większa od 3 nie może być rozwiązaniem równania	2
C	Uzasadnienie, że liczba mniejsza od 3 nie może być rozwiązaniem równania	2

Zadanie 12. To już ostatnie na dziś… (3 punkty)

Rozwiązanie:

Niech $3^x=t,\ \ t>0$.

Po podstawieniu mamy: $\frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}=2$, co po przekształceniach daje:

$t=\sqrt{3}$ lub $t=-\sqrt{3}$, ale $t=-\sqrt{3}$ jest sprzeczne.

Po podstawieniu do $3^x=t, t>0$, otrzymujemy $x=\frac{1}{2}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podstawienie $3^x=t$	1
B	Rozwiązanie równania	1
C	Odrzucenie wyniku sprzecznego z założeniem, podanie rozwiązania.	1

Pakiet M-3.2 „Dziś, nieodmiennie śliczna – Geometria Analityczna”

I .Treści merytoryczne:

- pojęcie i umiejętność obliczania odległości punktów na płaszczyźnie, odległość punktu od prostej,
- równanie prostej w postaci ogólnej i kierunkowej,
- warunki równoległości i prostopadłości prostych,
- środek i symetralna odcinka,
- równanie okręgu,
- układy równań z dwiema niewiadomymi stopnia co najwyżej drugiego,
- układy nierówności z dwiema niewiadomymi stopnia pierwszego,
- styczna do okręgu,
- parabola,
- figury podobne i ich własności,
- pola trójkąta i czworokątów,
- twierdzenie cosinusów.

II. Cele szczegółowe:

- wykorzystywanie układu współrzędnych na płaszczyźnie jako środowiska rozwiązywania zadań,
- kształcenie umiejętności zapisywania równania prostej w postaci normalnej i kierunkowej,
- interpretowanie współczynników we wzorze funkcji liniowej,
- korzystanie z warunku prostopadłości prostych w konkretnych sytuacjach problemowych,
- utrwalanie interpretacji algebraicznej i geometrycznej układów równań stopnia, co najwyżej drugiego,
- posługiwanie się równaniem okręgu,
- interpretacja geometryczna rozwiązania nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi i układu takich nierówności,
- ćwiczenia w obliczaniu odległości punktów na płaszczyźnie i odległości punktu od prostej,
- posługiwanie się współrzędnymi środka odcinka do rozwiązywania sytuacji problemowych,
- rozwiązywanie zadań dotyczących wzajemnego położenia prostej i okręgu,
- wykorzystanie własności figur podobnych w zadaniach,
- znajdowanie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii,
- wyznaczanie wzorów funkcji i określanie miejsc geometrycznych na płaszczyźnie.

III. Metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup (zespoły zadaniowe w innym składzie niż na poprzednich spotkaniach).
4. Praca w grupach: każdy zespół wymyśla dla siebie nazwę (związaną z matematyką, działaniami społecznymi, historycznymi lub współczesnymi postaciami świata odkryć, dokonań naukowych) oraz logo zespołu.
5. Przedstawienie nazw i logo przez poszczególne grupy.
6. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
7. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
8. Zebranie kart z rozwiązaniami.
9. Podsumowanie zajęć.
10. Zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające”.

Bibliografia do zestawu „Ćwiczeń otwierających”:

[1] Gdowski B., Pluciński E., *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1986, (Zadanie 1 - str.83 zad.996)
[2] CKE, arkusz MMA-P1A1P-011 (Zadanie 3)
[3] Nowa Era, Matematyka, poziom podstawowy, Kujon Polski, Gazeta Wyborcza, 27 września 2005 (Zadanie 2)
[4] Tematy pisemnego egzaminu dojrzałości z matematyki dla abiturientów liceów ogólnokształcących (profil biologiczno- chemiczny), KOiW w Zielonej Górze, 10 maja 1995, zad.3 (Zadanie 4)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu „Rozwiążmy razem”:

[1] Gdowski B., E. Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1986 (Zadanie 5 - zad. 985 str. 82; Zadanie 6 - zad. 982 str. 82)
[2] CKE Matematyka poziom rozszerzony, przykładowy zestaw zadań nr 2, marzec 2008 (Zadanie 7)
[3] Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2007 (Zadanie 9)
[4] Kujon Polski-Matura 1007 Matematyka, Poziom podstawowy 20 kwietnia 2007 GW (Zadanie 2)
[5] Matematyka. Poziom rozszerzony, Próbna matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą” grudzień 2007 (Zadanie 3)
[6] Matematyka. Poziom rozszerzony, Próbna matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą” listopad 2009 (Zadanie 1)
[7] OE Krzysztof Pazdro, Próbny egzamin maturalny z matematyki, Poziom rozszerzony, listopad 2006, zad. 4 (Zadanie 4)
[8] OKE Wrocław, Kujon Polski GW, 16 października 2001 (Zadanie 11)
[9] OKE Wrocław, Kujon Polski GW, 16 października 2001 (Zadanie 12)
[10] Próbny egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, listopad 2006, (zadanie 5, Zadanie 8)
[11] Próbny egzamin maturalny z matematyki, Arkusz I, styczeń 2005 (Zadanie 10)

Spotkanie 3. „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadań.
3. Nauczyciel ocenia pracę zespołów zadaniowych (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem” będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Wykresy za pomocą programu Cabri Geometry II oraz zdjęcia do Pakietu M-3.2 wykonała Iwona Derendarz

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Dziś, nieodmiennie śliczna - Geometria Analityczna”

Exercise 1 Seek and you will find (6 points)

Find the set of all centres of gravity for triangles with angles $A(1,0)$, $B(5,0)$ and C lying on the line $y = x$.

Tarea 1. Buscad y encontraréis (6 puntos)

Encuentra el conjunto de todos centros de gravedad de los triángulos con los vértices $A(1,0)$, $B(5,0)$ i un vértice C situado sobre la linea recta $y = x$.

Aufgabe 1. Wer sucht, der findet (6 Punkte)

Finde die Menge von allen Schwerpunkten eines Dreiecks mit Eckpunkten $A(1,0)$, $B(5,0)$ und mit einem Eckpunkt C, der auf der Gerade $y = x$ liegt.

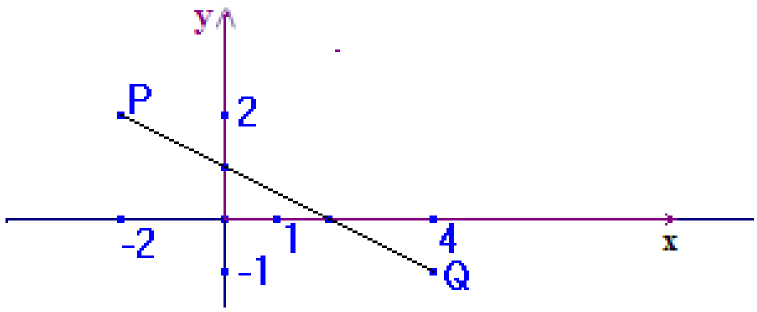
Esercizio 1. Chi cerca trova (6 punti)

Trova l’insieme di tutti i centri di gravità dei triangoli coi vertici $A(1,0)$, $B(5,0)$ e il vertice C situato sulla linea retta $y = x$.

Exercice 1. Cherchez et vous trouverez (6 points)

Trouve l’ensemble de tous les centres de gravité des triangles ayant pour sommets $A(1,0)$, $B(5,0)$ et C se trouvant sur la droite $y = x$.

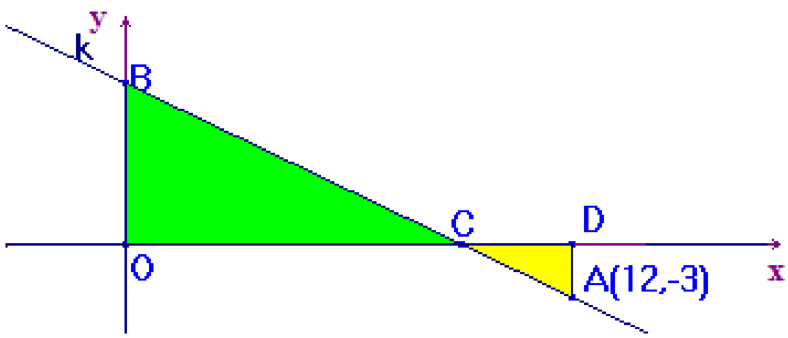
Zadanie 2. Grunt, to podstawa… (5 punktów)



Na rysunku odcinek $\overline{PQ}$ jest fragmentem wykresu funkcji liniowej *g*.
Odczytaj dane z rysunku, a następnie:

a) Sprawdź, czy punkt $A(-28,13)$ należy do wykresu funkcji g,
b) Rozwiąż nierówność: $4g(x) \geq 8x - 1$,
c) Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie danym przez układ nierówności:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq g(x) \end{cases}.$$

Zadanie 3. Można łatwiej, można trudniej… (6 punktów)



Na rysunku powyżej prosta k przechodzi przez punkt $A(12,-3)$.
Wiedząc, że stosunek pól obu zakreskowanych trójkątów prostokątnych jest równy 4:

a) Oblicz sumę pól tych trójkątów,
b) Wyznacz równanie prostej k.

Zadanie 4. Symetrie (7 punktów)

Prosta o równaniu: $3x + y - 10 = 0$ przecina okrąg o równaniu: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ w punktach A i B.

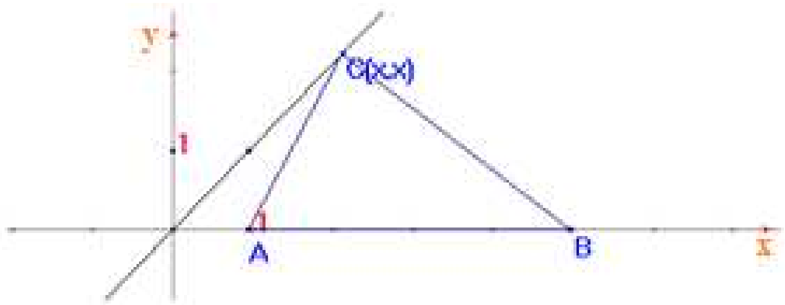
a) Wyznacz współrzędne punktów A' i B', które są obrazami punktów A i B w symetrii względem prostej o równaniu: $y = x - 3$,
b) Oblicz pole czworokąta $AA^{|}BB^{|}$,
c) Oblicz wartość wyrażenia: $\cos\alpha + \sin\beta$, gdzie α i β są miarami kątów wewnętrznych leżących przy jednym ramieniu.

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” „Dziś, nieodmiennie śliczna - Geometria Analityczna”

Zadanie 1. Szukajcie a znajdziecie (6 punktów)

Znajdź zbiór wszystkich środków ciężkości trójkątów o wierzchołkach $A(1,0)$, $B(5,0)$ i wierzchołku C leżącym na prostej $y = x$.

Rozwiązanie:



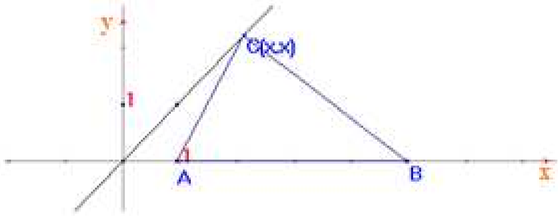
Oznaczmy $S(a,b)$ środek ciężkości trójkąta ABC.
Ponieważ punkt C leży na prostej $y = x$, zatem jego współrzędne $C(x,x)$.
Mamy: $a = \frac{1+5+x}{3}$ i $b = \frac{0+0+x}{3}$, czyli $a = \frac{x+6}{3}$ i $b = \frac{x}{3}$.
Otrzymujemy $\begin{cases} x = 3a - 6 \\ x = 3b \end{cases}$, więc $3a - 6 = 3b$, $b = a - 2$.
Ponieważ a oznacza odciętą, zaś b rzędną punktu S,
otrzymujemy równanie prostej: $y = x - 2$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Zapisanie wzoru na środek ciężkości trójkąta w warunkach zadania	1
C	Ustalenie związku między odciętą a rzędną środków ciężkości	2
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	2

Exercise1. Seek and you will find (6 points)

Solution:



Denote by $S(a,b)$ the centre of gravity of ABC triangle. Point C lies on the line $y=x$ and its coordinates are $C(x,x)$. We have: $a=\frac{1+5+x}{3}$ and $b=\frac{0+0+x}{3}$. So, $a=\frac{x+6}{3}$ and $b=\frac{x}{3}$. We obtain $\begin{cases} x=3a-6 \\ x=3b \end{cases}$ and $3a-6=3b$, $b=a-2$.

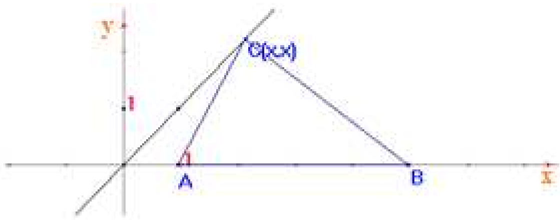
Of course, a and b denote the abscissa and the ordinate of a point S, respectively.
Hence, we get the line equation $y=x-2$.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	1
B	Writing a formula giving the centre of gravity of a triangle satisfying the exercise's requirements	1
C	Determination the connection for the abscissa and ordinate of centres of gravity	2
D	Answer in foreign language	2

Tarea 1. Buscad y encontraréis (6 puntos)

Solución:



Marquemos $S(a,b)$ centro de gravedad del triángulo ABC. Como el punto C es situado sobre la recta $y=x$, sus coordenadas son $C(x,x)$. Tenemos:
$a=\frac{1+5+x}{3}$ i $b=\frac{0+0+x}{3}$, es decir $a=\frac{x+6}{3}$ y $b=\frac{x}{3}$.

Obtenemos $\begin{cases} x=3a-6 \\ x=3b \end{cases}$, entonces $3a-6=3b$, $b=a-2$.

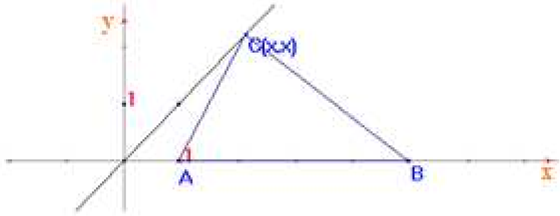
Porque a indica la abscisa, mientras que b la ordenada del punto S, obtenemos la ecuación de la recta $y=x-2$.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	1
B	Anotación del la fórmula del centro de gravedad del triángulo en las condiciones de la tarea	1
C	Fijación de la relación entre la abscisa y la ordenada de los centros de gravedad	2
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	2

Aufgabe 1. Wer sucht, der findet (6 Punkte)

Lösung:



Bezeichnen wir $S(a,b)$ als Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Da der Punkt C auf der Gerade $y = x$ liegt, besitzt er also Koordinaten $C(x,x)$.

Wir haben: $a = \frac{1+5+x}{3}$ und $b = \frac{0+0+x}{3}$, also $a = \frac{x+6}{3}$ und $b = \frac{x}{3}$. Wir bekommen $\begin{cases} x = 3a - 6 \\ x = 3b \end{cases}$, also $3a - 6 = 3b$, $b = a - 2$.

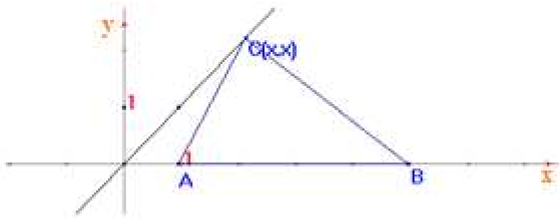
Weil a die Abszisse und b die Ordinate des Punktes S bezeichnet, bekommen wir eine Gleichung der Gerade $y = x - 2$.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnisch	1
B	Schreiben der Formel für den Schwerpunkt des Dreiecks in Aufgabenvoraussetzungen	1
C	Bestimmung der Beziehung zwischen der Abszisse a Ordinate von Schwerpunkten	2
D	Antwortformulierung in einer Fremdsprache	2

Esercizio 1. Chi cerca trova (6 punti)

Soluzione:



Determiniamo $S(a,b)$ come centro di gravità del triangolo ABC. Come punto C si trova sulla retta $y = x$, quindi le sue coordinate $C(x,x)$. Abbiamo:

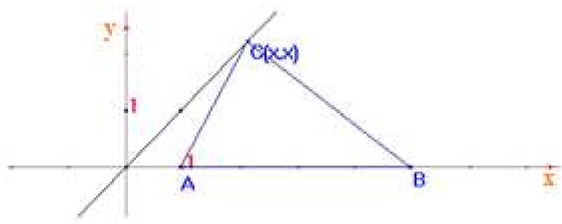
$a = \frac{1+5+x}{3}$ e $b = \frac{0+0+x}{3}$, cioè $a = \frac{x+6}{3}$ e $b = \frac{x}{3}$. Otteniamo $\begin{cases} x = 3a - 6 \\ x = 3b \end{cases}$, dunque $3a - 6 = 3b$, $b = a - 2$. Siccome a indica l'ascissa, invece b l'ordinata del punto S, otteniamo l'equazione della retta $y = x - 2$.

Punteggio:

N dell'attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	1
B	Scrittura della formula del centro di gravità del triangolo nelle condizioni dell'esercizio	1
C	Determinazione del rapporto tra l'ascissa e l'ordinata dei centri di gravità	2
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	2

Exercice 1. Cherchez et vous trouverez (6 points)

Solution:



Que $S(a,b)$ soit le centre de gravité du triangle ABC. Puisque le point C se trouve sur la droite $y = x$, ses coordonnés c'est $C(x,x)$. Nous avons: $a = \frac{1+5+x}{3}$ et $b = \frac{0+0+x}{3}$, donc $a = \frac{x+6}{3}$ et $b = \frac{x}{3}$. Nous obtenons $\begin{cases} x = 3a-6 \\ x = 3b \end{cases}$, donc $3a-6 = 3b$, $b = a-2$. Puisque a signifie une abscisse et b - une ordonnée du point S, nous obtenons une équation de la droite $y = x - 2$.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en polonais	1
B	Notation de la formule pour le centre de gravité du triangle dans les conditions de l'exercice	1
C	Détermination du rapport entre l'abscisse et l'ordonnée des centres de gravité	2
D	Formulation de la réponse en langue étrangère	2

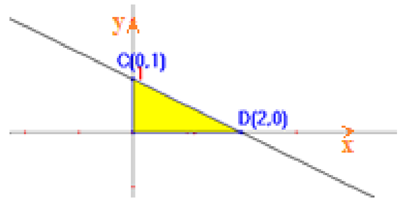
Zadanie 2. Grunt, to podstawa… (5 punktów)

Rozwiązanie:

a) $P(-2,2)$, $Q(4,-1)$, równanie prostej PQ $y-2 = \frac{-3}{6}(x+2)$, co daje $y = -\frac{1}{2}x+1$.

Mamy, więc $g(-28) = -\frac{1}{2}\cdot(-28)+1 = 14+1 = 15$, zatem punkt $A(-28,13)$ nie należy do prostej PQ

b) $4\left(-\frac{1}{2}x+1\right) \geq 8x-1$, $-2x+4-8x \geq -1$, co daje $x \leq \frac{1}{2}$.



c) Powstaje trójkąt prostokątny COD, w którym przeciwprostokątna $|DC| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. Zatem: $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$, gdzie R oznacza promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie wzoru y=g(x)	1
B	Sprawdzenie czy należy do wykresu g(x)	1
C	Rozwiązanie nierówności	1
D	Podanie wierzchołków trójkąta	1
E	Obliczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie	1

Zadanie 3. Można łatwiej, można trudniej… (6 punktów)

Rozwiązanie:

a) Niech a oznacza współczynnik kierunkowy prostej k, gdzie $a<0$.
Mamy równanie $k:\ y+3=a(x-12)$, co daje $y=ax-12a-3$.
Dodatkowo: $-12a-3>0$, $a<-\frac{1}{4}$

Zatem punkty $B(0,-12a-3)$ i $C\left(\frac{12a+3}{a},0\right)$.

Z warunku w zadaniu mamy $\frac{P_{OBC}}{P_{CDA}}=4$ lub $\frac{P_{CDA}}{P_{OBC}}=4$.

$P_{OBC}=\frac{1}{2}\left|\frac{12a+3}{a}\right|\cdot|-12a-3|=\frac{(12a+3)^2}{2|a|}$, $\qquad P_{CDA}=\frac{1}{2}\left|12-\frac{12a+3}{a}\right|\cdot 3=\frac{9}{2|a|}$

Otrzymujemy równanie: $\frac{(12a+3)^2}{2|a|}\cdot\frac{2|a|}{9}=4$, $(12a+3)^2=36$

Mamy: $a=\frac{1}{4}$ lub $a=-\frac{3}{4}$

Lub druga możliwość: $\frac{9}{2|a|}\cdot\frac{2|a|}{(12a+3)^2}=4$, $(12a+3)^2=\frac{9}{4}$, co daje $a=-\frac{1}{8}$ (sprzeczne z warunkiem $a<-\frac{1}{4}$) lub $a=-\frac{3}{8}$.

Dla $a=-\frac{3}{4}$ mamy $k:\ y=-\frac{3}{4}x+6$ oraz sumę pól równą $S=\frac{(12a+3)^2+9}{2|a|}=30$

Dla $a=-\frac{3}{8}$ mamy $k:\ y=-\frac{3}{8}+\frac{3}{2}$ oraz sumę pól równą $S=15$.

b) II sposób:

Trójkąty OCB i CDA są podobne (cecha kk) w skali 2 lub $\frac{1}{2}$.

Dla $s=2$ mamy $B(0,6)$, $C(8,0)$, $D(12,0)$.

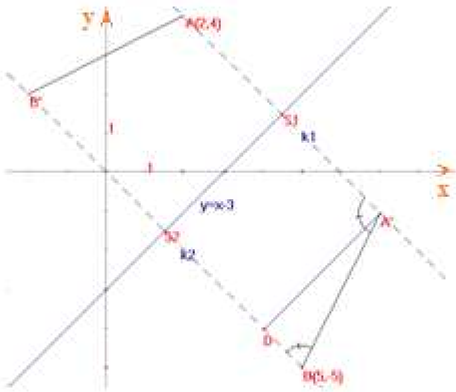
Tak, więc $S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3=24+6=30$ i równanie prostej $k:\ y=-\frac{3}{4}x+6$

Dla $s=\frac{1}{2}$ mamy $B\left(0,\frac{3}{2}\right)$; $C(4,0)$; $D(12,0)$ co daje $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 4+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3=3+12=15$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie współczynników kierunkowych prostych (lub skal podobieństwa trójkątów)	2
B	Obliczenie sumy pól trójkątów	2
C	Podanie równań prostych	2

Zadanie 4. Symetrie (7 punktów)



Rozwiązanie:

a) Wyznaczamy współrzędne punktów A i B:

$\begin{cases} y=-3x+10 \\ x^2+y^2-4x+2y-20=0 \end{cases}$ i otrzymujemy równanie: $x^2-7x+10=0$, $\Delta=9$, $x_1=2$, $x_2=5$, zatem: $A(2,4)$ i $B(5,-5)$. Prosta $AA'=k_1$, $BB'=k_2$. Dla k_1 mamy $a=-1$ i równanie $y=-x+6$. Punkt $S_1\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$ jest punktem wspólnym prostych k_1 i $y=x-3$.

Dla k_2 otrzymujemy równanie $y=-x$ i punkt $S_2\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

Korzystając z tego, że punkty S_1 *i* S_2 są środkami odcinków *AA'* i *BB'* otrzymujemy

$A'\begin{cases} \frac{x'+2}{2}=\frac{9}{2} \\ \frac{y'+4}{2}=\frac{3}{2} \end{cases}$ zatem: $A'(7,-1)$ i punkt $B'\begin{cases} \frac{5+x'}{2}=\frac{3}{2} \\ \frac{-5+y'}{2}=-\frac{3}{2} \end{cases}$, więc $B'(-2,2)$

b) *AA'BB'* jest trapezem, $|AA'|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $|BB'|=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$,

$h=d(A,k_2)=\frac{|2+4|}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$. Pole trapezu $P=\frac{12\sqrt{2}}{2}\cdot 3\sqrt{2}=36$

c) $\alpha=\angle A'BB'$, $\beta=\angle AA'B$

$$\cos\alpha+\sin\beta=\cos\alpha+\sin(180^o-\alpha)=\cos\alpha+\sin\alpha=\frac{|DB|}{|A'B|}+\frac{|A'D|}{|A'B|}=\frac{|DB|+|A'D|}{|A'B|}=\frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

gdzie $|BD|=\frac{|BB'|-|AA'|}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, $|A'B|=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $|A'D|=h=3\sqrt{2}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B	2
B	Wyznaczenie współrzędnych punktów A' i B'	2
C	Obliczenie pola trapezu	2
D	Wyznaczenie wartości wyrażenia trygonometrycznego	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” –
„Dziś, nieodmiennie śliczna - Geometria Analityczna”

Exercise 1. Equidistant – so, what? (5 points)

All points lying on the graph of a function f are equidistant from the line $y=-\frac{1}{2}$ and from the point $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Find the formula of ***f***.

Tarea 1. Isodistante – es decir el cuál? (5 puntos)

Los puntos isodistantes de la recta de la ecuación $y=-\frac{1}{2}$ y del punto $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ forman parte de la curva representativa de la función f. Encuentra la fórmula de esta función.

Aufgabe 1. Parallel – also wie? (5 Punkte)

Punkte, die zur Gerade von der Gleichung $y=-\frac{1}{2}$ und zum Punkt $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ parallel sind, gehören zum Kurvenverlauf einer Funktion f. Finde die Formel von dieser Funktion.

Esercizio 1. Parallelo – allora il quale? (5 punti)

I punti con la stessa distanza della linea retta con l’equazione $y=-\frac{1}{2}$ e del punto $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ appartengono al diagramma della funzione f. Trova la formula di questa funzione.

Exercice 1. Équidistant – cela veut dire comment? (5 points)

Les points équidistants de la droite dont l’équation est $y=-\frac{1}{2}$ et du point $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ appartiennent à la courbe représentative de la fonction f. Trouve la formule de cette fonction.

Zadanie 2. Pańszczyzna (4 punkty)

Boki trójkąta zawarte są w prostych o równaniach: $y=5$, $x+y-2=0$, $-x+2y+2=0$

a) Narysuj trójkąt ABC w prostokątnym układzie współrzędnych i oblicz jego pole
b) Opisz trójkąt ABC za pomocą trzech nierówności liniowych
c) Napisz równanie symetralnej najkrótszego boku trójkąta ABC.

Zadanie 3. Okrąg i prosta- sprawa prosta (2 punkty)

Napisz równanie okręgu o środku $S(10,-3)$ stycznego do prostej o równaniu: $y=-\frac{3}{4}x+2$.

Zadanie 4. Podejrzana sprawa (5 punktów)

Na prostej $l: x+y-6=0$ wyznacz taki punkt C, aby długość łamanej ACB, gdzie $A(1,3)$ i $B(2,2)$ była najmniejsza. Uzasadnij swoje rozumowanie.

Zadanie 5. Znów te stosunki (4 punkty)

Znaleźć zbiór wszystkich punktów, dla których stosunek odległości od punktów $(-1,0)$ i $(1,0)$ jest równy 2.

Zadanie 6. Miejsca geometryczne, czyli jakie… (3 punkty)

Znaleźć zbiór wszystkich środków okręgów przechodzących przez punkt $(3,5)$ i stycznych do osi OX.

Zadanie 7. One dwie i on jeden (4 punkty)

Wiadomo, że okrąg jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$ w punkcie $A(2,1)$ i styczny do prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x+9$ w punkcie $B(-4,7)$. Oblicz promień tego okręgu.

Zadanie 8. Ćwiczenie (4 punkty)

Dane są proste o równaniach $2x-y-3=0$ i $2x-3y-7=0$

a) Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie kąt opisany układem nierówności: $\begin{cases} 2x-y-3\le 0 \\ 2x-3y-7\le 0 \end{cases}$
b) Oblicz odległość punktu przecięcia się tych prostych od punktu $S(3,-8)$.

Zadanie 9. Symetralna (3 punkty)

Dany jest punkt $C(2,3)$ i prosta o równaniu $y=2x-8$ będąca symetralną odcinka BC. Wyznacz współrzędne punktu B. Wykonaj obliczenia uzasadniające odpowiedź.

Zadanie 10. Podstawy, podstawy… (4 punkty)

Prosta l tworzy z osią OX kąt o mierze 45^o i przechodzi przez punkt $M(-2,2)$. Prosta k prostopadła do prostej l, przecina oś OX w punkcie o odciętej $x_o = -3$

a) Wyznacz równania prostych l i k
b) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego boki zawierają się w prostych: k i l oraz osi OY.

Zadanie 11. Prosta, okrąg i trójkąt (4 punkty)

Prosta o równaniu $x - y + 1 = 0$ przecina okrąg o równaniu $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ w punktach A i B. Oblicz pole trójkąta ABS, gdzie S jest środkiem danego okręgu.

Zadanie 12. Romb (8 punktów)

Punkt $A(1,-2)$ jest wierzchołkiem rombu, którego jeden bok zawiera się w prostej o równaniu : $x - y - 3 = 0$, natomiast punkt $O(2,2)$ jest środkiem symetrii tego rombu.

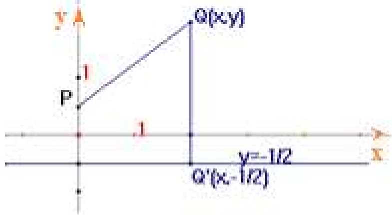
a) Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu
b) Oblicz pole tego rombu
c) Znajdź cosinus kąta ostrego tego rombu

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" „Dziś, nieodmiennie śliczna - Geometria Analityczna"

Zadanie1. Równoodległy - czyli jaki? (5 punktów)

Punkty równoodległe od prostej o równaniu $y=-\frac{1}{2}$ i punktu $P\left(0,\frac{1}{2}\right)$ należą do wykresu funkcji f. Znajdź wzór tej funkcji.

Rozwiązanie:



$|PQ|=|QQ'|$

$|PQ|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$, $\quad |QQ'|=\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}$

$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$ co po redukcji daje równanie:

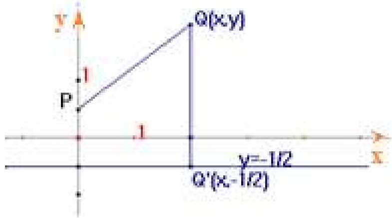
$x^2=2y$, czyli parabolę: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie treści zadania na język polski	1
B	Zapisanie równości odległości punktu od prostej i punktu	1
C	Uzyskanie równania paraboli	1
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	2

Exercise1. Equidistant – so, what? (5 points)

Solution:



$|PQ|=|QQ'|$

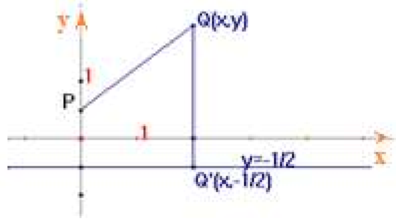
$|PQ|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$, $\quad |QQ'|=\sqrt{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}$

$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$, what after reduction gives the equation: $x^2=2y$, that means parabola: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of exercise text in Polish	1
B	Writing the equation expressing the distances between point and line and between points.	1
C	Finding equation of a parabola	1
D	Answer in foreign language	2

Tarea 1. Isodistante – es decir el cuál? (5 puntos)



Solución

$$|PQ| = |QQ'|$$

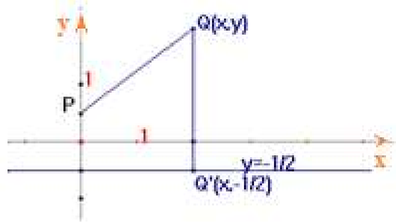
$$|PQ| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}, \qquad |QQ'| = \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$, lo que da, después de la reducción, una ecuación: $x^2 = 2y$, es decir, una parábola: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción del contenido de la tarea en polaco	1
B	Anotación de la igualdad de la distancia del punto de la recta y del punto	1
C	Obtención de la ecuación de la parábola:	1
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	2

Aufgabe 1. Parallel – also wie? (5 Punkte)



Lösung:

$$|PQ| = |QQ'|$$

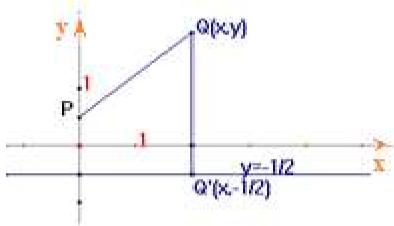
$$|PQ| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}, \qquad |QQ'| = \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}$$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$, was nach der Reduktion die Gleichung: $x^2 = 2y$, also die Parabel: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ gibt.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung des Aufgabeninhalts ins Polnisch	1
B	Schreiben von der Gleichung der Punktentfernung von der Gerade und von dem Punkt	1
C	Gewinnung einer Parabelgleichung	1
D	Antwortformulierung in einer Fremdsprache	2

Esercizio 1. Parallelo – allora il quale ? (5 punti)



Soluzione:

$|PQ| = |QQ'|$

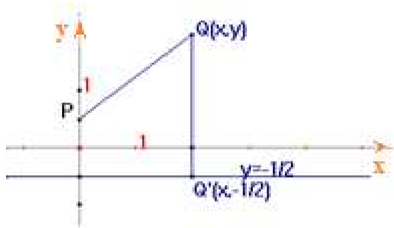
$|PQ| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$, $\qquad |QQ'| = \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}$

$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$, il quale dopo la riduzione fa l'equazione: $x^2 = 2y$, cioè la parabola: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Punteggio:

N dell'attività	Tappe della soluzione	Numero di punti
A	Traduzione dell'esercizio nella lingua polacca	1
B	Formulazione dell'equazione di distanza del punto della retta e del punto	1
C	Ottenimento dell'equazione di parabola	1
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	2

Exercice 1. Équidistant – cela veut dire comment? (5 points)



Solution:

$|PQ| = |QQ'|$

$|PQ| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$ $\qquad |QQ'| = \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2}$

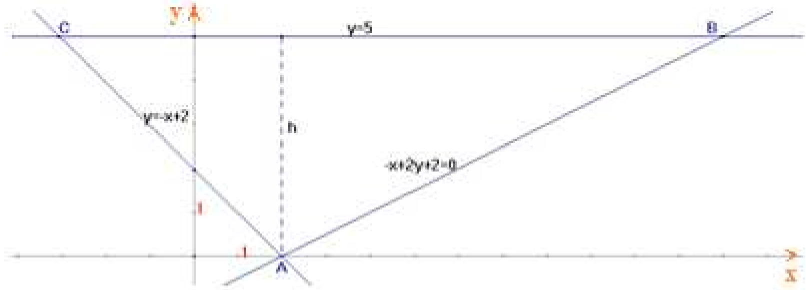
$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$, ce qui donne, après la réduction, l'équation: $x^2 = 2y$, donc une parabole : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction du contenu de l'exercice en polonais	1
B	Notation de l'égalité de la distance du point de la droite et du point	1
C	Obtention de l'équation de la parabole	1
D	Formulation de la réponse en langue étrangère	2

Zadanie 2. Pańszczyzna (4 punkty)

Rozwiązanie:



a) $C\begin{cases} y = 5 \\ y = -x + 2 \end{cases}$;

$B\begin{cases} y = 5 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$;

$A\begin{cases} y = -x + 2 \\ -x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$

Po rozwiązaniu układów równań otrzymujemy współrzędne wierzchołków trójkąta: $C(-3{,}5)$, $B(12{,}5)$, $A(2{,}0)$. $\quad |BC| = 15$, $h = 5$, co daje pole $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h = \frac{75}{2}$

b) $\begin{cases} y \le 5 \\ x + y - 2 \ge 0 \\ -x + 2y + 2 \ge 0 \end{cases}$

c) $|AC| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$, $\quad |AB| = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, $\quad |BC| = \sqrt{225} = 15$.

Najkrótszy odcinek $|AC| = 5\sqrt{2}$. Jego środek ma współrzędne: $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, symetralna jest prostopadła do AC, ma współczynnik kierunkowy $a = 1$ i równanie: $y - \frac{5}{2} = 1\left(x + \frac{1}{2}\right)$, po uproszczeniu $y = x + 3$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku	1
B	Obliczenie pola trójkąta	1
C	Zapisanie układu nierówności	1
D	Wyznaczenie symetralnej boku trójkąta	1

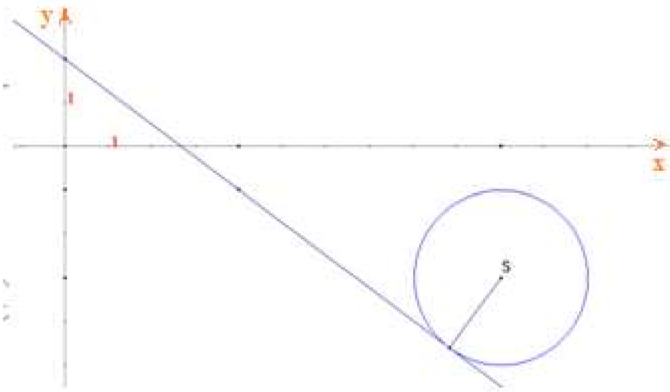
Zadanie 3. Okrąg i prosta- sprawa prosta (2 punkty)

Rozwiązanie:

Równanie prostej w postaci ogólnej: $3x+4y-8=0$.

Odległość środka okręgu od prostej musi się równać długości promienia okręgu, zatem $d=\frac{|3\cdot 10+4\cdot(-3)-8|}{\sqrt{9+16}}=2$

i otrzymujemy równanie okręgu: $(x-10)^2+(y+3)^2=4$.



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie promienia okręgu	1
B	Zapisanie równania okręgu	1

Zadanie 4. Podejrzana sprawa (5 punktów)

Rozwiązanie:

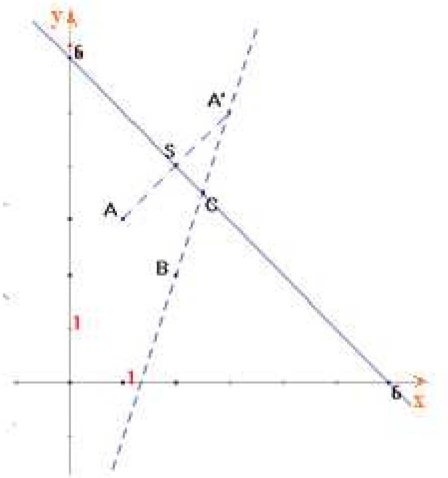
Punkt *A'* jest obrazem punktu *A* w symetrii osiowej względem prostej $y=-x+6$

Prosta AA': $y-3=x-1$, $y=x+2$, ponieważ jej współczynnik kierunkowy $a=1$

Otrzymujemy współrzędne punktu $S\begin{cases} y=x+2 \\ y=-x+6 \end{cases}$,

$S(2,4)$, ponieważ S jest środkiem odcinka *AA'*, otrzymujemy współrzędne punktu $A'(x',y')$

$\frac{x'+1}{2}=2$ i $\frac{y'+3}{2}=4$, co daje $A'(3,5)$.



Równanie prostej *A'B*: $y=3x-4$.

Punkt $C:\begin{cases} y=3x-4 \\ y=-x+6 \end{cases}$, rozwiązanie układu daje współrzędne punktu $C\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$.

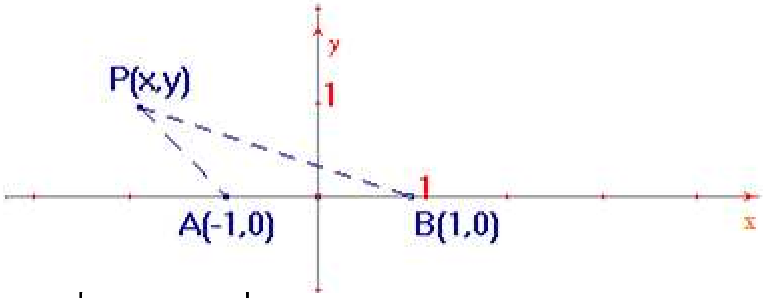
Uzasadnienie: $|AS|=|SA'|$. Punkty *A', C i B* są współliniowe, zatem długość łamanej *ACB* jest najkrótsza z możliwych.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie współrzędnych punktu A’	2
B	Wyznaczenie równania prostej A’B	1
C	Wyznaczenie współrzędnych punktu C	1
D	Uzasadnienie	1

Zadanie 5. Znów te stosunki (4 punkty)

Rozwiązanie:



$\frac{|AP|}{|PB|} = 2$,

mamy: $|AP| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ i

$|PB| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$,

otrzymujemy równanie: $(x+1)^2 + y^2 = 4 \cdot \left[(x-1)^2 + y^2\right]$.

Po redukcji mamy: $3x^2 + 3y^2 - 10x + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - \frac{10}{3}x + 1 = 0$,

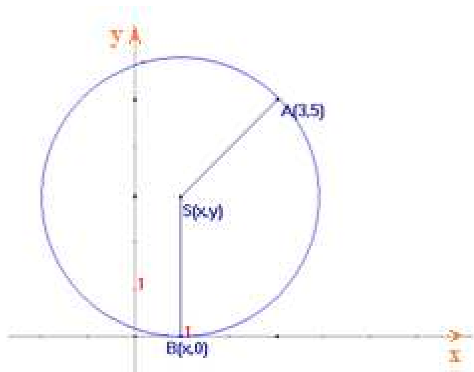
bądź równanie okręgu w postaci: $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie stosunku odległości	1
B	Zbudowanie równania	1
C	Doprowadzenie równania do najprostszej postaci i nazwanie figury	2

Zadanie 6. Miejsca geometryczne, czyli jakie… (3 punkty)

Rozwiązanie:



$|SA| = |SB|$,

$|SA| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}$, $|SB| = \sqrt{y^2}$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = y^2$

$10y = x^2 - 6x + 34$, uzyskujemy parabolę:

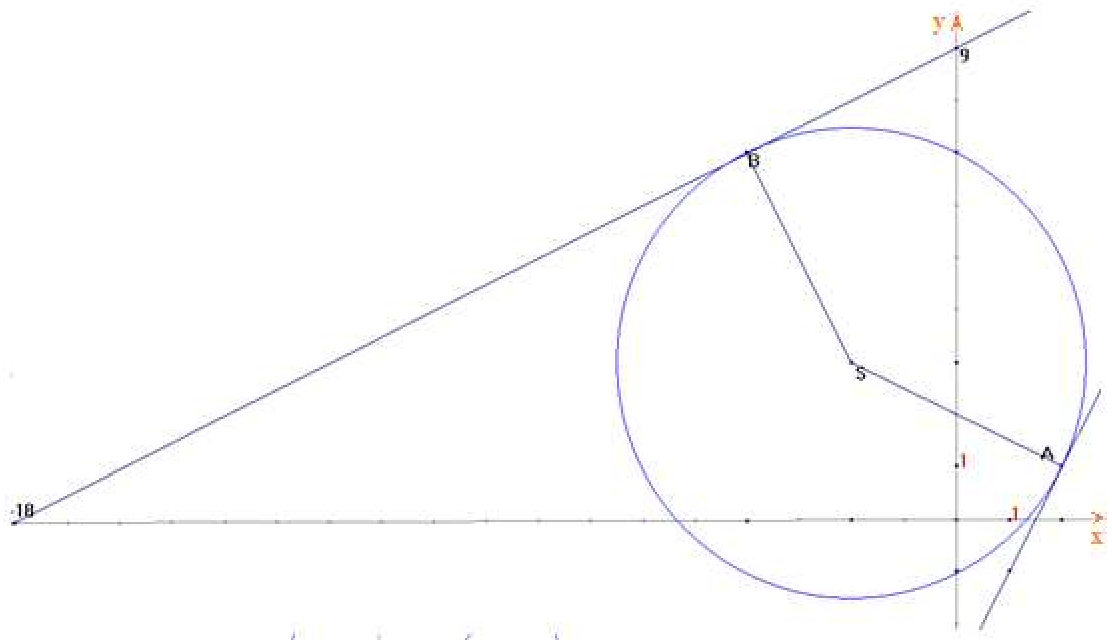
$y = \frac{1}{10}x^2 - \frac{6}{10}x + \frac{34}{10}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie równości wynikającej z treści zadania	1
B	Zbudowanie równania	1
C	Doprowadzenie równania do prostej postaci i nazwanie krzywej	1

Zadanie 7. One dwie i on jeden (4 punkty)

Rozwiązanie:



Prosta AS jest prostopadła do $y=2x-3$, zatem ma równanie: $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$,

czyli $y=-\frac{1}{2}x+2$, prosta BS jest prostopadła do $y=\frac{1}{2}x+9$, więc jej równanie to:

$y-7=-2(x+4)$, czyli $y=-2x-1$

$S:\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+2 \\ y=-2x-1 \end{cases}$, mamy $S(-2,3)$, a promień $r=|SA|=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

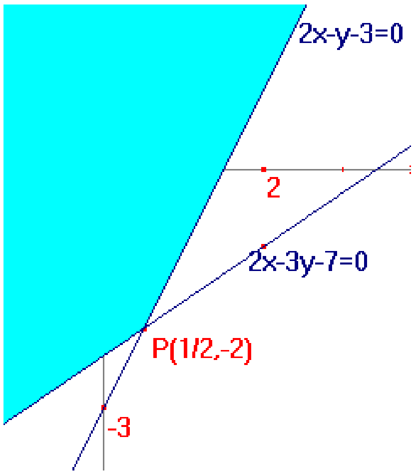
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie równania prostej AS	1
B	Wyznaczenie równania prostej BS	1
C	Wyznaczenie punktu S	1
	Obliczenie promienia okręgu	1

Zadanie 8. Ćwiczenie (4 punkty)

Rozwiązanie:

a)



b) $\begin{cases} 2x = y + 3 \\ 2x = 3y + 7 \end{cases}$ rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$

Punkt $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$,

odległość $|PS| = \sqrt{\left(3 - \frac{1}{2}\right)^2 + (-8+2)^2} = \sqrt{(2{,}5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zaznaczenie obszaru kąta	2
B	Wyznaczenie współrzędnych punktu P	1
C	Obliczenie odległości PS	1

Zadanie 9. Symetralna (3 punkty)

Rozwiązanie:

Symetralna jest prostopadła do odcinka *BC*, zatem współczynnik kierunkowy prostej *BC* wynosi $a=-\frac{1}{2}$. Równanie prostej *BC*: $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$, po uproszczeniu: $y=-\frac{1}{2}x+4$.

Z układu równań $\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+4 \\ y=2x-8 \end{cases}$ uzyskujemy współrzędne punktu $S\left(\frac{24}{5},\frac{8}{5}\right)$, będącego środkiem odcinka *BC*.

Ze wzorów na środek odcinka wyznaczamy współrzędne punktu *B*:

$$\begin{cases} \frac{2+x_B}{2}=\frac{24}{5} \\ \frac{3+y_B}{2}=\frac{8}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_B=\frac{38}{5} \\ y_B=\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{38}{5},\frac{1}{5}\right).$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie równania prostej BC	1
B	Wyznaczenie współrzędnych punktu S	1
C	Wyznaczenie współrzędnych punktu B	1

Zadanie 10. Podstawy, podstawy… (4 punkty)

Rozwiązanie:

a) $l:\ a_k=tg45^o=1$ $\qquad k\perp l$, więc: $a_k=-1$

$l:\ y-2=1(x+2)$ $\qquad k:\ y=-1(x+3)$

$l:\ y=x+4$ $\qquad k:\ y=-x-3$

b) Wyznaczamy wierzchołki trójkąta: $A:\begin{cases} y=x+4 \\ y=-x-3 \end{cases}$, $A\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$,

$B(0,-3)$, $C(0,4)$.

W ΔABC boki:

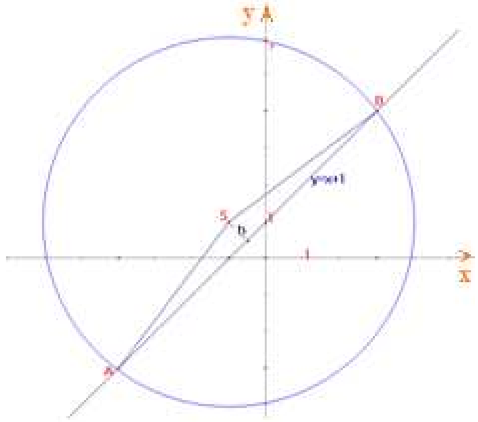
$$|BC|=7,\ |AB|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{7}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{98}{4}}=\frac{7\sqrt{2}}{2},\ |AC|=\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Najdłuższy jest $|BC|=7$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie równania prostej *l*	1
B	Wyznaczenie równania prostej *k*	1
C	Wyznaczenie wierzchołków trójkąta	1
D	Obliczenie długości najdłuższego boku	1

Zadanie 11. Prosta, okrąg i trójkąt (4 punkty)



Rozwiązanie:

Wyznaczamy współrzędne punktów A i B:

$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0 \end{cases}$,

otrzymujemy równanie: $x^2 + x - 12 = 0$, $\Delta = 49$,

$\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -3 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

Przyjmijmy: $A(-4,-3)$, $B(3,4)$

Następnie wyznaczamy środek okręgu S:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$, mamy: $S(-1,1)$.

Obliczamy pole ΔABS: $P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot h$, gdzie: $|AB| = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$,

$$h = d(S, pr.AB) = \frac{|-1-1+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

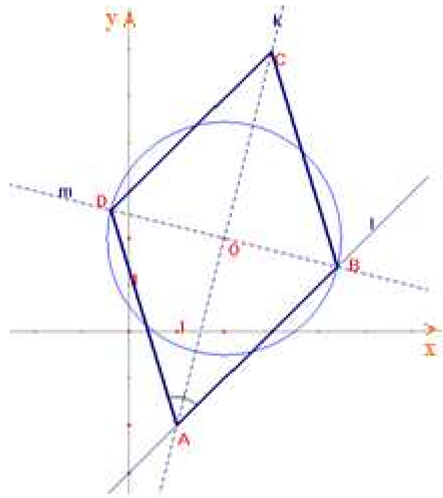
Mamy, więc: $P = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{2}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie współrzędnych punktów A i B	1
B	Wyznaczenie punktu S	1
C	Wyznaczenie wysokości trójkąta	1
D	Obliczenie pola trójkąta	1

Zadanie 12. Romb (8 punktów)

Rozwiązanie:



a) Punkt O jest środkiem odcinka AC:

$$\begin{cases} \dfrac{x_C+1}{2}=2 \\ \dfrac{y_C-2}{2}=2 \end{cases}, \text{ otrzymujemy: } C(3,6)$$

Oznaczmy $pr.\ AC=k$

$k:\ \ y+2=4(x-1) \Rightarrow k:\ \ y=4x-6$

Prosta $BD=m\perp k$, zatem $a=-\dfrac{1}{4}$ i otrzymujemy:

$m:\ \ y-2=-\dfrac{1}{4}(x-2)$, po uproszczeniu $m:\ \ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2}$

Punkt B wyznaczymy, jako punkt wspólny prostych l i m

$$\begin{cases} x-y-3=0 \\ y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{2} \end{cases} \text{ mamy: } B\left(\frac{22}{5},\frac{7}{5}\right)$$

Współrzędne punktu D możemy wyznaczyć wykorzystując wzory na środek odcinka:

$$\begin{cases} \dfrac{x_D+4{,}4}{2}=2 \\ \dfrac{y_D+1{,}4}{2}=2 \end{cases}. \text{ Uzyskamy: } D\left(-\frac{2}{5},\frac{13}{5}\right).$$

b) $P=\dfrac{|AC|\cdot|BD|}{2}$, mamy: $|AC|=\sqrt{(3-1)^2+(6+2)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}$

$$|BD|=\sqrt{(4{,}4+0{,}4)^2+(1{,}4-2{,}6)^2}=\sqrt{(4{,}8)^2+(-1{,}2)^2}=\sqrt{24{,}48}$$

$$P=\frac{\sqrt{68}\cdot\sqrt{24\frac{12}{25}}}{2}=\frac{\sqrt{4\cdot17}\cdot\sqrt{\frac{612}{25}}}{2}=\frac{2\sqrt{17}\cdot\sqrt{4\cdot9\cdot17}}{2\cdot5}=\frac{2\cdot3\cdot17}{5}=\frac{102}{5}$$

c) Z twierdzenia cosinusów: $|DB|^2=|AB|^2+|AD|^2-2|AB|\cdot|AD|\cdot\cos\alpha$

$$|AB|=|AD|=\sqrt{(3{,}4)^2+(3{,}4)^2}=3{,}4\sqrt{2},\ |BD|=\sqrt{24{,}48}$$

$$\cos\alpha=\frac{(3{,}4)^2\cdot2\cdot2-24{,}48}{2\cdot(3{,}4)^2\cdot2}=\frac{21{,}76}{46{,}24}=\frac{544}{1156}=\frac{136}{289}=\frac{8}{17}.$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie współrzędnych punktu C	1
B	Wyznaczenie równania prostej BD	1
C	Wyznaczenie współrzędnych punktu B	1
D	Wyznaczenie współrzędnych punktu D	1
E	Obliczenie pola	2
F	Wyznaczenie wartości cosinusa	2

Pakiet M-3.3 „Nieprawdopodobnie spokojni przed maturą"

I. Treści merytoryczne:

- elementy kombinatoryki,
- klasyczna definicja prawdopodobieństwa,
- parametry danych statystycznych.

II. Cele szczegółowe:

- nabywanie biegłości w obliczaniu prawdopodobieństwa z wykorzystaniem definicji klasycznej i drzewka stochastycznego,
- ćwiczenia w obliczaniu mody, mediany, średniej arytmetycznej, odchylenia standardowego,
- utrwalenie metod kombinatorycznych i reguły mnożenia.

III. Proponowane metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć:

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.
8. Podsumowanie i zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do zestawu „Ćwiczeń otwierających":

[1] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Wesołowska J., *Matematyka 3 Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego"*, Nowa Era, Warszawa 2004 (Zadanie 2)

[2] *„Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku"* zamieszczony na stronie internetowej CKE (Zadanie 3)

[3] Ligman J., Stachowski E., Zalewska A., *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla uczniów szkół średnich* Wydawnictwo ADAM, Warszawa 1997 (Zadanie 4)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”:

[1] Ligman J., Stachowski E., Zalewska A., *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla uczniów szkół średnich,* Wydawnictwo ADAM, Warszawa 1997 (Zadanie 12)

[2] Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku zamieszczony na stronie internetowej CKE - (Zadanie 10)

[3] *Wespół w zespół z Matematyka bez granic, Szkoły ponadgimnazjalne Część I* (Zadanie 2)

[4] *Wespół w zespół z Matematyka bez granic, Szkoły ponadgimnazjalne Część II* (Zadanie 3)

[5] Słowikowski S., *Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994 (Zadanie 3)

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem” będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Rysunki do Pakietu M-3.3 wykonała Anna Rybak za pomocą programu Geogebra

Spotkanie 1: Ćwiczenia otwierające –„Nieprawdopodobnie spokojni przed maturą”

Exercise 1. In Wallet (6 points)

In our wallets will appear new money soon. Imagine that in your own wallet there are 2 banknotes with a nominal value of 100 euro, 4 banknotes with a nominal of 50euro, 6 banknotes with a nominal of 10euro and 8 banknotes with a nominal of 5euro. You choose in a random way 4 banknotes. What is a probability that all 4 banknotes will give the total sum 120 euro?

Tarea 1. En la cartera (6 puntos)

Ya dentro de poco tiempo, en nuestras carteras se instalará una nueva valuta. Imagínate que en tu cartera se hallan: 2 billetes de banco de valor nominal de 100 euros, 4 billetes de banco de valor nominal de 50 euros, 6 billetes de banco de valor nominal de 10 euros, 8 billetes de banco de valor nominal de 5euros. Sorteas 4 billetes de banco. ¿Cuál es la probilidad que todos los cuatro darán en total 120 euros?

Aufgabe 1. Im Geldbeutel (6 Punkte)

Schon bald zieht eine neue Währung in unsere Geldbeutel ein. Stell dir vor, dass in deinem Geldbeutel sich 2 Hundert-Euro-Scheine, 4 Fünfzig-Euro-Scheine, 6 Zehn-Euro-Scheine und 8 Fünf-Euro-Scheine befinden. Du holst auf eine schicksalhafte Weise 4 Geldscheine heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Geldscheine insgesamt 120 Euro geben?

Esercizio 1. Nel portafoglio (6 punti)

Fra poco nei nostri portafogli avremo la nuova valuta. Immagina che nel tuo proprio portafoglio ci sono: 2 banconote di 100 euro, 4 banconote di 50 euro, 6 banconote di 10 euro e 8 banconote di valore nominale di 5 euro. Tiri a sorte 4 banconote. Qual’è la probabilità che tutte le quattro faranno la somma di 120 euro?

Exercice 1. Dans le portefeuille (6 points)

Bientôt nous aurons une nouvelle monnaie dans nos portefeuilles. Imagine que dans ton propre portefeuille il y a deux billets de 100 euros, 4 billets de 50 euros, 6 billets de 10 euros, 8 billets de 5 euros. Tu tires au sort 4 billets. Quelle est la probabilité d’en tirer quatre qui donnent en tout 120 euros?

Zadanie 2. Nierówność (2 punkty)

Oznaczmy przez $\bar{x}, M$ i D odpowiednio średnią arytmetyczną, medianę i dominantę zestawu danych. Podaj przykład pięciu liczb, które spełniają warunek:

a) $M < \bar{x} < D$

b) $D < M < \bar{x}$

Zadanie 3. Maturalny standard (3 punkty)

Rzucamy trzy razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Opisz zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, a następnie oblicz prawdopodobieństwo, że w każdym rzucie liczba oczek będzie większa od numeru rzutu.

Zadanie 4. Ale, o co chodzi? (3 punkty)

Przy danych $P(B) = 3P(B'), P(A/B) = \frac{1}{3}, P(A/B') = \frac{1}{2}$. Oblicz $P(A)$.

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Nieprawdopodobnie spokojni przed maturą"

Zadanie 1. W portfelu (6 punktów)

Już niedługo w naszych portfelach zagości nowa waluta. Wyobraź sobie, że w Twoim własnym portfelu znajdują się: 2 banknoty o nominale 100 euro, 4 banknoty o nominale 50 euro, 6 banknotów o nominale 10 euro, 8 banknotów o nominale 5 euro. Wyciągasz w sposób losowy 4 banknoty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wszystkie cztery dadzą w sumie 120 euro?

Rozwiązanie:

Mamy do dyspozycji 20 banknotów, więc 4 możemy wyciągnąć na $C_{20}^{4}=\frac{20!}{4!\cdot 16!}=17\cdot 3\cdot 19\cdot 5$ sposobów. Aby otrzymać 120 euro można wyciągnąć 1 banknot o nominale 100 euro i 1 o nominale 10 euro i 2 o nominale 5 euro lub 2 banknoty o nominale 50 euro i 2 o nominale 10 euro, co daje $C_{2}^{1}\cdot C_{6}^{1}\cdot C_{8}^{2}+C_{4}^{2}\cdot C_{6}^{2}=2\cdot 6\cdot 7\cdot 4+3\cdot 5\cdot 6$ możliwości.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{142}{1615}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne przetłumaczenie	2
B	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń	1
C	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających	1
D	Obliczenie prawdopodobieństwa	1
E	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercise 1. In wallet (6 points)

Solution:

We have 20 banknotes, thus we can randomize 4 banknotes in $C_{20}^{4}=\frac{20!}{4!\cdot 16!}=17\cdot 3\cdot 19\cdot 5$ possibilities. To obtain 120 euro we can take either one banknote 100euro, one 10 euro banknote, two banknotes with 5 euro nominal or two banknotes with a nominal of 50euro and two with a nominal of 10 euro. Hence, we get $C_{2}^{1}\cdot C_{6}^{1}\cdot C_{8}^{2}+C_{4}^{2}\cdot C_{6}^{2}=2\cdot 6\cdot 7\cdot 4+3\cdot 5\cdot 6$ possibilities. The investigated probability is $\frac{142}{1615}$.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Correct translation	2
B	Calculation of number of all possible outcomes	1
C	Calculation the number of ways in the desired event	1
D	Calculating the probability of our event	1
E	Answer in foreign language	1

Tarea 1 En la cartera (6 puntos)

Solución:

Tenemos a nuestra disposición 20 billetes de banco, entonces 4 podemos sortear a $C_{20}^4 = \frac{20!}{4!\cdot 16!} = 17\cdot 3\cdot 19\cdot 5$ maneras. Para obtener 120 euros se puede sacar 1 billete de valor nominal de 100 euros y 1 de valor nominal de 10 euros y 2 de valor nominal de 5 euros o 2 billetes de valor nominal de 50 euros y 2 billetes de valor nominal de 10 euros, lo que da $C_{2}^1\cdot C_6^1\cdot C_8^2 + C_4^2\cdot C_6^2 = 2\cdot 6\cdot 7\cdot 4 + 3\cdot 5\cdot 6$ de posibilidades. La probabilidad buscada es $\frac{142}{1615}$.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta	2
B	Cálculo de la cantidad de todos los acontencimientos	1
C	Cálculo de la cantidad de los acontencimientos favorables	1
D	Cálculo de la probabilidad	1
E	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Im Geldbeutel (6 Punkte)

Lösung:

Wir haben 20 Geldscheine zur Verfügung, also können 4 Geldscheine auf $C_{20}^4 = \frac{20!}{4!\cdot 16!} = 17\cdot 3\cdot 19\cdot 5$ Möglichkeiten herausholen. Um 120 Euro zu bekommen, kann man 1 Hundert-Euro-Schein und 1 Zehn-Euro-Schein und 2 Fünf-Euro-Scheine oder 2 Fünfzig-Euro-Scheine und 2 Zehn-Euro-Schein herausholen, was $C_{2}^1\cdot C_6^1\cdot C_8^2 + C_4^2\cdot C_6^2 = 2\cdot 6\cdot 7\cdot 4 + 3\cdot 5\cdot 6$ Möglichkeiten gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{142}{1615}$.

Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Richtige Übersetzung	2
B	Berechnung der Zahl von allen Ereignissen	1
C	Berechnung der Zahl von erwünschten Ereignissen	1
D	Berechnung der Wahrscheinlichkeit	1
E	Antwortangabe in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. Nel portafoglio (6 punti)

Soluzione:

Abbiamo alla disposizione 20 banconote, dunque possiamo tirarne 4 con $C_{20}^4 = \frac{20!}{4!\cdot 16!} = 17\cdot 3\cdot 19\cdot 5$ modi. Per ottenere 120 euro possiamo tirare 1 banconota di 100 euro e 1 di 10 euro e 2 di valore nominale di 5 euro o 2 banconote di 50 euro e 2 di 10 euro, cosa farebbe $C_{2,}^1 \cdot C_6^1 \cdot C_8^2 + C_4^2 \cdot C_6^2 = 2\cdot 6\cdot 7\cdot 4 + 3\cdot 5\cdot 6$ di possibilità. La probabilità cercata fa $\frac{142}{1615}$.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione corretta	2
B	Calcolo di tutti gli eventi	1
C	Calcolo del numero degli eventi favorevoli	1
D	Calcolo della probabilista	1
E	Risposta nella lingua straniera	1

Exercice 1. Dans le portefeuille (6 points)

Solution:

Nous avons à notre disposition 20 billets, ainsi pouvons-nous en tirer 4 de $C_{20}^4 = \frac{20!}{4!\cdot 16!} = 17\cdot 3\cdot 19\cdot 5$ manières. Pour obtenir 120 euros on peut tirer un billet de 100 euros, un de 10 euros et 2 billets de 5 euros ou bien 2 billets de 50 euros et 2 de 10 euros, ce qui donne $C_{2,}^1 \cdot C_6^1 \cdot C_8^2 + C_4^2 \cdot C_6^2 = 2\cdot 6\cdot 7\cdot 4 + 3\cdot 5\cdot 6$ de possibilités. La probabilité recherché est donc de $\frac{142}{1615}$.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction correcte	2
B	Calcul du nombre de tous les événements	1
C	Calcul du nombre d'événements favorables	1
D	Calcul de la probabilité	1
E	Formulation de la réponse en langue étrangère	1

Zadanie 2. Nierówność (2 punkty)

Rozwiązanie:

a) Np.: 0, 1, 2, 5, 5
b) Np.: 1, 1, 2, 3, 4

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie prawidłowego przykładu do podpunktu a	1
B	Podanie prawidłowego przykładu do podpunktu b	1

Zadanie 3. Maturalny standard (3 punkty)

Rozwiązanie:

Zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych, to zbiór wyników trzykrotnego rzutu kostką, $\Omega = \{(a,b,c): a\epsilon\{1,2,3,4,5,6\} \wedge b\epsilon\{1,2,3,4,5,6\} \wedge c\epsilon\{1,2,3,4,5,6\}\}$, zdarzeń tych jest $6^3 = 216$. Zdarzenie A polega na otrzymaniu za pierwszym razem liczby oczek większej niż 1, za drugim większej niż 2 i za trzecim większej niż 3. Zgodnie z regułą mnożenia takich zdarzeń jest $5 \cdot 4 \cdot 3$, szukane prawdopodobieństwo wynosi zatem $P(A) = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 6\cdot 6} = \frac{5}{18}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Opisanie zbioru zdarzeń elementarnych	1
B	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń	1
C	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających i prawdopodobieństwa	1

Zadanie 4. Ale, o co chodzi? (3 punkty)

Rozwiązanie:

Mamy $P(B) = \frac{3}{4}, P(B') = \frac{1}{4}, \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$, stąd $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. $\frac{P(A\cap B')}{P(B')} = \frac{1}{2}$, stąd $P(A \cap B') = \frac{1}{8}$. czyli $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B') = \frac{3}{8}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie $P(A \cap B)$	1
B	Obliczenie $P(A \cap B')$	1
C	Obliczenie $P(A)$	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Nieprawdopodobnie spokojni przed maturą"

Exercise 1. We play (6 points)

At some closeout store there are 16 computer games. There are seven games at the price 20 PLN, there are five games at the price 30 PLN and each game in the rest is for 40 PLN. We choose three games in a random way. Calculate the probability that all three games together have the total cost equal to 80 PLN.

Tarea 1. Jugamos (6 puntos)

En un supermercado venden en rebajas 16 juegos de ordinador. Siete de ellos cuestan 20 zl, cinco – 30 zl, los otros son a 40 zl. Escogemos por sorteo tres de ellos. Calcula la probabilidad que todos los tres juntos cuestan 80 zl.

Aufgabe 1. Wir spielen (6 Punkte)

Im Ausverkauf in einem Supermarkt befinden sich 16 Computerspiele. Sieben von ihnen kosten 20 Zloty, fünf – 30 Zloty, und die anderen kosten jeweils 40 Zloty. Wir wählen schicksalhaft drei von ihnen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei insgesamt 80 Zloty kosten.

Esercizio 1. Giochiamo (6 punti)

Durante la svendita al supermercato ci sono 16 giochi di computer. Sette di loro costano 20 zloty, cinque – 30 zloty, gli altri costano 40 zloty ognuno. Tiriamo a sorte tre di loro. Calcola la probabilità che tutte le tre insieme costano 80 zloty.

Exercice 1. Nous jouons (6 points)

Il y a seize jeux pour ordinateur soldés au supermarché. Sept d'entre eux coûtent 20 zlotys, cinq – 30 zlotys, le reste 40 zlotys chacun. Nous en tirons au sort trois. Quelle est la probabilité pour que les trois coûtent 80 zlotys en tout?

Zadanie 2. Ale to już było… (4 punkty)

W pewnej agencji artystycznej jest zarejestrowanych 300 aktorów. W tej grupie jest: 100 wysokich, 90 łysych, 35 niebieskookich. 23 z nich jest wysokich i nie ma włosów, 16 jest wysokich i ma niebieskie oczy, 24 to łysi niebieskoocy, zaś 5 wysokich niebieskookich panów nie ma włosów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że reżyser zgłaszający się do tej agencji znajdzie niskiego niebieskookiego aktora z włosami na głowie? Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrany losowo z grupy aktor nie będzie miał żadnej z wymienionych cech?

Zadanie 3. …I nie wróci więcej! (3 punkty)

Na pewnej wyspie mieszka 300 dzikusów, z których każdy jest matematykiem, filozofem lub ludożercą. Połowa ludożerców zajmuje się filozofią, połowa filozofów matematyką zaś połowa matematyków to ludożercy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że losowo wybrany z tej grupy osobnik jest matematykiem?

Zadanie 4. Windą do nieba (4 punkty)

Do windy na parterze 18-piętrowego domu weszło 4 pasażerów. Każdy z pasażerów może wysiąść na dowolnym piętrze, począwszy od dwunastego, z tym samym prawdopodobieństwem. Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

a) Wszyscy wysiądą na 16 piętrze,
b) Wszyscy wysiądą na tym samym piętrze
c) Wszyscy wysiądą na różnych piętrach.

Zadanie 5. Ja losuję, Ty losujesz (6 punktów)

W pudełku znajdują się kartki z liczbami: $\log_5 \frac{1}{25}$, $\log_{\frac{1}{2}} 16$, $\log_3 1$, $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4}$, $\log_7 \sqrt[3]{49}$.

Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kartki z liczba wymierną?

Zadanie 6. Szczęśliwy los (6 punktów)

Na loterii jest 1000 losów wśród których jeden wygrywa główną nagrodę – 1000zł, trzy wygrywają 500zł, cztery – 200zł zaś pięć 100zł. Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej 1500zł przy zakupie pięciu losów? Czy organizatorowi loterii opłaca się ustalić cenę losu na 3,5zł?

Zadanie 7. Takie niezależne (4 punkty)

Zdarzenia nazywamy niezależnymi, gdy prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń. Czy zdarzenia: w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry suma wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą oraz w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą, są niezależne?

Zadanie 8. Witamy w artylerii (2 punkty)

Zdarzenia nazywamy niezależnymi, gdy prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń jest równe iloczynowi prawdopodobieństw tych zdarzeń. Trzy działa strzelają niezależnie do tego samego celu. Pierwsze trafia w cel z prawdopodobieństwem 0,7, drugie z prawdopodobieństwem 0,8, trzecie z prawdopodobieństwem 0,9. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cel nie zostanie trafiony ani razu? Jakie jest prawdopodobieństwo, że cel zostanie trafiony co najmniej raz?

Zadanie 9. Średnio (3 punkty)

Średnia arytmetyczna liczb x, y, z, t, p wynosi 17. Czy prawdą jest, że:

a) Średnia arytmetyczna liczb x, y, z, t, p, 0 wynosi 17?

b) Średnia arytmetyczna liczb x, y, z, t, p, 5 wynosi 15?

c) Średnia arytmetyczna liczb x, x, x, y, y, y, z, z, z, t, t, t, p, p, p wynosi 51?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 10. Maturalny standard (5 punktów)

Tabela zawiera niektóre wyniki pisemnego sprawdzianu z matematyki w pewnej klasie maturalnej (ocenionego w sześciostopniowej skali ocen)

	Dziewczęta	Chłopcy
Liczba osób	11	14
Średnia ocen	4,0	3,8
Odchylenie standardowe	1,1	1,8

Oblicz średnią ocen z tego sprawdzianu oraz odchylenie standardowe dla całej klasy. Wyniki podaj z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku.

Zadanie 11. Kulki, kuleczki (4 punkty)

W pudełku znajdują się kule białe i czerwone, przy czym stosunek liczby kul białych do czerwonych jest jak 2:3. Losujemy dwukrotnie bez zwracania. Ile kul każdego koloru znajduje się w pudełku, jeżeli prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul tego samego koloru wynosi $\frac{47}{95}$?

Zadanie 12. Ale o co chodzi? (3 punkty)

Przy danych $P(B) = P(B')$, $P(A/B') + P(A/B) = \frac{4}{5}$, oblicz $P(A)$.

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" „Nieprawdopodobnie spokojni przed maturą"

Zadanie1. Gramy (6 punktów)

Na wyprzedaży w supermarkecie znalazło się 16 gier komputerowych. Siedem z nich kosztuje 20zł, pięć – 30 zł, pozostałe są po 40zł. Wybieramy losowo trzy z nich.
Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie trzy razem kosztują 80zł.

Rozwiązanie:

Mamy do dyspozycji 16 gier, więc 3 możemy wyciągnąć na $C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = 14\cdot 5\cdot 8$ sposobów. Aby zapłacić 80zł można wyciągnąć 2 gry po 20 zł i 1 po 40 zł lub 2 po 30 zł i 1 po 20 zł,co daje $C_{7,}^{2}\cdot C_{4}^{1} + C_{5}^{2}\cdot C_{7}^{1} = 3\cdot 7\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot 7$ możliwości.

Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{11}{40}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne przetłumaczenie	2
B	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń	1
C	Obliczenie liczby zdarzeń sprzyjających	1
D	Obliczenie prawdopodobieństwa	1
E	Podanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercise 1. We play (6 points)

Solution:

We have 16 games, so 3 games we can randomize in $C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!\cdot 13!} = 14\cdot 5\cdot 8$ ways. To pay 80 PLN we can choose either two games at 20 PLN price and one game for 40 PLN or two games each for 30 PLN and one game for 20 PLN. Hence, we get $C_{7,}^{2}\cdot C_{4}^{1} + C_{5}^{2}\cdot C_{7}^{1} = 3\cdot 7\cdot 4 + 2\cdot 5\cdot 7$ possibilities. The investigated probability is $\frac{11}{40}$.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Correct translation	2
B	Calculation the number of all possible ways	1
C	Calculation the number of desired outcomes in the investigated event	1
D	Calculation of probability	1
E	Answer in foreign language	1

Tarea 1. Jugamos (6 puntos)

Solución:

Tenemos a nuestra disposición 16 juegos de ordinador, entonces 3 podemos sortear a $C_{16}^{3}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=14\cdot 5\cdot 8$ maneras. Para pagar 80zl se puede sortear 2 juegos a 20zl y 1 a 40zl o 2 a 30zl y 1 a 20zl, lo que da $C_{7,}^{2}\cdot C_{4}^{1}+C_{5}^{2}\cdot C_{7}^{1}=3\cdot 7\cdot 4+2\cdot 5\cdot 7$ de posibilidades. La probabilidad buscada es $\frac{11}{40}$.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta	2
B	Cálculo de la cantidad de todos los acontencimientos	1
C	Cálculo de la cantidad de acontencimientos favorables	1
D	Cálculo de la probabilidad	1
E	Formulación de una respuesta correcta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Wir spielen (6 Punkte)

Lösung:

Wir haben 16 Computerspiele zur Verfügung, also können 3 Geldscheine auf $C_{16}^{3}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=14\cdot 5\cdot 8$ Möglichkeiten herausholen. Um 80 Zloty zu bezahlen, kann man 2 Spiele für 20 Zloty und 1 für 40 Zloty oder 2 für 30 Zloty und 1 für 20 Zloty herausholen, was $C_{7,}^{2}\cdot C_{4}^{1}+C_{5}^{2}\cdot C_{7}^{1}=3\cdot 7\cdot 4+2\cdot 5\cdot 7$ Möglichkeiten gibt. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{11}{40}$.

Punktwertung:

Tätigkeit nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Richtige Übersetzung	2
B	Berechnung der Zahl von allen Ereignissen	1
C	Berechnung der Zahl von erwünschten Ereignissen	1
D	Berechnung der Wahrscheinlichkeit	1
E	Antwortangabe in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. Giochiamo (6 punti)

Soluzione :

Abbiamo alla disposizione 16 giochi, allora possiamo tirarne 3 con $C_{16}^{3}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=14\cdot 5\cdot 8$ possibilità. Per pagare 80 zloty possiamo tirare 2 giochi di 20 zloty e 1 di 40 zloty o 2 di 30 zloty e 1 di 20 zloty, cosa fa $C_{7,}^{2}\cdot C_{4}^{1}+C_{5}^{2}\cdot C_{7}^{1}=3\cdot 7\cdot 4+2\cdot 5\cdot 7$ possibilità. La probabilità cercata fa $\frac{11}{40}$.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione corretta	2
B	Calcolo del numero di tutti gli eventi	1
C	Calcolo del numero degli eventi favorevoli	1
D	Calcolo della probabilista	1
E	Risposta nella lingua straniera	1

Exercice 1. Nous jouons (6 points)

Solution:

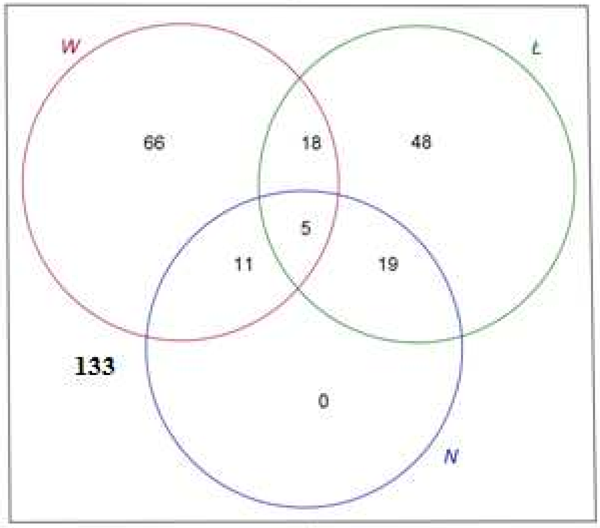
Nous avons à notre disposition 16 jeux, donc nous pouvons en tirer 3 de $C_{16}^{3}=\frac{16!}{3!\cdot 13!}=14\cdot 5\cdot 8$ manières. Pour payer 80 zlotys, on peut tirer 2 jeux pour 20 zlotys et 1 jeu pour 40 zlotys ou bien 2 pour 30 et 1 pour 20 zlotys ce qui donne $C_{7,}^{2}\cdot C_{4}^{1}+C_{5}^{2}\cdot C_{7}^{1}=3\cdot 7\cdot 4+2\cdot 5\cdot 7$ de possibilités. La probabilité recherché est donc de $\frac{11}{40}$.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction correcte	2
B	Calcul du nombre de tous les événements	1
C	Calcul du nombre d'événements favorables	1
D	Calcul de la probabilité	1
E	Formulation de la réponse en langue étrangère	1

Zadanie 2. Ale to już było… (4 punkty)

Rozwiązanie:



Niech A oznacza zdarzenie: reżyser zgłaszający się do tej agencji znajdzie niskiego niebieskookiego aktora z włosami na głowie. Wtedy $P(A) = \frac{0}{300} = 0$.
Niech B oznacza zdarzenie: wybrany losowo z grupy aktor nie będzie miał żadnej z wymienionych cech. Wtedy $P(B) = \frac{133}{300}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Narysowanie diagramu z naniesionymi liczebnościami	2
B	Obliczenie $P(A)$	1
C	Obliczenie $P(B)$	1

Zadanie 3. I nie wróci więcej! (3 punkty)

Rozwiązanie:

Z rozwiązania zadania (patrz: *Wespół w zespół z Matematyka bez granic Szkoły ponadgimnazjalne* Część II, str. 93) wiemy, iż każda z grup liczy 200 osobników, szukane prawdopodobieństwo wynosi zatem: $P(A) = \frac{2}{3}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie liczby osobników w każdej grupie	2
B	Obliczenie $P(A)$	1

Zadanie 4. Windą do nieba (4 punkty)

Rozwiązanie:

Niech Ω oznacza zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych.
Wtedy $\overline{\overline{\Omega}} = 7^4 = 2401$. Mamy: $P(A) = \frac{1}{2401}$; $P(B) = \frac{7}{2401} = \frac{1}{343}$ oraz $P(C) = \frac{120}{343}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń	1
B	Obliczenie $P(A)$	1
C	Obliczenie $P(B)$	1
D	Obliczenie $P(C)$	1

Zadanie 5. Ja losuję, Ty losujesz (6 punktów)

Rozwiązanie:

Mamy: $\log_5 \frac{1}{25} = -2$, $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$; $\log_3 1 = 0$; $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{4} = -4$; $\log_7 \sqrt[3]{49} = \frac{2}{3}$.
Każda z tych liczb jest wymierna więc opisane zdarzenie jest pewne.
Szukane prawdopodobieństwo wynosi 1.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie wartości każdego z logarytmów po 1 punkcie	5
B	Obliczenie prawdopodobieństwa	1

Zadanie 6. Szczęśliwy los (6 punktów)

Rozwiązanie:

Kupić pięć losów możemy na $C_{1000}^{5} = \binom{1000}{5}$ sposobów.

Aby wygrać 1500 zł powinniśmy mieć:
1 los z wygraną 1000 zł i 1 z wygraną 500 zł i 3 puste
lub 1 los z wygraną 1000 zł i 2 z wygraną 200 zł i 1 los z wygraną 100 zł i 1 pusty
lub 1 los z wygraną 1000 zł i 1 z wygraną 200 zł i 3 z wygraną 100 zł
lub 3 losy z wygraną 500 zł i 2 puste,
lub 2 z wygraną 500 zł i 2 z wygraną 200 zł i 1 los z wygraną 100 zł.
Takich możliwości jest:

$$C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_{987}^3 + C_1^1 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{987}^1 + C_1^1 \cdot C_4^1 \cdot C_5^3 + C_3^3 \cdot C_{987}^2 + C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1,$$

czyli: $\bar{A} = \binom{3}{1}\cdot\binom{987}{3} + \binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{987}{1} + \binom{4}{1}\cdot\binom{5}{3} + \binom{987}{2} + \binom{3}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{5}{1} =$

$$= 3\cdot\frac{987!}{3!\cdot 984!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 5\cdot 987 + 4\cdot\frac{5!}{3!\cdot 2!} + \frac{987!}{2!\cdot 985!} + 3\cdot\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot 5 =$$

$$= 985\cdot 493\cdot 987 + 6\cdot 5\cdot 987 + 4\cdot 10 + 493\cdot 987 + 3\cdot 6\cdot 5 =$$

$$= 987\cdot(985\cdot 493 + 6\cdot 5 + 493) + 40 + 90 = 987\cdot[493\cdot(985+1)+30] + 130 =$$

$$= 987\cdot(493\cdot 986 + 30) + 130 = 987\cdot(486098 + 30) + 130 = 987\cdot 486128 + 130 =$$

$$= 479808336 + 130 = 479808466$$

$$\bar{\bar{\Omega}} = C_{1000}^5 = \binom{1000}{5} = \frac{1000!}{5!\cdot 995!} = \frac{995!\cdot 996\cdot 997\cdot 998\cdot 999\cdot 1000}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 995!} =$$

$$= 996\cdot 997\cdot 998\cdot 333\cdot 25 = 498\cdot 997\cdot 499\cdot 333\cdot 100$$

Szukane prawdopodobieństwo to

$$P(\bar{A}) = \frac{479808466}{498\cdot 997\cdot 499\cdot 333\cdot 100} = \frac{239904233}{249\cdot 997\cdot 499\cdot 333\cdot 100} = \frac{239904233}{41251788585\cdot 100}$$

$P(\bar{A})$ =0,000058156080312899237651321828134498

Przy cenie losu: 3,5 zł organizator za losy otrzyma 3500 zł, na wygrane musi wydać 3800 zł, więc ta kwota jest zbyt mała, aby osiągnąć zysk.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń	1
B	Obliczenie liczby zdarzeń: $C_1^1 \cdot C_3^1 \cdot C_{987}^3, C_1^1 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1, C_3^3 \cdot C_{987}^2, C_3^2 \cdot C_4^2 \cdot C_5^1$ - po jednym punkcie	4
C	Odpowiedź na pytanie	1

Zadanie 7. Takie niezależne (4 punkty)

Rozwiązanie:

Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry.
W naszym doświadczeniu $\overline{\overline{\Omega}} = 36$.
Niech A oznacza - w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry suma wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą, a B oznacza - w dwukrotnym rzucie sześcienną kostką do gry iloczyn wyrzuconych oczek jest liczbą pierwszą. Pierwszemu ze zdarzeń sprzyjają: $\{(1,1);(1,2);(1,4);(1,6);(2,1);(2,3);(2,5);(3,2);(3,4);(4,1);(4,3);(5,2);(5,6);(6,1);(6,5)\}$
więc $\overline{\overline{A}} = 15$.
$B = \{(1,2);(1,3);(1,5);(2,1);(3,1);(5,1)\}$, czyli $\overline{\overline{B}} = 6$.
Część wspólna $A \cap B = \{(1,2);(2,1)\}$. Mamy: $P(A) \cdot P(B) = \frac{15}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{5}{72} \neq \frac{2}{36} = P(A \cap B)$,
zdarzenia nie są niezależne.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie $P(A)$	1
B	Obliczenie $P(B)$	1
C	Obliczenie $P(A \cap B)$	1
D	Udzielenie odpowiedzi na pytanie	1

Zadanie 8. Witamy w artylerii (2 punkty)

Rozwiązanie:

Skoro działa strzelają niezależnie, to prawdopodobieństwo, że cel nie zostanie trafiony wynosi $P(A) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,006$.
Zdarzenie: cel zostanie trafiony co najmniej raz jest zdarzeniem przeciwnym do A więc jego prawdopodobieństwo wynosi $1 - P(A) = 0,994$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie $P(A)$	1
B	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego	1

Zadanie 9. Średnio (3 punkty)

Rozwiązanie:

Niech $x+y+z+t+p=a$. Z treści zadania $\frac{a}{5}=17$, czyli $a=85$.

Wtedy średnia dla liczb x, y, z, t, p, 0 jest równa $\frac{a+0}{6}=\frac{85}{6}$,

średnia dla liczb x, y, z, t, p, 5 jest równa $\frac{a+5}{6}=15$,

średnia dla liczb x, x, x, y, y, y, z, z, z, t, t, t, p, p, p jest równa $\frac{3a}{3\cdot 5}=17$.

Pierwsze i trzecie zdanie jest fałszywe, drugie jest prawdziwe.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Odpowiedź na pytanie z podpunktu a z uzasadnieniem	1
B	Odpowiedź na pytanie z podpunktu b z uzasadnieniem	1
C	Odpowiedź na pytanie z podpunktu c z uzasadnieniem	1

Zadanie 10. Maturalny standard (5 punktów)

Rozwiązanie:

Przed rozwiązaniem tego zadania można rozdać w klasie „Wybrane wzory matematyczne", te same, którymi uczniowie będą posługiwali się na egzaminie maturalnym.

Średnia ocen dziewcząt to $\bar{x}=\frac{x_1+\dots+x_{11}}{11}=4$, średnia ocen chłopców to $\bar{y}=\frac{y_1+\dots y_{14}}{14}=3{,}8$.

Średnia klasy to $\bar{k}=\frac{x_1+\dots+x_{11}+y_1+\dots+y_{14}}{25}=\frac{44+53{,}2}{25}=3{,}888\approx 3{,}89$.

Wariancja ocen dziewcząt to $\sigma_x^2=1{,}21=\frac{x_1^2+\dots+x_{11}^2}{11}-\bar{x}^2$

Wariancja ocen chłopców to $\sigma_y^2=3{,}24=\frac{y_1^2+\dots+y_{14}^2}{14}-\bar{y}^2$.

Czyli wariancja ocen całej klasy to $\sigma_k^2=\frac{x_1^2+\dots+x_{11}^2+y_1^2+\dots y_{14}^2}{11+14}-\bar{k}^2$.

Mamy $\sigma_k^2=\frac{189{,}31+247{,}5}{25}-15{,}116544\approx 2{,}36$. Odchylenie standardowe $\sigma\approx 1{,}54$

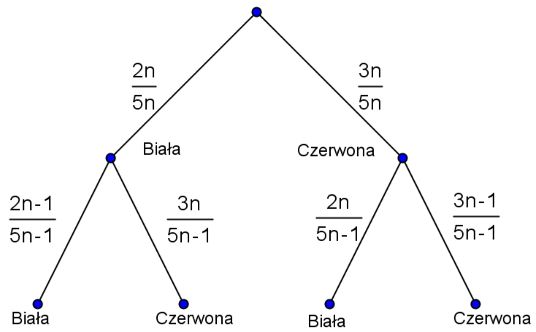
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie średniej ocen klasy	1
B	Obliczenie wariancji ocen klasy	3
C	Obliczenie odchylenia standardowego	1

Zadanie 11. Kulki, kuleczki (4 punkty)

Rozwiązanie:

Powyższe zadanie ilustruje drzewko stochastyczne, $n \in N_+$



Z treści zadania mamy: $\frac{2n}{5n} \cdot \frac{2n-1}{5n-1} + \frac{3n}{5n} \cdot \frac{3n-1}{5n-1} = \frac{47}{95}$.

Jedynym rozwiązaniem spełniającym warunek $n \in N_+$ jest $n = 4$. W pudełku jest 8 kul białych i 12 kul czerwonych.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Narysowanie drzewka stochastycznego	2
B	Ułożenie równania wynikającego z treści zadania	1
C	Obliczenie liczby kul białych i czerwonych	1

Zadanie 12. Ale o co chodzi? (3 punkty)

Rozwiązanie:

Korzystamy z zależności $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$.

Mamy $P(B) = P(B') = \frac{1}{2}$, $2 \cdot P(A \cap B) + 2 \cdot P(A \cap B') = \frac{4}{5}$, stąd $P(A) = \frac{2}{5}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie $P(B) = P(B')$	1
B	Obliczenie $2 \cdot P(A \cap B) + 2 \cdot P(A \cap B')$	1
C	Wykorzystanie zależności: $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$, $(A \cap B) \cap (A \cap B') = \emptyset$ i obliczenie $P(A)$	1

Pakiet M-3.4 „Z pustego w próżne?”

I. Treści merytoryczne:

- równoległość i prostopadłość w przestrzeni, wzajemne położenie prostych i płaszczyzn,
- wielościany, wielościany foremne, bryły obrotowe, siatki wielościanów i brył obrotowych,
- kąty między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości,
- związki miarowe w wielościanach i bryłach obrotowych również z zastosowaniem trygonometrii.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności rysowania rzutów brył,
- kształcenie umiejętności wskazywania i obliczania kątów między ścianami wielościanu, między ścianami i odcinkami oraz między odcinkami takimi jak krawędzie, przekątne, wysokości,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności wyznaczania związków miarowych w wielościanach i bryłach obrotowych z zastosowaniem trygonometrii,
- kształcenie i rozwijanie umiejętności w zakresie interpretacji tekstu matematycznego i formułowania uzyskanych wyników,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności obliczania pól powierzchni i objętości brył.

III. Metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup (zespoły zadaniowe w innym składzie niż na poprzednich spotkaniach).
4. Praca w grupach: każdy zespół wymyśla dla siebie nazwę (związaną z matematyką, działaniami społecznymi, historycznymi lub współczesnymi postaciami świata odkryć, dokonań naukowych) oraz logo zespołu.
5. Przedstawienie nazw i logo przez poszczególne grupy.
6. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
7. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
8. Zebranie kart z rozwiązaniami.

9. Podsumowanie zajęć.
10. Zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających":

[1] Dyda B., Romanowicz Z., *Zadania dla przyszłych olimpijczyków*, Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław 2008 (zadanie 79, strona 53 – Zadanie 1)
[2] Karpiński L., Lech J., *Matematyka w szkole średniej. Geometria. Zbiór zadań dla klasy III i IV,* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1997 (Zadanie 3 – Strona 33, zadanie 85)
[3] MBG (Zadanie 2)
http://www.zadania.info/d555/7754559 (Zadanie 4)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem":

[1] Karpiński L., Lech J., *Matematyka w szkole średniej. Geometria. Zbiór zadań dla klasy III i IV,* Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1997 (Zadanie 5 – Strona 32, zadanie 84; Zadanie 7 – Strona 43, zadanie 40; Zadanie 9 – Strona 35, zadanie 99)
[2] Etap finałowy konkursu „Matematyka bez granic" – 2009 (Zadanie 4)
[3] MBG Etap wstępny – Edycja 2008 (Zadanie 12)
[4] MBG (Zadanie 1; Zadanie 3; Zadanie 10; Zadanie 11)
http://www.zadania.info/d555/7754559 - (Zadanie 2, Zadanie 6)

Spotkanie 3. „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadań.
3. Nauczyciel ocenia pracę zespołów zadaniowych (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

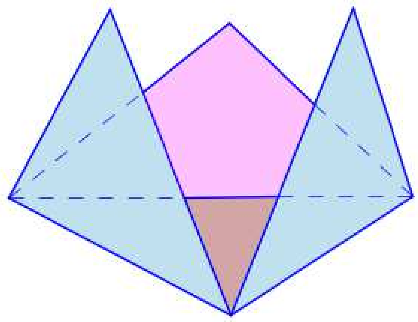
Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem" będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Rysunki do Pakietu M-3.4 wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programów: GEONExT, CaRMetal, Geogebra

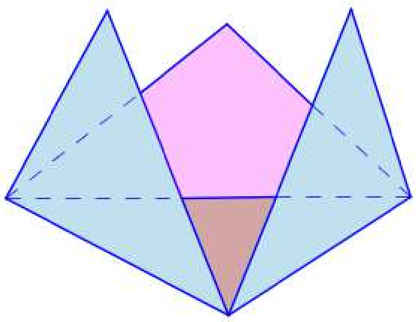
Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Z pustego w próżne?”

Exercise 1. Cut box (6 points)

Tetrahedral card box is cut with a knife along three edges coming out from the same vertex. We unbend the paper and we put the obtained planar figure on the table. Can this figure be a square? If, yes - make a model of the box and glue it to the card with answers.



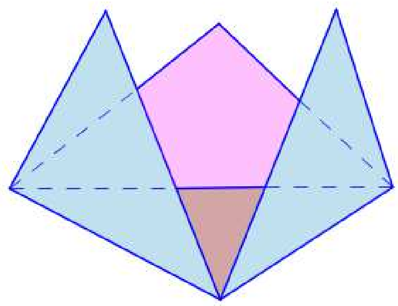
Tarea 1. Caja cortada (6 puntos)



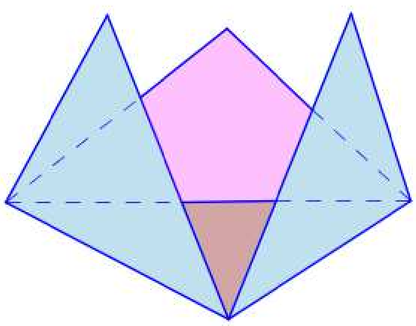
Cortamos una caja de cartón de cuatro paredes con el cortaplumas a lo largo de tres aristas saliendo del mismo cúspide. Desplegamos el cartón y colocamos sobre la mesa una figura plana obtenida de esta manera. ¿Puede esta figura ser un cuadrado? Si es así, realiza un módelo de caja y pégalo a la hoja de respuesta.

Aufgabe 1. Aufgeschnittene Pappschachtel (6 Punkte)

Eine vierseitige Pappschachtel schneiden wir mit einem Messerchen die drei Kanten längs, die aus demselben Scheitel ausgehen. Wir breiten den Karton aus und legen die erhaltene Figur der Ebene auf den Tisch. Kann diese Figur ein Quadrat sein? Wenn ja, dann mach ein Modell der Schachtel und klebe es an die Antwortkarte an.

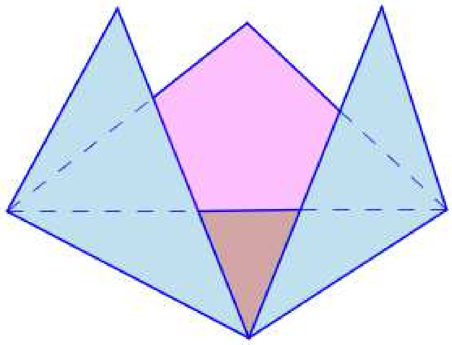


Esercizio 1. La scatola tagliata (6 punti)



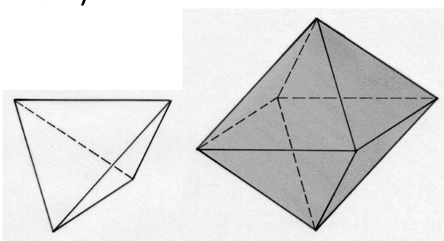
Tagliamo la scatola di cartone di quattro faccette con un coltello lungo tre bordi i quali escono dello stesso vertice. Distendiamo il cartone e mettiamo la figura ottenuta sulla tavola. Questa figura può essere un quadrato? Se si, fai ed incolla sul foglio per le risposte il modello della scatola.

Exercice 1. La boîte découpée (6 points)

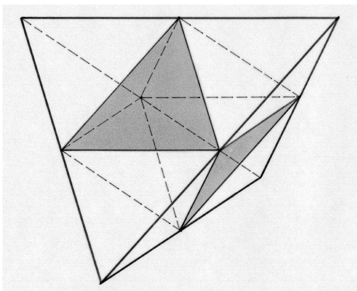


Nous découpons avec un couteau une boîte tétraèdrique en carton le long des trois extrémités sortant du même sommet. Nous applatissons le carton et mettons sur la table la figure plane obtenue.Cette figure peut-elle être un carré? Si oui, fais son patron et colle-le sur la feuille-réponse.

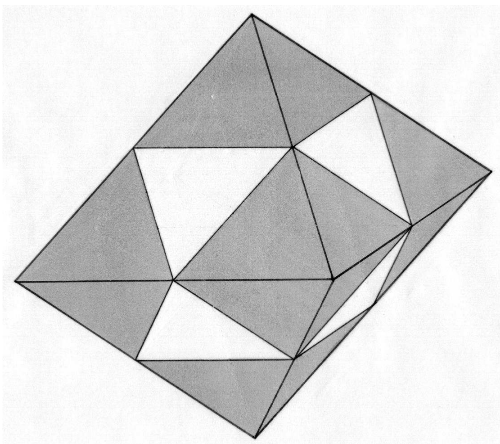
Zadanie 2 Wypełnienie (6 punktów)



Figury powyżej przedstawiają czworościan T_1 i ośmiościan O_1. Wszystkie ich ściany są trójkątami równobocznymi o boku 1.



Powyżej przedstawiono wypełnienie czworościanu T_2 o boku 2 czworościanami T_1 i jednym ośmiościanem O_1.



Na tym rysunku przedstawiono wypełnienie ośmiościanu O_2 o boku 2, czworościanami T_1 i ośmiościanami O_1. Kolorem szarym przedstawiono widoczne ściany ośmiościanów. Ile czworościanów T_1 i ośmiościanów O_1 potrzeba aby wypełnić czworościan T_4 o boku 4? A ile, by wypełnić ośmiościan O_4 o boku 4? Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 3. Przekątna i ściany (6 punktów)

Przekątna prostopadłościanu tworzy ze ścianami o wspólnym wierzchołku kąty α, β, γ. Wykaż, że

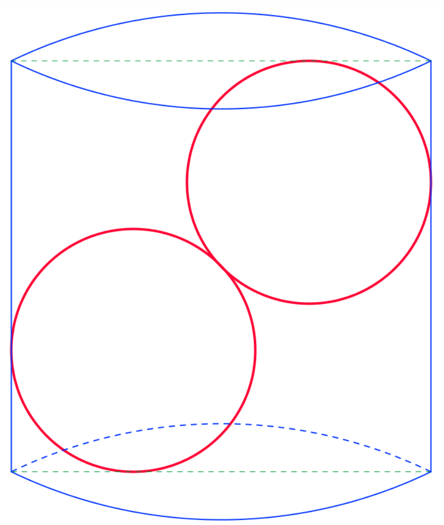
$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$$

oraz

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2.$$

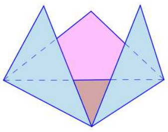
Zadanie 4. One dwie, a on jeden… (6 punktów)

W pojemniku o kształcie walca o promieniu podstawy $R = 8$ umieszczono dwie kule o promieniu $r = 5$, w ten sposób, że są one do siebie styczne i każda z nich dotyka powierzchni bocznej walca, jak na rysunku. Jaka co najmniej musi być wysokość pojemnika, aby kule całkowicie się w nim mieściły. Oblicz objętość walca o możliwie najmniejszej wysokości.



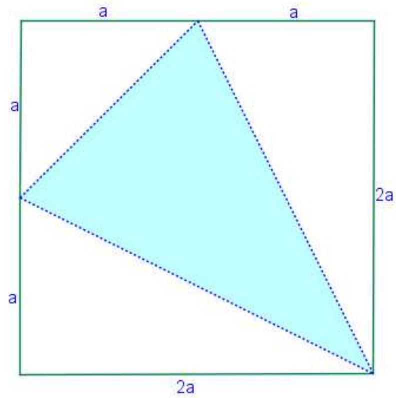
Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Z pustego w próżne?"

Zadanie 1. Rozcięte pudełko (6 punktów)



Czworościenne tekturowe pudełko rozcinamy nożykiem wzdłuż trzech krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka. Rozprostowujemy karton i otrzymaną figurę płaską kładziemy na stole.
Czy ta figura może być kwadratem?
Jeśli tak, to wykonaj i przyklej do karty odpowiedzi model pudełka.

Rozwiązanie:



Tak jest to możliwe – zginając kartkę wzdłuż linii przerywanych (patrz rysunek powyżej), możemy otrzymać czworościan.

Odpowiedź:

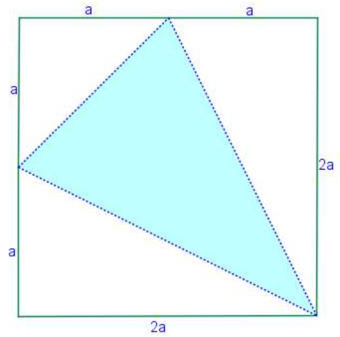
Tak figura może być kwadratem.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Znalezienie rozwiązania – metody złożenia kwadratu	2
C	Wykonanie modelu pudełka	1
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	2

Exercise1. Cut box (6 points)

Solution:



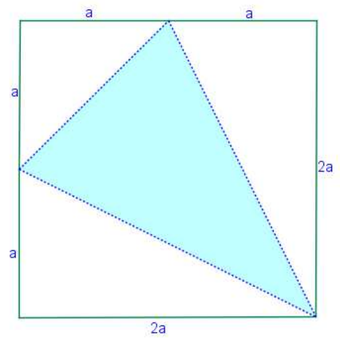
Yes, it is possible – we can get a tetrahedron bending the card along the dashed lines (see the picture above). Answer: The figure can be a square.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	1
B	The right solution - methods of building a square	2
C	Making a model of the box	1
D	Answer in a foreign language	2

Aufgabe 1. Aufgeschnittene Pappschachtel (6 Punkte)

Lösung:



Ja, das ist möglich - wenn man eine Zettel die unterbrochenen Linien längs (siehe die Zeichnung oben) biegt, kann man ein Vierflach bekommen.
Antwort: Ja, die Figur kann ein Quadrat sein.

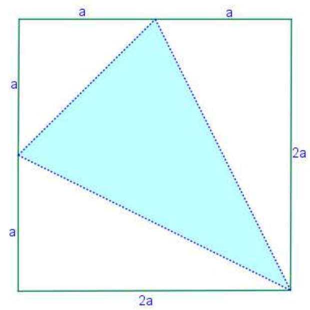
Punktwertung:

Tätigkeit snummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	1
B	Das Finden der Lösung - Methoden des Quadratzusammensetzens	2
C	Das Anfertigung eines Modells der Schachtel	1

D	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	2

Esercizio 1. La scatola tagliata (6 punti)

Soluzione:



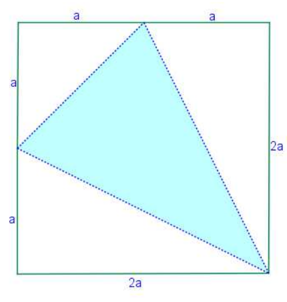
Si, questo è possibile – piegando il foglio lungo le linee trattegiate (guardare il disegno qui sopra), possiamo ottenere il tetraedro.
Risposta: Questa figura può essere un quadrato.

Punteggio:

Numero dell'attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero punti
A	Traduzione nella lingua polacca	1
B	Ritrovo della soluzione – metodo della piegatura del quadrato	2
C	Realizzazione del modello della scatola	1
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	2

Exercice 1. La boîte découpée (6 points)

Solution:



Oui, c'est possible - en pliant la feuille le long des lignes discontinues (voir le dessin ci-dessus), nous pouvons obtenir un tétraèdre.
Réponse: Oui, cette figure peut être un carré.

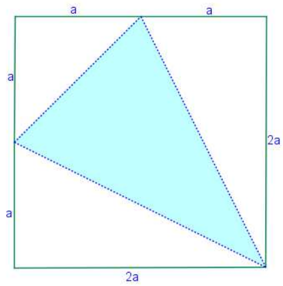
Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Trouver la solution – le méthode du pliage du carré	2
C	Faire le modèle de la boîte	1

D	Formuler la réponse en langue étrangère	2

Tarea 1. Caja cortada (6 puntos)

Solución:



Si, eso es posible – plegando la hoja a lo largo de las líneas discontinuas (mira el dibujo más arriba), podemos obtener el tetraedro. Respuesta: Esta figura puede ser un cuadrado.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta en polaco	1
B	Descubrimiento de la solución – métode de plegar el cuadrado	2
C	Realización del módelo de la caja	1
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	2

Zadanie 2. Wypełnienie (6 punktów)

Rozwiązanie:

Na rysunkach można zaobserwować, że:

$$T_2 = O_1 + 4T_1$$
$$O_2 = 6O_1 + 8T_1$$

Podwajając otrzymujemy:

$$T_4 = O_2 + 4T_2 \Rightarrow T_4 = 6O_1 + 8T_1 + 4(O_1 + 4T_1)$$
$$O_4 = 6O_2 + 8T_2 \Rightarrow O_4 = 6(6O_1 + 8T_1) + 8(O_1 + 4T_1)$$

Stąd

$$T_4 = 10 \cdot O_1 + 24 \cdot T_1$$
$$O_4 = 44 \cdot O_1 + 80 \cdot T_1$$

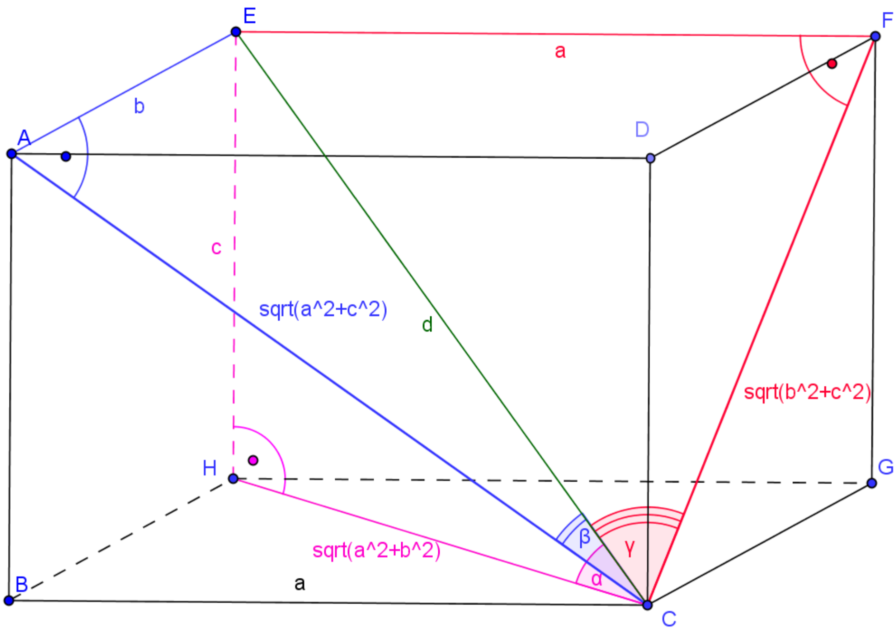
(To jest jedyne rozwiązanie. Nie punktuje się dowodu na istnienie tylko jednego rozwiązania)

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie T_2 oraz O_2	2
B	Wyznaczenie T_4 oraz O_4	4

Zadanie 3. Przekątna i ściany (6 punktów)

Rozwiązanie:



Zgodnie z oznaczeniami na rysunku (sqrt. – rzecz. mat „square root” pierwiastek kwadratowy) mamy:

1.

$$\sin\alpha = \frac{c}{d} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{c^2}{d^2}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{d} \Rightarrow \sin^2\beta = \frac{b^2}{d^2}$$

$$\sin\gamma = \frac{a}{d} \Rightarrow \sin^2\gamma = \frac{a^2}{d^2}$$

Zatem

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{c^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{a^2}{d^2} = \frac{c^2+b^2+a^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$$

2.

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{d}\ ;\quad \cos\beta = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{d}\ ;\quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{d}$$

Stąd

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2}{d^2} = \frac{2\left(a^2+b^2+c^2\right)}{d^2} = \frac{2d^2}{d^2} = 2$$

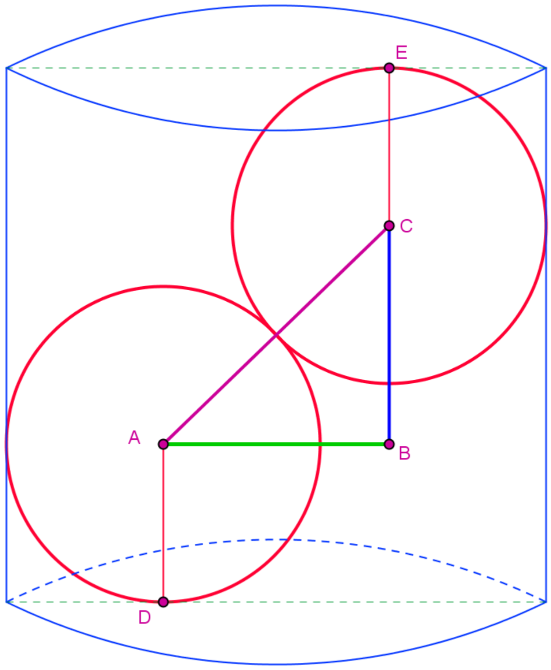
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie przejrzystego rysunku	2
B	Uzasadnienie wzoru na sumę kwadratów sinusów kątów	2
C	Uzasadnienie wzoru na sumę kwadratów cosinusów kątów	2

Zadanie 4. One dwie, a on jeden… (6 punktów)

Rozwiązanie:

Opisaną sytuację przedstawiamy na rysunku



W pojemniku o najmniejszej wysokości kule są do siebie styczne oraz są styczne do podstaw pojemnika.

Wysokość pojemnika możemy podzielić na trzy odcinki AD, BC i CE. Pierwszy i trzeci mają długość $r = 5$, a długość drugiego możemy wyliczyć z trójkąta prostokątnego ABC.

Zauważmy, że długość odcinka AD to średnica podstawy walca minus dwa promienie wpisanych kul. Zatem

$$AB = 2R - 2r = 16 - 10 = 6$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Stąd wysokość walca wynosi:

$$H = AD + BC + CE = 5 + 8 + 5 = 18.$$

Liczymy objętość:

$$V = \pi R^2 H = \pi \cdot 64 \cdot 18 = 1152\pi.$$

Odpowiedź:

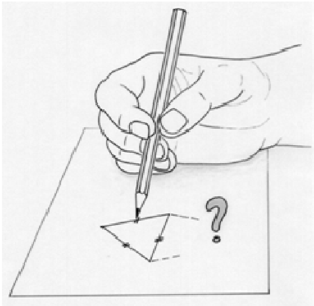
Wysokość: 18, objętość: 1152π.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przedstawienie opisanej sytuacji na rysunku	2
B	Wyznaczenie minimalnej wysokości walca	2
C	Wyznaczenie objętości walca	1
D	Odpowiedź	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” - „Z pustego w próżne”

Exercise 1. Not - regular (4 points)



Adam wants to built a tetrahedral with two walls forming equilateral triangles of side length 5 cm and two walls being the right-angled triangles.Draw the planar net of this tetrahedral on the answer card in 1:1 scale. Pay attention to work’s esthetics.

Tarea 1. Dis-forme (4 puntos)

Adán quiere construir un tetraedro cuyas paredes son dos triángulos equiláteros con lado de longitud de 5cm y dos triángulos rectangulares. Sobre la hoja de respuesta dibuja la red de este tetraedro a la escala de 1:1. Fija tu atención en la estética del trabajo.

Aufgabe 1. Un - regelmäßig (4 Punkte)

Adam will ein Vierflach bauen, dessen Flächen zwei gleichseitige Dreiecke mit Seitenlänge von 5cm und zwei rechtwinklige Dreiecke sind. Zeichne auf der Antwortkarte einen Netz von diesem Vierflach im Maßstab 1:1. Sei aufmerksam auf die Ästhetik der Arbeit.

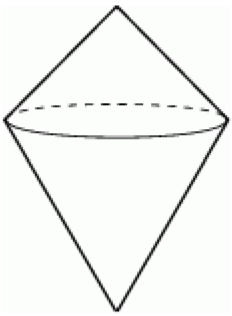
Esercizio 1. Ir - regolare (4 punti)

Adam vuole costruire un tetraedro di cui le faccette sono due triangoli equilateri con il lato lungo di 5cm e due triangoli rettangoli. Disegna sul foglio per le risposte il reticolato adatto di questo tetraedro nella scala 1:1. Stai attento all’estetica del lavoro.

Exercice 1. Ir-régulier (4 points)

Adam veut construire un tétraèdre dont les faces sont deux triangles équilatéraux de 5cm de côté et deux triangles rectangle. Dessine le patron de ce tétraèdre sur la feuille-réponse à l’échelle 1:1. Fais attention au côté esthétique de ton travail.

Zadanie 2. Boja (5 punktów)



Boja ma kształt dwóch stożków połączonych podstawami.
Kąty rozwarcia tych stożków są równe 60° i 90°.
Odległość ich wierzchołków jest równa $\sqrt{3}+1$.
Oblicz pole powierzchni tej boi.

Zadanie 3. Znajdź złodzieja (2 punkty)

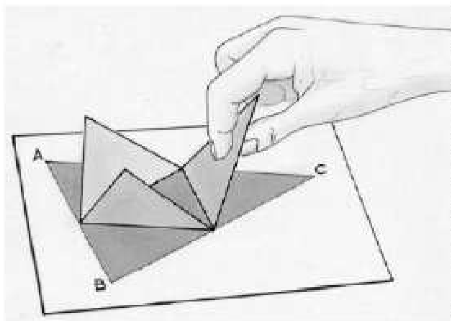
W sali balowej zrobiło się na chwilę ciemno. Gdy zapaliło się światło, okazało się, że jednej z pań ukradziono drogocenny naszyjnik. W wyniku dochodzenia wyłoniono czterech podejrzanych. Oto co powiedzieli prowadzącemu śledztwo komisarzowi:

W chwili gdy zrobiło się ciemno, akurat stałem na drugim końcu sali i rozmawiałem z mecenasem Olszewskim o moich rodzinnych problemach. Mecenas może to potwierdzić - zeznał pan A.Przyznaję, że kiedy to się stało, akurat tańczyłem z poszkodowaną. Ale to naprawdę nie ja ukradłem ten naszyjnik! - zapierał się pan B. Kiedy zgasło światło, byłem zajęty podkładaniem papierka pod jedną z trzech nóg stolika, przy którym siedziałem, bo strasznie się kiwał. Państwo Wróblewscy, którzy ze mną siedzieli, mogą to potwierdzić. - ze spokojem odparł pan C.

W tym momencie nie pamiętam, co wtedy robiłem. Prawdopodobnie rozmawiałem z takim grubym jegomościem w zielonej marynarce. Nie znam jego nazwiska, ale myślę, że gdyby go odszukać, potwierdziłby moje alibi - tłumaczył pan D.

Pytanie: Komisarz już wie, kto z tej czwórki jest najbardziej podejrzany. A ty?

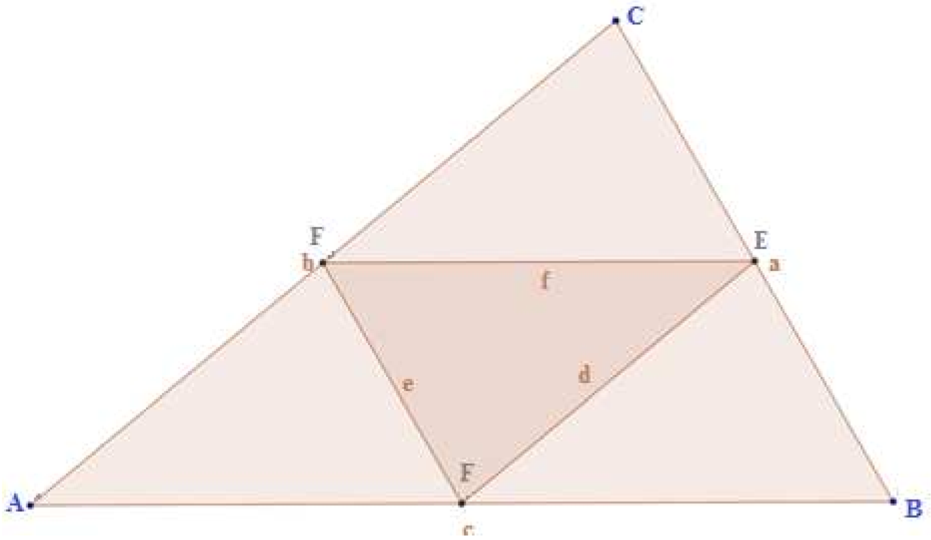
Zadanie 4. Czworościan równościenny (4 punkty)



Trójkąt ABC, jeśli tylko ma trzy kąty ostre, pozwala łatwo na skonstruowanie czworościanu.

Wystarczy wytyczyć proste, łączące środki boków trójkąta, następnie zagiąć trójkąty wzdłuż tych prostych tak, aby połączyć ich wierzchołki w punkcie S.

Otrzymamy czworościan zwany jest równościennym, ponieważ jego cztery ściany dają się na siebie nałożyć. Interesuje nas spodek H wysokości czworościanu, wychodzącej zpunktu S. Kiedy podniesiemy ściany boczne, zauważymy, że punkt ten musi koniecznie znaleźć się wewnątrz trójkąta wyjściowego ABC.



Czym jest punkt H dla trójkąta wyjściowego ABC?

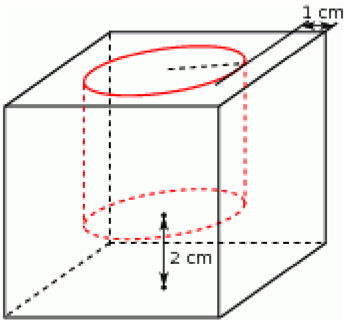
Zadanie 5. Trzy krawędzie i przekątna (4 punkty)

Przekątna prostopadłościanu tworzy z krawędziami wychodzącymi z tego samego wierzchołka kąty α, β, γ. Wykaż, że

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Zadanie 6. A gdzie kwiaty? (4 punkty)

Wazon ma kształt sześcianu, w którym wydrążony jest walec w taki sposób, że styczne górnej podstawy walca, równoległe do odpowiednich krawędzi górnej podstawy sześcianu, są odległe o 1 cm od tych krawędzi; natomiast odległość między dolną podstawą walca, a dolną podstawą sześcianu (grubość dna) jest równa 2 cm.



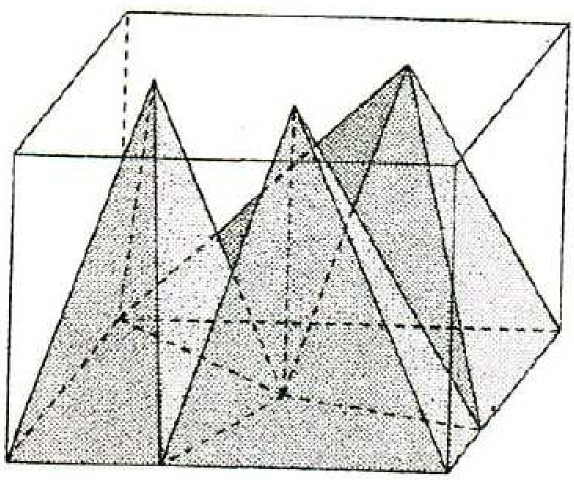
Wiedząc, że stosunek objętości walca do objętości sześcianu jest równy $\frac{27\pi}{256}$, oblicz:

długość krawędzi sześcianu;

objętość walca;

do jakiej wysokości wazonu (licząc od dolnej podstawy walca) będzie sięgać poziom wody, jeśli wlejemy do wazonu 125ml wody. Wynik podaj z dokładnością do 1mm.

Zadanie 7. Nieważne, ile ich jest! (2 punkty)



Podstawy narysowanych ostrosłupów wypełniają jedną z podstaw prostopadłościanu, a ich wierzchołki leżą na przeciwległej podstawie. Jaką część prostopadłościanu zajmują te ostrosłupy?

Zadanie 8. Przyjdzie walec i … (3 punkty)

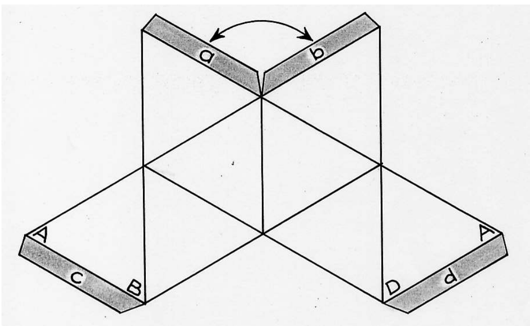
Prostokąt $ABCD$ obracając się wokół boku AB, zakreślił walec w_1. Ten sam prostokąt obracając się wokół boku AD, zakreślił walec w_1. Otrzymane walce mają równe pola powierzchni całkowitych. Wykaż, że prostokąt $ABCD$ jest kwadratem.

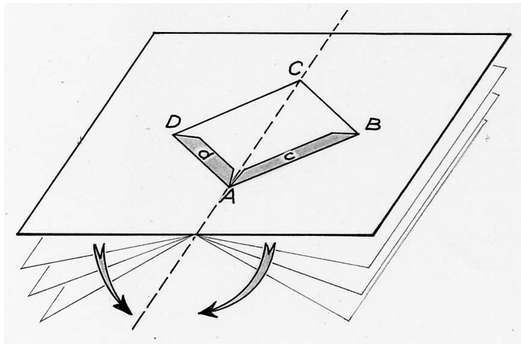
Zadanie 9. Ten numer nie przejdzie?? (5 punktów)

Oblicz odległość między przeciwległymi krawędziami czworościanu, którego krawędź ma długość a. Czy przez drzwi o szerokości 80cm można przenieść model czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 1m

Zadanie 10. Na chybcika (6 punktów)

Oto oryginalna metoda, pozwalająca zbudować bryłę:
Narysuj poniższą siatkę w jej wymiarach rzeczywistych

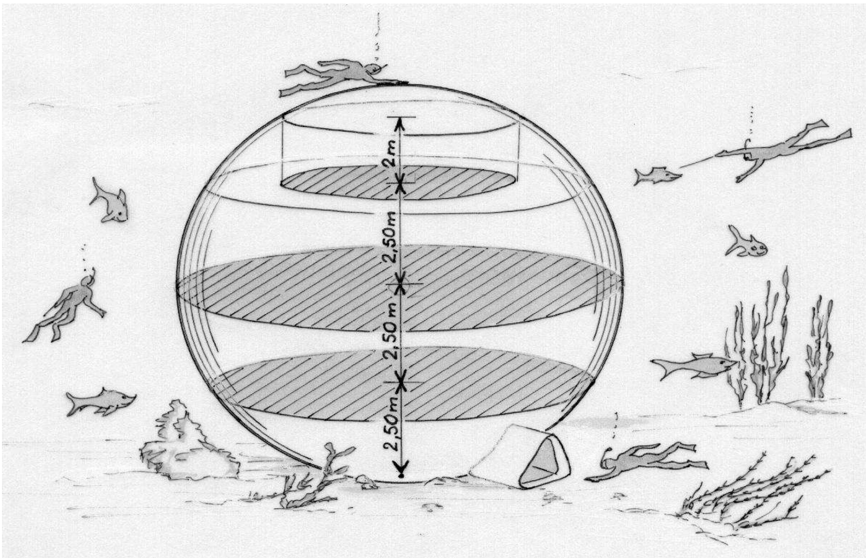




Składa się ona z 8 trójkątów równobocznych o krawędzi 5cm oraz z 4 zakładek (potrzebnych do sklejenia) oznaczonych literami a, b, c i d.
Wytnij siatkę, pozaginaj wzdłuż narysowanych linii, a następnie sklej ze sobą zakładki a i b. Na karcie odpowiedzi narysuj kwadrat ABCD o boku 5cm. Przyłóż jedną ze zgiętych krawędzi siatki do przekątnej kwadratu AC. Przyklej zakładki c i d siatki, do karty odpowiedzi w taki sposób, aby krawędzie AB i AD siatki pokryły się z bokami kwadratu AB i AD. Zegnij i złóż kartkę wzdłuż linii AC tak, aby siatka pozostała na zewnątrz. Po zgięciu kartki bardzo szybko z siatki powstaje bryła. Aby schować bryłę należy złożyć kartkę w druga stronę.
Wykorzystując tę metodę zbuduj bryłę, a następnie przedstaw sposób obliczania jej objętości.
Wynik podaj z dokładnością do cm^3.

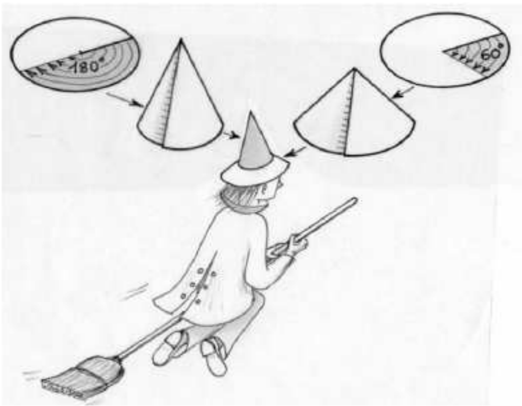
Zadanie 11. Wielki błękit (6 punktów)

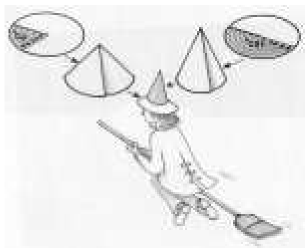
Pewien architekt projektuje mieszkania w kształcie sfer, przeznaczone do umieszczenia ich na dnie morza. Sfery te mają promień długości 5m i zawierają trzy poziome piętra. Pierwsze znajduje się na wysokości 2,5m, drugie 5m, a trzecie 7,5m licząc od dna sfery.
Na trzecim piętrze za powierzchnię użytkową uważa się obszar, na którym wysokość przekracza 2 metry.



Obliczyć całkowitą powierzchnię użytkową tego mieszkania.

Zadanie 12. Czary mary (5 punktów)

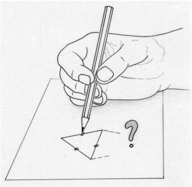




Harry robi czarodziejski kapelusz, nakładając dwa kartonowe stożki w taki sposób, żeby ich osie pokryły się. Pierwszy stożek powstał z krążka o promieniu 18 cm przez nacięcie go wzdłuż promienia i nasunięciejednej części kartonu na drugą, pod kątem 60 stopni.
Do wykonania drugiego stożka, Harry użył krążka o takim samym promieniu, lecz ze 180^0 nasunięciem. Obliczyć wysokość każdego stożka, następnie obliczyć całkowitą wysokość kapelusza z dokładnością do milimetra, ilustrując obliczenia rysunkiem.

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” „Z pustego w próżne?”

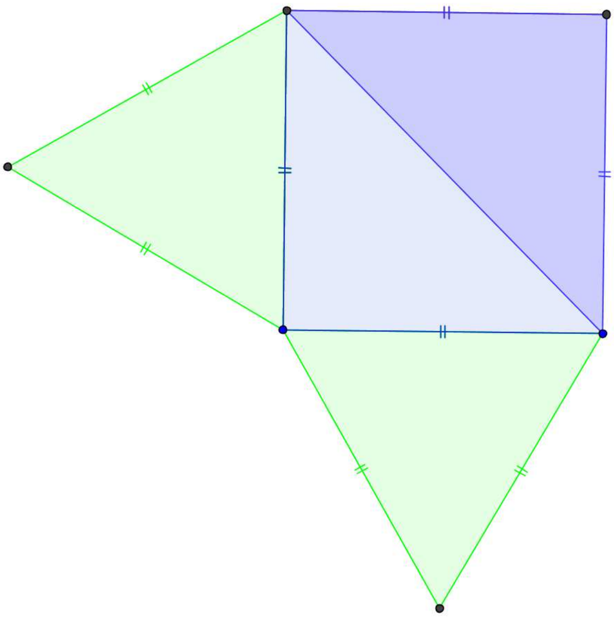
Zadanie 1. Nie - foremny (4 punkty)



Adam chce zbudować czworościan, którego ścianami są dwa trójkąty równoboczne o boku długości 5 cm i dwa trójkąty prostokątne. Na karcie odpowiedzi narysuj siatkę tego czworościanu w skali 1:1.
Zwróć uwagę na estetykę pracy.

Rozwiązanie:

Siatka czworościanu jest pokazana na rysunku poniżej



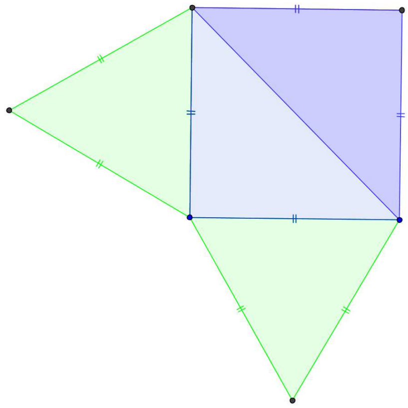
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie treści zadania na język polski	2
B	Narysowanie siatki czworościanu	1
C	Tłumaczenie rozwiązania na język obcy	1

Exercise 1. Not - regular (4 points)

Solution:

Tetrahedral net is shown on the picture below



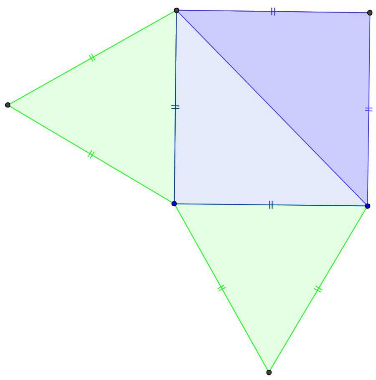
Points:

Activity	Stages of Solution	Points
A	Translation of exercise text in Polish	2
B	Drawing the tetrahedral net	1
C	A translation into a foreign language	1

Tarea 1. Dis-forme (4 puntos)

Solución:

El dibujo más abajo muestra la red del tetraedro



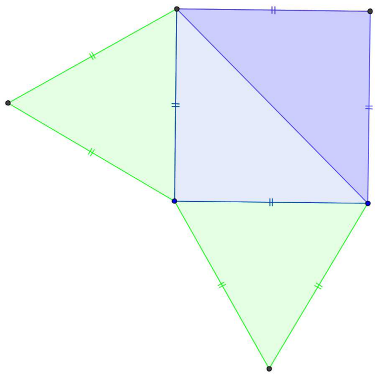
Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta del contenido de la tarea en polaco	2
B	Realización del dibujo de la red del tetraedro	1
C	Una traducción a un idioma extranjero	1

Aufgabe 1. Un - regelmäßig (4 Punkte)

Lösung:

Das Netz des Vierflachs wurde auf der Zeichnung unten gezeigt.



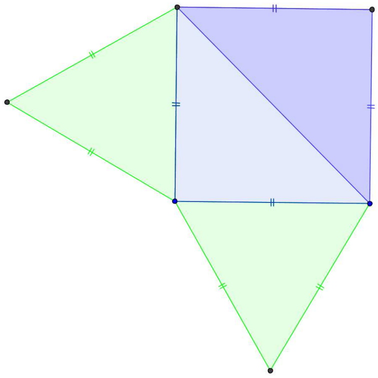
Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung des Aufgabeinhalts ins Polnisch	2
B	Das Aufzeichnen des Netzes von dem Vierflach	1
C	Eine Übersetzung in eine Fremdsprache	1

Esercizio 1. Ir - regolare (4 punti)

Soluzione:

Il reticolato del tetraedro è dimostrato sul disegno qui sotto.



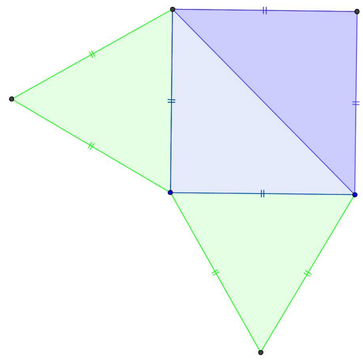
Punteggio :

Numero dell’attività	Tappe della soluzione dell’esercizio	Numero di punti
A	Traduzione del contenuto nella lingua polacca	2
B	Disegno del reticolato di tetraedro	1
C	Una traduzione in una lingua straniera	1

Exercice 1. Ir-régulier (4 points)

Solution:

Le patron du tétraèdre est présenté sur le dessin ci-dessous.



Pointage:

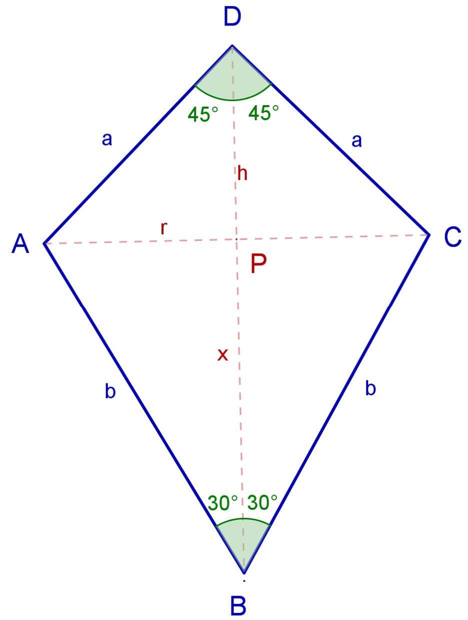
Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduire le contenu de l'exercice en langue polonaise	2
B	Dessiner le patron du tétraèdre	1
C	Formuler la réponse en langue étrangère	1

Zadanie 2. Boja (5 punktów)

Rozwiązanie:

Boja ma kształt dwóch stożków połączonych podstawami

Przekrój osiowy boi przedstawia rysunek



Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

$|\overline{AD}| = |\overline{DC}| = a$

$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = b$

$|\overline{AP}| = |\overline{PC}| = r$

$|\overline{PD}| = h$

$|\overline{PB}| = x$

Dane:

$|\angle ADB| = 90°$

$|\angle ABC| = 60°$

$|\overline{BD}| = \sqrt{3} + 1$

Obliczyć: S - pole powierzchni boi

Stożki mają wspólną podstawę – koło o promieniu r. Tworzące stożków są równe a oraz b.

Stąd $S = \pi ra + \pi rb$

Sposób I

Zauważmy, że:

trójkąt ΔABC jest równoboczny, więc przy oznaczeniach z rysunku mamy $x = \frac{b\sqrt{3}}{2}$

trójkąt ΔACD jest połówką kwadratu, więc $h = r = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}b$

$b = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$

Z podanej odległości $|\overline{BD}|$ mamy $h + x = \sqrt{3} + 1$ i uwzględniając powyższe otrzymujemy:

$$\left(\frac{b\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2} = \sqrt{3} + 1\right) \Rightarrow \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} \cdot b = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow b = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow b = 2$$

Zatem promień podstawy stożków jest równy $r = \frac{b}{2} = \frac{2}{2} = 1$, oraz $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2}$.

Liczymy pole powierzchni bocznej $S = \pi \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + \pi \cdot 1 \cdot 2 = \pi\left(\sqrt{2} + 2\right)$

Sposób II

W trójkącie mamy: $\frac{r}{x} = tg30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

W trójkącie ΔAPD mamy: $\frac{r}{h} = \frac{r}{\sqrt{3}+1-x} = tg45° \Rightarrow r = \sqrt{3}+1-x$

Stąd $\frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3}+1-x$, czyli $\frac{\sqrt{3}+3}{3}x = \sqrt{3}+1$, zatem $x = \frac{3(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+3}$, dalej

$$x = \frac{3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-3)}{(\sqrt{3}+3)(\sqrt{3}-3)} = \frac{3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-3)}{9-3} = \frac{3(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-3)}{6} = \frac{3-3\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Zatem

$r = \sqrt{3}+1-\sqrt{3} = 1$ $\qquad$ $\frac{x}{b} = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$

$a = h\sqrt{2} = (\sqrt{3}+1-\sqrt{3})\sqrt{2} = \sqrt{2}$ Pole powierzchni liczymy jak poprzednio.

Sposób III

W trójkącie ΔABD – znamy dwa kąty i bok, a chcemy wyliczyć długości pozostałych boków. Łatwo to zrobić z twierdzenia sinusów, o ile tylko wyliczymy sinus kąta A. Liczymy

$$\sin\angle A = \sin(180° - 30° - 45°) = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \sin 45° \cos 30°$$

$$\sin\angle A = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Zauważamy, że: $\frac{BD}{\sin\angle A} = \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = (\sqrt{3}+1)\cdot\frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Korzystamy teraz z twierdzenia sinusów

$$\frac{a}{\sin 30°} = \frac{BD}{\sin\angle A} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \qquad \frac{b}{\sin 45°} = \frac{BD}{\sin\angle A} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}+1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

$r = 1$ - otrzymujemy z trójkąta prostokątnego równoramiennego o przeciwprostokątnej $\sqrt{2}$ lub jako przyprostokątną leżącą naprzeciw kąta o mierze $30°$ czyli połowę przeciwprostokątnej równej 2. Pole powierzchni obliczamy jak w I sposobie.

Odpowiedź: Pole powierzchni boi jest równe $\pi(\sqrt{2}+2)$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek i zapisanie danych	1
B	Obliczenie promienia podstaw i tworzących stożków	3
C	Obliczenie powierzchni i odpowiedź	1

Zadanie 3. Znajdź złodzieja (2 punkty)

Rozwiązanie:

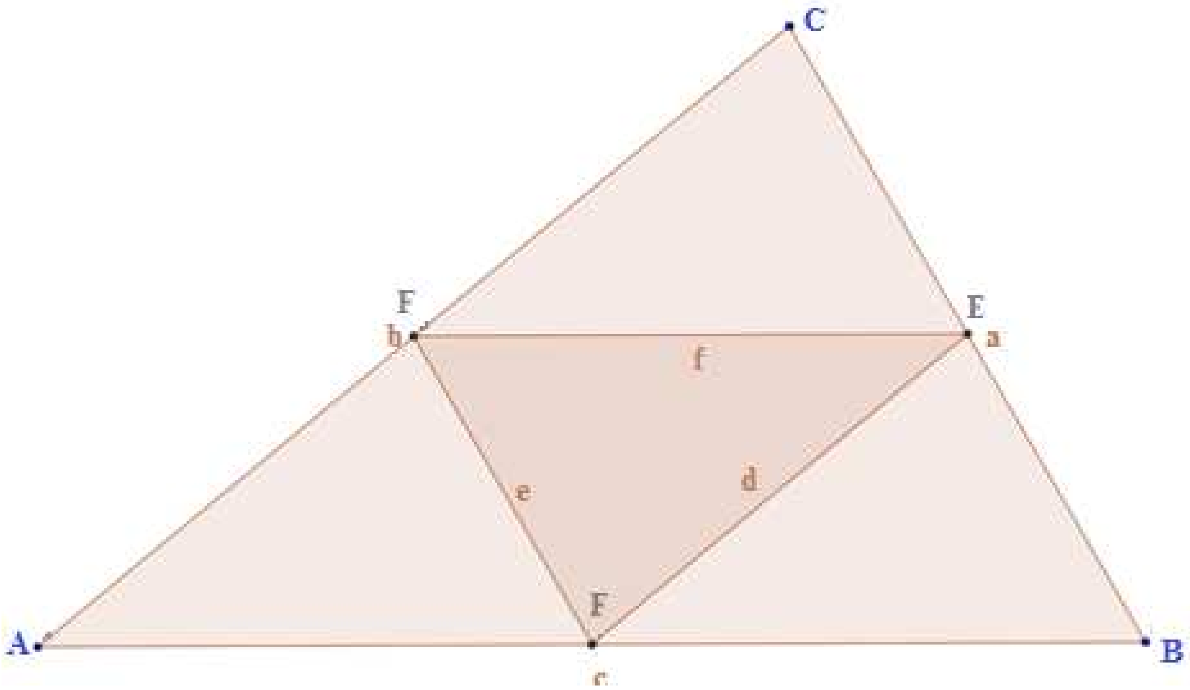
Najbardziej podejrzanym jest kłamca.
Pan C, nie lubił matematyki a szczególnie geometrii i dlatego nie zdawał sobie sprawy, że kłamie – stolik o trzech nogach nie może się kiwać, może najwyżej krzywo stać, bowiem przez trzy punkty nie współliniowe zawsze przechodzi tylko jedna płaszczyzna.
Kłamał pan C. Wypowiedzi pozostałych panów są wiarygodne.

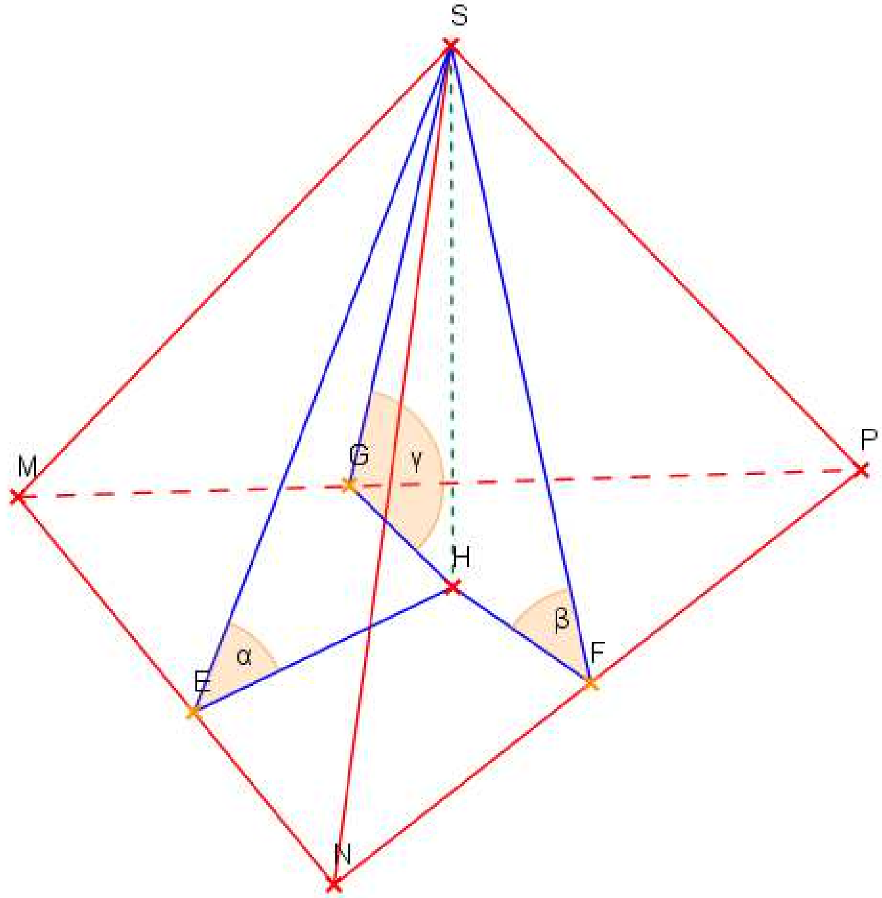
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wskazanie podejrzanego i uzasadnienie	2

Zadanie 4. Czworościan równościenny (4 punkty)

Rozwiązanie:





Przyjmujemy oznaczenia: h_A; h_B; h_B - wysokości ΔABC prowadzone odpowiednio z wierzchołków A; B; C

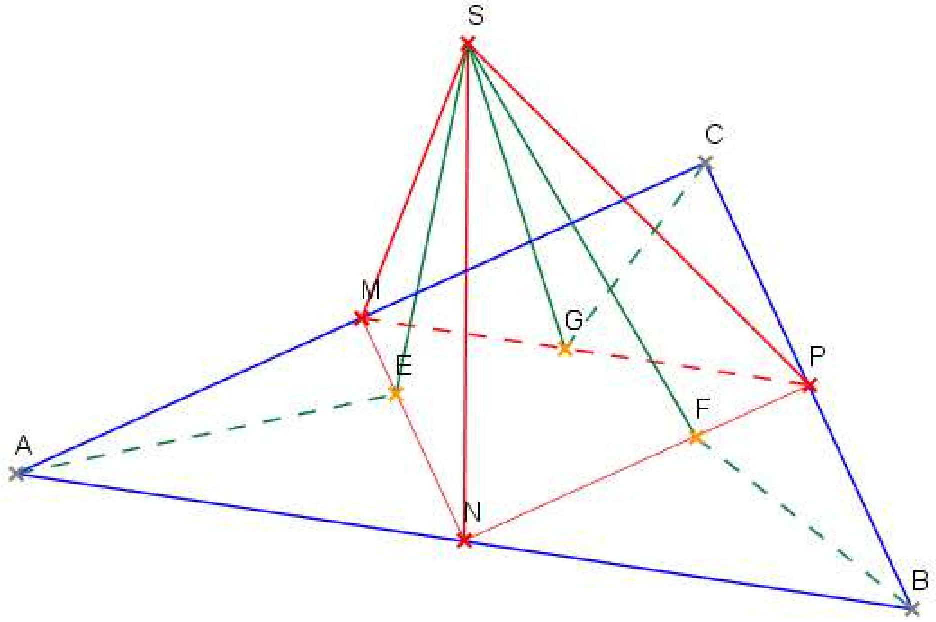
W czworościanie zaznaczymy kąty nachylenia ścian bocznych do płaszczyzny podstawy.

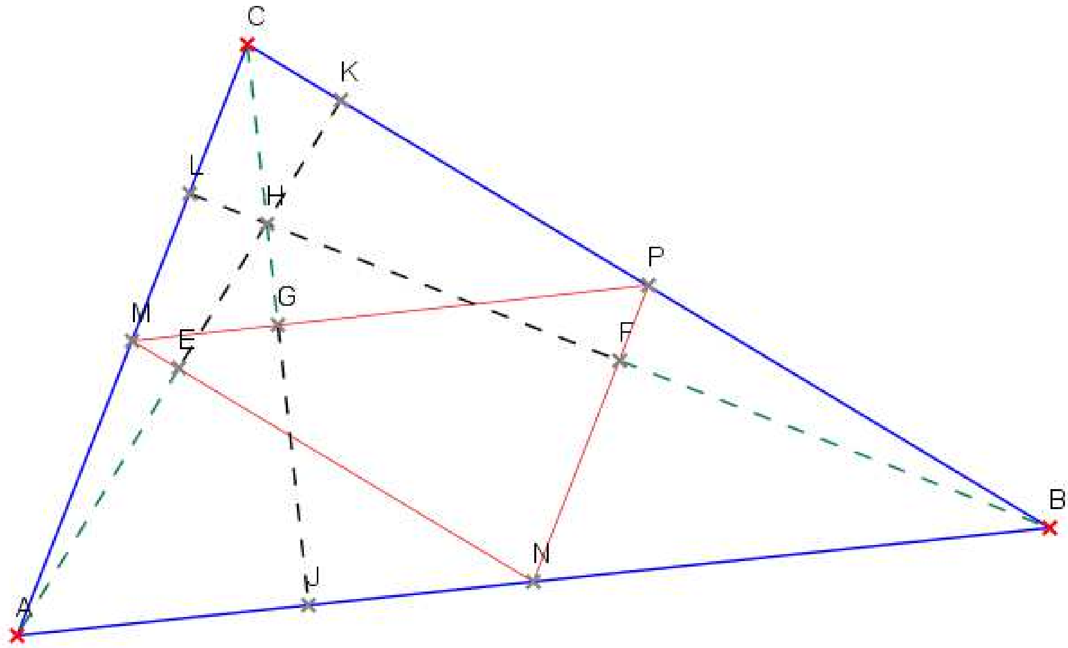
Następujące odcinki są prostopadłe:

$\overline{SE} \perp \overline{MN}$; $\overline{EH} \perp \overline{MN}$; $\overline{SF} \perp \overline{NP}$; $\overline{FH} \perp \overline{NP}$; $\overline{SG} \perp \overline{MP}$; $\overline{GH} \perp \overline{MP}$

W wyjściowym ΔABC $\overline{SE} = \overline{AE}$; $\overline{MN} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{AH} \perp \overline{BC} \Rightarrow H \in h_A$, analogicznie zauważamy, że $H \in h_B$ oraz $H \in h_C$.

Zależności między odcinkami wyjściowego trójkąta i czworościanu równościennego ilustrują poniższe rysunki.





Wniosek:

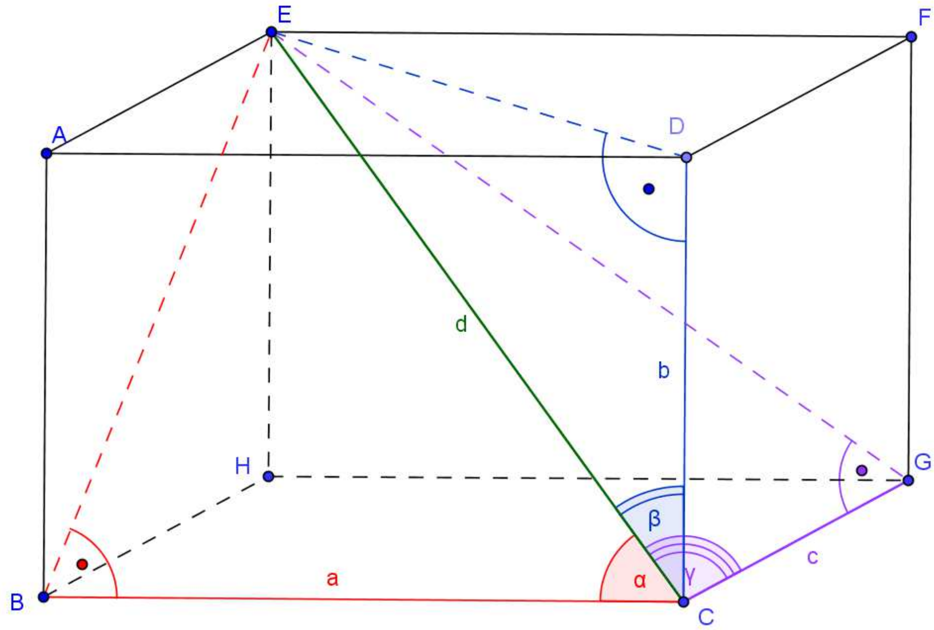
Spodek H wysokości czworościanu, wychodzącej z punktu S jest punktem przecięcia wysokości wyjściowego trójkąta czyli jego ortocentrum.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunków i (lub) modelu czworościanu	2
B	Wykazanie, że spodek tej wysokości jest ortocentrum danego trójkąta	2

Zadanie 5. Trzy krawędzie i przekątna (4 punkty)

Rozwiązanie:



∇ Zgodnie z oznaczeniami na rysunku mamy:

$$\cos\alpha = \frac{a}{d} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{a^2}{d^2}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{d} \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{b^2}{d^2}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{d} \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{c^2}{d^2}$$

Zatem

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{d^2} + \frac{b^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{d^2} = \frac{d^2}{d^2} = 1$$ ▲

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie przejrzystego rysunku	2
B	Uzasadnienie wzoru na sumę kwadratów cosinusów kątów	2

Zadanie 6. A gdzie kwiaty? (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy promień podstawy walca przez r. W takim razie długość krawędzi sześcianu jest równa $a = 2r + 2$, a wysokość walca $H = a - 2 = 2r$. Mamy więc równanie

$$\frac{27\pi}{256} = \frac{\pi r^2 \cdot H}{a^3} = \frac{\pi r^2 \cdot H}{(2r+2)^3}$$

$$\frac{27}{512} = \frac{r^3}{(2r+2)^3}$$

$$\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \left(\frac{r}{2r+2}\right)^3$$

$$\frac{3}{8} = \frac{r}{2r+2}$$

$$6r + 6 = 8r \implies 2r = 6 \implies r = 3$$

Zatem krawędź sześcianu ma długość $a = 2r + 2 = 8$

Odpowiedź: Krawędź sześcianu ma długość 8cm.

Liczymy $V = \pi r^2 \cdot H = 2\pi r^3 = 54\pi$

Odpowiedź: Ojętość walca jest równa $54\pi cm^3$

Jeżeli oznaczmy szukaną wysokość przez x to mamy równanie $(125, l = 125 cm^3)$:

$$\pi r^2 \cdot x = 125$$

$$x = \frac{125}{9\pi} \approx 4{,}42$$

Odpowiedź: Poziom wody będzie sięgać do wysokości 4,42 cm

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie najmniejszej długości wysokości	2
B	Wyznaczenie objętości	1
C	Wyznaczenie wysokości poziomu wody w wazonie	1

Zadanie 7. Nieważne, ile ich jest! (2 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczamy pola podstaw ostrosłupów: $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ zaś pole podstawy prostopadłościanu P_P

Wiadomo, że $P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = P_P$, ponadto wysokości wszystkich ostrosłupów są równe wysokości prostopadłościanu – oznaczamy ją przez h.

Objętość prostopadłościanu $V_P = P_P \cdot h$

Objętość wszystkich ostrosłupów oznaczmy przez V_{Ostr}, zatem

$$V_{Ostr} = \frac{1}{3}P_1 \cdot h + \frac{1}{3}P_2 \cdot h + \frac{1}{3}P_3 \cdot h + ... + \frac{1}{3}P_n \cdot h = \frac{1}{3}(P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n)h = \frac{1}{3}P_P \cdot h$$

Więc $\dfrac{V_{Ostr}}{V_P} = \dfrac{\frac{1}{3}P_P \cdot h}{P_P \cdot h} = \dfrac{1}{3}$

Odpowiedź:

Ostrosłupy zajmują $\frac{1}{3}$ objętości prostopadłościanu.

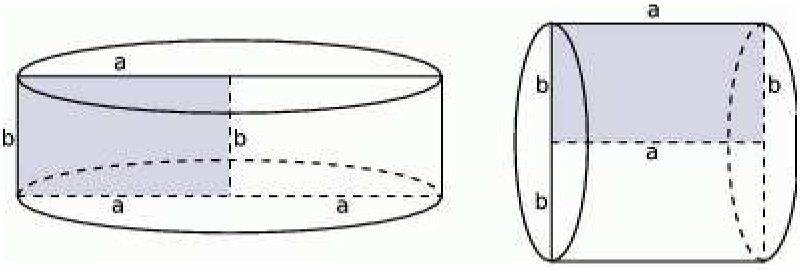
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie objętości wszystkich ostrosłupów	1
B	Udzielenie odpowiedzi na pytanie postawione w zadaniu	1

Zadanie 8. Przyjdzie walec i … (3punkty)

Rozwiązanie:

Jeżeli naszkicujemy opisaną sytuację



to widać, że dość łatwo możemy wyliczyć pola powierzchni całkowitej obu walców.

$$P_{w1} = 2 \cdot \pi \cdot a^2 + 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b$$

$$P_{w2} = 2 \cdot \pi \cdot b^2 + 2 \cdot \pi \cdot b \cdot a$$

(w każdym z wzorów pierwszy składnik to suma pól podstaw, a drugi pole powierzchni bocznej).

Z równości pól powierzchni mamy

$$2 \cdot \pi \cdot a^2 + 2 \cdot \pi \cdot a \cdot b = 2 \cdot \pi \cdot b^2 + 2 \cdot \pi \cdot b \cdot a$$

$2 \cdot \pi \cdot a^2 = 2 \cdot \pi \cdot b^2$ zatem $a^2 = b^2$ czyli $a = b$.

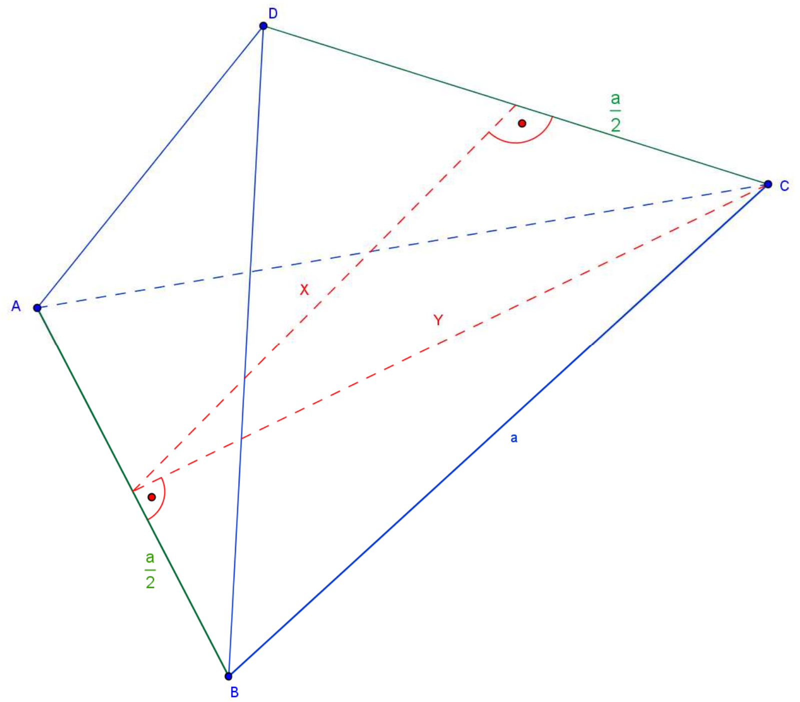
Zatem boki prostokąta muszą być równe, czyli jest on kwadratem.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Naszkicowanie opisanej sytuacji	1
B	Wyznaczenie i porównanie pól powierzchni walców	1
C	Wniosek z przeprowadzonego rozumowania	1

Zadanie 9. Ten numer nie przejdzie?? (5 punktów)

Rozwiązanie:



Zgodnie z rysunkiem przeciwległymi krawędziami są na przykład $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.
Szukana odległośc jest równa x. Korzystamy z oznaczeń i otrzymujemy:

$$y^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$$

$$x^2 = y^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2} = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\,.$$

Odległość między przeciwległymi krawędziami czworościanu jest równa $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a$.

$$a = 1 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1m < 80cm = 0{,}8m$$

Odpowiedź:
Przez drzwi o szerokości 80 cm zmieści się model czworościanu o krawędzi długości 1m

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie przejrzystego rysunku	2
B	Obliczenie odległości krawędzi skośnych czworościanu	2
C	Zastosowanie wyniku obliczeń do rozstrzygnięcia problemu	1

Zadanie 10. Na chybcika (6 punktów)

Rozwiązanie:

Otrzymujemy ośmiościan o krawędzi 5 cm.
Składa się on z dwóch piramid o podstawie kwadratowej o boku 5 cm i wysokości $2{,}5\sqrt{2}$ każda.

Stąd objętość: $V = 2 \cdot \frac{25 \cdot 2{,}5\sqrt{2}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{3}$

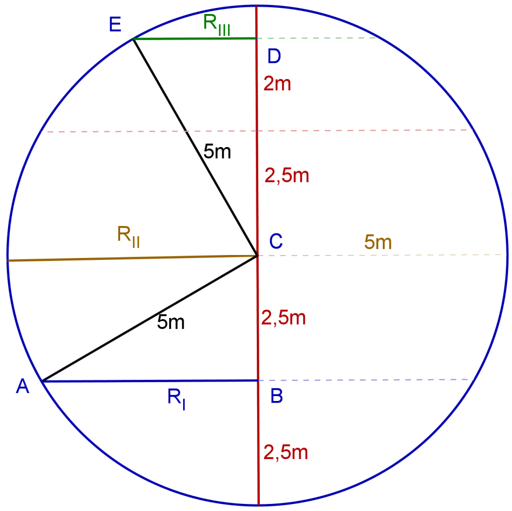
Objętość wynosi około 59 cm^3

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie modelu zgodnie z instrukcją (narysowanie siatki, wycięcie siatki, narysowanie kwadratu, przyklejenie siatki do kwadratu, zgięcie kartki papieru)	4
B	Poprawne nazwanie otrzymanej bryły	1
C	Obliczenie objętości bryły	1

Zadanie 11. Wielki błękit (6 punktów)

Rozwiązanie:



Oznaczenia i obliczenia kwadratów promieni

R_I - promień powierzchni użytkowej na poziomie I

W trójkącie prostokątnym ΔABC stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ czyli $R_I^2 + 2{,}5^2 = 5^2$ stąd $R_I^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 5^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{75}{4}$

R_{II} - promień powierzchni użytkowej na poziomie II

$R_{II} = 5$

R_{III} - promień powierzchni użytkowej na poziomie IIII

W trójkącie prostokątnym ΔCDE stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$|DE|^2 + |DC|^2 = |CE|^2$ czyli $R_{III}^2 + 4{,}5^2 = 5^2$ stąd $R_{III}^2 = 5^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 25 - \frac{81}{4} = \frac{19}{4}$

Obliczenie powierzchni użytkowej mieszkania

	Kwadrat promienia	Powierzchnia użytkowa
Poziom I	$\frac{75}{4} = 18{,}75$	$\frac{75}{4}\pi = 18{,}75\pi$
Poziom II	25	25π
Poziom III	$\frac{19}{4} = 4{,}75$	$\frac{19}{4}\pi = 4{,}75\pi$
Powierzchnia użytkowa mieszkania		$\frac{97}{2}\pi = 48{,}5\pi$

Odpowiedź:

Powierzchnia użytkowa mieszkania jest równa $\frac{97}{2}\pi[m^2] = 152{,}29[m^2]$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek, oznaczenia	1
B	Obliczenie powierzchni użytkowej na każdym z poziomów	3
C	Obliczenie powierzchni użytkowej całego mieszkania	1
D	Odpowiedź	1

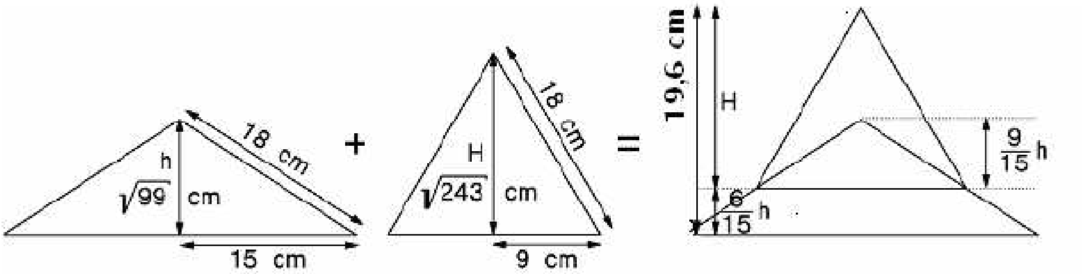
Zadanie 12 Czary mary (5 punktów)

Rozwiązanie:

Dla każdego stożka zachodzą zależności

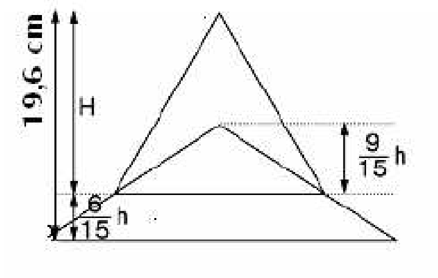
$$\frac{\alpha}{360} = \frac{R}{18} \text{ i } x^2 = 18^2 - R^2,$$

gdzie α jest kątem nasunięcia, R – promieniem podstawy stożka, a x – jego wysokością.[1]



Otrzymamy wówczas wymiary stożka zamieszczone na powyższych rysunkach.

Aby obliczyć wysokość dwóch nałożonych na siebie stożków należy zastosować twierdzenie Talesa. - Rysunek



Odpowiedź:

Wysokość pierwszego stożka wynosi $\sqrt{99} \approx 10cm$

Wysokość drugiego stożka wynosi $\sqrt{243}cm$

Całkowita wysokość kapelusza wynosi $19{,}6cm$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunki i oznaczenia	1
B	Wyznaczenie wysokości stożka wynosi	1
C	Wyznaczenie wysokości drugiego	1
D	Wyznaczenie całkowitej wysokości kapelusza i odpowiedź	2

[1] Rysunki ze źródła zadania

Pakiet M-3.5 „Opty - mistycznie"

I. Treści merytoryczne:

- wykres i własności funkcji kwadratowej,
- najmniejsza i największa wartość funkcji; maksimum i minimum,
- związki miarowe w figurach płaskich,
- wielościany, objętość i pole powierzchni całkowitej,
- koszt, zysk przychód,
- ciągi, ciąg arytmetyczny, suma wyrazów ciągu.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności interpretacji tekstu matematycznego i formułowania uzyskanych wyników,
- kształcenie w posługiwaniu się obiektami matematycznymi,
- kształcenie umiejętności doboru modelu matematycznego do zaistniałej sytuacji,
- tworzenie i stosowanie strategii,
- prowadzenie rozumowania (tworzenie łańcucha argumentów) i uzasadnianie jego poprawności.

III. Proponowane metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć:

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.
8. Podsumowanie i zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do zestawu ćwiczeń otwierających:

[1] Kiełbasa A., *Matura z matematyki 2010 - …, poziom podstawowy i rozszerzony, Część I*, Wydawnictwo „2000", Warszawa 2009; (Zadanie 3 - Strona 61, zadanie 279)
[2] http://www.zadania.info/d555/1/20 (Zadanie1; Zadanie 2 - Zadanie nr 1828886)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Zestaw zadań uczniowie powinni pociąć i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem":

[1] Kiełbasa A., *Matura z matematyki 2010 - …, poziom podstawowy i rozszerzony, Część II*, Wydawnictwo „2000", Warszawa 2009; (Zadanie 7 - Strona 88, zadanie 615; Zadanie 8 – strona 88 zadanie 621; Zadanie 11 - strona 89, zadanie 633)
[2] Etap wstępny Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic"; edycja Polska 2009 (Zadanie 2)
[3] MBG 2005 (Zadanie 3)
http://www.zadania.info/d555/1/20 (Zadanie 1; Zadanie 4 - zadanie nr 6190099; Zadanie 5 - Zadanie nr 1870100; Zadanie 6 - Zadanie nr 3991011; Zadanie 9 - Zadanie nr 4035127; Zadanie 11 - Zadanie nr 4358338Zadanie 12 - Zadanie nr 1012141)

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem" będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Rysunki do Pakietu M-3.5 wykonała Helena Ewert – Fechner za pomocą programu Geogebra

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Opty - mistycznie”

Exercise 1. Unlucky number thirteen (7 points)

The sum of three real positive numbers is equal to 13. The second number is three times greater than the first one. Find all three numbers satisfying the given conditions to obtain possibly the smallest sum of their squares.

Tarea 1. Trece de mala suerte (7 puntos)

La suma de tres números reales positivos equivale a 13. El segundo número es tres veces más grande que el primero. Determina tres números cumpliendo las condiciones presentadas, de esta manera que la suma de sus cuadrados sea la menor.

Aufgabe 1. Die Unglückszahl Dreizehn (7 Punkte)

Die Summe von drei reellen positiven Zahlen ist gleich 13. Die zweite Zahl ist dreimal größer als die erste. Bestimme drei Zahlen, die die angegebenen Bedingungen auf solche Weise erfüllen, dass die Summe der Quadrate von diesen Zahlen am kleinsten wird.

Esercizio 1. Sfortunato tredici (7 punti)

La Somma di tre numeri reali positivi fa 13. Il secondo numero è tre volte più grande del primo. Determina tre numeri i quali eseguiscono queste condizioni in modo, che la somma di loro quadrati sia la più piccola.

Exercice 1. Un 13 malchanceux (7 points)

La somme de trois chiffres réels positifs est égale à 13. Le deuxième chiffre est trois fois plus grand que premier. Trouve les trois chiffres remplissant les conditions données de façon à ce que la somme de leurs carrés soit la plus petite.

Zadanie 2. Skarbiec (6 punktów)

W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie każdego dnia w południe ze skarbca król zabierał 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k, dla której w każdym dniu w skarbcu była, co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet

Zadanie 3. Suma i kwadraty (4 punkty)

Suma dwóch liczb równa jest 6. Znajdź te liczby, jeśli wiadomo, że suma podwojonego kwadratu jednej z nich i kwadratu drugiej jest najmniejsza z możliwych.

Zadanie 4. A trzeci? (10 punktów)

Suma długości dwóch boków trójkąta wynosi $20cm$, a miara kąta pomiędzy tymi bokami wynosi $60°$. Jaką najmniejszą wartość ma obwód tego trójkąta?

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Opty - mistycznie"

Zadanie 1. Pechowa trzynastka (7 punktów)

Suma trzech liczb rzeczywistych dodatnich jest równa 13. Druga liczba jest trzy razy większa od pierwszej.
Wyznacz trzy liczby spełniające podane warunki tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

Rozwiązanie:

Oznaczenia:

$x \in R_+$; $y \in R_+$; $z \in R_+$ - trzy liczby rzeczywiste dodatnie

$x + y + z = 13$ - suma trzech liczb równa jest13 (*)

$y = 3x$ - druga liczba jest trzy razy większa od pierwszej(**)

Szukane: $x; y; z$, których suma $x^2 + y^2 + z^2$ jest najmniejsza

Warunki (*) i (**) tworzą układ:

$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 3x \end{cases}$, stąd otrzymujemy: $\begin{cases} x + 3x + z = 13 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 13 - 4x \\ y = 3x \end{cases}$

Mamy znaleźć takie $x; y; z$, dla których $x^2 + y^2 + z^2$ przyjmuje wartość najmniejszą

Z układu

mamy: $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 + (13 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 169 - 104x + 16x^2 = 26x^2 - 104x + 169$

Niech $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. Zatem $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Aby znaleźć wartość najmniejszą wyrażenia: $x^2 + y^2 + z^2$, szukamy najmniejszej wartości funkcji $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$.

Ponieważ liczby mają być dodatnie, to x nie może być zupełnie dowolne. Dokładniej:

$\begin{cases} x > 0 \\ y = 3x > 0 \\ z = 13 - 4x > 0 \Rightarrow x < \frac{13}{4} \end{cases}$. Szukamy, zatem minimum funkcji $f(x)$ w przedziale $\left(0, \frac{13}{4}\right)$.

Funkcja $f(x)$ jest trójmianem kwadratowym o dodatnim współczynniku przy x^2. Zatem ta funkcja osiąga najmniejszą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem. Odcięta wierzchołka paraboli $x_w = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$. Ponieważ punkt ten leży w przedziale $\left(0, \frac{13}{4}\right)$,

to właśnie w nim funkcja osiąga minimum. Otrzymujemy stąd

$x = 2 \Rightarrow (y = 3 \cdot 2 = 6 \wedge z = 13 - 4 \cdot 2 = 5)$

Odp.: Liczby, których suma jest równa 13, a suma ich kwadratów jest najmniejsza to: 2; 6; 5

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wprowadzenie oznaczeń	1
C	Zapisanie sumy kwadratów liczb w postaci trójmianu jednej zmiennej	1
D	Wyznaczenie minimum funkcji kwadratowej	1
E	Wyznaczenie szukanych liczb i podanie odpowiedzi	2
F	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercise1. Unlucky Number Thirteen (7 points)

Solution:

Notations:

$x \in R_+$; $y \in R_+$; $z \in R_+$ - three positive real numbers

$x + y + z = 13$ - the sum of these numbers is 13 *(*)*

$y = 3x$ - the second number is three times greater than the first one*(**)*

Searched:

x; y; z, for which the sum $x^2 + y^2 + z^2$ is possibly the smallest number

Conditions *(*)* i *(**)* form a system:

$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 3x \end{cases}$ thus we obtain: $\begin{cases} x + 3x + z = 13 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 13 - 4x \\ y = 3x \end{cases}$

We should find such x; y; z, for which the sum $x^2 + y^2 + z^2$ takes the smallest value. From the system of equations we get:

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 + (13 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 169 - 104x + 16x^2 = 26x^2 - 104x + 169$

Let $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. Then $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. To find the smallest value of the expression: $x^2 + y^2 + z^2$, we should find the smallest value of a function $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Of course the number x has to be positive. That means:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y = 3x > 0 \\ z = 13 - 4x > 0 \Rightarrow x < \frac{13}{4} \end{cases}$$

We are looking for a minimum of the function $f(x)$ in the interval $\left(0, \frac{13}{4}\right)$. Function $f(x)$ is a quadratic trinomial with a positive coefficient of x^2. Hence, this function achieves the smallest value in the vertex of parabola which is the function's graph. The abscissa of the vertex of parabola is $x_w = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$. This point belongs to the interval $\left(0, \frac{13}{4}\right)$, so the function has the minimum just in this point. We obtain $x = 2 \Rightarrow (y = 3 \cdot 2 = 6 \wedge z = 13 - 4 \cdot 2 = 5)$.

Answer: The numbers, the sum of which is 13 and the sum of their squares is possibly the smallest number, are: 2; 6; 5

Points:

Activity	Stages of Solution	Points
A	Translation in Polish	1
B	Introduction of notations	1
C	Expressing the sum of squares as the quadratic trinomial of one variable	1
D	Finding the minimum of a quadratic function	1
E	Finding the searched numbers and the right answer	2
F	Answer in English	1

Tarea 1. Trece de mala suerte (7 puntos)

Solución:

Designaciones:

$x \in R_+$; $y \in R_+$; $z \in R_+$ - tres números reales positivos

$x + y + z = 13$ - suma de tres números equivale a 13 *(*)*

$y = 3x$ - el segundo número es tres veces más grande que el primero*(**)*

Buscado:

$x; y; z$, cuyo suma $x^2 + y^2 + z^2$ es la menor

Condiciones: *(*)* y *(**)* forman el sistema:

$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 3x \end{cases}$ de donde obtenemos: $\begin{cases} x + 3x + z = 13 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 13 - 4x \\ y = 3x \end{cases}$

Tenemos que encontrar tales $x; y; z$, para los cuales $x^2 + y^2 + z^2$ adopta el menor valor.

De este sistema tenemos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 + (13 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 169 - 104x + 16x^2 = 26x^2 - 104x + 169$$

Que $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. *Entonces* $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Para encontrar el menor valor de la expresión: $x^2 + y^2 + z^2$ buscamos el menor valor de la función: $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Como los números deben ser positivos, x no puede ser enteramente libre. Más precisamente:

$\begin{cases} x > 0 \\ y = 3x > 0 \\ z = 13 - 4x > 0 \Rightarrow x < \frac{13}{4} \end{cases}$. Buscamos entonces el minimo de la función $f(x)$ en el intervalo $\left(0, \frac{13}{4}\right)$. La función $f(x)$ es un trinomio cuadrado con un coeficiente positivo cerca de x^2.

Entonces, la función alcanza el menor valor en el cúspide de la parábola que es su representación gráfica. La abscisa del cúspide de la parábola $x_w = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$

Como este punto es localizado en el intervalo $\left(0, \frac{13}{4}\right)$, justamente en él la función alcanza su minimo. De donde obtenemos $x = 2 \Rightarrow (y = 3 \cdot 2 = 6 \wedge z = 13 - 4 \cdot 2 = 5)$

Respuesta: Los números cuyo suma equivale a 13 y suma de sus cuadrados es la menor, son: 2; 6; 5.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	1
B	Introducción de designaciones	1
C	Apuntación de la suma de los cuadrados de los números en forma del trinomio de una variable	1
D	Determinación del mínimo de la función cuadrada	1
E	Determinación de números buscados y formulación de la respuesta	2
F	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Die Unglückszahl Dreizehn (7 Punkte)

Lösung:

Bezeichnungen:

$x \in R_+$; $y \in R_+$; $z \in R_+$ - drei reelle positive Zahlen

$x + y + z = 13$ - Die Summe von drei Zahlen ist gleich 13 $^{(*)}$

$y = 3x$ - Die zweite Zahl ist dreimal größer als die erste

Gesucht:

x; y; z, deren Summe $x^2 + y^2 + z^2$ am kleinsten ist. Bedingungen $^{(*)}$ und $^{(**)}$ bilden ein Gleichungssystem:

$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 3x \end{cases}$, daher bekommen wir: $\begin{cases} x + 3x + z = 13 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 13 - 4x \\ y = 3x \end{cases}$. Wir sollen solche x; y; z finden, für die $x^2 + y^2 + z^2$ den kleinsten Wert annimmt. Aus dem Gleichungssystem haben wir: $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 + (13 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 169 - 104x + 16x^2 = 26x^2 - 104x + 169$

Sei $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. Also $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Um den kleinsten Wert der Formel: $x^2 + y^2 + z^2$ zu finden, suchen wir den kleinsten Wert der Funktion $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Da die Zahlen positiv sein sollen, so darf x nicht völlig beliebig sein.

Genauer: $\begin{cases} x > 0 \\ y = 3x > 0 \\ z = 13 - 4x > 0 \Rightarrow x < \frac{13}{4} \end{cases}$. Wir suchen also das Minimum der Funktion $f(x)$ im Intervall $\left(0, \frac{13}{4}\right)$. Die Funktion $f(x)$ ist eine quadratische Funktion mit einem positiven Faktor vor x^2. Diese Funktion erreicht folglich den kleinsten Wert im Scheitelpunkt der Parabel, die der Graph der Funktion ist. Die Abszisse des Scheitelpunktes von der Parabel $x_w = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ Da dieser Punkt im Intervall $\left(0, \frac{13}{4}\right)$ liegt, erreicht soeben in ihm die Funktion das Minimum. Daher bekommen wir $x = 2 \Rightarrow (y = 3 \cdot 2 = 6 \wedge z = 13 - 4 \cdot 2 = 5)$.

Antwort: Die Zahlen, deren Summe gleich 13 und die Summe ihrer Quadrate am kleinsten ist, sind: 2; 6; 5

Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	1
B	Einführen der Bezeichnungen	1
C	Aufschreiben der Quadratsumme der Zahlen in Form von einer quadratischen Funktion mit einer Variabel.	1
D	Bestimmung von dem Minimum der quadratischen Funktion	1
E	Bestimmung der gesuchten Zahlen und Antwortangabe	2
F	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. Sfortunato tredici (7 punti)

Soluzione:

Indicazioni:

$x \in R_+;\ y \in R_+;\ z \in R_+$ - tre numeri reali positivi

$x + y + z = 13$ - somma di tre numeri fa 13 $^{(*)}$

$y = 3x$ - il secondo numero è tre volte più grande del primo $^{(**)}$

Cercate:

$x;\ y;\ z$, di cui somma $x^2 + y^2 + z^2$ è la più piccola

Le condizioni $^{(*)}$ e $^{(**)}$ fanno il sistema:

$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 3x \end{cases}$ da dove otteniamo: $\begin{cases} x + 3x + z = 13 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 13 - 4x \\ y = 3x \end{cases}$. Bisogna trovare $x;\ y;\ z$, per cui $x^2 + y^2 + z^2$ ha il più piccolo valore

Con questo sistema abbiamo:

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 + (13 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 169 - 104x + 16x^2 = 26x^2 - 104x + 169$

Se $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. Dunque $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Per trovare il più piccolo valore dell'espressione: $x^2 + y^2 + z^2$, cerchiamo il più piccolo valore della funzione $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Come i numeri devono essere positivi , quindi x non può essere completamente libero.

Più precisamente: $\begin{cases} x > 0 \\ y = 3x > 0 \\ z = 13 - 4x > 0 \Rightarrow x < \frac{13}{4} \end{cases}$. Cerchiamo allora il minimo della funzione $f(x)$ nell'inervallo $\left(0, \frac{13}{4}\right)$. La funzione $f(x)$ è il trinomio quadrato con il fattore positivo per x^2. Dunque questa funzione ottiene il valore più basso al vertice della parabola la quale è il suo diagramma. La coordinata ascissa del vertice di parabola $x_w = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ Come questo punto è situato nell'intervallo $\left(0, \frac{13}{4}\right)$, allora in questo punto la funzione ottiene il suo minimo. Otteniamo cosi $x = 2 \Rightarrow (y = 3 \cdot 2 = 6 \wedge z = 13 - 4 \cdot 2 = 5)$

Risposta: I numeri di cui la somma è uguale a 13 e la somma di loro quadrati è la più piccola, allora: 2; 6; 5

Punteggio:

N dell'attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	1
B	Introduzione delle indicazioni	1
C	Iscrizione della somma di quadrati dei numeri come trinomio di una variabile	1
D	Determinazione del minimo della funzione quadrata	1
E	Determinazione dei numeri cercati e la soluzione	2
F	Formulazione della riposta nella lingua straniera	1

Exercice 1. Un 13 malchanceux (7 points)

Solution:

Symboles:

$x \in R_+;\ y \in R_+;\ z \in R_+$ - trois chiffres réels positifs

$x + y + z = 13$ - la somme des trois chiffres est égale à 13 $^{(*)}$

$y = 3x$ - le deuxième chiffre est trois fois plus grand que le premier$^{(**)}$

Ce qui est recherché:

$x;\ y;\ z$, dont la somme $x^2 + y^2 + z^2$ est la plus petite

Les conditions $^{(*)}$ et $^{(**)}$ donnent le système d'équation:

$\begin{cases} x + y + z = 13 \\ y = 3x \end{cases}$ d'où nous obtenons : $\begin{cases} x + 3x + z = 13 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 13 - 4x \\ y = 3x \end{cases}$. Nous devons trouver $x;\ y;\ z$, de telle façon que $x^2 + y^2 + z^2$ admet la plus petite valeur. Selon le système d'équation, nous obtenons :

$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (3x)^2 + (13 - 4x)^2 = x^2 + 9x^2 + 169 - 104x + 16x^2 = 26x^2 - 104x + 169$

Soit $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$. Alors $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Pour trouver la valeur la plus petite de l'équation : $x^2 + y^2 + z^2$, nous cherchons la valeur la plus petite de la fonction $f(x) = 13(2x^2 - 8x + 13)$. Puisque les chiffres recherchés doivent être positif, x ne peut pas être librement choisi. Plus exactement: $\begin{cases} x > 0 \\ y = 3x > 0 \\ z = 13 - 4x > 0 \Rightarrow x < \frac{13}{4} \end{cases}$.. Ainsi, recherchons-nous le minimum de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{13}{4}\right)$. La fonction $f(x)$ est un trinôme carré avec un facteur positif pour x^2. Ainsi, cette fonction atteint-elle sa plus petite valeur au sommet de la parabole. L'abscisse du sommet de la parabole : $x_w = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = 2$ Puisque ce point se trouve dans l'intervalle $\left(0, \frac{13}{4}\right)$, c'est là que la fonction va atteindre son minimum. Nous obtenons ainsi $x = 2 \Rightarrow (y = 3 \cdot 2 = 6 \wedge z = 13 - 4 \cdot 2 = 5)$

Réponse: $2;\ 6;\ 5$ sont les chiffres dont la somme est égale à 13 et la somme de leurs carrés est la plus petite.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	1
B	Introduction des symboles	1
C	Notation de la somme des carrés des nombres en forme de trinôme carré d'une variable	1
D	Détermination du minimum de la fonction carrée	1
E	Détermination des nombres recherchés et formulation de la réponse	2
F	Formulation de la réponse en langue étrangère	1

Zadanie 2. Skarbiec (6 punktów)

Rozwiązanie:

Jak zmienia się liczba monet w skarbcu każdego dnia? Z treści zadania wynika, że

- Skarbnik dorzuca $25+(n-1)\cdot 2$ monet, gdzie n oznacza numer kolejnego dnia,
- Król zabiera 50 monet.

W sumie liczba monet zmienia się, więc o $25+(n-1)\cdot 2-50=2(n-1)-25=2n-27$.

Zatem jeżeli przez a_n oznaczymy liczbę monet w skarbcu po południu n-tego dnia (jak już król zabierze swoją dolę:)), to mamy:

$a_n=k+(2-27)+(4-27)+\ldots+(2n-27)$, czyli $a_n=k+2(1+2+\ldots+n)-27n$

zatem $a_n=k+2\cdot\frac{n+1}{2}\cdot n-27n=k+n^2+n-27n$

Liczbę monet w skarbcu n-tego dnia określa wzór: $a_n=n^2-26n+k$

Pytanie teraz brzmi, dla jakiej najmniejszej wartości k, wyrażenie to jest dodatnie dla dowolnego $n\geq 1$.

Wykresem funkcji $y=n^2-26n$ jest parabola o ramionach skierowanych w górę, więc najmniejszą wartość przyjmuje w wierzchołku $(n_W;y_W)$, gdzie $n_W=-\frac{-26}{2}=13$ i $y_W=13^2-26\cdot 13=-169$

Zatem $a_n>0\Leftrightarrow n^2-26n+k>0\Leftrightarrow -169+k>0\Leftrightarrow k>169$, co oznacza, że k musi być, co najmniej równe 170.

Odpowiedź:

Najmniejszą liczbą k, dla której w każdym dniu w skarbcu będzie, co najmniej jedna moneta jest 170, najmniejsza liczba monet w skarbcu była w trzynastym dniu.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Określenie jak zmienia się liczba monet w n-tym dniu	1
B	Wyrażenie za pomocą wzoru liczby monet w skarbcu n-tego dnia	2
C	Określenie, dla jakiego n funkcja osiąga minimum	1
D	Wyznaczenie minimalnej wartości k	1
E	Sformułowanie odpowiedzi	1

Zadanie 3. Suma i kwadraty (4 punkty)

Rozwiązanie:

Niech x oznacza pierwszą z liczb, natomiast y drugą. Wtedy $y+x=6 \Rightarrow y=-x+6$,

Szukamy liczb, dla których wyrażenie $W(x;y)=2x^2+y^2$ ma najmniejszą możliwą wartość.

$W(x;y)=2x^2+(-x+6)^2=2x^2+x^2-12x+36=3x^2-12x+36$

Powyższe wyrażenie jest trójmianem kwadratowym, to najmniejszą wartość przyjmuje w wierzchołku paraboli będącej jego wykresem, czyli dla $x_W=-\frac{-12}{2\cdot 3}=2=x$.

Wtedy $y=-2+6=4$

Odpowiedź:

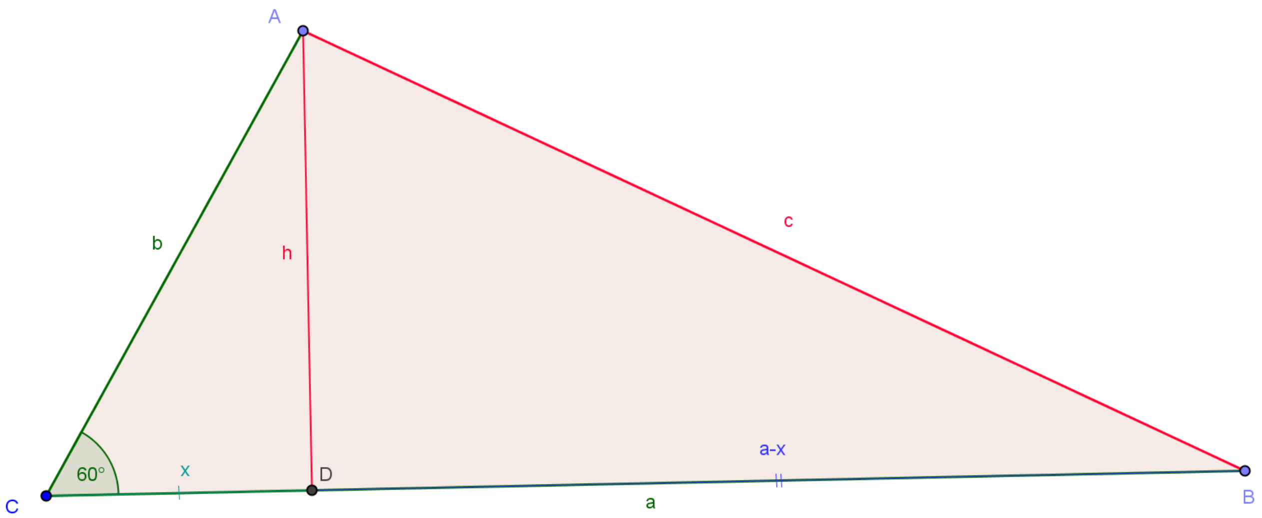
Jeżeli suma dwóch liczb jest równa 6, to suma podwojonego kwadratu jednej z liczb i kwadratu drugiej z nich jest najmniejsza dla liczb: 2 *i* 4

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie wyrażenia w postaci funkcji kwadratowej	2
B	Wyznaczenie pierwszej liczby	1
C	Wyznaczenie drugiej liczby i podanie odpowiedzi	1

Zadanie 4. A trzeci? (10 punktów)

Rozwiązanie:



Dane w ΔABC :
$a+b=20$
$|\angle ACB|=60^\circ$

Szukane:
Najmniejszy obwód ΔABC ?
Niech l oznacza obwód ΔABC wtedy przy oznaczeniach z rysunku, mamy:
$l=a+b+c \Rightarrow l=20+c \Rightarrow$ obwód ΔABC jest najmniejszy, gdy bok c jest najkrótszy.
Wyznaczamy bok c:

W ΔACD

$$\frac{h}{b}=\sin 60^\circ \Rightarrow h=\frac{b\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{x}{b}=\cos 60^\circ \Rightarrow x=\frac{b}{2}$$

W ΔABD

$$BD=a-x=a-\frac{b}{2}=\frac{2a-b}{2}$$
$$AD=h=\frac{b\sqrt{3}}{2}$$

twierdzenia Pitagorasa w ΔABD mamy: $AB^2=BD^2+AD^2$, zatem

$$c^2=\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2+\left(\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{4a^2-4ab+b^2+3b^2}{4}=\frac{4a^2-4ab+4b^2}{4}=a^2+b^2-ab$$

(Uwaga: Ostatnią zależność można uzyskać bezpośrednio z twierdzenia cosinusów).
Zatem $c^2=a^2+b^2-ab=a^2+2ab+b^2-2ab-ab=(a+b)^2-3ab$
Problem jest, zatem następujący:
Jeśli wiemy, że $a+b=20$ to, jaka jest najmniejsza wartość wyrażenia 20^2-3ab?
$a+b=20 \Rightarrow b=20-a$ stąd $c^2=f(a)=400-3a\cdot(20-a)$ czyli $f(a)=3a^2-60a+400$
Dziedziną funkcji $f(a)$ jest przedział $(0;20)$.
Wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych do góry.
Funkcja osiąga najmniejszą wartość w punkcie o odciętej $a_W=-\frac{-60}{2\cdot 3}=10$

Zatem c^2 oraz c osiąga wartość najmniejszą, gdy
$a=10 \Rightarrow \left(c^2 = f(10) = 400 - 3\cdot 10\cdot(20-10) = 100\right) \Rightarrow c=10$
Otrzymaliśmy, więc $a=10$; $c=10$; $b=20-10=10$ czyli $l_{Min}=20+10=30$
Odpowiedź:
Ze wszystkich trójkątów spełniających warunki zadania minimalny obwód ma trójkąt równoboczny o boku $10cm$, zatem minimalny obwód wynosi $30cm$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie danych i wykonania rysunku	1
B	Stwierdzenie, że obwód jest minimalny, gdy bok c jest najkrótszy	1
C	Wyprowadzenie wzoru na c^2	3
D	Zapisanie c^2 jako funkcji jednej zmiennej	1
E	Wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga minimum	2
F	Wyznaczenie minimalnego obwodu	1
G	Udzielenie odpowiedzi, stwierdzenie, że warunki zadania spełnia trójkąt równoboczny	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Opty - mistycznie"

Exercise1. Lucky number seven (5 points)

We divide the number 7 into three parts is such a way that the first part is two times greater than the second one. How should we divide it to obtain possibly the smallest sum of squares of all three parts?

Tarea 1. Siete feliz (5 puntos)

El número 7 es dividido en tres partes de esta manera que la primera es dos veces más grande que la segunda. ¿Cómo hay que hacer la división para que la suma de los cuadrados de todas las tres partes sea la menor?

Aufgabe 1. Die Glückszahl Sieben (5 Punkte)

Die Zahl 7 teilen wir in drei Teile so, dass der erste Teil zweimal größer als der zweite ist. Wie soll man die Teilung ausführen, damit die Quadratsumme von allen drei Teilen am kleinsten sei?

Esercizio 1. Fortunato sette (5 punti)

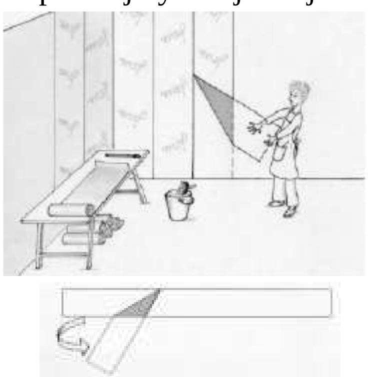
Il numero 7 dividiamo in tre parti in modo che la prima sia due volte più grande della secon-da. Come fare la divisione, per avere la somma dei quadrati di tre parti la più piccola?

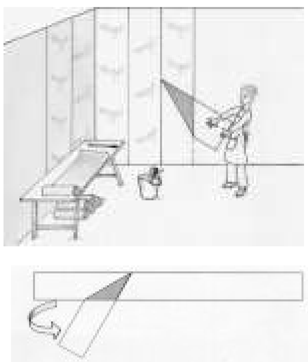
Exercice 1. Un sept chanceux (5 points)

Nous divisons le nombre 7 en trois parties de façon à ce que la première soit deux fois plus grande que la deuxième. Comment faire cette division pour que la somme des carrés de toutes les trois parties soit la plus petite?

Zadanie 2. Złożone? To spasował! (3 punkty)

W jaki sposób należy złożyć pasek papieru, aby powierzchnia szarego trójkąta przedstawionego na rysunku[2] poniżej była najmniejsza z możliwych?



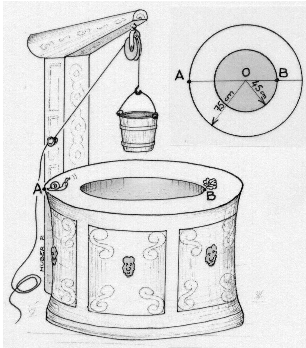


Przyklej takie złożenie na arkuszu odpowiedzi.
Uzasadnij, że w tym przypadku powierzchnia jest minimalna.

[2] Rysunki ze źródła zadania

Zadanie 3. Wilczy głód (4 punkty)

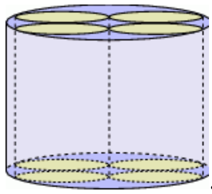
Na cembrowinie studni, w punkcie A znajduje się ślimak.



[3]

W punkcie B znajduje się liść sałaty. Wierzch cembrowiny ma kształt pierścienia o środku O, gdzie duży promień ma 75 cm, a mały 45 cm. Punkty A, O i B są współliniowe.
Oblicz z dokładnością do centymetra długość najkrótszej drogi, jaką musi pokonać ślimak, aby móc zjeść sałatę.

Zadanie 4. Promocja ekologiczna?? (3 punkty)


[4].

Puszki z napojami chłodzącymi pakuje się w ramach promocji do kartonowych pudełek w kształcie walca. Średnica zewnętrzna puszki wynosi 8 cm, a jej wysokość 15 cm. Jaka jest minimalna objętość pudełka zawierającego cztery puszki? Wynik podaj z dokładnością do $1\,cm^3$.

Zadanie 5. Tra-la-la (4 punkty)

Właściciel sklepu muzycznego „Tra-la-la” kupuje w hurtowni płyty zespołu „Emotion” po 30 zł za sztukę i sprzedaje 56 sztuk miesięcznie, po 50 zł za sztukę. Badania rynku wykazały, że każda obniżka ceny płyty o 1 zł, zwiększy liczbę sprzedanych płyt o 4 sztuki (miesięcznie).

a) Wyznacz wzór funkcji miesięcznego zysku właściciela sklepu „Tra-la-la” w zależności od obniżki ceny płyty zespołu „Emotion” (w pełnych złotych). Podaj dziedzinę tej funkcji.
b) Jaką cenę płyty powinien ustalić sprzedawca, aby miesięczny zysk z jej sprzedaży był największy? Oblicz miesięczny największy zysk właściciela sklepu ze sprzedaży płyty „Emotion”.

Zadanie 6. Różnica, a iloczyn? (3 punkty)

Wyznacz dwie liczby całkowite różniące się, o 6, których iloczyn jest możliwie najmniejszy.

[3] Rysunek ze źródła zadania
[4] Rysunek ze źródła zadania

Zadanie 7. Uszatek (5 punktów)

Na bokach prostokąta o obwodzie $16m$ opisano, jako na średnicach, półokręgi leżące na zewnątrz prostokąta. Zbadaj, dla jakich długości boków prostokąta, pole figury ograniczonej krzywą złożoną z tych czterech półokręgów jest najmniejsze. Oblicz to pole

Zadanie 8. Wykroić najwięcej… (4 punkty)

W trójkąt prostokątny o kącie ostrym $30°$ i przeciwprostokątnej długości $40cm$ wpisujemy prostokąty w ten sposób, że jeden bok każdego z tych prostokątów zawiera się w przeciwprostokątnej trójkąta. Zbadaj, który z tych prostokątów ma największe pole.

Zadanie 9. Walec w stożku? (5 punktów)

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych o długościach 2 i 4 wpisano prostokąt w ten sposób, że dwa jego boki leżą na przyprostokątnych trójkąta, a jeden z wierzchołków prostokąta leży na przeciwprostokątnej trójkąta. Prostokąt ten obraca się dookoła prostej, zawierającej dłuższą przyprostokątną trójkąta, tworząc walec. Który z walców, otrzymanych w powyższy sposób, posiada największe pole powierzchni bocznej i oblicz jego objętość.

Zadanie 10. Ostro…belka (5 punktów)

W ostrosłup prawidłowy czworokątny wpisujemy graniastosłupy prawidłowe czworokątne w ten sposób, że dolna podstawa graniastosłupa zawiera się podstawie ostrosłupa, a każdy z wierzchołków górnej podstawy należy do jednej z krawędzi bocznych ostrosłupa. Wiedząc, że każda z krawędzi ostrosłupa ma długość 6, oblicz, jaka jest maksymalna możliwa powierzchnia boczna graniastosłupa.

Zadanie 11. Pod namiotem słońca?… (5 punktów)

Wyznacz największą wartość obwodu prostokąta, którego dwa wierzchołki leżą na paraboli o równaniu $y = 3 - x^2$, a dwa pozostałe na odcinku, którego końcami są punkty przecięcia danej paraboli i prostej o równaniu $y = 0$.

Zadanie 12. „Przychód, koszt, zysk… (4 punkty)

W pewnym zakładzie pracy zależność przychodów ze sprzedaży od wielkości produkcji wyraża w przybliżeniu wzór $p(n) = 150n$, gdzie n oznacza liczbę sztuk wyprodukowanego towaru, a koszty produkcji, w złotych, określa zależność $k(n) = n^2 + 50n + 1600$.

a) Napisz wzór funkcji $z(n)$ - zależności zysku zakładu od wielkości produkcji, jeśli wiadomo, że zysk jest różnicą między przychodem zakładu a kosztami produkcji.
b) Przy jakiej wielkości produkcji zysk wynosi 0.
c) Jaka wielkość produkcji zapewnia największy zysk? Jaki jest koszt produkcji, gdy zysk jest największy?

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” „Opty - mistycznie”

Zadanie1. Szczęśliwa siódemka (5 punktów)

Liczbę 7 dzielimy na trzy części tak, aby pierwsza była dwa razy większa od drugiej.
Jak należy dokonać podziału, aby suma kwadratów wszystkich trzech części była najmniejsza?

Rozwiązanie:

Oznaczenia. Szukamy trzech liczb: x; y; z takich, że: $x+y+z=7$ *(*)*, i $x=2y$ - pierwsza liczba jest dwa razy większa od drugiej *(**)* oraz wyrażenie $x^2+y^2+z^2$ jest możliwie największe.

Warunki *(*)* i *(**)* tworzą układ:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \text{ stąd otrzymujemy: } \begin{cases} 2y+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=7-3y \\ x=2y \end{cases}$$

Mamy znaleźć takie x; y; z, dla których $x^2+y^2+z^2$ przyjmuje wartość najmniejszą

Z układu mamy: $x^2+y^2+z^2=(2y)^2+y^2+(7-3y)^2=4y^2+y^2+49-42y+9y^2$,

stąd $x^2+y^2+z^2=14y^2-42y+49=7(2y^2-6y+7)$. Niech $f(y)=x^2+y^2+z^2$, zatem $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Aby znaleźć wartość najmniejszą wyrażenia: $x^2+y^2+z^2$, szukamy najmniejszej wartości funkcji $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Ponieważ liczby mają być dodatnie, to y nie może być zupełnie dowolne. Dokładniej: $\begin{cases} x=2y>0 \\ y>0 \\ z=7-3y>0 \Rightarrow y<\frac{7}{3} \end{cases}$. Szukamy, zatem minimum funkcji $f(y)$ w przedziale $\left(0, \frac{7}{3}\right)$. Funkcja $f(y)$ jest trójmianem kwadratowym o dodatnim współczynniku przy y^2. Zatem ta funkcja osiąga najmniejszą wartość w wierzchołku paraboli będącej jej wykresem. Odcięta wierzchołka paraboli $y_w=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$

Ponieważ punkt ten leży w przedziale $\left(0, \frac{7}{3}\right)$, to właśnie w nim funkcja osiąga minimum.

Otrzymujemy stąd $y=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(x=2\cdot\frac{3}{2}=3\wedge z=7-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\right)$.

Odpowiedź: Szukany rozkład jest następujący: $7=3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie treści zadania za pomocą wyrażeń	0,5
C	Zapisanie sumy kwadratów w postaci trójmianu jednej zmiennej	0,5
D	Wyznaczenie minimum funkcji kwadratowej	1
E	Wyznaczenie szukanych liczb i podanie rozkładu liczby 7	1
F	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercise1. Lucky number seven (5 points)

Solution:

Notations: We are looking for three numbers: $x;\ y;\ z$ such that:

$x+y+z=7$ (*),

$x=2y$ - the first number is two times greater than the second one (**)

And the expression $x^2+y^2+z^2$ is possibly the smallest number.

Solution: Conditions (*) and (**) form the system:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x=2y \end{cases}$$

Hence, we obtain: $\begin{cases} 2y+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=7-3y \\ x=2y \end{cases}$

We should find the numbers $x;\ y;\ z$, for which the sum $x^2+y^2+z^2$ takes the smallest value. From the system of equations we get:

$x^2+y^2+z^2=(2y)^2+y^2+(7-3y)^2=4y^2+y^2+49-42y+9y^2$,

$x^2+y^2+z^2=14y^2-42y+49=7(2y^2-6y+7)$

Let $f(y)=x^2+y^2+z^2$, then $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. To find the smallest value of the expression: $x^2+y^2+z^2$, we should find the smallest value of function $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Of course, the number y can't be an arbitrary number because it should be positive.

That means: $\begin{cases} x=2y>0 \\ y>0 \\ z=7-3y>0 \Rightarrow y<\frac{7}{3} \end{cases}$. We are looking for the minimum of function $f(y)$ in the interval $\left(0,\frac{7}{3}\right)$. Function $f(y)$ is a quadratic trinomial with the positive coefficient of y^2.

Hence, the function achieves the smallest value in the vertex of parabola which is the function's graph. An abscissa of the vertex is $y_w=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$. The point belongs to the interval $\left(0,\frac{7}{3}\right)$, and the function has the smallest value in this interval. We get $y=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(x=2\cdot\frac{3}{2}=3\wedge z=7-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\right)$.

Answer: The searched sum decomposition is of the form: $7=3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of exercise's text in Polish	1
B	Introduction of notations and writing the appropriate mathematical expressions concerning the exercise text	0,5
C	Writing the sum of squares as the quadratic trinomial of one variable	0,5
D	Finding the minimum of quadratic function	1
E	Finding the searched numbers and giving the sum decomposition of 7	1
F	Answer in English	1

Tarea 1. Siete feliz (5 puntos)

Solución

Designaciones. Buscamos tres números: x; y; z tales que:

$x+y+z=7$ (*),

$x=2y$ - el primer número es dos veces más grande que el segundo (**)

asi como la expresión $x^2+y^2+z^2$ es la más grande posible.

Condiciones (*)y (**) constituyen el sistema:

$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x=2y \end{cases}$, de donde obtenemos: $\begin{cases} 2y+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=7-3y \\ x=2y \end{cases}$

Tenemos que encontrar tales x; y; z, para cuales $x^2+y^2+z^2$ toma el más pequeño valor

Del sistema tenemos:

$x^2+y^2+z^2=(2y)^2+y^2+(7-3y)^2=4y^2+y^2+49-42y+9y^2$

de ello $x^2+y^2+z^2=14y^2-42y+49=7(2y^2-6y+7)$. Que $f(y)=x^2+y^2+z^2$, entonces $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Para encontrar el más pequeño valor de la expresión: $x^2+y^2+z^2$, buscamos el más pequeño valor de la función $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Como los números deben ser positivos, y no puede ser enteramente libre.

Más precisamente: $\begin{cases} x=2y>0 \\ y>0 \\ z=7-3y>0 \Longrightarrow y<\frac{7}{3} \end{cases}$. Buscamos entonces el minimo de la función $f(y)$ en el intervalo $\left(0,\frac{7}{3}\right)$. La función $f(y)$ es un trinomio cuadrado con un coeficiente positivo cerca de y^2. Entonces, la función alcanza el más pequeño valor en el cúspide de la parábola que es su representación gráfica. La abscisa del cúspide de la parábola $y_w=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$. Como este punto es localizado en el intervalo $\left(0,\frac{7}{3}\right)$, justamente en él la función alcanza su minimo. De donde obtenemos $y=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(x=2\cdot\frac{3}{2}=3\wedge z=7-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\right)$

Respuesta: La descomposición buscada es la siguiente: $7=3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	1
B	Introducción de designaciones y apuntación del contenido de la tarea por medio de expresiones	0,5
C	Apuntación de la suma de los cuadrados en forma del trinomio de una variable	0,5
D	Determinación del mínimo de la función cuadrada	1
E	Determinación de números buscados y apuntación de la descomposición del número 7	1
F	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Die Glückszahl Sieben (5 Punkte)

Lösung:

Bezeichnungen: Wir suchen nach solchen drei Zahlen: $x; y; z$, dass: $x+y+z=7$ $^{(*)}$,

$x=2y$ - die zweite Zahl dreimal größer als die erste ist $^{(**)}$

und die Formel $x^2+y^2+z^2$ möglichst groß ist.

Bedingungen $^{(*)}$ und $^{(**)}$ bilden ein Gleichungssystem:

$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x=2y \end{cases}$, daher bekommen wir: $\begin{cases} 2y+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=7-3y \\ x=2y \end{cases}$

Wir sollen solche $x; y; z$ finden, für die $x^2+y^2+z^2$ den kleinsten Wert annimmt.

Aus dem Gleichungssystems haben wir:

$x^2+y^2+z^2=(2y)^2+y^2+(7-3y)^2=4y^2+y^2+49-42y+9y^2$, daher

$x^2+y^2+z^2=14y^2-42y+49=7(2y^2-6y+7)$ Sei $f(y)=x^2+y^2+z^2$, folglich

$f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Um den kleinsten Wert der Formel: $x^2+y^2+z^2$ zu finden, suchen wir den kleinsten Wert der Funktion $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Da die Zahlen positiv sein sollen, so darf y nicht völlig beliebig sein. Genauer: $\begin{cases} x=2y>0 \\ y>0 \\ z=7-3y>0 \Rightarrow y<\frac{7}{3} \end{cases}$. Wir suchen also das Minimum der Funktion $f(y)$ im Intervall $\left(0, \frac{7}{3}\right)$. Die Funktion $f(y)$ ist eine quadratische Funktion mit einem positiven Faktor vor y^2. Diese Funktion erreicht folglich den kleinsten Wert im Scheitelpunkt der Parabel, die der Graph der Funktion ist. Die Abszisse des Scheitelpunktes von der Parabel $y_w=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$. Da dieser Punkt im Intervall $\left(0, \frac{7}{3}\right)$ liegt, erreicht soeben in ihm die Funktion das Minimum. Daher bekommen wir

$y=\frac{3}{2} \Rightarrow \left(x=2\cdot\frac{3}{2}=3 \wedge z=7-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\right)$.

Antwort: Die gesuchte Zerlegung ist folgend: $7=3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	1
B	Einführen der Bezeichnungen und Aufschreiben des Aufgabeninhalts mit Hilfe von Formeln	0,5
C	Aufschreiben der Quadratsumme in Form von einer quadratischen Funktion mit einer Variabel	0,5
D	Bestimmung von dem Minimum der quadratischen Funktion	1
E	Bestimmung der gesuchten Zahlen und Angabe der Zerlegung von der Zahl 7	1
F	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. Fortunato sette (5 punti)

Soluzione:

Indicazioni: Cerchiamo tre numeri : $x;\ y;\ z$ tali che :

$x+y+z=7$ *(*)*,

$x=2y$ - il primo numero è due volte più grande del secondo *(**)*

e l'espressione $x^2+y^2+z^2$ è possibilmente più grande.

Soluzione

Le condizioni *(*)* e *(**)* fanno il sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \text{ dunque otteniamo: } \begin{cases} 2y+y+z=7 \\ x=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=7-3y \\ x=2y \end{cases}$$

Dobbiamo trovare tali $x;\ y;\ z$, per cui $x^2+y^2+z^2$ prende il più piccolo valore.

Dal sistema abbiamo : $x^2+y^2+z^2=(2y)^2+y^2+(7-3y)^2=4y^2+y^2+49-42y+9y^2$ da dove $x^2+y^2+z^2=14y^2-42y+49=7(2y^2-6y+7)$. Sia $f(y)=x^2+y^2+z^2$, dunque $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Per trovare il più piccolo valore dell'espressione: $x^2+y^2+z^2$, cerchiamo il più piccolo valore della funzione $f(y)=7(2y^2-6y+7)$. Come i numeri devono essere positivi, allora y non può essere completamente libero. Più precisamente:

$$\begin{cases} x=2y>0 \\ y>0 \\ z=7-3y>0 \Rightarrow y<\frac{7}{3} \end{cases}$$

. Cerchiamo allora il minimo della funzione $f(y)$ nell'intervallo $\left(0,\frac{7}{3}\right)$. La funzione $f(y)$ è il trinomio quadrato con il fattore positivo per y^2. Dunque questa funzione ottiene il valore più basso al vertice della parabola la quale è il suo diagramma.

La coordinata ascissa del vertice di parabola $y_w=-\frac{-6}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$

Come questo punto è situato nell'intervallo $\left(0,\frac{7}{3}\right)$, allora in questo punto la funzione ottiene il suo minimo. Quindi otteniamo $y=\frac{3}{2}\Rightarrow\left(x=2\cdot\frac{3}{2}=3\wedge z=7-3\cdot\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\right)$

Risposta: La scomposizione cercata è la seguente : $7=3+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$

Punteggio:

N dell'attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	1
B	Introduzione delle indicazioni ed iscrizione del contenuto di compito con le espressioni	0,5
C	Iscrizione della somma di quadrati dei numeri come trinomio di una variabile	0,5
D	Determinazione del minimo della funzione quadrata	1
E	Determinazione dei numeri cercati e podanie rozkładu liczby 7	1
F	Formulazione della riposta nella lingua straniera	1

Exercice 1. Un sept chanceux (5 points)

Solution:

Symboles: Nous recherchons trois nombres $x; y; z$ tels que:

$x + y + z = 7$ (*), $x = 2y$ - le premier nombre est deux fois plus grand que le deuxième (**)

et l'expression $x^2 + y^2 + z^2$ est la plus grande possible.

Les conditions (*) et (**) donnent un système d'équation :

$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x = 2y \end{cases}$ ainsi nous obtenons: $\begin{cases} 2y + y + z = 7 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 7 - 3y \\ x = 2y \end{cases}$

Nous devons trouver $x; y; z$, de telle façon que $x^2 + y^2 + z^2$ admet la plus petite valeur.

D'après le système d'équation, nous obtenons:

$x^2 + y^2 + z^2 = (2y)^2 + y^2 + (7 - 3y)^2 = 4y^2 + y^2 + 49 - 42y + 9y^2$ d'où

$x^2 + y^2 + z^2 = 14y^2 - 42y + 49 = 7(2y^2 - 6y + 7)$. Soit $f(y) = x^2 + y^2 + z^2$, ainsi / alors / donc $f(y) = 7(2y^2 - 6y + 7)$. Pour trouver la valeur la plus petite de l'équation : $x^2 + y^2 + z^2$, nous cherchons la plus petite valeur de la fonction $f(y) = 7(2y^2 - 6y + 7)$. Puisque les chiffres recherchés doivent être positif, x ne peut pas être librement choisi. Plus exactement:

$\begin{cases} x = 2y > 0 \\ y > 0 \\ z = 7 - 3y > 0 \Rightarrow y < \frac{7}{3} \end{cases}$. Ainsi, recherchons-nous le minimum de la fonction $f(y)$ dans l'intervalle $\left(0, \frac{7}{3}\right)$. La fonction $f(y)$ est un trinôme carré avec un facteur positif pour x^2.

Ainsi, cette fonction atteint-elle sa plus petite valeur au sommet de la parabole.

L'abscisse du sommet de la parabole: $y_w = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2}$

Puisque ce point se trouve dans l'intervalle $\left(0, \frac{7}{3}\right)$, c'est là que la fonction va atteindre son minimum.

Nous obtenons ainsi $y = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \wedge z = 7 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}\right)$

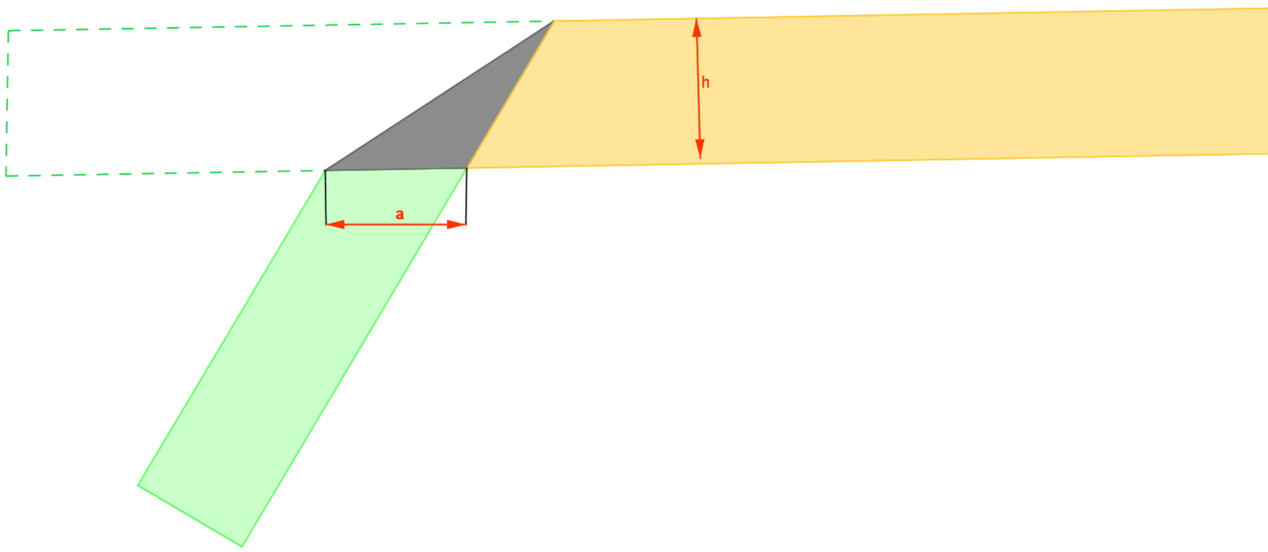
Réponse: Le système recherché est le suivant: $7 = 3 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2}$

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	1
B	Introduction des symboles et notation du contenu de l'exercice à l'aide des symboles	0,5
C	Notation de la somme des carrés en forme de trinôme carré d'une variable	0,5
D	Détermination du minimum de la fonction carrée	1
E	Détermination des nombres recherchés et formulation de la décomposition du nombre 7	1
F	Formulation de la réponse en langue étrangère	1

Zadanie 2 Złożone? To spasował! (3 punkty)

Rozwiązanie:



Pole szarego trójkąta jest równe (patrz rysunek):

$$P_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2}$$

Wysokość h tego trójkąta jest stała i równa szerokości paska papieru.
Powierzchnia tego trójkąta jest minimalna, gdy jego podstawa a jest minimalna.
Minimalna podstawa trójkąta jest równa szerokości paska papieru.
Przy takim złożeniu trójkąt jest prostokątny i równoramienny.

Odpowiedź:

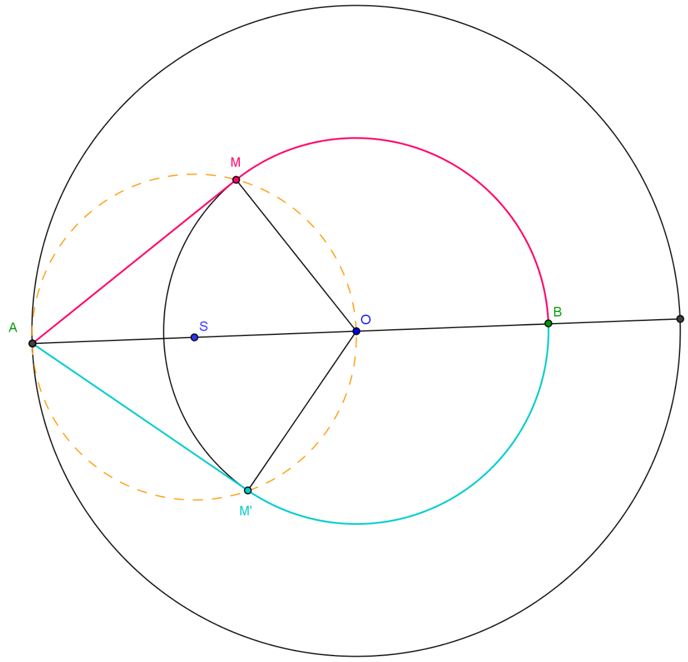
Pole szarego trójkąta jest najmniejsze, gdy jego podstawa jest równa szerokości paska papieru.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku i dyskusja wymiarów trójkąta	1
B	Odpowiedź i uzasadnienie	1
C	Wykonanie i naklejenie trójkąta na arkusz odpowiedzi	1

Zadanie 3 Wilczy głód (4 punkty)

Rozwiązanie:



Najkrótsza możliwa droga to trajektoria AMB (lub $AM'B$) wzdłuż odcinka $\overline{AM}$ ($\overline{AM'}$) potem wzdłuż łuku $\overset{\frown}{MB}$ ($\overset{\frown}{M'B}$), gdzie $o(O;OB)\cap o\left(S;\frac{1}{2}AO\right)=\{M;M'\}$ - co oznacza, że M oraz M' to punkty przecięcia się okręgu o środku O przechodzącego przez B z okręgiem o średnicy $\overline{AO}$. W trójkącie AMO, z twierdzenia Pitagorasa wynika:

$AM^2+OM^2=AO^2$, stąd $AM=\sqrt{75^2-47^2}=\sqrt{3600}=60\ [cm]$

Z drugiej strony: $\cos\angle AOM=\frac{OM}{AO}=\frac{45}{75}=0{,}6$

Stąd $|\angle AOM|\approx 53.13°$, zatem $|\angle MOB|=180°-|\angle AOM|\approx 180°-53{,}13°\approx 126{,}87°$

Długość łuku $\left|\overset{\frown}{MB}\right|=\frac{126{,}87°}{360°}\cdot 2\pi\cdot 45\approx 31{,}72\pi\approx 99{,}64\ [cm]$

Odpowiedź:

Najkrótsza droga, jaką powinien pokonać ślimak wynosi około 160 cm.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Znalezienie dobrej drogi (na rysunku lub przez opis)	1
B	Obliczenie AM	1
C	Wyznaczenie miary kątów $|\angle AOM|$ i $|\angle MOB|$. Wyznaczenie za długości łuku $\left|\overset{\frown}{MB}\right|$	1
D	Wyznaczenie długości najkrótszej drogi i odpowiedź	1

Zadanie 4. Promocja ekologiczna?? (3 punkty)

Rozwiązanie:

Najmniejszą objętość otrzymamy, gdy: wysokość pudełka będzie równa wysokości puszki i puszki będą dokładnie przylegać do ścianek opakowania.
Szukamy długości promienia podstawy opakowania R
Długość promienia puszki $r = 4$.
Z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie ΔABS mamy:

$BS^2 = AS^2 + AB^2$, czyli

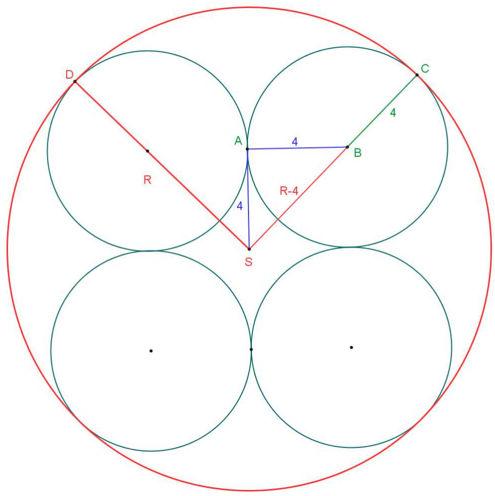
$(R-4)^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow R^2 - 8R + 16 = 16 + 16$

$\Leftrightarrow R^2 - 8R - 16 = 0$

$\Delta = 8^2 + 4 \cdot 16 = 64 + 64 = 128 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Stąd:

$$\left[R = \frac{8 - 8\sqrt{2}}{2} = 4\left(1 - \sqrt{2}\right)\right] \vee \left[R = \frac{8 + 8\sqrt{2}}{2} = 4\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$



Pierwsza liczba jest ujemna, więc $R = 4\left(1 + \sqrt{2}\right)$.
Obliczamy pole podstawy i objętość opakowania

$$P_P = \pi R^2 = \pi \cdot \left[4\left(1 + \sqrt{2}\right)\right]^2 = 16\pi\left(1 + 2\sqrt{2} + 2\right) = 16\pi\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$$

$V = P_P \cdot h$, gdzie $h = 15$, zatem $V = 16\pi\left(3 + 2\sqrt{2}\right) \cdot 15 \approx 4395$

Odpowiedź:

Minimalna objętość pudełka zawierającego cztery puszki jest równa $4395\ cm^3$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Określenie, jakie warunki muszą być spełnione, żeby objętość była minimalna i rysunek	1
B	Obliczenie promienia podstawy puszki	1
C	Obliczenie objętości puszki i odpowiedź	1

Zadanie 5. Tra-la-la (4 punkty)

Rozwiązanie:

W chwili obecnej hurtownia zarabia na płytach $(50-30)\cdot 56 = 20\cdot 56 = 1120$.

a. $(20-n)$ - zysk ze sprzedaży jednej płyty po obniżce, przy czym żeby zarabiać zysk ze sprzedaży jednej płyty musi być $(20-n)>0$,

$(56+4n)$ - ilość płyt sprzedawanych miesięcznie po obniżce ceny.

Zatem, jeżeli cena zostanie obniżona o n złotych to zysk ze sprzedaży będzie wynosił.

$f(n)=(56+4n)(20-n) \Rightarrow f(n)=-4(n+14)(n-20)$.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb naturalnych nie większych niż 20.

b. Ponieważ wykresem funkcji $f(n)$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół, wartość największą otrzymamy w wierzchołku paraboli, który leży na prostej prostopadłej do osi OX i przecina oś dokładnie pomiędzy pierwiastkami, czyli w punkcie o odciętej $n_W = \frac{-14+20}{2} = 3$ (oczywiście we wzorze na $f(n)$ można wykonać działania, trójmian uporządkować i skorzystać ze wzoru na współrzędne wierzchołka paraboli).

c. Zysk dla $n=3$ wynosi $f(3)=-4\cdot(3+14)\cdot(3-20)=-4\cdot 17\cdot(-17)=1156$.

Odpowiedź: Zysk jest największy przy cenie $50-3=47$ zł i wynosi 1156 zł.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Określenie funkcji i jej dziedziny	2
B	Określenie, dla jakiego argumentu otrzymana funkcja $f(n)$ osiąga maksimum	1
C	Określenie ceny płyty dającej największy zysk oraz obliczenie tego zysku	2

Zadanie 6. Różnica, a iloczyn? (3 punkty)

Rozwiązanie:

Niech x oznacza mniejszą z liczb, natomiast y większą.

Zatem $y-x=6 \Rightarrow y=x+6$, czyli $x \cdot y = x \cdot (x+6) = x^2+6x$, więc $xy = f(x) = x^2+6x$.

Musimy znaleźć najmniejszą wartość funkcji $f(x)=x^2+6x$.

Wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w górę, więc funkcja przyjmuje wartość najmniejszą w wierzchołku,

czyli dla $x = x_W = -\frac{6}{2} = -3$.

Wtedy $y=-3+6=3$.

Odpowiedź:

Iloczyn liczb, których różnica jest równa 6, jest najmniejszy dla liczb $3;\ -3$.

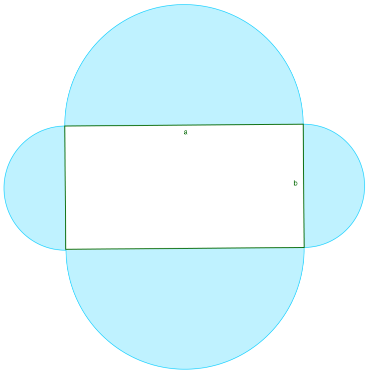
Punktacja:

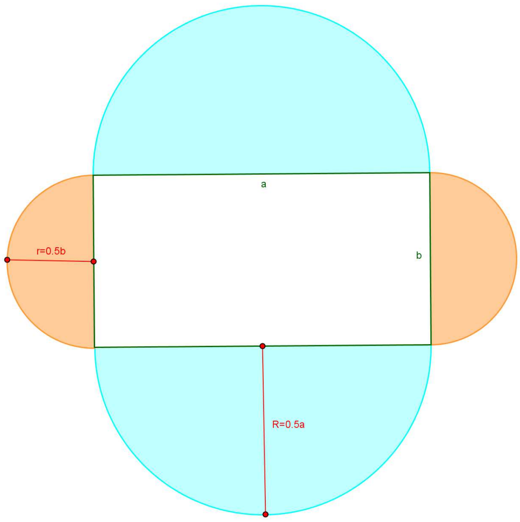
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie iloczynu szukanych liczb jako funkcji jednej zmiennej	1
B	Określenie wartości argumentu, dla której funkcja osiąga minimum	1
C	Wyznaczenie drugiej liczby i odpowiedź	1

Zadanie 7. Uszatek (5 punktów)

Rozwiązanie:

Szkicujemy opisaną sytuację i oznaczamy boki prostokąta przez a i b.





Wiemy, że $2a + 2b = 16$, czyli $b = 8 - a$.
Pole figury ograniczonej przez cztery dorysowane łuki jest równe sumie pól kół o średnicach a i b (bo mamy po dwie połówki takich kół) i pola prostokąta, czyli $P = P_{kr} + P_{kR} + P_{pr}$

Zapisujemy to pole: $P = P(a;b) = \pi \cdot \frac{b^2}{4} + \pi \cdot \frac{a^2}{4} + ab$, ale $b = 8 - a$ więc otrzymujemy

$P(a) = \pi \cdot \frac{(8-a)^2}{4} + \pi \cdot \frac{a^2}{4} + a \cdot (8-a)$, zatem $P(a) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2 + (8 - 4\pi)a + 16\pi$, gdzie $a \in (0; 8)$

Funkcja $P(a)$ jest trójmianem kwadratowym, którego wykresem jest parabola o ramionach skierowanych do góry, więc przyjmuje ona wartość najmniejszą w wierzchołku paraboli, czyli w punkcie o odciętej $a_W = a_{MIN} = -\frac{8 - 4\pi}{2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)} = -\frac{-4(\pi - 2)}{\pi - 2} = 4$

Mamy wtedy $P_{MIN} = P(4) = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 4^2 + (8 - 4\pi) \cdot 4 + 16\pi = 8\pi - 16 + 32 - 16\pi + 16\pi = 8\pi + 16$

Odpowiedź: Pole figury ograniczonej krzywą złożoną z tych czterech półokręgów jest najmniejsze, gdy boki prostokąta wynoszą: $a = 4 \wedge b = 8 - 4 = 4$, czyli gdy prostokąt jest kwadratem. To najmniejsze pole ma wartość $(8\pi + 16) cm^2$

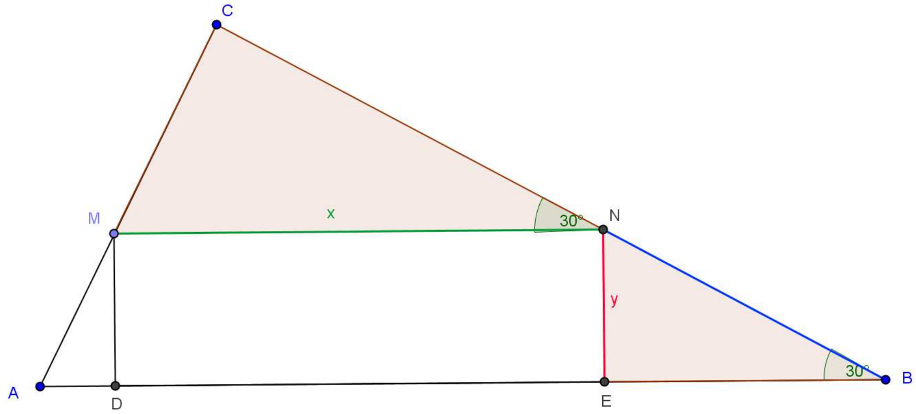
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku	1
B	Zapisanie pola figury w postaci funkcji	2
C	Wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga minimum	1
D	Obliczenie minimalnego pola i udzielenie odpowiedzi	1

Zadanie 8. Wykroić najwięcej… (4 punkty)

Rozwiązanie:

Sytuację opisaną w treści zadania przedstawiamy na rysunku.



Boki prostokąta oznaczamy przez x i y; $x>0$ i $y>0$

Z definicji funkcji trygonometrycznych w odpowiednich trójkątach mamy:

$$\frac{y}{NB}=\sin 30^\circ \Rightarrow NB=2y,$$

$$\frac{CN}{x}=\cos 30^\circ \Rightarrow CN=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\frac{BC}{AB}=\cos 30^\circ \Rightarrow BC=AB\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC=40\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow BC=20\sqrt{3} \quad BC=NB+CN$$

Z powyższych związków wynika $2y+\frac{\sqrt{3}}{2}x=20\sqrt{3}$, stąd $y=10\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$, więc $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(40-x)$ i $0<x<40$. Szukamy takiej wartości $x\in(0;40)$, dla której pole P prostokąta jest największe.

Pole prostokąta zapisujemy jako funkcję jego boków: $P=xy \Rightarrow P=x\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}(40-x)$

Zatem $P=P(x)=-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot x\cdot(x-40)$, czyli ta funkcja osiąga największą wartość. Wykresem tej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół i miejscach zerowych 0 i 40. Funkcja ta przyjmuje największą wartość dla $x=x_W=\frac{0+40}{2}=20$. Wtedy $y=\frac{\sqrt{3}}{4}(40-20)=5\sqrt{3}$

Odpowiedź: Największe pole ma ten z prostokątów, którego bok zawarty w przeciwprostokątnej ma długość $20cm$, a drugi $5\sqrt{3}cm$.

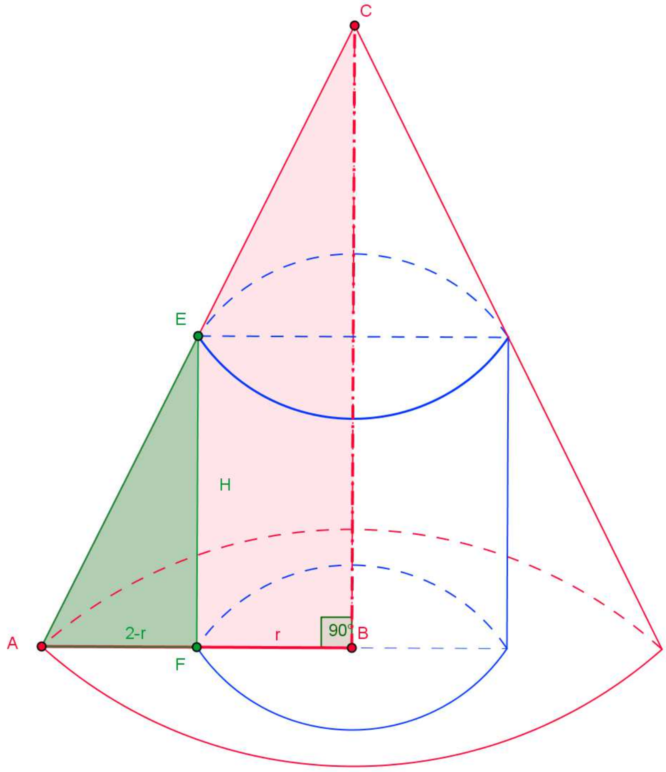
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Zapisanie pola prostokąta w postaci funkcji	1
C	Wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga maksimum	1
D	Obliczenie boków prostokąta i udzielenie odpowiedzi	1

Zadanie 9. Walec w stożku? (5 punktów)

Rozwiązanie:

Informacje zawarte w treści zadanie przedstawiamy na poniższym rysunku.
Oznaczamy promień podstawy walca przez r, a jego wysokość przez H.



Z podobieństwa trójkątów ΔABC i ΔAFE mamy

$$\frac{AF}{AB}=\frac{FE}{BC}\Rightarrow\frac{2-r}{2}=\frac{H}{4}\Rightarrow H=2\cdot(2-r),\text{ gdzie } H>0\Rightarrow r\in(0;\,2)$$

Liczymy pole powierzchni bocznej walca

$$P_{pb}=2\pi rH=2\pi r\cdot 2\cdot(2-r)\Rightarrow P_{pb}=P(r)=4\pi\cdot r\cdot(2-r)$$

Wykresem funkcji $P(r)$ jest parabola o ramionach skierowanych w dół.

Zatem największe pole powierzchni bocznej otrzymamy w wierzchołku, czyli dla $r=1$ (odcięta środka „odcinka łączącego pierwiastki”).

Wtedy $H=2\cdot(2-1)=2$, stąd objętość walca o największym polu powierzchni bocznej jest równa $V=\pi r^2\cdot H=2\pi$

Odpowiedź: Największą powierzchnie boczną ma walec, którego promień podstawy $r=1$ natomiast wysokość $H=2$. Objętość tego walca jest równa $V=2\pi$

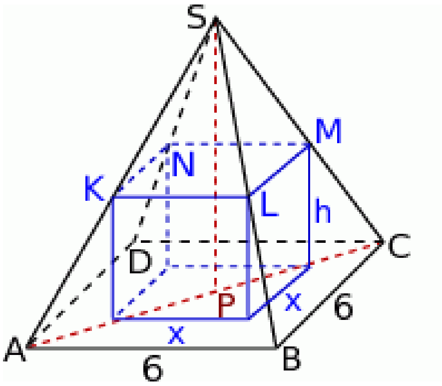
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Zapisanie pola powierzchni bocznej walca w postaci funkcji	2
C	Wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga maksimum	1
D	Obliczenie wymiarów walca, jego objętości i udzielenie odpowiedzi	1

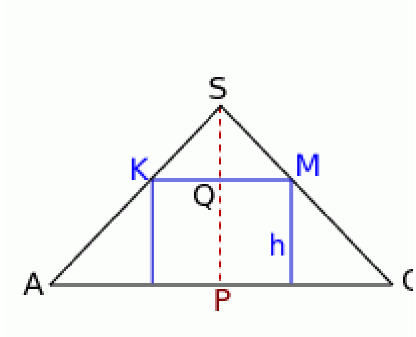
Zadanie 10. Ostro…belka (5 punktów)

Rozwiązanie:

Rozpoczynamy od rysunku.



Rozpatrujemy ΔACS



Jest to trójkąt równoramienny o ramionach długości 6 i podstawie długości $6\sqrt{2}$. Jego wysokość SP ma długość $SP = \sqrt{SC^2 - PC^2} = \sqrt{36-18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Oznaczamy przez Q punkt wspólny wysokości $\overline{SP}$ ostrosłupa oraz górnej podstawy graniastosłupa, przez h wysokość, a przez x długość krawędzi podstawy graniastosłupa. W takim razie MQ to połowa przekątnej w kwadracie o boku x, czyli $MQ = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Z podobieństwa trójkątów ΔMQS i ΔCPS mamy

$$\frac{MQ}{SQ} = \frac{CP}{SP} \Rightarrow \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{3\sqrt{2}-h} = \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} - h \Rightarrow h = 3\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

W takim razie pole powierzchni bocznej graniastosłupa jest równe

$$P(x) = 4x \cdot h = 4x\left(3\sqrt{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow P(x) = -2\sqrt{2}x(x-6).$$

Wykresem otrzymanej funkcji jest parabola o ramionach skierowanych w dół, więc największą wartość pola otrzymamy w wierzchołku, czyli dla $x = \frac{0+6}{2} = 3$ (dokładnie w środku między pierwiastkami).

Pole powierzchni bocznej jest wtedy równe $P(3) = -2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot (3-6) = 18\sqrt{2}$

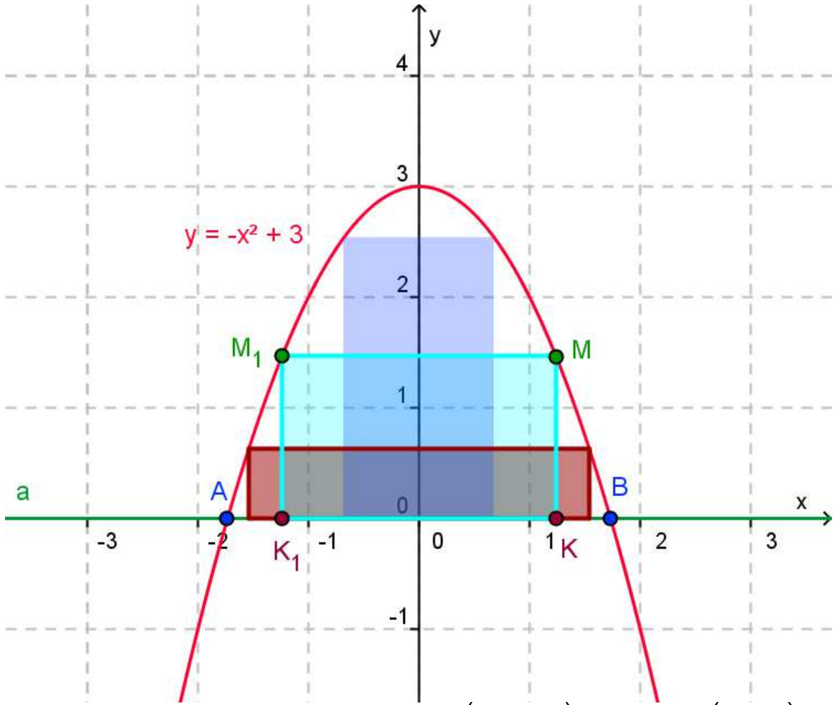
Odpowiedź: W opisanej sytuacji maksymalna możliwa powierzchnia boczna graniastosłupa jest równa $18\sqrt{2}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku, wprowadzenie oznaczeń	1
B	Zapisanie pola powierzchni bocznej graniastosłupa w postaci funkcji	2
C	Wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga maksimum	1
D	Obliczenie maksymalnej powierzchni bocznej; udzielenie odpowiedzi	1

Zadanie 11. Pod namiotem słońca?... (5 punktów)

Rozwiązanie: Sytuację opisaną w treści zadania przedstawiamy na wykresie



Zgodnie z treścią zadania i rysunkiem, mamy: $A=\left(-\sqrt{3};\,0\right)$ oraz $B=\left(\sqrt{3};\,0\right)$; $\overline{KK_1}\subset\overline{AB}$

Jeśli punkt $M=(x;\,y)$ jest wierzchołkiem prostokąta, to pozostałe wierzchołki prostokąta mają współrzędne: $M_1=(-x;\,y)$; $K=(x;\,0)$; $K_1=(-x;\,0)$

Jeśli punkt $M=(x;\,y)$ leży na paraboli, to $M=\left(x;\,3-x^2\right)$, to pozostałe wierzchołki mają współrzędne $M_1=\left(-x;\,3-x^2\right)$; $K=(x;\,0)$; $K_1=(-x;\,0)$. Boki prostokąta mają długości:

$a=\left|\overline{KK_1}\right|=\sqrt{(x-(-x))^2+(0-0)^2}=\sqrt{(2x)^2}=2|x|=2x$;

$b=\left|\overline{KM}\right|=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2}=|y|=3-x^2$. $\overline{KK_1}\subset\overline{AB}$ i możemy przyjąć, że $x>0$ wtedy $x\in(0;\,\sqrt{3})$. Obwód prostokąta jest, więc równy $l=l(x)=2(a+b)=2\left(2x+3-x^2\right)$, gdzie $x\in D=\left(0;\,\sqrt{3}\right)$. Funkcja $l(x)=-2x^2+4x+6$ największą wartość przyjmuje dla argumentu:

$x_W=-\dfrac{4}{2\cdot(-2)}=1\in D$, a wartość ta jest równa $l(1)=-2\cdot1+4\cdot1+6=8$.

Odpowiedź: Największa wartość obwodu prostokąta o danych własnościach wynosi 8.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie wykresu funkcji i szkiców prostokątów	1
B	Określenie obwodu prostokąta jako funkcji zmiennej x oraz dziedziny	2
C	Wyznaczenie argumentu, dla którego funkcja osiąga maksimum	1
D	Obliczenie maksymalnej obwodu; udzielenie odpowiedzi	1

Zadanie 12. Przychód, koszt, zysk… (4 punkty)

Rozwiązanie:

a. Musimy od przychodu odjąć koszty produkcji.

$z(n) = p(n) - k(n)$ $z(n) = 150n - n^2 - 50n - 1600 = -n^2 + 100n - 1600$

Odpowiedź: $z(n) = -n^2 + 100n - 1600$

b. Rozwiązujemy równanie $z(n) = 0$:

$-n^2 + 100n - 1600 = 0 \quad / : (-1)$

$n^2 - 100n + 1600 = 0$; $\Delta = 100^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1600 = 100^2 - (2 \cdot 40)^2$

$\Rightarrow \Delta = (100 - 80) \cdot (100 + 80) = 20 \cdot 180 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 36 = (2 \cdot 5 \cdot 6)^2 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 60$

$z(n) = 0 \Leftrightarrow (n = 20 \vee n = 80)$

Odpowiedź: Zysk jest równy zero, gdy $z(n) = 0 \Leftrightarrow (n = 20 \vee n = 80)$

c. Wykresem funkcji zysku jest parabola o ramionach skierowanych w dół, więc największą wartość przyjmuje on w wierzchołku paraboli, czyli dla $n = -\frac{100}{-2} = 50$

oszt produkcji jest wtedy równy $k(50) = 50^2 + 50 \cdot 50 + 1600 = 6600$.

Odpowiedź:

Największy zysk jest osiągany przy produkcji $n = 50$ sztuk,
koszt tej produkcji wynosi: 6600 zł.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyrażenie zysku jako funkcji wielkości produkcji	1
B	Określenie wielkości produkcji, przy której zysk jest równy zero	1
C	Określenie wielkości produkcji, przy której zysk jest największy	1
D	Określenie kosztu produkcji gdy zysk jest największy	1

Pakiet M-3.6 „Zadania nielubiane: wykaż, uzasadnij, czy istnieje…"

I. Treści merytoryczne:

- pojęcie i podstawowe własności logarytmów (w tym wzór na zmianę podstawy logarytmu),
- prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym,
- wzory skróconego mnożenia (w szczególności sześcian sumy i suma sześcianów),
- wielomiany i rozkład wielomianu na czynniki,
- wartości wyrażeń dla danej wartości zmiennej,
- działania na wyrażeniach wymiernych,
- własności funkcji do rozwiązania zadań (w szczególności wykładniczej, logarytmicznej i trygonometrycznych),
- figury przystające i figury podobne oraz ich własności,
- związki miarowe w figurach płaskich,
- wielościany, objętość i pole powierzchni całkowitej,
- związki między ilością wierzchołków, krawędzi, przekątnych w graniastosłupach.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności interpretacji tekstu matematycznego i formułowania uzyskanych wyników,
- kształcenie w posługiwaniu się obiektami matematycznymi,
- kształcenie umiejętności doboru modelu matematycznego do zaistniałej sytuacji
- tworzenie i stosowanie strategii,
- prowadzenie rozumowania (tworzenie łańcucha argumentów) i uzasadnianie jego poprawności.

III. Metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup (zespoły zadaniowe w innym składzie niż na poprzednich spotkaniach).
4. Praca w grupach: każdy zespół wymyśla dla siebie nazwę (związaną z matematyką, działaniami społecznymi, historycznymi lub współczesnymi postaciami świata odkryć, dokonań naukowych) oraz logo zespołu.
5. Przedstawienie nazw i logo przez poszczególne grupy.
6. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
7. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
8. Zebranie kart z rozwiązaniami.
9. Podsumowanie zajęć.
10. Zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające”.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”:

[1] Dróbka N., Szymański K., *Zbiór zadań z geometrii dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1997, (zad.7.15 str.64; zad.3.49 str.29)

[2] Karpiński M., Lech J., *Zbiór zadań dla klasy II*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe Gdańsk 1994, zad.116 str.37 (Zad. 2)

[3] CKE, Matematyka, Poziom podstawowy, Przykładowy zestaw zadań nr 2, marzec 2008 (Zad. 4)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem”:

[1] Dróbka N., Szymański K., *Zbiór zadań z geometrii dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1997, (Zadanie 3 - zad. 1.59 str.11; Zadanie 4 - zad. 2.17 str.18; Zadanie 5 - zad. 7.13 str.64; Zadanie 6 - zad. 9.4 str.87 i zad.9.5 str.87)

[2] Gdowski B., Pluciński E., *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne, Warszawa 1986 (Zadanie 7 - zad.84, str.16; Zadanie 8 - zad.85, str.16; Zadanie 9 - zad.364, str.37; Zadanie 10 - zad.462, str.42; Zadanie 11 - zad.297, str.34; Zadanie 12 - zad.1777, str.144)

[3] Kujon Polski GW, 25-26 marca 2006 (Zadanie 13)

[4] OKE, Matematyka, Arkusz I, Próbny egzamin maturalny, czerwiec 2004 (Zadanie 2)

Spotkanie 3. „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadań.
3. Nauczyciel ocenia pracę zespołów zadaniowych (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem” będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Rysunki do Pakietu M-3.6 wykonała Iwona Derendarz za pomocą programu Cabri Geometry II

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" – „Zadania nielubiane: wykaż, uzasadnij, czy istnieje…"

Exercise 1. How the ratios are preserved? (5 points)

The ratio of ABC triangle's altitudes is equal to $h_a : h_b : h_c = 5:4:6$. Find the ratio $a:b:c$ of triangle's sides.

Aufgabe 1. Wie lassen sich die Verhältnisse übertragen? (5 Punkte)

Das Höhenverhältnis in einem Dreieck ABC ist gleich $h_a : h_b : h_c = 5:4:6$. Berechne das Verhältnis der Seiten $a:b:c$ von diesem Dreieck.

Esercizio 1. Come si spostano le relazioni? (5 punti)

La relazione delle altezze del triangolo ABC è uguale a $h_a : h_b : h_c = 5:4:6$. Dimostra la relazione $a:b:c$ dei lati di questo triangolo.

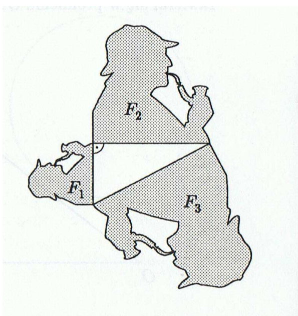
Exercice 1. Comment les relations se déplacent-elles? (5 points)

Le rapport de la hauteur du triangle ABC est égal à $h_a : h_b : h_c = 5:4:6$. Détermine le rapport $a:b:c$ des côtés de ce triangle.

Tarea 1. ¿Cómo se transponen las relaciones? (5 puntos)

La relación de la altura del triángulo ABC equivale a $h_a : h_b : h_c = 5:4:6$.
Determina la relación $a:b:c$ de los lados de este triángulo.

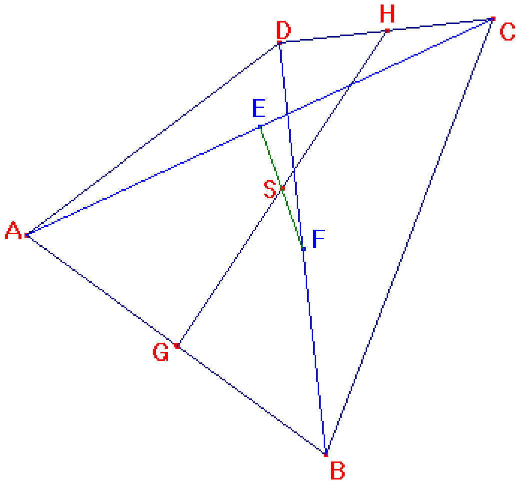
Zadanie 2. Co sądzisz drogi Watsonie? (3 punkty)



Figury F_1, F_2, F_3 są podobne.

Wykaż, że suma pól figur F_1 *i* F_2 jest równa polu figury F_3.

Zadanie 3. Pamiętaj o analitycznej… (3 punkty)



Wykaż, że odcinek łączący środki przeciwległych boków czworokąta ma wspólny środek z odcinkiem łączącym środki przekątnych tego czworokąta.

Zadanie 4. Dwa grzyby w barszcz (4 punkty)

Uzasadnij, że nie istnieje trójkąt prostokątny, w którym przeciwprostokątna ma długość 24, a kąty ostre α i β takie, że $\cos\alpha = \frac{3}{4}$ i $tg\beta = \frac{4}{3}$

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Zadania nielubiane: wykaż, uzasadnij, czy istnieje…"

Zadanie1. Jak przenoszą się stosunki? (5 punktów)

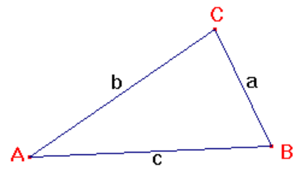
Stosunek wysokości trójkąta ABC jest równy $h_a : h_b : h_c = 5:4:6$.
Wyznacz stosunek $a:b:c$ boków tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Porównujemy pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Otrzymujemy: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ oraz $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b} = \frac{4}{6}$

Zatem: $\frac{b}{a} = \frac{15}{12}$ i $\frac{c}{b} = \frac{10}{15}$, czyli $a:b:c = 12:15:10$.



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Zapisanie stosunków boków w zależności od stosunków wysokości	1
C	Udzielenie poprawnej odpowiedzi	1
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	2

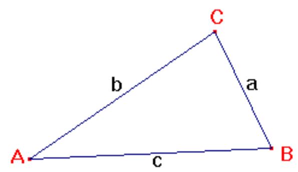
Exercise 1. How the ratios are preserved? (5 points)

Solution:

We compare triangle's area: $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

We obtain: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ and $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b} = \frac{4}{6}$

Thus: $\frac{b}{a} = \frac{15}{12}$ and $\frac{c}{b} = \frac{10}{15}$, so $a:b:c = 12:15:10$.



Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	1
B	Writing the ratios of sides depending on the ratios of altitudes	1
C	Giving correct answer	1
D	Formulation of solution in foreign language	2

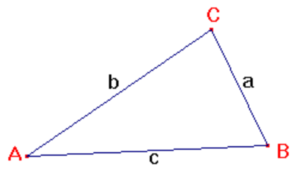
Aufgabe 1. Wie lassen sich die Verhältnisse übertragen? (5 Punkte)

Lösung:

Wir vergleichen die Dreiecksfläche $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Wir bekommen: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ und $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b} = \frac{4}{6}$

Folglich: $\frac{b}{a} = \frac{15}{12}$ i $\frac{c}{b} = \frac{10}{15}$, also $a : b : c = 12 : 15 : 10$.



Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnisch	1
B	Aufschreiben der Seitenverhältnisse je nach den Höhenverhältnissen	1
C	Angabe der richtigen Antwort	1
D	Antwortformulierung in einer Fremdsprache	2

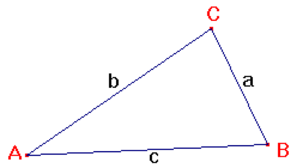
Esercizio 1. Come si spostano le relazioni? (5 punti)

Soluzione:

Cofrontiamo la superficie del triangolo $P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$

Otteniamo: $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{5}{4}$ inoltre $\frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b} = \frac{4}{6}$

Dunque: $\frac{b}{a} = \frac{15}{12}$ i $\frac{c}{b} = \frac{10}{15}$, cioè $a : b : c = 12 : 15 : 10$.



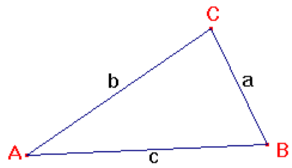
Punteggio:

N dell'attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	1
B	Espressione della relazione dei lati nei confronti delle relazioni delle altezze	1
C	Risposta corretta	1
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	2

Exercice 1. Comment les relations se déplacent-elles ? (5 points)

Solution:

Nous comparons l'aire du triangle $P=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$



Nous obtenons: $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{5}{4}$ et $\frac{h_b}{h_c}=\frac{c}{b}=\frac{4}{6}$

Ainsi: $\frac{b}{a}=\frac{15}{12}$ i $\frac{c}{b}=\frac{10}{15}$, donc $a:b:c=12:15:10$.

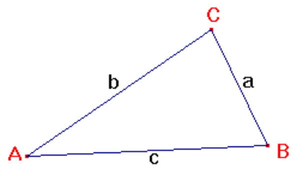
Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduire en langue polonaise	1
B	Inscrire les rapports des côtés en relation avec les rapports de la hauteur	1
C	Donner la réponse correcte	1
D	Formuler la réponse en langue étrangère	2

Tarea 1. ¿Cómo se transponen las relaciones? (5 puntos)

Solución:

Comparamos el área del triángulo $P=\frac{1}{2}a\cdot h_a=\frac{1}{2}b\cdot h_b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$



Obtenemos: $\frac{h_a}{h_b}=\frac{b}{a}=\frac{5}{4}$ así como $\frac{h_b}{h_c}=\frac{c}{b}=\frac{4}{6}$

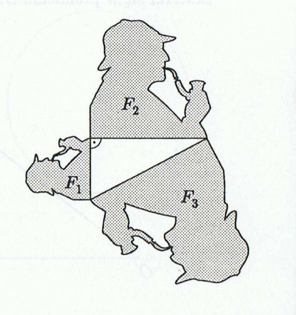
Entonces: $\frac{b}{a}=\frac{15}{12}$ i $\frac{c}{b}=\frac{10}{15}$, es decir $a:b:c=12:15:10$.

Puntuación:

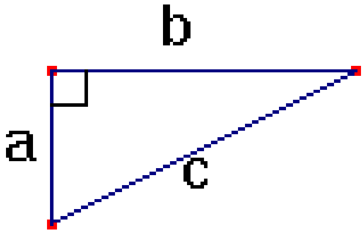
Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	1
B	Anotación de las relaciones de los lados según las relaciones de la altura	1
C	Respuesta correcta	2
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	2

Zadanie 2. Co sądzisz drogi Watsonie? (3 punkty)

Rozwiązanie:



Oznaczmy przyprostokątne: *a, b,* zaś przeciwprostokątną: *c*



Z twierdzenia Pitagorasa: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

Zauważmy, że:

$$\frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \text{ i } \frac{P_3}{P_2} = \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

gdzie P_i oznacza pole figury F_i, i=1,2,3.

Mamy, więc: $\frac{P_1}{P_3} + \frac{P_2}{P_3} = 1$, czyli $P_1 + P_2 = P_3$.

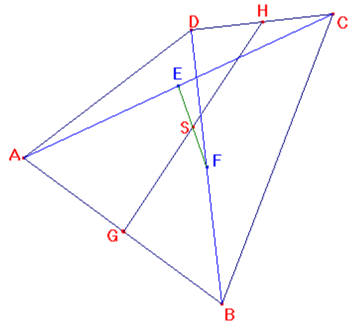
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Określenie skali podobieństwa figur	1
B	Zapisanie twierdzenia Pitagorasa z użyciem skal podobieństwa	1
C	Zapisanie związku między polami, jako konsekwencji uzyskanych związków	1

Zadanie 3. Pamiętaj o analitycznej… (3 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez G i H środki boków AB i DC czworokąta $ABCD$.
Wtedy S_1 będzie środkiem $\overline{GH}$



i ponieważ $G\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$

oraz $H\left(\frac{x_C+x_D}{2}, \frac{y_C+y_D}{2}\right)$

mamy: $S_1\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right)$.

Natomiast
$E\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$ i $F\left(\frac{x_D+x_B}{2}, \frac{y_D+y_B}{2}\right)$, oznaczmy S_2 środek odcinka EF.

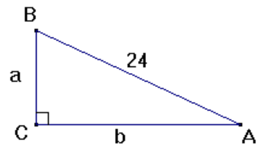
Wtedy: $S_2\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}, \frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\right)$. Mamy, więc $S_1 = S_2 = S$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka łączącego środki krawędzi	1
B	Wyznaczenie współrzędnych środka odcinka łączącego środki przekątnych	1
C	Stwierdzenie, że jest to ten sam punkt	1

Zadanie 4. Dwa grzyby w barszcz (4 punkty)

Rozwiązanie:



Załóżmy, że mamy trójkąt prostokątny (rysunek obok).
Wtedy:

$\cos\alpha = \frac{b}{24}$, $\frac{b}{24} = \frac{3}{4}$, $b = 18$

$tg\beta = \frac{b}{a}$, $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$, $\frac{18}{a} = \frac{4}{3}$, $a = \frac{27}{2}$, ale przy takich a i b nie jest prawdziwy związek:

$a^2 + b^2 = c^2$, zatem taki trójkąt prostokątny nie istnieje.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie długości przyprostokątnych z warunków zadania	2
B	Sprawdzenie, czy kwadrat przeciwprostokątnej równa się sumie kwadratów przyprostokątnych	1
C	Sformułowanie odpowiedzi	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” -
„Zadania nielubiane: wykaż, uzasadnij, czy istnieje…”

Exercise 1. Similarity again (6 points)

Point O is the centre of the circle circumscribed round the triangle ΔABC. Segments $\overline{AD}$ and $\overline{DB}$ have the lengths equal to 9 and 4, respectively. Prove, using the properties of similar triangles, that $\left|\overline{CD}\right| = 6$.

Aufgabe 1. Wiederum Ähnlichkeit (6 Punkte)

Der Punkt O ist ein Umkreismittelpunkt des Dreiecks ΔABC. Strecken $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ sind von Längen, die entsprechend 9 und 4 betragen. Beweise, dass $\left|\overline{CD}\right| = 6$. Benutze dabei die Ähnlichkeit von entsprechenden Dreiecken.

Esercizio 1. Di nuovo similitudine (6 punti)

Il punto O è il centro della circonferenza circonscritta a ΔABC. I segmenti $\overline{AD}$ e $\overline{DB}$ hanno la lunghezza di 9 e 4. Prova, usando la similitudine adeguata di triangoli, che $\left|\overline{CD}\right| = 6$.

Exercice 1. Trouve la ressemblance (6 points)

Le point O est le milieu du cercle circonscrit dans ΔABC. Les segments $\overline{AD}$ et $\overline{DB}$ sont longs de 9 et 4. En t’appuyant sur la ressemblance des triangles convenables, prouve que $\left|\overline{CD}\right| = 6$.

Tarea 1. La semejanza otra vez (6 puntos)

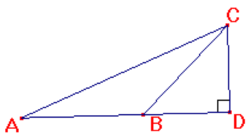
Punto O constituye un medio del círculo circunscribido sobre ΔABC. Los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{DB}$ tienen las longitudes adecuadamente 9 y 4.

Prueba, aprovechando la semejanza de los triángulos adecuados, que $\left|\overline{CD}\right| = 6$.

Zadanie 2. Nie taki diabeł straszny (4 punkty)

Na poniższym rysunku przedstawiono równoramienny ΔABC (o podstawie AC) oraz prostokątny równoramienny ΔBDC (o podstawie BC).

Uzasadnij, że $\cos(\angle ACD) < \frac{1}{2}$.



Zadanie 3. Może nie wprost? (4punkty)

Zbadaj, czy istnieje trójkąt, w którym dwusieczne dwóch jego kątów wewnętrznych są prostopadłe.

Zadanie 4. Wprawka (3 punkty)

W ΔABC poprowadzono środkową AD.
Wykaż, że odległości punktów B i C od prostej AD są równe.

Zadanie 5. Etiudka (3 punkty)

Czy istnieje trójkąt, którego wysokości są równe $3cm$, $\frac{3}{2}cm$, $1cm$?

Zadanie 6. Troszkę 3D (3 punkty)

Zbadaj, czy istnieje:

a) Graniastosłup, w którym liczba przekątnych jest równa liczbie jego wierzchołków.
b) Graniastosłup, w którym liczba przekątnych jest 3 razy większa od liczby jego krawędzi bocznych.
c) Ostrosłup o podstawie trójkątnej, którego wszystkie ściany, łącznie z podstawą, są trójkątami prostokątnymi.

Zadanie 7. Ach, te ułamki (4 punkty)

Wykazać, że jeżeli $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ to co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są liczbami przeciwnymi.

Zadanie 8. Sumy sześcianów i sześcian sumy (3 punkty)

Wykazać, że jeśli $a+b+c=0$, to $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Zadanie 9. Potęga potęgi. Wspólne podstawy-bezcenne (7 punkty)

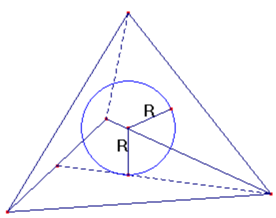
a) Która z liczb jest większa $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$, czy $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$?

b) Wykazać, że $\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}>2$.

Zadanie 10. Bezou'tki (3 punkty)

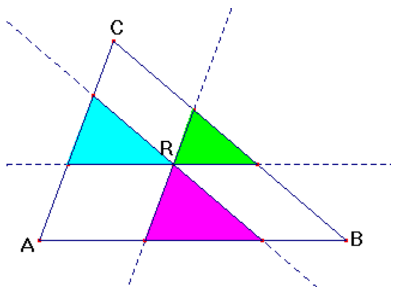
Wykazać, że dla $n\in N_+$ wielomian $(x-2)^{2n}+(x-1)^n-1$ jest podzielny przez $(x-1)\cdot(x-2)$.

Zadanie 11. Kula i wiele ścian (4 punkty)



Wykazać, że dla każdego wielościanu opisanego na kuli o promieniu R stosunek objętości wielościanu do jego pola powierzchni jest wielkością stałą i równą $\frac{R}{3}$.

Zadanie 12. Wariacja (6 punktów)



Przez punkt R położony wewnątrz ΔABC poprowadzono trzy proste równoległe do boków trójkąta.
Otrzymano w ten sposób trzy trójkąty o wspólnym wierzchołku R i polach P_1, P_2, P_3.

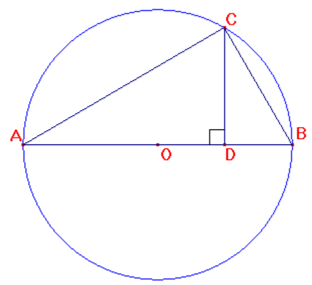
Uzasadnij, że $P_{\Delta ABC}=\left(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3}\right)^2$

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” „Zadania nielubiane: wykaż, uzasadnij, czy istnieje…”

Zadanie1. Znów podobieństwo (6 punktów)

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na ΔABC. Odcinki $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$ mają długości odpowiednio równe 9 i 4. Udowodnij, wykorzystując podobieństwo odpowiednich trójkątów, że $|CD| = 6$.

Rozwiązanie:



$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (kk)

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, więc $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

$|CD|^2 = 9 \cdot 4 = 36$, $|CD| = 6$.

Punktacja:

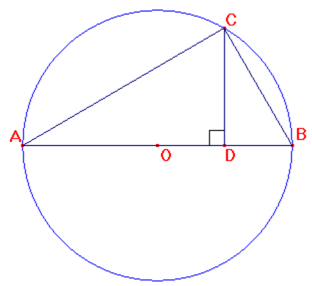
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	1
B	Stwierdzenie i uzasadnienie podobieństwa trójkątów	1
C	Poprawne zapisanie proporcji	1
D	Wyznaczenie $|CD|$	1
E	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	2

Exercise1. Similarity again (6 points)

Metody dowodzenia twierdzeń

Satanistyczna – Diabli wiedzą jak to udowodnić

Solution:



$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (AAA angles criterion)

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, so $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

$|CD|^2 = 9 \cdot 4 = 36$, $|CD| = 6$.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	1
B	Argumentation for triangles similarity	1
C	Writing of correct proportion	1
D	Finding $|CD|$	1
E	Answer in foreign language	2

Aufgabe 1. Wiederum Ähnlichkeit (6 Punkte)

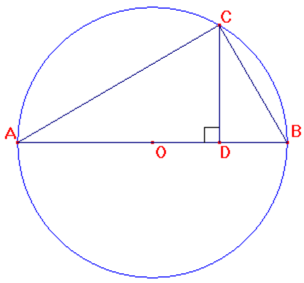
Lösung:

$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (kk)

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, also

$|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

$|CD|^2 = 9 \cdot 4 = 36$, $|CD| = 6$.



Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktenzahl
A	Übersetzung ins Polnisch	1
B	Feststellung und Begründung der Ähnlichkeit bei Dreiecken	1
C	Richtiges Vorschlagaufschreiben	1
D	Bestimmung von $\|CD\|$	1
E	Antwortformulierung in einer Fremdsprache	2

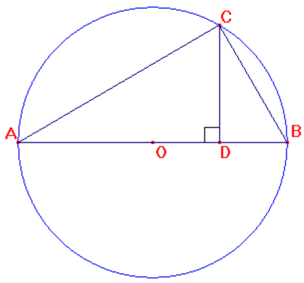
Esercizio 1. Di nuovo la similitudine (6 punti)

Soluzione:

$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (kk)

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, quindi $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

$|CD|^2 = 9 \cdot 4 = 36$, $|CD| = 6$.



Punteggio:

N dell'attività	Tappe della soluzione Dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	1
B	Asserzione e prova della similitudine di triangoli	1
C	Espressione corretta delle proporzioni	1
D	Indicazione di $\|CD\|$	1
E	Formulazione della risposta nella lingua straniera	2

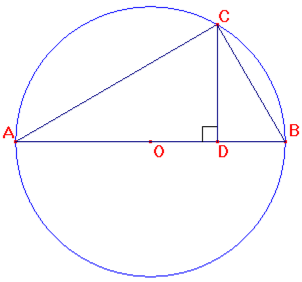
Exercice 1. Trouve la ressemblance (6 points)

Solution:

$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (kk)

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, donc $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

$|CD|^2 = 9 \cdot 4 = 36$, $|CD| = 6$.



Traduction: *Les méthodes de démonstration des théorèmes Satanique – seul le diable le sait*

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction de l'exercice en langue polonaise	1
B	Constatation et justification de la ressemblance des triangles	1
C	Inscription correcte des proportions	1
D	Désignation de $|CD|$	1
E	Formuler la réponse en langue étrangère	2

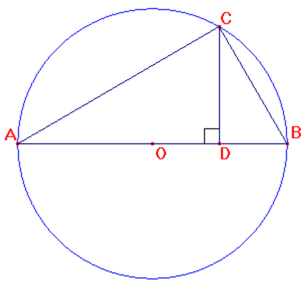
Tarea 1. La semejanza otra vez (6 puntos)

Solución:

$\Delta ADC \sim \Delta CDB$ (kk)

$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|CD|}{|DB|}$, entonces $|CD|^2 = |AD| \cdot |DB|$

$|CD|^2 = 9 \cdot 4 = 36$, $|CD| = 6$.

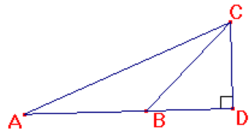


Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	1
B	Constatación y motivación de la semejanza de los triángulos	1
C	Anotación correcta de la proporción	1
D	Determinación $|CD|$	1
E	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	2

Zadanie 2. Nie taki diabeł straszny (4 punkty)

Rozwiązanie:



Oznaczmy: $|BD| = x = |DC|$, wtedy $|BC| = x\sqrt{2} = |AB|$, $|AD| = x\left(\sqrt{2}+1\right)$

$tg\alpha = \dfrac{x\left(\sqrt{2}+1\right)}{x} = \sqrt{2}+1$, $tg\alpha \approx 2{,}4142$, $\alpha \approx 67{,}5^o$

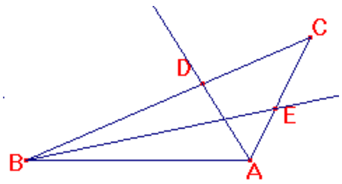
$\cos 60^o = \dfrac{1}{2}$ i $\cos\alpha$ jest z I ćw. Zatem $\cos 67{,}5^o < \cos 60^o$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenie jednego z boków trójkąta i wyrażenie potrzebnych pozostałych odcinków za jego pomocą	1
B	Wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznej	1
C	Wyznaczenie wartości kąta α	1
D	Wykazanie warunku zadania	1

Zadanie 3. Może nie wprost? (4punkty)

Rozwiązanie:



AD i BE to dwusieczne kątów α i β trójkąta ABC
Załóżmy, więc że dwusieczne są prostopadłe.
Mamy, więc: $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90^o$, zatem $\alpha + \beta = 180^o$.

Suma miar kątów w trójkącie wynosiłaby wtedy: $\alpha + \beta + \chi = 180^o + \chi$, gdzie $\chi > 0$, czyli więcej niż 180^o, co jest niemożliwe.
Taki trójkąt nie istnieje.

Punktacja:

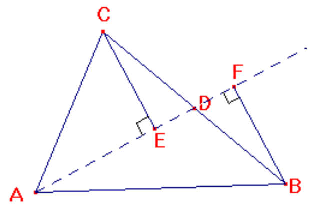
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenie trójkąta i kątów powstałych po poprowadzeniu dwusiecznych	1
B	Zapisanie związków między kątami	1
C	Stwierdzenie nieistnienia takiego trójkąta z uzasadnieniem	2

Zadanie 4. Wprawka (3 punkty)

Rozwiązanie:

$\Delta EDC \equiv \Delta FDB$ (kbk)

Zatem: $|CE| = |BF|$.



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie rysunku z oznaczeniem odległości	1
B	Stwierdzenie przystawania odpowiednich trójkątów z uzasadnieniem	1
C	Stwierdzenie równości odpowiednich odcinków	1

Zadanie 5. Etiudka (3 punkty)

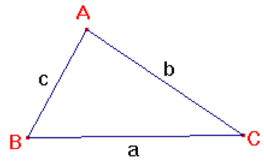
Rozwiązanie:

Pole trójkąta $P = \frac{1}{2} a \cdot 3 = \frac{1}{2} b \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} c \cdot 1$

Uzyskujemy: $c = \frac{3}{2} b = 3a$.

Zatem $a = \frac{1}{3} c$ i $b = \frac{2}{3} c$.

Tak, więc $c = a + b$, a taki trójkąt nie istnieje.



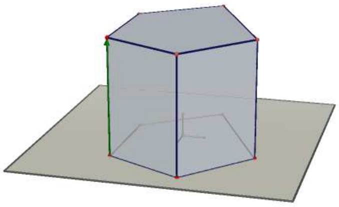
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie związków między bokami danego trójkąta	1
B	Wyznaczenie dwóch boków za pomocą trzeciego	1
C	Sformułowanie odpowiedzi	1

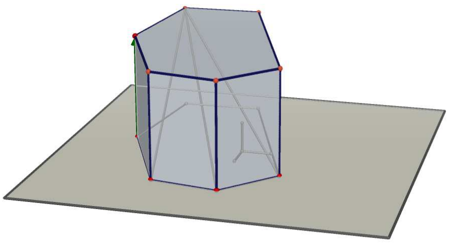
Zadanie 6. Troszkę 3D (3 punkty)

Rozwiązanie:

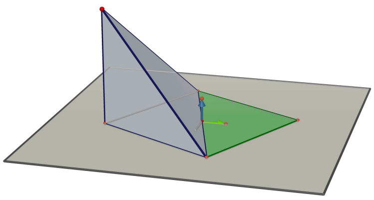
a) W graniastosłupie pięciokątnym liczba przekątnych (10) jest równa liczbie jego wierzchołków.



b) W graniastosłupie sześciokątnym liczba jego przekątnych(18) jest równa potrojonej liczbie jego krawędzi bocznych.



c) Tak, jak na rys.
(Ostrosłup „pochyły” – spodek wysokości jest wierzchołkiem kąta ostrego)



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sformułowanie odpowiedzi a)	1
B	Sformułowanie odpowiedzi b)	1
C	Sformułowanie odpowiedzi c)	1

Zadanie 7. Ach, te ułamki (4 punkty)

Rozwiązanie:

Z założenia $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a+b+c}=0$,

Mamy, więc:

$$\frac{bc(a+b+c)+ac(a+b+c)+ab(a+b+c)-abc}{abc(a+b+c)}=0$$

$\frac{c(a+b+c)(b+a)+ab(a+b+c-c)}{abc(a+b+c)}=0$ to: $\frac{(a+b)[c(a+b+c)+ab]}{abc(a+b+c)}=0$

$\frac{(a+b)[ac+bc+c^2+ab]}{abc(a+b+c)}=0$ mamy: $\frac{(a+b)[a(b+c)+c(b+c)]}{abc(a+b+c)}=0$, następnie:

$\frac{(a+b)(b+c)(a+c)}{abc(a+b+c)}=0 \Leftrightarrow a=-b$ lub $b=-c$ lub $a=-c$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne sprowadzenie wyrażenia do wspólnego mianownika	1
B	Grupowanie wyrażeń licznika i zapisanie w postaci iloczynowej	2
C	Sformułowanie odpowiedzi	1

Zadanie 8. Sumy sześcianów i sześcian sumy (3 punkty)

Rozwiązanie:

$$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)=$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)=(a+b+c)[a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab]=$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0\cdot(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=0$$

Zatem $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przyrównanie wyrażenia do 0 i dopisanie wyrażeń umożliwiających wyłączenie sumy $(a+b+c)$	2
B	Sformułowanie odpowiedzi	1

Zadanie 9. Potęga potęgi. Wspólne podstawy-bezcenne (7 punkty)

Rozwiązanie:

a) Obie liczby podnosimy do potęgi np.

$2\sqrt{3}$: $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = 2^3 = 8$ oraz $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{6}}$

Ale: $\sqrt{6} > 2$, więc $3^{\sqrt{6}} > 9$ mamy więc $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

b) $$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} = \frac{1}{\frac{1}{\log_3 2}} + \frac{1}{\frac{1}{\log_3 5}} = \log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10 > \log_3 9 = 2$$

$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podniesienie wyrażeń do wspólnej potęgi a)	1
B	Porównanie wartości wykładników a)	1
C	Udzielenie odpowiedzi z uzasadnieniem a)	1
D	Poprawne sprowadzenie wyrażeń do logarytmów o wspólnej podstawie b)	1
E	Zastosowanie związku na sumę logarytmów o jednakowej podstawie b)	1
F	Oszacowanie nierówności z uzasadnieniem b)	2

Zadanie 10. Bezou'tki (3 punkty)

Rozwiązanie:

Obliczmy:

$$W(1) = (-1)^{2n} + 0 - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$W(2) = 0 + 1^n - 1 = 1 - 1 = 0$$

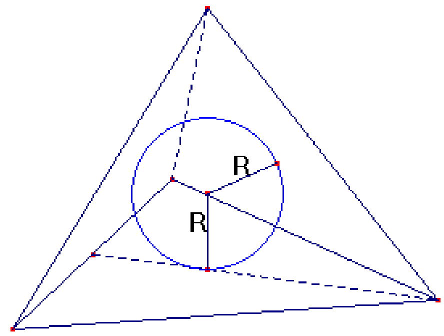
Na mocy twierdzenia Bezouta wielomian dzieli się przez $(x-1)$ i przez $(x-2)$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie $W(1)$	1
B	Wyznaczenie $W(2)$	1
C	Udzielenie odpowiedzi z uzasadnieniem	1

Zadanie 11. Kula i wiele ścian (4 punkty)

Rozwiązanie:



Oznaczmy przez P_1, P_2,..., P_n pola ścian wielościanu
zaś przez R promień kuli wpisanej w wielościan.

$$V = \frac{1}{3}P_1R + \frac{1}{3}P_2R + \ldots + \frac{1}{3}P_nR = \frac{1}{3}R\left(P_1 + P_2 + \ldots + P_n\right) = \frac{1}{3}RP_c$$

Gdzie:

V -objętość wielościanu,

P_c -pole powierzchni całkowitej wielościanu

Mamy, więc: $\frac{V}{P_c} = \frac{R}{3}$.

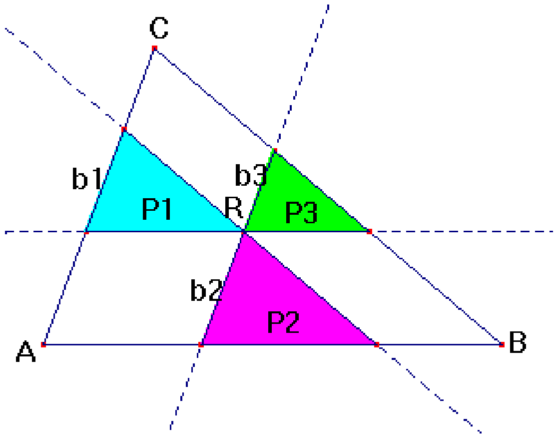
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie objętości wielościanu w postaci sumy objętości odpowiednich ostrosłupów o wysokości R	
B	Przekształcenie równania i wprowadzenie pola powierzchni całkowitej	
C	Zapisanie odpowiedniego stosunku	

Zadanie 12. Wariacja

Rozwiązanie:

Pole ΔABC oznaczymy P



Zauważmy, że wszystkie trzy trójkąty są podobne do trójkąta ABC w skalach odpowiednio:

$s_1 = \frac{b_1}{b}$, $s_2 = \frac{b_2}{b}$, $s_3 = \frac{b_3}{b}$, gdzie $b = |AC|$

Warunek, który mamy wykazać jest równoważny warunkowi:

$$\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\ .$$

Odcinki: $b_1 + b_2 + b_3 = b$,

czyli $\frac{b_1}{b} + \frac{b_2}{b} + \frac{b_3}{b} = 1$,

$s_1 = \frac{b_1}{b} = \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}}$, $s_2 = \frac{b_2}{b} = \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}}$, $s_3 = \frac{b_3}{b} = \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}}$.

Otrzymujemy: $\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} + \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = 1$,

$\sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}$, tak, więc: $P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}\right)^2$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Stwierdzenie podobieństwa trójkątów	1
B	Wyznaczenie skal podobieństwa trójkątów	1
C	Zapisanie skal w powiązaniu z polami trójkątów	2
D	Wykonanie przekształceń prowadzących do tezy zadania	2

Pakiet M-3.7 „Groch z kapustą, czyli przypominki przedmaturalne”

I. Treści merytoryczne:

- działania na potęgach,
- podstawowe własności logarytmów (w tym wzór na zmianę podstawy logarytmu),
- prawa działań na potęgach o wykładniku rzeczywistym,
- wzory skróconego mnożenia,
- wielomiany i rozkład wielomianu na czynniki,
- wartości wyrażeń dla danej wartości zmiennej,
- działania na wyrażeniach wymiernych; porównywanie liczb, wyrażeń,
- własności funkcji, sporządzanie wykresów,
- związki miarowe w figurach płaskich,
- wielościany, objętość i pole powierzchni całkowitej,
- związki między ilością wierzchołków, krawędzi, przekątnych w graniastosłupach.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie umiejętności interpretacji tekstu matematycznego i formułowania uzyskanych wyników,
- kształcenie w posługiwaniu się obiektami matematycznymi,
- kształcenie umiejętności doboru modelu matematycznego do zaistniałej sytuacji,
- tworzenie i stosowanie strategii,
- prowadzenie rozumowania (tworzenie łańcucha argumentów) i uzasadnianie jego poprawności.

III. Proponowane metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć:

Spotkanie 1: **„Ćwiczenia otwierające”** (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.
8. Podsumowanie i zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające”.

Bibliografia do „Ćwiczeń otwierających”:

[1] Bednarek W., *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1995 (Zadanie 4 - Strona 21, zadanie 100)
[2] Pawłowski H., *Olimpiady i konkursy matematyczne*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń 2002, (Zadanie 3 – zadanie 8.12, strona 183)
[3] Pod redakcją Franciszka Klorka *Matematyka*, *Zeszyt 5*, , ODN, Zielona Góra 1988, (Zadanie 2 – strona 95 zadanie 82)
[4] *Zadania Treningowe 2003/2004* MBG ze strony internetowej – (Zadanie 1)

Spotkanie 2: **„Rozwiążmy razem”** (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi.
5. Jeżeli dana grupa zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty odpowiedzi.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem":

[1] Rams S., Rams T., *Międzynarodowy Konkurs Matematyczny „Matematyka bez Granic", Cześć I, Zadania konkursowe 1998-2002*, Nowy Sącz 2003, (Zadanie 5 – zadanie 11, strona 53)

[2] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 5*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1988, (Zadanie 1 – zadanie 56, strona 47; Zadanie 2 – zadanie 74, strona 49; Zadanie 4 – zadanie 59, strona 47)

[3] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 6*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1989, (Zadanie 10 - Zadanie 6, strona 95; Zadanie 11 - Zadanie 2, strona 94;)

[4] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 4*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1988, (Zadanie 12 – zadanie 85, strona 29)

Matematyka bez Granic - edycja 2002/2003 – http://www.xlo.pl/2003/glowna.php?to=konkursy/mbg/2002zadania (Zadanie 9)

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

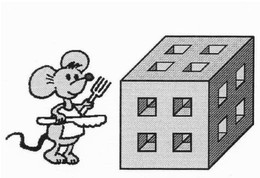
Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem" będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Rysunki za pomocą programu Paint oraz Wykresy za pomocą programu Geogebra do Pakietu M-3.7 wykonała Helena Ewert – Fechner

Zdjęcie do Zadania 4 wykonała Anna Rybak

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Groch z kapustą, czyli przypominki przedmaturalne”

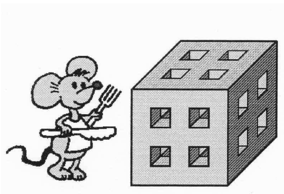
Exercice 1. Un cube de fromage (6 points)



Un des cubes de fromage de 5cm de côté a été troué comme sur le dessin. On a fait 12 trous, régulièrement placés, parallèles aux rebords du cube, dont la section est un carré de 1cm de côté.

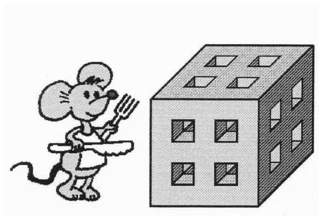
Calcule le volume du cube troué.

Tarea 1. Pastilla de queso (6 puntos)



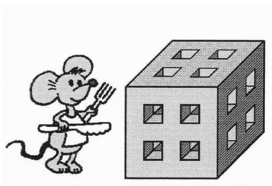
La pastilla de queso con la arista de la longitud de 5cm ha sido perforada de la manera presentada en el dibujo más arriba. Han hecho 12 agujeros colocados regularmente y paralelamente a la arista de la pastilla y cuyos cortes constituyen un cuadrado del borde de 1cm.
Calcula el volumen de la pastilla perforada.

Aufgabe 1. Käsewürfel (6 Punkte)



Ein Käsestück mit der Kante von 5cm Länge wurde durchlöchert, wie auf der Zeichnung. Es wurden 12 Löcher gemacht, die gleichmäßig gelegen sind, parallel zu Kanten des Würfels laufen und derer Durchschnitt ein Quadrat mit der Seite von 1cm Länge ist.
Berechne das Volumen der durchlöcherten Würfel.

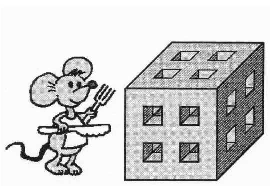
Exercise 1 Piece of cheese (6 points)



A cube of cheese with the edge length 5cm was pierced just like on the picture. There were made 12 holes in some regular way. The holes are parallel to edges and their intersection is a square with the side of 1cm.

Calculate the volume of the pierced cube.

Esercizio 1. Un pezzo di formaggio (6 punti)



Un pezzo di formaggio con il bordo lungo di 5 cm viene perforato, come sul disegno. Sono stati fatti 12 fori regolari i quali attraversano il cubo parallelamente al suo bordo e la loro sezione è un quadrato con il lato di 1 cm.

Calcola il volume del pezzo perforato.

Zadanie 2. Diabełek (6 punktów)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2^{\log_2(x^2-x-6)}$.

Zadanie 3. Najmniej? (5 punktów)

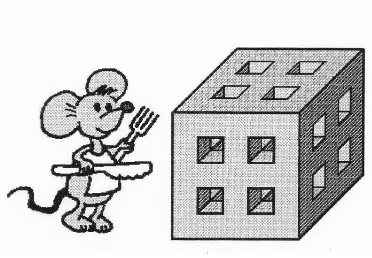
Dla jakiej wartości x, funkcja $f(x) = x^4 - x^2 - 2x - 5$ przyjmuje wartość najmniejszą?

Zadanie 4. Bleee… (6 punktów)

W pewnym ciągu arytmetycznym $S_m = S_n$ gdzie $m \neq n$.
Wykaż, że $S_{m+n} = 0$.

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” **„Groch z kapustą, czyli przypominki przedmaturalne”**

Zadanie 1. Kostka sera (6 punktów)



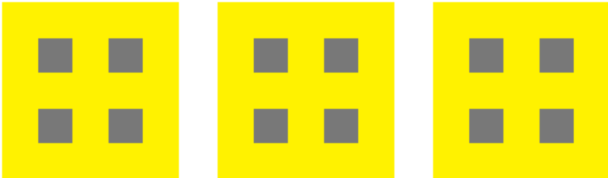
Kostka sera o krawędź długości 5cm została przedziurawiona, tak jak na rysunku. Wykonano 12 otworów, które są regularnie ułożone, biegną równolegle do krawędzi kostki, a ich przekrój jest kwadratem o boku 1cm. Oblicz objętość podziurawionej kostki.

Rozwiązanie:

Kostkę sera kroimy na plastry grubości 1 *cm.* Otrzymamy pięć plastrów:

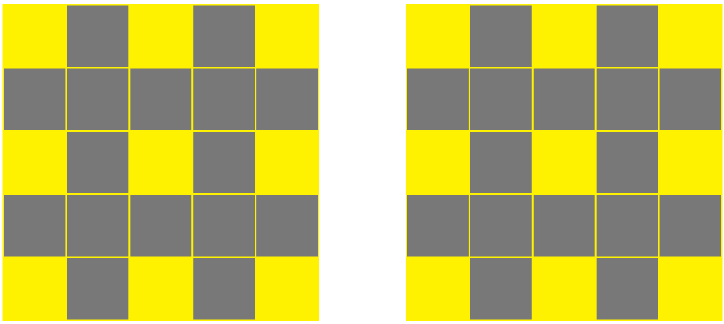
Trzy plastry, których objętość jest równa:

$5 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 25 - 4 = 21\ [cm^3]$



Dwa plastry o objętości:

$3 \cdot 3 \cdot 1 = 9[cm^3]$



Zatem objętość kostki sera jest równa:

$3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 63 + 18 = 81[cm^3]$

Uwaga:

Objętość sera można obliczyć odejmując od objętości kostki objętość wykonanych otworów.

Punktacja:

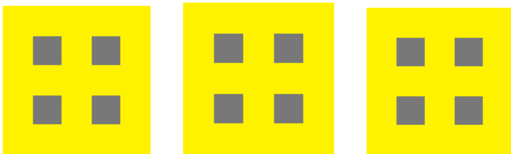
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Obliczenie objętości dziur w poszczególnych warstwach	2
C	Obliczenie objętości sera	1
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercice 1. Un cube de fromage (6 points)

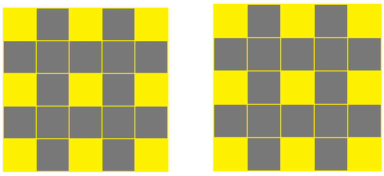
Solution:

On coupe le cube de fromage en tranches de 1 cm. Nous obtenons cinq tranches.

Il y a trois tranches dont le volume est égal à: $5 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 25 - 4 = 21\ [cm^3]$



Il y a deux tranches dont le volume est égal à: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9[cm^3]$



Le volume du cube de fromage est donc égal à: $3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 63 + 18 = 81[cm^3]$

On peut calculer le volume du fromage en soustrayant le volume des trous du volume du cube.

Pointage:

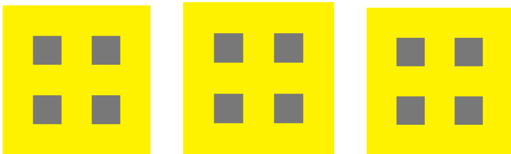
Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Calcul du volume des trous pour chaque tranche	2
C	Calcul du volume du fromage	1
D	Réponse en langue étrangère	1

Tarea 1. Pastilla de queso (6 puntos)

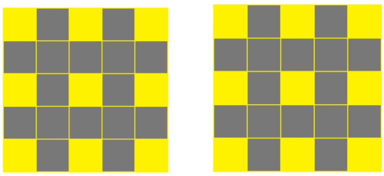
Solución:

Cortamos la pastilla de queso en rebanadas gruesas de 1 *cm.* Obtendremos cinco rebanadas. Tres rebanadas cuyo volumen es:

$5 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 25 - 4 = 21\ [cm^3]$



Dos rebanadas cuyo volumen es: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9[cm^3]$



Entonces, el volumen de la pastilla de queso equivale a:

$3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 63 + 18 = 81[cm^3]$

El volumen del queso se puede calcularlo sustrayendo del volumen de la pastilla, el volumen de los agujeros.

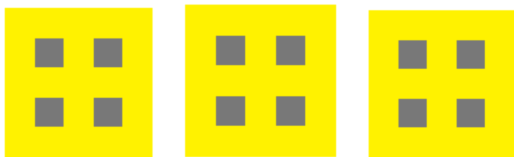
Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta en polaco	2
B	Cálculo del volumen de los agujeros en las capas respectivas	2
C	Cálculo del volumen del queso	1
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

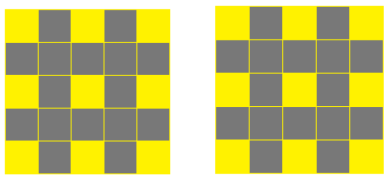
Aufgabe 1. Käsewürfel (6 Punkte)

Lösung:

Den Käsewürfel schneiden wir in 1 cm dicke Scheiben. Wir bekommen fünf Scheiben.
Drei Scheiben, deren Volumen beträgt: $5 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 25 - 4 = 21\ [cm^3]$



Zwei Scheiben von Volumen: $3 \cdot 3 \cdot 1 = 9[cm^3]$



Folglich beträgt das Volumen des Käsewürfels
$3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 63 + 18 = 81[cm^3]$
Das Käsevolumen kann man berechnen, indem man das Volumen der gemachten Löcher von dem Volumen des Käsewürfels subtrahiert.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	2
B	Berechnung der Volumen von der Löcher in einzelnen Schichten	2
C	Berechnung des Käsevolumens	1
D	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

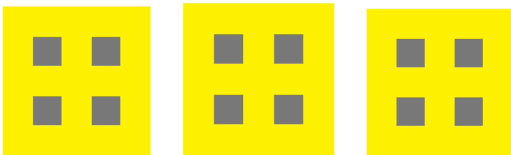
Esercizio 1. Un pezzo di formaggio (6 punti)

Soluzione:

Tagliamo il pezzo di formaggio a fette con lo spessore di 1 *cm.* Otteniamo cinque fette:

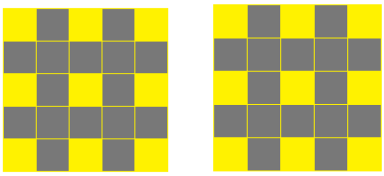
Tre fette di cui volume fa:

$5 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 25 - 4 = 21\ [cm^3]$



Due fette di cui volume fa:

$3 \cdot 3 \cdot 1 = 9 [cm^3]$



Allora il volume del pezzo di formaggio fa

$3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 63 + 18 = 81 [cm^3]$

Il volume si può calcolare sottrando il volume dei fori dal volume del pezzo di formaggio.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	2
B	Calcolo del volume dei fori nelle fette	2
C	Calcolo del volume di formaggio	1
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	1

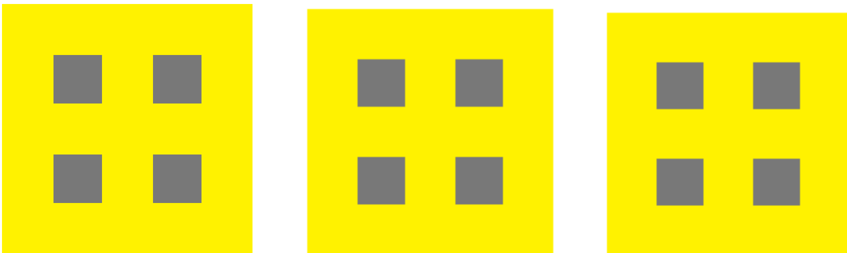
Exercise 1. Piece of cheese (6 points)

Solution:

We cut the cheese into the slices of heaviness 1 cm. We obtain 5 slices.

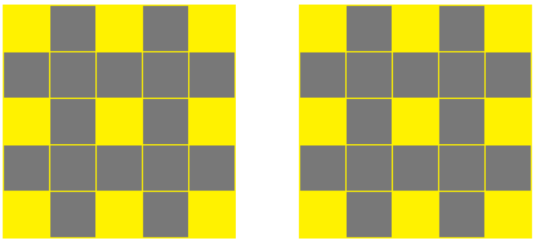
Three slices are of the volume:

$5 \cdot 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 25 - 4 = 21\ [cm^3]$



Two slices are of volume:

$3 \cdot 3 \cdot 1 = 9[cm^3]$



Thus the volume of a cube of cheese is

$3 \cdot 21 + 2 \cdot 9 = 63 + 18 = 81[cm^3]$

The volume of cheese we can calculate by subtracting the volume of holes from the volume of cube.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	2
B	Calculation of volume of holes in all slices	2
C	Calculation the volume of cheese	1
D	Answer in English	1

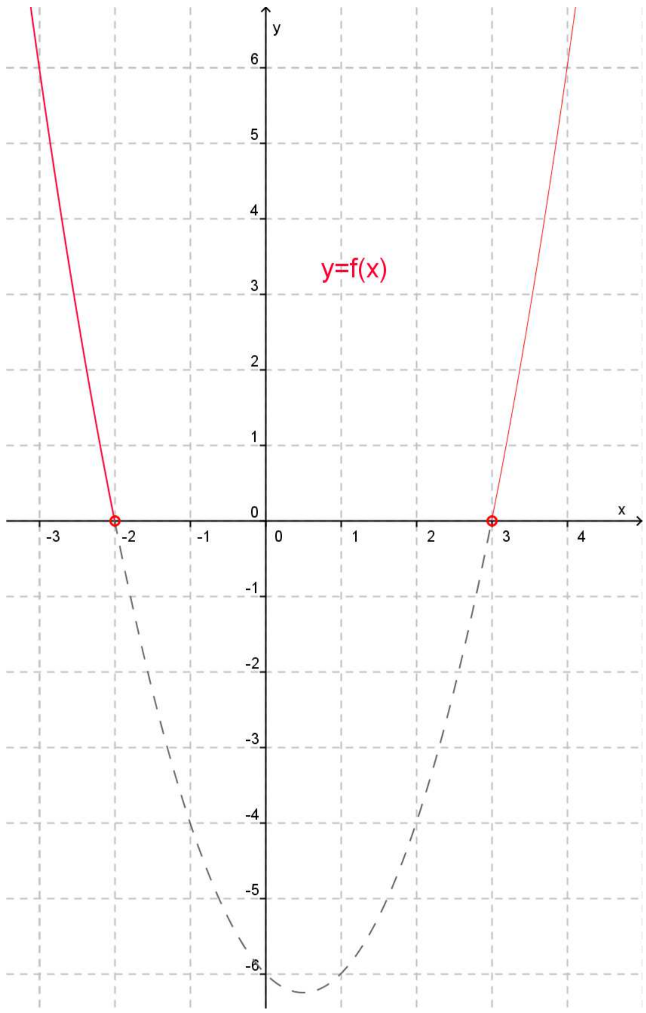
Zadanie 2. Diabełek (6 punktów)

Rozwiązanie:

Wyznaczamy dziedzinę funkcji $f(x)=2^{\log_2(x^2-x-6)}$. Z definicji logarytmu wynika, że wyrażenie logarytmowane musi być dodatnie, więc

$$x\in D_f \Leftrightarrow x^2-x-6\geq 0 \Leftrightarrow (x+2)\cdot(x-3)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$$

Zatem $D_f=(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$. Korzystamy z własności i definicji logarytmu: $a^{\log_a b}=b$ i otrzymujemy: $2^{\log_2(x^2-x-6)}=x^2-x-6$. Stąd $f(x)=x^2-x-6$ dla $x\in(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie dziedziny funkcji	2
B	Zastosowanie własności logarytmu i zapisanie wzoru funkcji	2
C	Sporządzenie wykresu funkcji	2

Zadanie 3. Najmniej? (5 punktów)

Rozwiązanie:

Ponieważ $f(x)=x^4-x^2-2x-5=(x^4-2x^2+1)+(x^2-2x+1)-7=(x^2-1)^2+(x-1)^2-7$
Więc widzimy, że $f(x)\geq -7$ dla każdego x, przy czym $f(x)=-7$, gdy $x^2-1=0$ i $x-1=0$, czyli gdy $x=1$. Zatem najmniejszą wartość (równą -7) dana funkcja przyjmuje dla $x=1$.
Odpowiedź: Funkcja $f(x)=x^4-x^2-2x-5$ przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=1$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przekształcenie wzoru funkcji	2
B	Określenie najmniejszej wartości otrzymanego wyrażenia	1
C	Wyznaczenie x, dla którego funkcja przybiera wartość najmniejszą i odpowiedź	2

Zadanie 4. Bleee… (6 punktów)

Rozwiązanie:

Założenie: W pewnym ciągu arytmetycznym $S_m=S_n$ gdzie $m\neq n$

Teza: $S_{m+n}=0$

Dowód: ∇ Z własności ciągu arytmetycznego mamy:

$$S_m=\frac{2a_1+(m-1)r}{2}\cdot m \text{ i } S_n=\frac{2a_1+(n-1)r}{2}\cdot n \text{ oraz } S_{m+n}=\frac{2a_1+(m+n-1)r}{2}\cdot(m+n)$$

Zatem $S_m=S_n \Leftrightarrow \frac{2a_1+(m-1)\cdot r}{2}\cdot m=\frac{2a_1+(n-1)\cdot r}{2}\cdot n$ | *mnożymy obustronnie przez 2*

$[2a_1+(m-1)\cdot r]\cdot m=[2a_1+(n-1)\cdot r]\cdot n$ | *uwalniamy od nawiasów kwadratowych*

$2a_1\cdot m+(m-1)\cdot r\cdot m=2a_1\cdot n+(n-1)\cdot r\cdot n$ | *przenosimy wszystkie wyrazy na lewą stronę*

$2a_1\cdot m-2a_1\cdot n+(m-1)\cdot r\cdot m-(n-1)\cdot r\cdot n=0$ | *uwalniamy od nawiasów zwykłych*

$2a_1m-2a_1n+m^2r-mr-n^2r+nr=0$ | *grupujemy wyrazy i wyłączamy wspólne czynniki*

$2a_1(m-n)+(m^2-n^2)r-(m-n)r=0$ | *stosujemy wzór na różnicę kwadratów*

$2a_1(m-n)+(m-n)\cdot(m+n)r-(m-n)r=0$ | *z założenia* $m\neq n$*, więc* $m-n\neq 0$ *zatem równanie możemy podzielić obustronnie przez* $m-n$

Otrzymujemy $2a_1+(m+n)r-r=0$, czyli $2a_1+(m+n-1)r=0$, zatem

$$S_{m+n}=\frac{2a_1+(m+n-1)r}{2}\cdot(m+n)=\frac{0}{2}\cdot(m+n)=0$$ ▲

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie założenia i tezy oraz wzoru na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego	1
B	Porównanie sum i przekształcenie otrzymanego równania	4
C	Wykazanie prawdziwości tezy	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” - „Groch z kapustą, czyli przypominki przedmaturalne”

Exercice 1. Cercles (6 points)

La distance entre les deux milieux de deux cercles est de 1. Le rayon d’un de ces cercles est égal à 4.Quelle est la longueur du rayon de l’autre cercle si les deux cercles se recoupent?

Tarea 1. Círculos (6 puntos)

La distancia de dos centros de los círculos equivale a 1. El radio de uno de ellos es 4. ¿Qué longitud puede tener el radio del otro círculo si estos círculos se cruzan?

Aufgabe 1. Kreise (6 Punkte)

Der Abstand zwischen zwei Kreismittelpunkten beträgt 1. Der Radius von einem der Kreise beträgt 4. Welche Länge kann der Radius des zweiten Kreises haben, wenn diese Kreise sich überschneiden?

Esercizio 1. I cerchi (6 punti)

La distanza fra due centri di cerchi fa 1. Il raggio di uno di loro fa 4. Quale lunghezza può avere il raggio del secondo cerchio, se questi cerchi si intersecano?

Exercise 1, Circles (6 points)

The distance between the centres of two circles is 1. The radius of one of them is 4. Of what length can be a radius of the second circle in the case the circles intersect.

Zadanie 2. Trój – kąty (3 punkty)

Wiadomo, że w trójkącie prostokątnym: $c^2 = a^2 + b^2$,
gdzie a, b - oznaczają długości przyprostokątnych; c - długość przeciwprostokątnej.

Znaleźć kąty ostre tego trójkąta, jeżeli: $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2 = \frac{1}{2}$

Zadanie 3. Latający Wektor (4 punkty)[5]

Z dwóch miejscowości odległych od siebie o 3 kilometry wychodzą jednocześnie na spotkanie Jaś i Małgosia. Jaś idzie z prędkością $90\frac{m}{\min}$, a Małgosia z prędkością $60\frac{m}{\min}$. Równocześnie z Jasiem wyrusza pies Wektor biegnący z prędkością $300\frac{m}{\min}$, który dobiega do Małgosi, zawraca, dobiega do Jasia, znowu zawraca i biega tak do chwili, kiedy Jaś i Małgosia spotkają się. Ile kilometrów przebiegnie Wektor?

Zadanie 4. Im więcej ciebie tym mniej (4 punkty)

Zmienne $x, y > 0$, $x + y = 6$. Znaleźć najmniejszą wartość sumy: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Zadanie 5. W czasie (4 punkty)

Na peronie długości $340\,m$ Hansi czeka na pociąg i rozmyśla:

- Przypuśćmy, że pociąg, który właśnie przyjechał potrzebuje dokładnie 6 sekund, aby przejechać koło mnie ze stałą prędkością.
- Przypuśćmy, że między chwilą, w której lokomotywa dotrze do początku peronu, a chwilą, w której tylne światło ostatniego wagonu minie koniec peronu upłyną 23 sekundy.

Jaki długi jest ten pociąg i jaka jest jego prędkość?

Zadanie 6. Mono (2 punkty)

Funkcja $f(x) = \frac{-5}{x-4} + 2$ jest w przedziale $(4;\infty)$

A. Malejąca
B. Rosnąca
C. Monotoniczna
D. Nie da się określić

Wskaż zdania prawdziwe, odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 7. Standard (2 punkty)

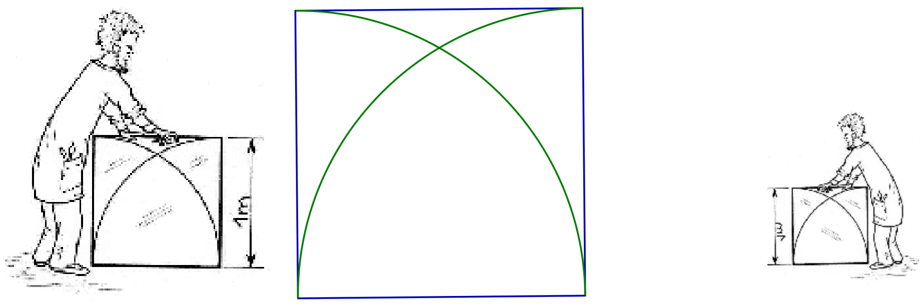
Ile jest dodatnich wyrazów ciągu $a_n = (6-n)(n+1)$?

[5] Zadanie własne

Zadanie 8 Przeciwne, czyżby? … A jednak! (3 punkty)[6]

Uzasadnij, że liczby $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ i $\sqrt{3}-2$ są liczbami przeciwnymi.

Zadanie 9. Okno ćwiartki (6 punktów)



Kwadratowe okno o boku długości 1m powinno zostać oszklone tak jak pokazuje rysunek obok. Powierzchnie szklane są ograniczone przez dwie ćwiartki, koła, którego środki leżą w dwóch dolnych wierzchołkach kwadratu. Oblicz pole powierzchni każdej z czterech szklanych części.

Zadanie 10. Co jest większe? (6 punktów)

Porównaj liczby a i b, gdy $a = 3^{\log_2 5} + 10^{\frac{1}{3}\log_{10} 2}$ zaś $b = 5^{\log_2 3} + \sqrt[10]{10}$.

Zadanie 11. Trójkąt (4 punkty)

Wykaż, że jeżeli w trójkącie zachodzi równość: $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$, to jest to trójkąt równoramienny.

Zadanie 12. Ciastko z dziurką (6 punktów)

Naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{x^4-1}{|x^2-1|}.$$

[6] Zadanie własne

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem" „Groch z kapustą, czyli przypominki przedmaturalne"

Zadanie 1. Okręgi (6 punktów)

Odległość środków dwóch okręgów wynosi 1. Promień jednego z nich wynosi 4.
Jaką długość może mieć promień drugiego okręgu, jeżeli te okręgi przecinają się?

Rozwiązanie:

$A,\ B$ -oznacza środki okręgów.

$r_1,\ r_2 > 0$ - promienie okręgów.

$|AB| = 1$, spełniony musi być warunek: $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.

Otrzymujemy układ nierówności: $\begin{cases} |r_1 - 4| < 1 \\ r_1 + 4 > 1 \end{cases}$.

Rozwiązaniami są liczby $r_1 \in (3,\ 5)$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Ułożenie nierówności	1
C	Rozwiązanie nierówności	2
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercice 1. Cercles (6 points)

Solution:

$A,\ B$ -indiquent les milieux des cercles; $r_1,\ r_2 > 0$ - rayons des cercles.

$|AB| = 1$, il faut que la condition : $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.
soit remplie.

Nous obtenons le système d'équations: $\begin{cases} |r_1 - 4| < 1 \\ r_1 + 4 > 1 \end{cases}$. La solution est la suivante : $r_1 \in (3,\ 5)$

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Formulation de l'équation	1
C	Solution de l'équation	2
D	Réponse en langue étrangère	1

Tarea 1. Círculos (6 puntos)

Solución:

$A,\ B$ -representan los centros de los círculos; $r_1,\ \ r_2 > 0$ - radios de los círculos.

$|AB| = 1$, debe ser cumplido el requisito: $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.

Obtenemos sistema de inecuaciónes: $\begin{cases} |r_1 - 4| < 1 \\ r_1 + 4 > 1 \end{cases}$.

Las soluciones son las cantidades: $r_1 \in (3,\ 5)$.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción correcta en polaco	2
B	Formación de la inecuación	1
C	Solución de la inecuación	2
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Kreise (6 Punkte)

Lösung:

$A,\ B$ - bezeichnet die Mittelpunkte der Kreise; $r_1,\ \ r_2 > 0$ - Radien der Kreise.

$|AB| = 1$, es muss folgende Bedingung erfüllt werden: $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.

Wir bekommen ein System der Ungleichungen: $\begin{cases} |r_1 - 4| < 1 \\ r_1 + 4 > 1 \end{cases}$.

Die Lösung sind die Zahlen $r_1 \in (3,\ 5)$.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	2
B	Ansatz einer Gleichung	1
C	Das Lösen der Gleichung	2
D	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. I cerchi (6 punti)

Soluzione:

$A, \ B$ - indicano i centri di cerchi.

$r_1, \ r_2 > 0$ - i raggi di cerchi.

$|AB| = 1$, deve essere eseguita la condizione : $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.

Otteniamo la disuguaglianza : $\begin{cases} |r_1 - 4| < 1 \\ r_1 + 4 > 1 \end{cases}$.

Le soluzioni sono i numeri $r_1 \in (3, \ 5)$.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	2
B	Formulazione della disuguaglianza	1
C	Soluzione della disuguaglianza	2
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	1

Exercise 1. Circles (6 points)

Solution:

$A, \ B$ -centres of circles.

$r_1, \ r_2 > 0$ - radiuses of circles.

$|AB| = 1$, it should be satisfied the condition: $|r_1 - r_2| < |AB| < r_1 + r_2$.

We obtain the system of equations: $\begin{cases} |r_1 - 4| < 1 \\ r_1 + 4 > 1 \end{cases}$.

The solution are the numbers $r_1 \in (3, \ 5)$.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	2
B	Creating the inequalities	1
C	Solving of inequalities	2
D	Answer in English	1

Zadanie 2. Trój – kąty (3 punkty)

Rozwiązanie:

Jeżeli w trójkącie prostokątnym a,b oznaczają długości przyprostokątnych; c - długość przeciwprostokątnej, to

$$\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=\frac{c^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{c^2}{c^2+2ab}.$$

Ponieważ z założenia $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}$, więc otrzymujemy, że $\frac{c^2}{c^2+2ab}=\frac{1}{2}$, stąd mamy: $2c^2=c^2+2ab$, czyli: $c^2=2ab$ i z twierdzenia Pitagorasa $c^2=a^2+b^2$, więc otrzymujemy $a^2+b^2=2ab$, co daje $(a-b)^2=0$

Warunek zadania jest więc spełniony, gdy $a=b$, co oznacza trójkąt prostokątny równoramienny. Jego kąty ostre mają po 45°.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przekształcenie wyrażenia $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2$ i zapisanie równania $\frac{c^2}{c^2+2ab}=\frac{1}{2}$	1
B	Wywnioskowanie, że warunek zadania jest spełniony, gdy $a=b$	1
C	Podanie kątów ostrych trójkąta, dla którego spełniony jest warunek zadania	1

Zadanie 3. Latający Wektor (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczenia:

v_J - prędkość Jasia

v_M - prędkość Małgosi

v_W - prędkość Wektora

s_J - droga przebyta przez Jasia

s_M - droga przebyta przez Małgosię

s_W - droga przebyta przez Wektora

t - czas marszu Jasia i Małgosi oraz „latania” Wektora

Dane:

$s_J + s_M = 3km = 3000m$

$v_J = 90\frac{m}{\min}$ $\quad v_M = 60\frac{m}{\min}$ $\quad v_W = 300\frac{m}{\min}$

Szukane: s_W

Zgodnie z oznaczeniami i treścią zadania otrzymujemy:

$s_J = 90t$ i $s_M = 60t$ i $s_J + s_M = 3000$, stąd otrzymujemy:

$$90t + 60t = 3000 \Leftrightarrow 150t = 3000 \Leftrightarrow t = \frac{3000}{150} \Leftrightarrow t = 20[\min].$$

Zatem $s_W = v_W \cdot t$, czyli droga przebyta przez Wektora jest równa:

$$s_W = 300 \cdot 20[m] = 6000[m] = 6[km]$$

Odpowiedź: Wektor przebiegł $6km$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń	1
B	Zapisanie danych, przeliczenie jednostek miary	1
C	Obliczenie czasu, jaki upłynął do spotkania Jasia i Małgosi	1
D	Obliczenie drogi, jaką przebiegł Wektor i odpowiedź	1

Zadanie 4. Im więcej ciebie tym mniej (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy: $s=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Po podstawieniu $y=6-x$ uzyskujemy: $s=\frac{1}{x}+\frac{1}{6-x}$

Zatem: $s=\frac{6-x+x}{x(6-x)}=\frac{6}{6x-x^2}=\frac{6}{9-9+6x-x^2}=\frac{6}{9-(3-x)^2}$. Teraz łatwo zauważyć, że **s** będzie najmniejsza, gdy mianownik ułamka będzie miał wartość największą, czyli 9. Zatem gdy $(3-x)^2=0$, czyli dla $x=3$. Najmniejsza wartość s wynosi $\frac{2}{3}$ dla $x=3$.

Odpowiedź: Jeżeli zmienne spełniają warunki: $x,y>0$, $x+y=6$, to najmniejsza wartość sumy: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ wynosi $\frac{2}{3}$ dla $x=y=3$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie wartości s w postaci ułamka	2
B	Ustalenie, dla jakiego x ułamek będzie miał najmniejszą wartość	1
C	Wyznaczenie najmniejszej wartości ułamka i odpowiedź	1

Zadanie 5. W czasie (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

d – Długość pociągu

v – Prędkość pociągu

Mamy równania: $\begin{cases} d=v\cdot 6 \\ 340+v\cdot 6=v\cdot 23 \end{cases}$

Uzyskujemy: $17v=340$, $v=20\ m/s$ oraz $d=20\cdot 6=120\ m$

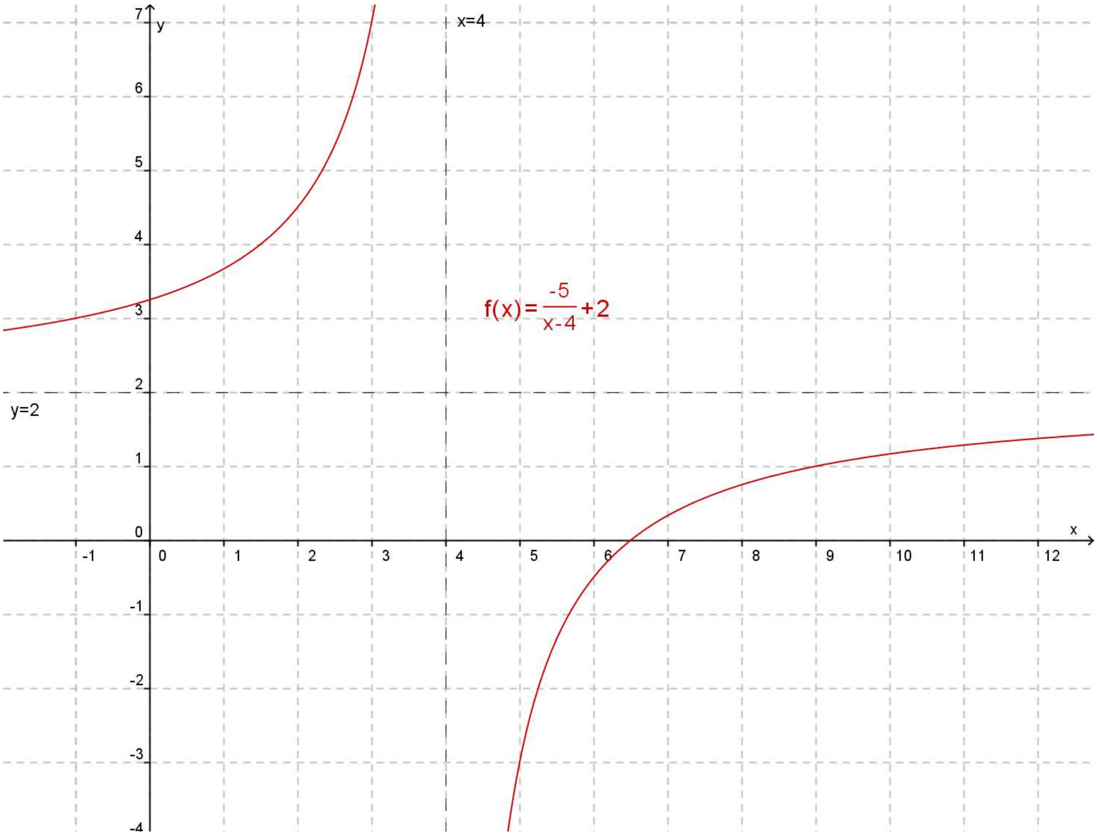
Długość pociągu to 120m, a jechał z prędkością 20m/s.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń i ułożenie układu równań	1
B	Rozwiązanie układu równań	2
C	Odpowiedź	1

Zadanie 6 Mono (2 punkty)

Rozwiązanie:



Funkcja $f(x)=\dfrac{-5}{x-4}+2$ jest w przedziale $(4;\infty)$

A. Malejąca - Fałsz	B. Rosnąca - Prawda	C. Monotoniczna - Prawda	D. Nie da się określić - Fałsz

Ad B.

Niech $x_1, x_2 \in (4;\infty)$; $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 < 0$

Wtedy $f(x_1)-f(x_2)=\left[\dfrac{-5}{x_1-4}+2\right]-\left[\dfrac{-5}{x_2-4}+2\right]=-5\cdot\dfrac{x_2-4-x_1+4}{(x_1-4)\cdot(x_2-4)}=5\cdot\dfrac{x_1-x_2}{(x_1-4)\cdot(x_2-4)}$

Zatem dla $x_1, x_2 \in (4;\infty)$ prawdą jest: $x_1 - x_2 < 0 \Leftrightarrow f(x_1)-f(x_2)<0$, co oznacza, że zgodnie z definicją $f(x)$ jest rosnąca w przedziale $(4;\infty)$

Ad C.

Prawdziwość C wynika, z B, bo jeśli funkcja jest rosnąca, to jest monotoniczna

Odpowiedź: Zdaniami prawdziwymi są: B i C

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Uzasadnienie prawdziwości zdania B *(wykazanie z definicji lub odczytanie własności funkcji z wykresu)*	1
B	Uzasadnienie prawdziwości zdania C	1

Zadanie 7. Standard (2 punkty)

Rozwiązanie:

$a_n > 0 \Leftrightarrow (6-n)(n+1) > 0 \Leftrightarrow n \in (-1;\, 6) \cap N_+ \Leftrightarrow n \in \{1;\, 2;\, 3;\, 4;\, 5\}$.

W ciągu $a_n = (6-n)(n+1)$ jest 5 wyrazów dodatnich.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rozwiązanie nierówności $a_n > 0$	1
B	Podanie odpowiedzi	1

Zadanie 8. Przeciwne, czyżby? … A jednak! (3 punkty)

Rozwiązanie:

Liczby a i b są przeciwne $\Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow a=-b$.

Sposób I

Niech $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ zaś $b=\sqrt{3}-2$. Przekształcamy pierwszą z liczb

$$a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4-4\sqrt{3}+3}=\sqrt{2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left|2-\sqrt{3}\right|=2-\sqrt{3}$$

Zatem $a+b=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}-2=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-2=0$, więc dane liczby są przeciwne, bo ich suma jest równa zero.

Sposób II

Musimy pokazać, że $a=-b$ czyli, że $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=-\left(\sqrt{3}-2\right)=2-\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

Ponieważ obie strony ostatniej równości są dodatnie, możemy podnieść ją stronami do kwadratu: $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2=\left(2-\sqrt{3}\right)^2$ i otrzymujemy $7-4\sqrt{3}=4-4\sqrt{3}+3$, czyli $7-4\sqrt{3}=7-4\sqrt{3} \Leftrightarrow 0=0$, co oznacza, że liczby rzeczywiście są równe.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykazanie, że dane liczby są przeciwne *(dowolną poprawną metodą)*	3

Zadanie 9. Okno ćwiartki (6 punktów)

Dane:

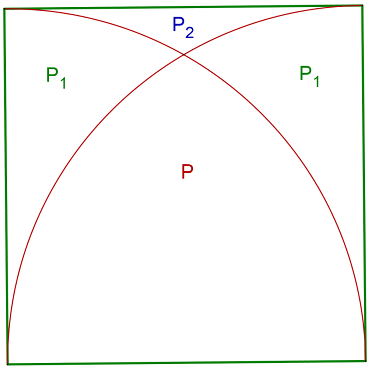
Kwadrat o boku $a = 1m$.

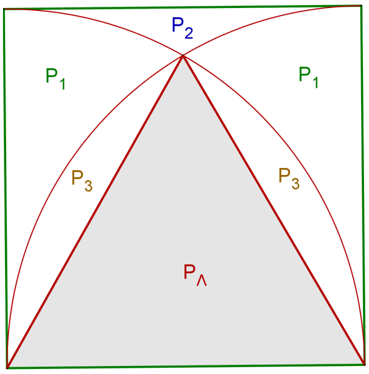
Ćwiartki dwóch kół o promieniu równym bokowi kwadratu, których środki leżą w dwóch dolnych wierzchołkach kwadratu.

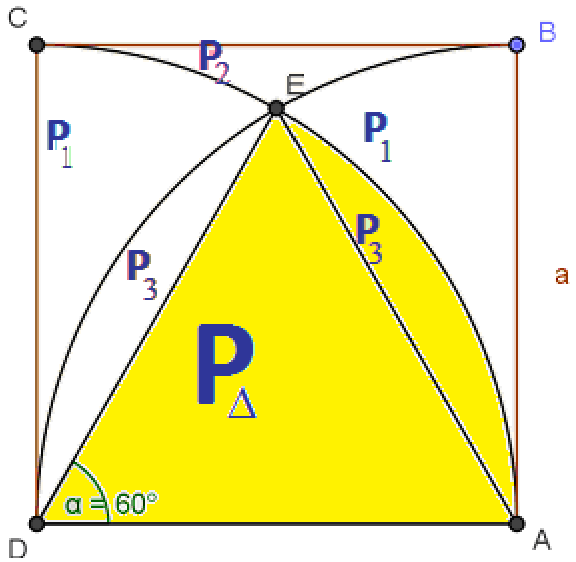
Obliczyć:

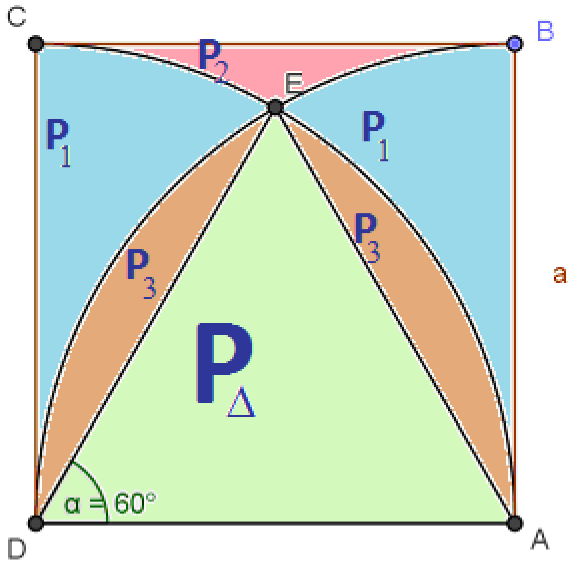
Pole każdej z czterech części kwadratu $P = ?$; $P_1 = ?$; $P_2 = ?$

Rozwiązanie:









Zgodnie z oznaczeniami na rysunkach mamy:

1. $P = P_\Delta + 2 \cdot P_3$

$P_\Delta = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, natomiast $P_3 = P_{wycinka} - P_\Delta$

ΔADE jest równoboczny, zatem kąt $|\sphericalangle ADE| = 60°$,

więc pole wycinka jest równe: $P_{wycinka} = \dfrac{60°}{360°} \cdot \pi a^2 = \dfrac{\pi a^2}{6}$

stąd $P_3=\frac{\pi a^2}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ natomiast, $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\left(\frac{\pi a^2}{6}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$ czyli

$$P=\frac{\pi a^2}{3}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot a^2$$

2. $P_1=P_{ćwiartki}-P$, przy czym $P_{ćwiartki}=\frac{\pi a^2}{4}$, zatem otrzymujemy

$$P_1=\frac{\pi a^2}{4}-\left(\frac{\pi a^2}{3}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi a^2}{12}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)\cdot a^2$$

3. $P_2=P_{kwadratu}-(P+2\cdot P_1)$, czyli $P_2=a^2-\left(\frac{\pi a^2}{3}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}-2\cdot\frac{\pi a^2}{12}\right)$, stąd

$$P_2=\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot a^2$$

Odpowiedź:
W zadaniu $a=1m$, zatem pola części okna są równe:

$$P=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)[m^2];\ P_1=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)[m^2];\ P_2=\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)[m^2]$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie danych i wykonanie rysunku	1
B	Obliczenie pola P	2
C	Obliczenie pola P_1	1
D	Obliczenie pola P_2	1
E	Odpowiedź	1

Zadanie 10. Co jest większe? (6 punktów)

Rozwiązanie:

Przyjmujemy:

$x = 3^{\log_2 5}$, $y = 5^{\log_2 3}$, $t = 10^{\frac{1}{3}\log_{10} 2}$, $z = \sqrt[10]{10}$

Otrzymujemy:

$a = x + t$; $b = y + z$

Zauważamy, że

$x = 3^{\log_2 5}$	Równości logarytmujemy	$y = 5^{\log_2 3}$
$\log_2 x = \log_2 3^{\log_2 5}$	Korzystamy z własności $\log_a b^n = n\log_a b$	$\log_2 y = \log_2 5^{\log_2 3}$
$\log_2 x = \log_2 5 \cdot \log_2 3$		$\log_2 y = \log_2 3 \cdot \log_2 5$

Zatem $\log_2 x = \log_2 y$, stąd $x = y$

Natomiast

$t = 10^{\frac{1}{3}\log_{10} 2} = \left(10^{\log_{10} 2}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$	Zapisujemy w postaci potęgi o wykładniku wymiernym	$z = \sqrt[10]{10} = 10^{\frac{1}{10}}$
$t^{30} = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{30} = 2^{10} = 1024$	Wyrażenia podnosimy do potęgi 30	$z^{30} = \left(10^{\frac{1}{10}}\right)^{30} = 10^3 = 1000$

$1024 > 1000$, zatem $t^{30} > z^{30}$ co oznacza, że $t > z$ więc $x + t > y + z$ czyli $a > b$

Odpowiedź: Liczba *a* jest większa niż liczba *b.*

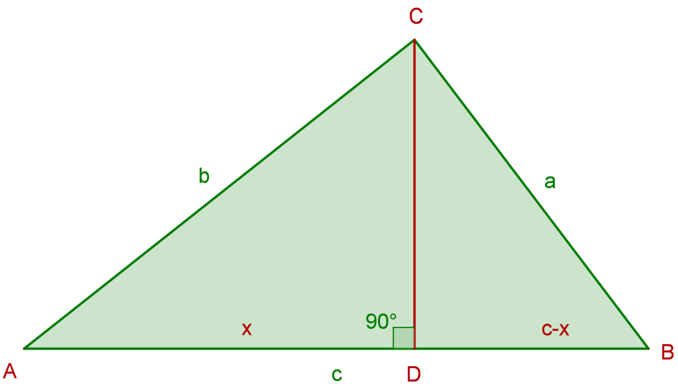
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Stwierdzenie równości pierwszych składników	3
B	Porównanie drugich składników	2
C	Porównanie liczb	1

Zadanie 11. Trójkąt (4 punkty)

Rozwiązanie:

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:



$\left|\overline{BC}\right| = a$;

$\left|\overline{AC} = b\right|$;

$\left|\overline{AB}\right| = c$;

Odcinek $\overline{CD}$ jest wysokością, więc trójkąty: ΔADC ; ΔBDC są prostokątne

$x = \left|\overline{AD}\right|$

$c - x = \left|\overline{DB}\right|$

Założenie: W ΔABC : $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$

Teza: ΔABC jest równoramienny

▽ Z ΔADC mamy $\cos A = \dfrac{x}{b}$, natomiast z ΔBDC $\cos B = \dfrac{c - x}{a}$

Z zależności:

$$\left(\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}\right) \wedge \left(\cos A = \frac{x}{b}\right) \wedge \left(\cos B = \frac{c-x}{a}\right)$$

Otrzymujemy:

$$\frac{a}{\frac{x}{b}} = \frac{b}{\frac{c-x}{a}} \Rightarrow \frac{ab}{x} = \frac{ab}{c-x}$$

Dalej $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{c-x}$, stąd $x = c - x$, czyli $2x = c$, więc $x = \dfrac{c}{2}$ co oznacza, że punkt D, czyli spodek wysokości prowadzonej z wierzchołka C jest środkiem boku $\overline{AB}$, zatem trójkąt jest równoramienny.

Możemy również stwierdzić, że trójkąty prostokątne ΔADC ; ΔBDC są przystające, ponieważ bok $\overline{CD}$ jest wspólny, a $x = c - x = \dfrac{c}{2}$ więc otrzymaliśmy równość $\overline{AD} = \overline{DB}$

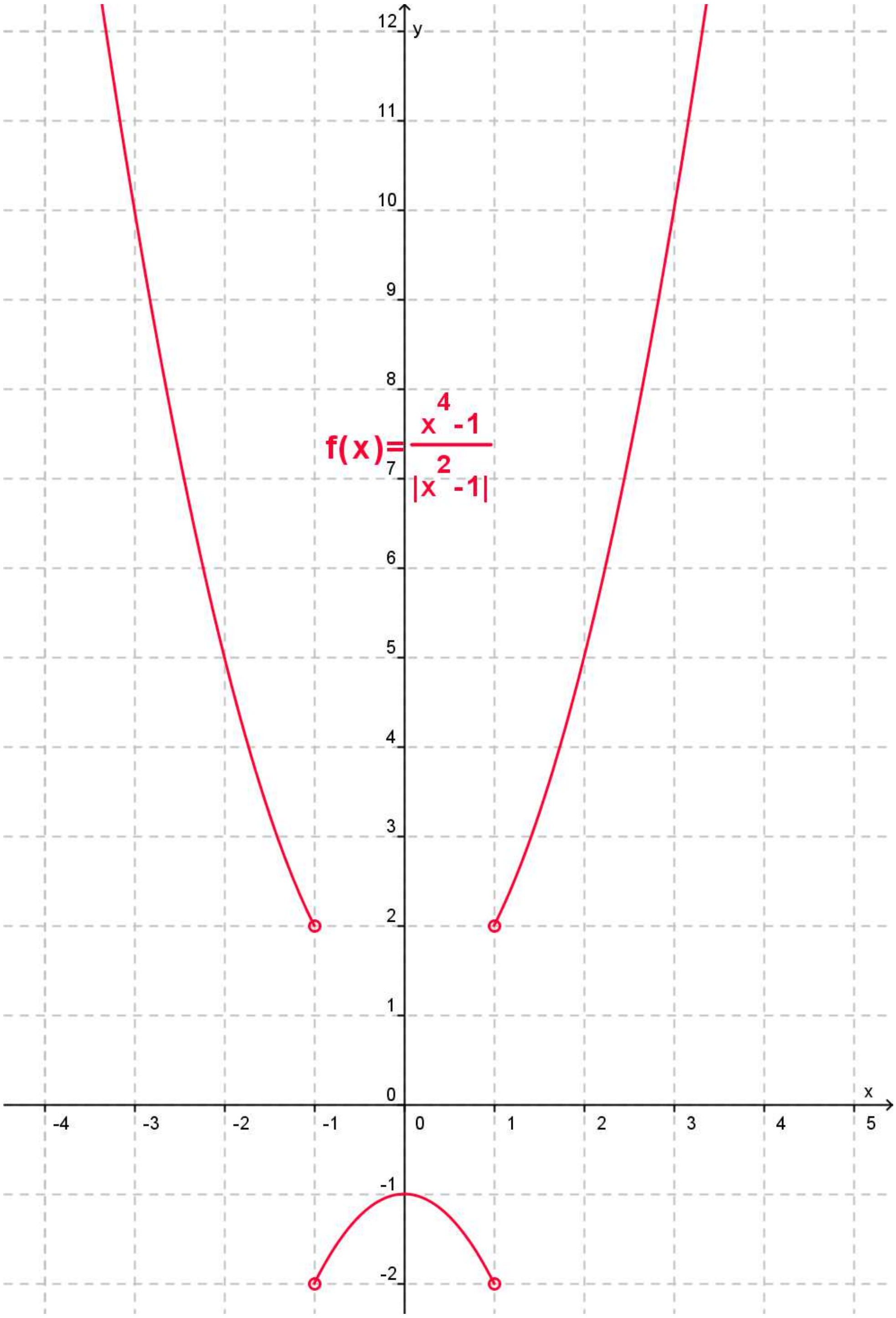
$(\Delta ADC \equiv \Delta BDC) \Rightarrow (\overline{AC} = \overline{BC}) \Rightarrow \Delta ABC$ jest równoramienny. ▲

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia i rysunek	1
B	Wyznaczenie cosinusów kątów trójkąta	1
C	Zapisanie równania i rozwiązanie równania	1
D	Wywnioskowanie, że trójkąt jest równoramienny	1

Zadanie 12. Ciastko z dziurką (6 punktów)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$.



Rozwiązanie:

[1] Wyznaczenie dziedziny funkcji:

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 1 \wedge x \neq -1),$$

zatem $D_f = R \setminus \{-1; 1\} = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

[2] Przekształcenie wzoru funkcji:

A. Zastosowanie definicji wartości bezwzględnej

$$|x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & dla\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \\ -(x^2 - 1) & dla\ x \in (-1; 1) \end{cases}$$

B. Zastosowanie wzoru skróconego mnożenia

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)$$

C. Przekształcenie ułamka algebraicznego

$$\frac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|} = \begin{cases} \dfrac{(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)}{x^2 - 1} & dla \quad x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \\ \dfrac{(x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)}{-(x^2 - 1)} & dla \quad x \in (-1; 1) \end{cases}$$

D. Funkcji określona przedziałami

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & dla\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty) \\ -x^2 - 1 & dla\ x \in (-1; 1) \end{cases}$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie dziedziny funkcji	1
B	Przekształcenie wzoru funkcji	3
C	Sporządzenie wykresu funkcji	2

Bibliografia

[1] Babiański W., Chańko L., Czarnowska J., Wesołowska J., *„Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego 3”*, Nowa Era, Warszawa 2004

[2] Bednarek W. *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1995

[3] Cewe A., Krawczyk M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropiela R., *Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik do klasy II*, Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2007

[4] Dróbka N., Szymański K., *Zbiór zadań z geometrii dla klasy I i II liceum ogólnokształcącego,* Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1997

[5] Dyda B., Romanowicz Z., *Zadania dla przyszłych olimpijczyków*, Wydawnictwo Siedmioróg, Wrocław 2008

[6] Gdowski B., Pluciński E., *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1986,

[7] Lingman J., Stachowski E., Zalewska A., *Zbiór zadań z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa dla uczniów szkół średnich*, Wydawnictwo ADAM, Warszawa 1997

[8] Karpiński L., Lech J., *Matematyka w szkole średniej. Geometria*. Zbiór *zadań dla klasy III i IV*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1997

[9] Karpiński M., Lech J., *Zbiór zadań dla klasy II*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe Gdańsk 1994

[10] Kiełbasa A., *Matura z matematyki 2010 - …, poziom podstawowy i rozszerzony, Część I*, Wydawnictwo „2000”, Warszawa 2009

[11] Kłaczkow K., Kurczab M., Świda E., *Matematyka. Zbiór zadań do liceów i techników klasa III*, Wydawnictwo Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro, Warszawa 2004

[12] Pawłowski H., *Olimpiady i konkursy matematyczne*, Oficyna Wydawnicza Tutor, Toruń 2002

[13] Rams S., Rams T., *Międzynarodowy Konkurs Matematyczny „Matematyka bez Granic”, Cześć I, Zadania konkursowe 1998-2002*, Nowy Sącz 2003

[14] Słowikowski S., *Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

[15] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994

[16] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 4*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1988,

[17] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 5*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1988

[18] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 6*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1989

[19] CKE, arkusz MMA-P1A1P-011

[20] CKE Matematyka poziom rozszerzony, przykładowy zestaw zadań nr 2, marzec 2008

[21] Egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, maj 2007

[22] Etap finałowy Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic” – 2009

[23] Etap wstępny Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic” – 2009

[24] Etap wstępny Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic” – 2008

[25] „Informator o egzaminie maturalnym od 2010 roku” zamieszczony na stronie internetowej CKE

[26] Kujon Polski, *Matura 2007 Matematyka*, Poziom podstawowy, 20 kwietnia 2007, GW

[27] Kujon Polski, GW, 25-26 marca 2006

[28] *Matematyka. Poziom rozszerzony*, Próbna matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”, grudzień 2007
[29] *Matematyka. Poziom rozszerzony*, Próbna matura z OPERONEM i „Gazetą Wyborczą”, listopad 2009
[30] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez Granic” http://www.zadania.info/d555/7754559
[31] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez Granic”, http://www.zadania.info/d555/1/20
[32] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez Granic”, http://www.xlo.pl/2003/glowna.php?to=konkursy/mbg/2002zadania
[33] Nowa Era, *Matematyka, poziom podstawowy*, Kujon Polski, Gazeta Wyborcza, 27 września 2005
[34] OE Krzysztof Pazdro, Próbny egzamin maturalny z matematyki, Poziom rozszerzony, listopad 2006
[35] OKE Wrocław, Kujon Polski GW, 16 października 2001
[36] OKE, Matematyka, Arkusz I, Próbny egzamin maturalny, czerwiec 2004
[37] Próbny egzamin maturalny z matematyki, poziom podstawowy, listopad 2006
[38] Próbny egzamin maturalny z matematyki, Arkusz I, styczeń 2005
[39] Tematy pisemnego egzaminu dojrzałości z matematyki dla abiturientów liceów ogólnokształcących (profil biologiczno - chemiczny), KOiW w Zielonej Górze, 10 maja 1995,
[40] Wespół w zespół z Matematyką bez Granic, Szkoły ponadgimnazjalne, Część I
[41] Wespół w zespół z Matematyką bez Granic, Szkoły ponadgimnazjalne, Część II