KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

rok zał. 1919
ptm

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wespół w zespół z Matematyką bez Granic

Materiały edukacyjne
dla uczestnika Projektu

Suplement podręcznika I

Zawsze można coś poprawić

II klasa szkoły ponadgimnazjalnej

Materiały edukacyjne dystrybuowane są bezpłatnie

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

STOPKA REDAKCYJNA

Suplement podręcznika I „**Zawsze można coś poprawić**” dla klasy drugiej szkoły ponadgimnazjalnej powstał w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego (umowa o dofinansowanie projektu w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki nr UDA-POKL.03.03.04-00-165/09).

Suplement podręcznika I został opracowany przez zespół doświadczonych nauczycieli matematyki uczestniczących w Projekcie pod kierunkiem Krystyny Białek - nauczyciela akademickiego Wydziału Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego, członka Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Redakcja:
Krystyna Białek, specjalista do spraw obsługi merytorycznej projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic”, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego

Autorzy materiałów edukacyjnych:
Iwona Derendarz, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Helena Ewert-Fechner, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań
Anna Rybak, Zespół Szkół Ogólnokształcących, Żagań

Tłumaczenie:
Joanna Jaros, język francuski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Elżbieta Jastrzębska, język hiszpański, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Jacek Kędziora, język włoski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Barbara Mędryk, język niemiecki, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra
Joanna Skowronek-Kaziów, język angielski, Uniwersytet Zielonogórski, Zielona Góra

Doradztwo metodyczne i recenzja:
Krystyna Białek, Zakład Dydaktyki Matematyki i Teorii Liczb, Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii Uniwersytetu Zielonogórskiego

Projekt okładki:
Klara Keler

Spis treści

I. Wprowadzenie

Materiały edukacyjne pod tytułem „**Zawsze można coś poprawić**” opracowano w ramach realizowanego przez Polskie Towarzystwo Matematyczne projektu „**Wespół w Zespół z Matematyką bez Granic”** współfinansowanego ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego. Suplement podręcznika I stanowi dodatek do materiałów edukacyjnych adresowanych do uczniów klasy drugiej szkoły ponadgimnazjalnej kontynuujących zajęcia pozalekcyjne z matematyki w ramach Projektu, realizowanego w latach 2009 – 2012 w szkołach z województw: kujawsko-pomorskiego, lubuskiego i zachodniopomorskiego.

Projekt „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic**” wpisuje się w ponadregionalny program rozwijania umiejętności uczniów w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem nauk matematyczno-przyrodniczych i języków obcych.

Celem projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic” jest podnoszenie kompetencji kluczowych uczniów ze szkół podstawowych, gimnazjalnych i ponadgimnazjalnych w zakresie kształtowania umiejętności opisywania otaczającego świata w języku matematyki, stawiania hipotez i ich weryfikowania, rozwiązywania problemów w twórczy sposób, integracji zespołu klasowego, skutecznego porozumiewania się w różnych sytuacjach, efektywnego współdziałania w zespole oraz interdyscyplinarnego spojrzenia na otaczającą nas rzeczywistość z uwzględnieniem znajomości języków obcych.

Suplement podręcznika **„Zawsze można coś poprawić”** zawiera trzy pakiety edukacyjne zgodne z Podstawą programową kształcenia ogólnego dla gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych, których ukończenie umożliwia uzyskanie świadectwa dojrzałości po zdaniu egzaminu maturalnego. Materiały edukacyjne zawarte w podręczniku mają być źródłem do wzbogacenia treści zawartych w ramowym programie nauczania z zakresu matematyki realizowanych na zajęciach lekcyjnych w szkołach, z których pochodzą uczestnicy Projektu, rozszerzenia ich oraz przygotowania uczniów do udziału w konkursach przedmiotowych.

Podział materiału edukacyjnego na trzy bloki tematyczne został opracowany na podstawie programu nauczania: Matematyka w otaczającym nas świecie. Program nauczania. Kształcenie w zakresie podstawowym i rozszerzonym. Numer dopuszczenia programu: DKOS-5002-04/08 oraz w oparciu o podręcznik: Cewe A., Krawczyk M., Kruk M., Nahorska H., Pancer I., Ropela R., *Matematyka w otaczającym nas świecie. Podręcznik dla klasy 1,* Wydawnictwo Podkowa, Gdańsk 2008.

Pakiety edukacyjne **MN-1.1, MN-1.2, MN-1.3** zawarte w suplemencie podręcznika „**Zawsze można coś poprawić**” są wzbogaceniem i pogłębieniem treści merytorycznych pakietów **M-1.1, M-1.2, M-1.3** zawartych w podręczniku „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury 1**” opracowanego na potrzeby projektu „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic**” adresowanego do uczniów pierwszej klasy szkoły ponadgimnazjalnej.

Pakiety edukacyjne zawarte w suplemencie podręcznika I będą realizowane (zgodnie z terminarzem), w ramach planu naprawczego, na zajęciach pozalekcyjnych w klasach ze szkół, które dołączyły do Projektu w połowie roku szkolnego 2009/2010 oraz zespoły klasowe uczestniczące w roku szkolnym 2009/2010 w Projekcie, które z różnych powodów nie zrealizowały pakietów M-1.1, M-1.2 i M.1.3 przeznaczonych do realizacji w pierwszej klasie szkoły ponadgimnazjalnej.

Materiały podane w każdym pakiecie edukacyjnym zaplanowano do realizacji na cztery godziny lekcyjne - zajęć pozalekcyjnych zwanych - „**Spotkaniami zespołów MbG**”.

Zajęcia te mogą być realizowane w następujący sposób: „Spotkanie 1 zespołów MbG” – 2 godziny lekcyjne, „Spotkanie 2 zespołów MbG” – 2 godziny lekcyjne.

„Spotkania zespołów MbG” (4 godziny lekcyjne) zawierają stałe elementy:

- zaplanowanie i podział zadań,
- realizację założonych planów,
- rozwiązanie zestawu zadań „Rozwiążmy razem”, w tym jednego zadania w języku obcym,
- udokumentowanie pracy zespołów,
- podsumowanie i ocenę pracy zespłów.

Realizacja każdego pakietu edukacyjnego zostanie poprzedzona jedną godziną lekcyjną przygotowań kształtujących pożądane umiejętności (wskazane przez Autorów Pakietu) pod kierunkiem nauczyciela: spotkanie pierwsze – **„Ćwiczenia otwierające”**. Kolejne 2 godziny zostaną poświęcone na rozwiązywanie zadań w wyodrębnionych zespołach – **„Rozwiążmy razem”,** natomiast ostatnia godzina powinna stanowić – **„Ćwiczenia podsumowujące”** - podsumowujące postępy uczniów - rozwiązania zestawów zadań „Rozwiążmy razem” w klasie drugiej szkoły ponadgimnazjalnej.

„Ćwiczenia otwierające” odbywają się zgodnie z terminarzem obowiązującym w danym pakiecie i są przeprowadzane przez nauczycieli matematyki w danej klasie w siedzibie szkół, z których pochodzą uczestnicy Projektu.

Zadania z „Ćwiczeń otwierających” są treningiem do rozwiązywania zestawu „Rozwiążmy razem”.

Rozwiązane zadania przez zespoły uczniów z każdego zestawu zadań „Rozwiążmy razem” sprawdza nauczyciel matematyki uczestniczący w Projekcie i ocenia je według otrzymanego klucza w danym pakiecie. **Arkusze rozwiązań zestawu zadań „Rozwiążmy razem” stanowią każdorazowo załącznik do raportu z realizacji danego pakietu edukacyjnego.**

Pierwsze zadanie podawane jest w języku obcym (angielskim, francuskim, niemieckim, hiszpańskim i włoskim). Należy je przetłumaczyć, rozwiązać i rozwiązanie podać w wybranym języku obcym. Rozwiązanie musi zawierać co najmniej 30 wyrazów.

W rozwiązaniu zestawu zadań „Rozwiążmy razem” uczestniczy cała klasa, pracując w odpowiednio dobranych grupach. Czas na rozwiązanie zadań wynosi 90 minut.

Oceniana jest również strona graficzna i estetyka przedstawionych rozwiązań. Uczniowie mogą korzystać ze słowników językowych, przyborów geometrycznych, nożyczek, kredek i flamastrów.

Zakres współpracy z nauczycielami w zakresie realizacji pakietów edukacyjnych w ramach projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic":

- zaplanowanie terminów zajęć pozalekcyjnych,
- realizacja pakietów edukacyjnych zgodnie z wytycznymi Projektodawcy,
- przygotowanie raportu z realizacji każdego pakietu edukacyjnego:
    - podanie terminów, w których odbyły się zajęcia;
    - odnotowanie frekwencji;
    - uwagi dotyczące realizacji zajęć;
    - dane dotyczące zestawu „Rozwiążmy razem";
- przesłanie raportu wraz z listą obecności uczniów na zajęciach oraz arkuszami rozwiązań zestawu „Rozwiążmy razem" na adres Punktu Konsultacyjnego Projektu,
- aktualizacja stanu osobowego zespołu klasowego,
- współdziałanie w zakresie monitoringu i ewaluacji dotyczącej realizacji Projektu.

II. Cele edukacyjne zajęć pozalekcyjnych z zakresu matematyki

Realizacja materiałów edukacyjnych pt. „**Zawsze można coś poprawić**" w ramach projektu „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" w roku szkolnym 2010/2011 zmierzać będzie do realizacji celów ogólnych:

- stwarzanie możliwości rozwoju uzdolnień ucznia;
- rozwijanie umiejętności wnioskowania oraz stawiania i weryfikowaia hipotez;
- wspomaganie i wzmocnienie procesu edukacyjnego, jakiemu podlegają uczniowie szkół ponadgimnazjalnych;
- kształcenie umiejętności czytania tekstu matematycznego ze zrozumieniem oraz analizowania ich z wykorzystaniem pojęć i technik matematycznych;
- ugruntowanie wiedzy wyniesionej przez uczniów z lekcji matematyki;
- rozwijanie umiejętności interpretowania danych;
- kształtowanie umiejętności stosowania schematów, symboli literowych, rysunków i wykresów w sytuacjach związanych z życiem codziennym;
- kształtowanie wyobraźni przestrzennej;
- wyrabianie umiejętności logicznego analizowania problemu;
- wyrabianie umiejętności dostrzegania analogii w różnych działach matematyki;
- uzyskanie pozytywnego stosunku do przedmiotu jakim jest matematyka;
- umiejętne posługiwanie się językiem matematycznym;
- kształtowanie twórczego myślenia i spostrzegawczości matematycznej;
- wyrabianie umiejętności porozumiewania się i współpracy w zespole;
- ćwiczenie umiejętności logicznej argumentacji;

- doskonalenie posługiwania się językiem obcym;
- zastosowanie języka obcego;
- uaktywnienie uczniów i zachęcanie do wysiłku umysłowego;
- przygotowanie ucznia do egzaminu maturalnego z matematyki.

Cele szczegółowe każdego pakietu edukacyjnego umieszczone są przy poszczególnych pakietach

III. Warunki organizacyjne zajęć w ramach Projektu

1. Adresaci zajęć pozalekcyjnych

Zgodnie z modyfikacją Projektu, zajęcia pozalekcyjne przeznaczone są dla uczniów klasy drugiej szkoły ponadgimnazjalnej, którzy z różnych powodów nie zrealizowali pakietów edukacyjnych: M-1.1, M-1.2, M-1.3 zawartych w podręczniku I „Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do Matury I" adresowanych do uczniów klasy pierwszej szkoły ponadgimnazjalnej oraz chcą utrwalić, poszerzyć wiedzę oraz rozwijać i udoskonalić swoje umiejętności w zakresie kompetencji kluczowych, ze szczególnym uwzględnieniem matematyki i języków obcych, jak również chcą odnieść sukces na egzaminie maturalnym z matematyki.

2. Wymagania wstępne

Uczeń rozpoczynający uczestnictwo w Projekcie powinien:

- określać wartość logiczną zdania, alternatywy, koniunkcji, implikacji, równoważności zdań;
- wykonywać podstawowe działania na zbiorach i przedziałach liczbowych;
- wykonywać obliczenia na liczbach rzeczywistych;
- wykonywać działania na potęgach o wykładnikach wymiernych;
- odróżniać liczby wymierne od niewymiernych;
- zamieniać ułamki zwykłe na ułamki dziesiętne okresowe i odwrotnie;
- znać pojęcie wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej i jej interpretację geometryczną;
- porównywać liczby rzeczywiste;
- szacować wartości wyrażeń liczbowych oraz błąd przybliżenia;
- rozwiązywać nierówności liniowe oraz ich układy i zapisywać wyniki w postaci przedziałów liczbowych;
- stosować obliczenia procentowe;
- szkicować wykresy funkcji liczbowych zadanych tabelką oraz funkcji przedziałami liniowych;
- odczytywać z dowolnego wykresu funkcji jej własności;
- znajdować na podstawie wykresu funkcji jej wartości największe (najmniejsze) w dziedzinie lub jej podzbiorze;
- przekształcać wykresy funkcji (przesunięcia, symetrie;

- wyznaczać równanie prostej na płaszczyźnie;
- rozwiązywać układy równań liniowych i znać ich interpretacje w układzie współrzędnych;
- stosować układy równań z dwiema i trzema niewiadomymi do rozwiązania zadań tekstowych;
- opisywać półpłaszczyzny za pomocą nierówności liniowych;
- stosować twierdzenie Talesa do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać skalę podobieństwa figur podobnych;
- wykorzystywać twierdzenie o stosunku pól figur podobnych do rozwiązywania zadań;
- wyznaczać funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- rozwiązywać zadania geometryczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym;
- obliczać wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, jeśli jest znana jedna z nich.
- posługiwać się kalkulatorem przy rozwiązywaniu typowych zadań;
- dostrzegać, wykorzystywać i interpretować zależności funkcyjne;
- interpretować związki wyrażone za pomocą wzorów, wykresów, schematów, diagramów, tabel;
- prezentować z użyciem języka matematyki wyniki badań prostych zagadnień;
- znać własności funkcji kwadratowej, sporządzać jej wykres;
- wykonywać działania na wielomianach i funkcjach wymiernych;
- sporządzać wykres funkcji homograficznej;
- rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe;
- rozwiązywać układy równań i nierówności, z których co najmniej jedna jest stopnia drugiego;
- znać pojęcie ciągu, definicję i podstawowe własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego;
- znać pojęcie okręgu i koła również w ujęciu analitycznym;
- określać wzajemne położenie dwóch okręgów, prostej i okręgu;
- znać elementy przynajmniej jednego języka nowożytnego;
- czytać ze zrozumieniem, tłumaczyć wyrazy i budować proste zdania języku obcym;
- biegle posługiwać się słownikiem języka obcego.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

3. Sylwetka uczestnika zajęć po drugim roku realizacji Projektu

Zakładamy, że prowadzenie zajęć pozalekcyjnych z matematyki w roku szkolnym 2010/2011 w ramach Projektu pozwoli na:

- aktywizację uczniów;
- wykształcenie postawy nieustępliwości i uporu w rozwiązywaniu zadań;
- wykształcenie u uczniów umiejętności przejrzystego przedstawiania rozumowania i uzasadniania odpowiedzi;
- wykształcenie umiejętności uzasadniania własnego stanowiska, argumentowania i przekonywania innych;
- wykształcenie umiejętności pracy w zespole;
- ułatwienie podejmowania decyzji o przyjęciu różnych ról społecznych w grupie i ich zamianę w zależności od wykonywanego zadania;
- uświadomienie uczniom użyteczności matematyki w życiu codziennym;
- właściwe zaplanowanie i wykorzystanie czasu na naukę;
- zaspokajanie i rozwijanie wielu potrzeb edukacyjnych;
- lepsze poznanie uczniów w obrębie grupy;
- integrację zespołu klasowego;
- wykorzystanie zdobytej wiedzy na egzaminie dojrzałości z matematyki.

Uczeń po realizacji materiałów edukacyjnych zawartych w podręczniku „**Wespół w zespół z Matematyką bez Granic do matury II**” i suplementu podręcznika I „**Zawsze można coś poprawić**” powinien:

- znać podzbiory zbioru liczb rzeczywistych i relacje między nimi,
- obliczać procent danej liczby,
- wyznaczać sumę , różnicę i iloczyn przedziałów,
- znać definicję przedziału liczbowego na osi,
- wykonywać działania na wielomianach,
- rozwiązywać równania wielomianowe, stosując metody rozkładu wielomianu na czynniki,
- rozwiązywać równania i nierówności homograficzne,
- znać definicje funkcji i odczytywać własności funkcji z wykresu,
- wyznaczać sumę, różnicę i iloczyn przedziałów trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym i stosować je do rozwiązywania zadań,
- wyznaczać sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego,
- umieć zastosować wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego i geometrycznego,
- przeprowadzać nieskomplikowane rozumowania matematyczne,
- posługiwać się własnościami liczb i działań oraz własnościami figur przy rozwiązywaniu zadań,

- posługiwać się kalkulatorem przy rozwiązywaniu typowych zadań,
- dostrzegać, wykorzystywać i interpretować zależności funkcyjne.

4. Czas trwania zajęć w ramach realizacji Projektu

Czas trwania zajęć uzależniony jest od organizacji roku szkolnego i składa się z trzech etapów. Każdy etap obejmuje jeden rok nauki szkolnej i polega na realizacji siedmiu pakietów edukacyjnych w wymiarze 28 godzin lekcyjnych (po 4 godziny na jeden pakiet).

IV. Metody i formy uczenia się

Nauczyciele prowadzący zajęcia w ramach Projektu powinni, podczas pracy z uczniami, występować w roli tutorów i przewodników w drodze nabywania umiejętności i wiedzy, dbając o to, aby proces realizacji Projektu był dostosowany do możliwości uczestników i jednocześnie przebiegał sprawnie. W uzgadnianiu wykonywania zadań dominować powinno dążenie do rzeczowego przekonywania się, kompromisów i osiągania consensusu.

Wskazane jest, aby nauczyciele zachęcali uczestników danego zespołu do podejmowania różnych ról społecznych i zadaniowych w ramach pracy w grupie, np.: przewodniczących, sekretarzy, ekspertów (naukowych, organizacyjnych), kierowników prac, asystentów, prezenterów, reprezentantów itp., a także, aby inspirowali młodzież do zamiany tych ról w zależności od wykonywanego zadania.

Wskazane jest także, opracowanie przez każdy zespół własnego logo oraz nazwy, które będą stałymi elementami znakowania materiałów i pogłębiania identyfikacji z grupą.

Główną formą pracy z uczniami jest praca w grupach. Można też zastosować takie metody jak: dyskusja, metoda ćwiczeniowa i burza mózgów. Zakładamy, że dzięki pracy w zespołach zadaniowych uczniowie będą mieli możliwość rozwinięcia abstrakcyjnego myślenia oraz udoskonalenia umiejętności twórczego rozwiązywania problemów. Szczególne korzyści z pracy w zespole mają uczniowie mniej zdolni. Taka forma zajęć ma często decydujący wpływ na zmianę ich postawy wobec przedmiotu, zwiększa zainteresowanie zajęciami i niejednokrotnie pomaga osiągnąć lepsze wyniki w nauce. Dzięki czynnemu udziałowi w pracach i osiągnięciach zespołu zadaniowego, uczniowie nabiorą wiary we własne siły i chętnie uzupełnią braki w swoich wiadomościach z matematyki i języków obcych.

W czasie indywidualnej pracy z podręcznikiem uczeń może skorzystać z następujących porad doskonalących umiejętność rozwiązywania zadań:

- Przeczytaj zadanie kilkukrotnie.
- Jeżeli zadanie dotyczy konkretnej sytuacji, postaraj się wyobrazić sobie tę sytuację. Możesz wykonać rysunek do zadania.
- Ustal, co jest niewiadomą w zadaniu i co wystarczy wiedzieć, by tę niewiadomą ustalić.
- Wyodrębnij dane z zadania i ustal, czego możesz się na podstawie tych danych dowiedzieć.
- Ułóż plan rozwiązania i wykonaj go.
- Sprawdź czy Twoje rozwiązanie jest poprawne.

V. Pakiety edukacyjne

Pakiet MN-1.1 „Liczenie, mierzenie i nie tylko...”

Własności liczb naturalnych – liczby parzyste i nieparzyste, liczby pierwsze i złożone, podzielność liczb naturalnych, reszta z dzielenia.

Rozwiązywanie układów równań w zbiorze liczb naturalnych. Zapis dziesiętny liczb naturalnych.

Współrzędne punktów w układzie współrzędnych, wierzchołki równoległoboku.

Pola i obwody figur podobnych.

Funkcje trygonometryczne kąta ostrego, związki między funkcjami tego samego kąta.

Wartość bezwzględna. Wykresy funkcji określonych przedziałami.

Pakiet MN-1.2 „Wędrówki, nie tylko geometryczne”

Wzajemne położenie kół (okręgów). Pole koła, pole wycinka koła, pole trójkąta.

Trójkąt prostokątny. Twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego.

Trójkąt równoboczny wpisany w kwadrat. Konstrukcje wykonywane za pomocą cyrkla i linijki.

Działania na liczbach wymiernych i liczbach niewymiernych. Przybliżenia.

Związki miarowe w figurach płaskich. Pola wielokątów.

Ostrosłup, pole powierzchni ostrosłupa.

Rozwiązywanie układów równań liniowych.

Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie.

Trójkąt rozwartokątny, wysokości trójkąta.

Okrąg wpisany w trójkąt. Związek między promieniem okręgu (koła) wpisanego w wielokąt a polem i obwodem wielokąta.

Gwiazda ośmiokątna, gwiazda sześciokątna.

Pakiet MN-1.3 „Ile, czy możliwe, że aż tyle”

Definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i proste równania trygonometryczne.

Zadania prowadzące do prostych równań wymiernych (liniowych, kwadratowych) w kontekście praktycznym.

Wzory skróconego mnożenia i ich wykorzystanie w wykazywaniu złożoności liczb.

Zbiory i działania na zbiorach, liczebność zbiorów.

Dzielenie z resztą.

Równania stopnia pierwszego i drugiego w liczbach naturalnych.

Pola figur płaskich.

Pakiet MN-1.1 „Liczenie, mierzenie i nie tylko...”

I. Treści merytoryczne:

- własności liczb naturalnych – liczby parzyste i nieparzyste, liczby pierwsze i złożone, podzielność liczb naturalnych, reszta z dzielenia,
- układy równań w zbiorze liczb naturalnych, zapis dziesiętny liczb naturalnych,
- współrzędne punktów w układzie współrzędnych, wierzchołki równoległoboku,
- pola i obwody figur podobnych,
- funkcje trygonometryczne kąta ostrego, związki między funkcjami tego samego kąta,
- wartość bezwzględna, wykresy funkcji określonych przedziałami.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie rozumowania, tworzenia łańcucha logicznego i umiejętności uzasadnienia argumentacji,
- dobieranie modelu do sytuacji problemowej, znajdowanie strategii wygrywającej,
- tworzenie strategii rozwiązywania problemów, w tym praktycznych.

III. Metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup (zespoły zadaniowe w innym składzie niż na poprzednich spotkaniach).
4. Praca w grupach: każdy zespół wymyśla dla siebie nazwę (związaną z matematyką, działaniami społecznymi, historycznymi lub współczesnymi postaciami świata odkryć, dokonań naukowych) oraz logo zespołu.
5. Przedstawienie nazw i logo przez poszczególne grupy.
6. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
7. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
8. Zebranie kart z rozwiązaniami.
9. Podsumowanie zajęć.
10. Zakończenie zajęć.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo.
Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do zestawu „Ćwiczeń otwierających":

[1] Bobiński Z., Kourliandtchik L., Pogoda T., Świątek A., Uscki M., *Miniatury matematyczne 5,* Wydawnicywo Aksjomat, Toruń 2001 (Zadanie 4)
[2] Red. Klorek F., *Materiały dla nauczycieli matematyki, zeszyt 4*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1998 (Zadanie 2)
[3] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article231 (Zadanie 1)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem":

[1] Bednarek W., *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1995 (Zadanie 6)
[2] Bobiński Z., Kourliandtchik L., Pogoda T., Świątek A., Uscki M., *Miniatury matematyczne 5*, Wydawnicywo Aksjomat, Toruń 2001 (Zadanie 5)
[3] Pyrdoł P., *Matematyka. Zbiór zadań Linia 2*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Gdynia 2003 (Zadanie 12)
[4] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994 (Zadanie 7)
[5] Red. Klorek F., *Materiały dla nauczycieli matematyki, zeszyt 4,* Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1998 (Zadanie 2, zadanie 3)
[6] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article191 (Zadanie 1)

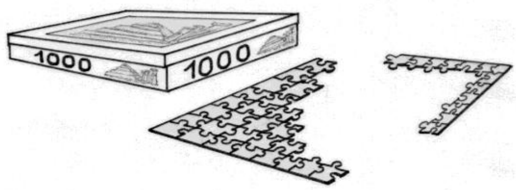
Spotkanie 3. „Ćwiczenia podsumowujące" (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadań.
3. Nauczyciel ocenia pracę zespołów zadaniowych (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem" będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „Liczenie, mierzenie i nie tylko…”

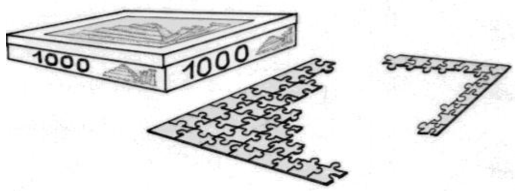
Exercise 1. About thousand! (6 points)



Melania wants to set puzzles. Cover of a box shows rectangle pattern with the subscription: „1000 pieces”.

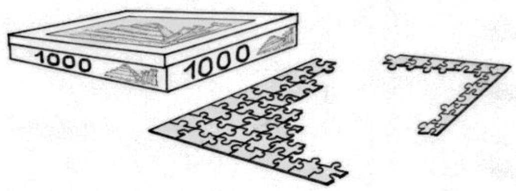
First Melania is puting aside the puzzles forming the border of a picture. There are exactly 124 such border puzzles and among them there are 4 corner puzzles. Trying to set the puzzles she notices that it is impossible that the picture consists of exactly 1000 pieces.
What can be the exact number of pieces knowing that it is close to 1000? Argue the answer.

Exercice 1. Environ un mille! (6 points)



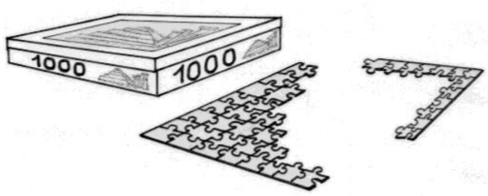
Mélanie veut faire des puzzles. Sur le couvercle de la boîte présente un motif rectangulaire ayant pour inscription: «1000 pièces ».[1]
D’abord, Mélanie met de côté toutes les pièces faisant partie du rebord de cette image. Elle en retrouve exactement 124, y compris les 4 coins de l’image. En essayant de les disposer, elle s’aperçoit qu’il est impossible que ce puzzle se compose exactement de 1000 pièces. Quel peut être le nombre exact de pièces de ce puzzle si on sait qu’il est proche de 1000? Justifie ta réponse.

Tarea1. Cerca de un mil! (6 puntos)



Melania quiere formar un puzle. La tapa de la caja presenta un motivo rectangular con una inscripción: „1000 piezas”.
En primer lugar, Melania pone a un lado todas las partes que forman un borde del dibujo. Las encuentra precisamente 124, incluyendo 4 cuernos del dibujo. Tratando de formarlas, súbitamente, se da cuenta que no es posible que este puzle se componga exactamente de 1000 partes. ¿Cuál puede ser una cantidad precisa de piezas del puzle, si sabemos que se acerca a 1000? Argumenta tu respuesta.

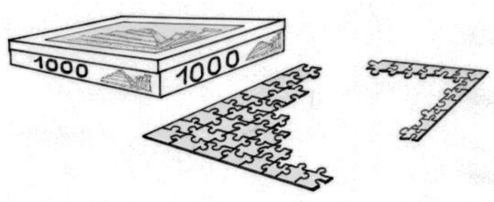
Aufgabe 1. Ungefähr ein Tausend! (6 Punkte)



Melania möchte ein Puzzle zusammensetzen. Der Deckel von der Schachtel stellt ein rechteckiges Motiv mit einem Aufschrift „1000 Stück“ dar.
Melania legt zuerst alle den Rand des Bildes bildenden Stücke beiseite. Sie findet genau 124 von solchen Stücken, unter denen sich 4 Ecken des Bildes befinden. Als sie versucht, sie zusammenzusetzen, merkt sie, dass es unmöglich ist, dass das Puzzlespiel genau aus 1000 Stücken besteht. Aus genau wie vielen Stücken kann das Puzzlespiel bestehen, wenn man weiß, dass die Zahl der Stücke nahe 1000 ist. Begründe die Antwort.

[1] Ilustracja ze źródła zadania

Esercizio 1. Circa mille! (6 punti)



Melania vuole allineare i giochi di puzzle. Il coperchio della scatola presenta il motivo con la scritta „1000 pezzi".
All'inizio Melania mette da parte tutti i pezzi facendo il bordo dell'illustrazione. Ne ritrova precisamente 124, con 4 angoli dell'illustrazione. Tentando di allinearli all'improvviso si rende conto che non è possibile che questo gioco abbia precisamente 1000 pezzi. Quale può essere il numero di pezzi di questo gioco di puzzle, se sappiamo che non è lontano da 1000. Motiva la risposta.

Zadanie 2. Na osiem! (3 punkty)

Udowodnij, ze dla każdej liczby nieparzystej $n \geq 1$ liczba $n^3 + n^2 - n - 1$ jest podzielna przez 8.

Zadanie 3. Co to będzie? (6 punktów) [2]

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} x^2 - \frac{x+2}{|x+2|} x$.

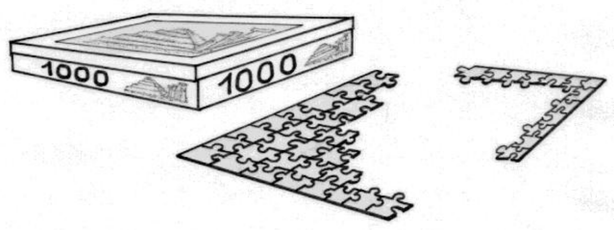
Zadanie 4. Pierwsze czy drugie? (5 punktów)

Niech $p,\ p+10,\ p+14$ będą liczbami pierwszymi. Znaleźć p .

[2] Zadanie własne Anny Rybak

Rozwiązania oraz schemat oceniania zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Liczenie, mierzenie i nie tylko …"

Zadanie1. Około tysiąca! (6 punktów)



Melania chce ułożyć puzzle. Przykrywka pudełka przedstawia prostokątny motyw z napisem „1000 sztuk". Melania najpierw odkłada na bok wszystkie części tworzące brzeg obrazka. Odnajduje ich dokładnie 124, w tym 4 rogi obrazka. Usiłując je ułożyć spostrzega nagle, że niemożliwe jest, aby ta układanka składała się dokładnie z 1000 części. Jaka może być dokładna liczba sztuk układanki, jeśli wiadomo, że jest ona bliska 1000. Odpowiedź uzasadnij.

Rozwiązanie:

Jeśli oznaczymy jako x i y ilość sztuk na długości i szerokości, to całkowita liczba sztuk na brzegach wynosi $x+y+x+y-4$ ponieważ rogów nie liczymy dwa razy.

Więc $x+y=64$.

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Liczba sztuk puzzle może wynosić 999 lub 1008.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Ułożenia równania	1
C	Rozpatrzenie możliwych rozwiązań	2
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Exercise 1. About thousand! (6 points)

Solution:

Le **x** and **y** be the number of pieces on the border along the length and the width of a rectangle, respectively. So the total number of pieces on the border is: $x + y + x + y - 4$ because the corners can't be considered two times.So $x + y = 64$.

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

The number of all puzzles can be 999 or 1008.

Points:

Activity.	Stages of solution	Points
A	Translation Polish	2
B	Writing equations	1
C	Consideration of possible solutions	2
D	Answer in English	1

Exercice 1. Environ un mille! (6 points)

Solution:

Si nous déterminons x et y le nombre de pièces en longueur et en largeur, le nombre entier de pièces sur les rebords est égal à: $x+y+x+y-4$ puisque nous ne comptons pas deux fois les coins. Donc $x+y=64$.

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Le nombre de pièces peut être égal à 999 ou à 1008.

Pointage:

Activités	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Formulation de l'équation	1
C	Examen des solutions possibles	2
D	Réponse en langue étrangère	1

Tarea1. ¡Cerca de un mil! (6 puntos)

Solución:

Si marcamos como x y y la cantidad de piezas sobre la longitud y sobre la anchura, la cantidad total de piezas sobre los bordes equivale a: $x+y+x+y-4$ porque los cuernos no son contados dos veces. Entonces $x+y=64$

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

La cantidad de piezas de puzle puede ser 999 o 1008.

Puntuación:

Acción	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Formación de la ecuación	1
C	Estudio de soluciones posibles	2
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Ungefähr ein Tausend! (6 Punkte)

Lösung:

Wenn wir als x und y die Zahl der Stücke auf der Länge und Breite des Bildes bezeichnen, dann beträgt die ganze Zahl der Stücke an den Ränder: $x+y+x+y-4$, weil wir die Ecken nicht zweimal zählen.
Also $x+y=64$

x	y	xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Die Zahl der Puzzlespielstücke kann 999 oder 1008 betragen.

Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	2
B	Ansatz der Gleichung	1
C	Erwägen von möglichen Lösungen	2
D	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Esercizio1. Circa mille! (6 punti)

Soluzione:

Se indichiamo come x e y il numero di pezzi sulla lunghezza e sulla larghezza, il numero totale di pezzi sui bordi farà: $x+y+x+y-4$ perché non contiamo due volte gli angoli.

Dunque $x+y=64$.

x	y	Xy
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Il numero di pezzi di puzzle può fare 999 o 1008.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	2
B	Formulazione dell'equazione	1
C	Esame delle soluzioni possibili	2
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	1

Zadanie 2. Na osiem! (3 punkty)

Rozwiązanie:

Mamy: $n^3+n^2-n-1=(n+1)(n+1)(n-1)$.

Skoro n jest liczbą nieparzystą to $n+1$ i $n-1$ są liczbami parzystymi, więc $(n+1)(n+1)(n-1)$ dzieli się przez 2^3 czyli przez 8.

Punktacja:

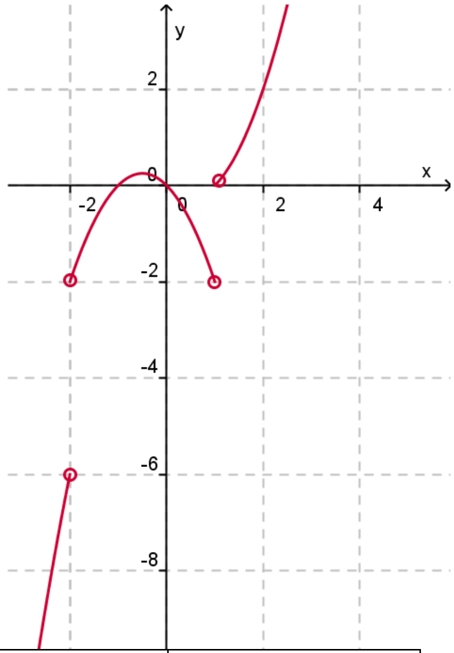
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rozkład wielomianu na czynniki	1
B	Zauważenie, że $n+1$ i $n-1$ są parzyste	1
C	Sformułowanie wniosku	1

Zadanie 3. Co to będzie? (6 punktów)[3]

Rozwiązanie:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x, \text{ dla } x<-2 \\ -x^2-x, \text{ dla } -2<x<1. \\ x^2-x, \text{ dla } x>1 \end{cases}$$

Otrzymujemy wykres:



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie wzoru funkcji w poszczególnych przedziałach	3
B	Wykonanie wykresu	3

Zadanie 4. Pierwsze czy drugie? (5 punktów)

Rozwiązanie:

Liczba pierwsza $p=2$ nie spełnia warunków zadania, natomiast liczba $p=3$ oczywiście je spełnia.
Niech $p>3$ będzie liczbą pierwszą.
Wówczas reszta z dzielenia liczby p przez 3 jest 1 lub 2.
Jeżeli $\boldsymbol{p}$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1 to $3|p+14$, a jeżeli $\boldsymbol{p}$ przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2, to $3|p+10$.
Zatem dla liczby pierwszej $p>3$ jedna z liczb $p+10,\ p+14$ jest liczbą złożoną.
Tak więc jedynie liczba pierwsza $p=3$ ma tę własność, że także liczby $p+10, p+14$ są liczbami pierwszymi.

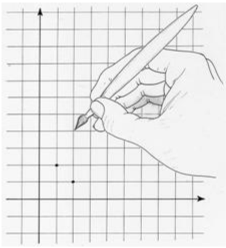
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Stwierdzenie, że liczba 2 nie spełnia a 3 spełnia warunki zadania	2
B	Przeprowadzenie rozumowania	2
C	Sformułowanie wniosku	1

[3] Zadanie własne Anny Rybak

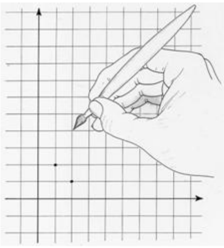
Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" - „Liczenie, mierzenie i nie tylko …"

Exercise 1 Not integral centres (6 points)



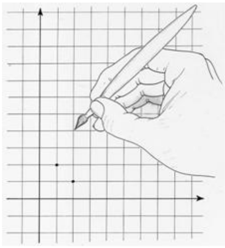
Kladiusz marks the points with integral coordinates in a right-angle system of coordinates using the following rule: Every next marked point forms the segments with each point of the rest points. The centres of these segments have a such property that their coordinates should not be both integral numbers. What number of points can Klaudiusz mark maximally using the above rule? Argue the answer.

Exercice 1. Les milieux pas entiers (6 points)



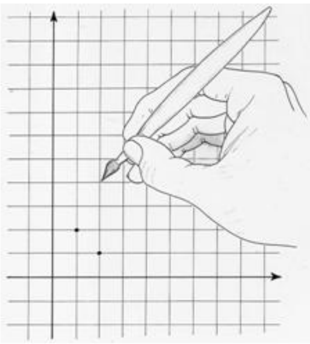
Dans un système de coordonnées rectangulaires, Claude marque les points avec des coordonnées entières en utilisant la règle suivante: «Chaque point nouvellement marqué, crée des segments avec tous les autres. La propriété des milieux de ces segments est telle que leurs coordonnées ne doivent pas être deux nombres entiers». Combien de points au maximum Claude peut-il marquer en utilisant cette règle? Justifier la réponse.[5]

Tarea 1. Centros no completos (6 puntos)



En el sistema rectangular de coordenadas, Claudio marca los puntos con las coordenadas completas aplicando la regla siguiente: «Cada punto puesto de nuevo, forma con cada de los otros, los segmentos cuyos centros tienen tal propiedad que sus coordenadas no deben ser dos cantidades completas.» ¿Qué cantidad de puntos, como máximo, puede marcar Claudio aplicando esta regla? Argumentar la respuesta.

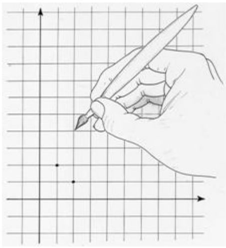
Aufgabe 1. Unvollständige Mitte (6 Punkte)



In einem rechtwinkligen Koordinatensystem markiert Klaudiusz Punkte mit ganzen Koordinaten und wendet dabei folgende Regel an:«Jeder neu markierte Punkt bildet mit allen anderen Punkten Abschnitte, deren Mittelpunkte solche Eigenschaft besitzen, dass die Koordinaten der Mittelpunkte zwei ganze Zahlen nicht sein sollen.» Welche maximale Punktezahl kann Klaudiusz markieren, indem er diese Regel anwendet? Die Antwort begründen.

[5] Ilustracja ze źródła zadania

Esercizio 1. I mezzi non completi (6 punti)



Nel sistema di coordinate rettangolare Claudio indica i punti con le coordinate intere, usando il principio seguente:«Ogni punto nuovo, fa con ogni altro i segmenti di cui centri hanno la proprietà che le loro coordinate non dovrebbero essere due numeri interi.» Quale quantità massima di punti può indicare Claudio usando questo principio? Motivare la risposta.

Zadanie 2. Grać, wygrywać! (4 punkty)

W pierwszej urnie jest 15 kul niebieskich, w drugiej urnie 12 kul białych. Za jednym razem można wyjąć dwie kule białe lub 3 niebieskie. Wygrywa ten, kto bierze ostatnią kulę. Jak powinien grać rozpoczynający, aby wygrać?

Zadanie 3. Wieś Miasteczko (3 punkty)

We wsi miasteczko mieszka 118 dzieci, zaś w miasteczku Wioska mieszka 108 dzieci. W którym miejscu należy wybudować szkołę, tak, aby dzieci idące do szkoły pokonywały w sumie jak najmniejszą ilość kilometrów?

Zadanie 4. Co to będzie? (6 punktów)

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1}x - 1$.

Zadanie 5. Pierwsze czy drugie? (5 punktów)

Znaleźć wszystkie liczby pierwsze p , dla których liczba $8p^2 + 1$ jest także liczbą pierwszą.

Zadanie 6. Literki (4 punkty)

Symbol typu $\overline{ABCDE}$ $\overline{ABCDE}$ oznacza zapis dziesiętny liczby naturalnej o cyfrach A, B, C, D, E A, B, C, D, E .

Znaleźć wszystkie liczby naturalne $\overline{ABC}$ $\overline{ABC}$ takie, że $\overline{2ABC1} \div \overline{1ABC2} = 21 \div 12$ $\overline{2ABC1} \div \overline{1ABC2} = 21 \div 12$.
Uwaga: symbol „$\div$ " jest znakiem dzielenia.

Zadanie 7. Będzie co jeść (5 punktów)

Dwunastu ludzi niesie dwanaście bochenków chleba. Każdy mężczyzna niesie po 2 bochenki, kobieta po 0,5 bochenka , dziecko po 0,25 bochenka. Ilu jest mężczyzn, ile kobiet i ile dzieci?

Zadanie 8. Kolejno czy nie? (4 punkty)[6]

Punkty $A = (-200; 150)$, $B = (420; 550)$, $C = (650; -300)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku $ABCD$.
Jakie współrzędne ma wierzchołek D?

[6] Zadanie własne Anny Rybak

Czy rozwiązanie zadania ulegnie zmianie, gdy usuniemy słowo: kolejnymi?
Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 9. Trrrygonometria (3 punkty) [7]

Rozwiąż równanie bez użycia tablic

$$\frac{x\cdot\sin^2 45^\circ - 2\cos^2 60^\circ}{\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ} = tg50^\circ \cdot tg40^\circ.$$

Zadanie 10. Rzeczy dziwne, ciekawe (3 punkty) [8]

Czy liczba $\sqrt{22-4\sqrt{10}} - 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$ jest liczba całkowitą? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11. Pola i obwody (4 punkty) [9]

Stosunek pól dwóch wielokątów podobnych wynosi $\frac{1}{3}$.
Obwód jednego z nich to 12.
Jaki jest obwód drugiego wielokąta?

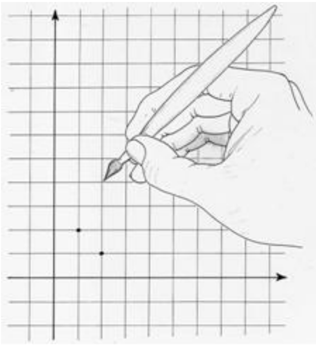
Zadanie 12. Smacznego (3 punkty)

Do restauracji przyszło trzech kolegów, zjedli obiad i zapłacili – każdy po 11 zł.
Kelner zaniósł pieniądze do szefa, ten jednak powiedział:
To są nasi stali klienci – zwróć im 5 zł.
W drodze do stolika kelner pomyślał:
„Przecież 5 zł nie da się podzielić równo pomiędzy 3 osoby, zabiorę za swój trud 2 zł, a resztę oddam klientom – każdemu po złotówce”.
Jeśli każdy z klientów zapłacił 10 zł, a 2 zł zabrał kelner, to gdzie się podziała złotówka?

[7] Zadanie własne Anny Rybak
[8] Zadanie własne Anny Rybak
[9] Zadanie własne Anny Rybak

Rozwiązania oraz schemat oceniania zestawu „Rozwiążmy razem" „Liczenie, mierzenie i nie tylko …"

Zadanie 1. Niecałkowite środki (6 punktów)



W prostokątnym układzie współrzędnych Klaudiusz zaznacza punkty o współrzędnych całkowitych, stosując następującą zasadę: "Każdy nowo postawiony punkt, tworzy z każdym z pozostałych odcinki, których środki mają tę własność, że ich współrzędne nie powinny być dwiema liczbami całkowitymi."

Jaką maksymalnie ilość punktów może zaznaczyć Klaudiusz stosując tę zasadę?

Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie:

Środek odcinka w układzie współrzędnych ma całkowite współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy ich odcięte są obie parzyste (P) lub obie nieparzyste (N), to samo się tyczy ich rzędnych. Można zaznaczyć więc 4 punkty unikając tej sytuacji : na przykład:
A:(P;P); B:(P;N); C:(N;P); D:(N,N), lecz jeśli chcielibyśmy postawić piąty punkt, jego współrzędne będą już zapisywane w jednej z 4 wymienionych postaci.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Analiza możliwych przypadków	2
C	Podanie liczby punktów	1
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

Exercise 1. Not integral centres (6 points)

Solution:

Centre of a segment in a coordinate system has the integral coordinates if and only if the abscissas of the ends of a segment are both even or both odd, the same condition concerns the ordinates of the ends. We can mark 4 points to avoid the above situation, for example:
A:(P;P) ; B:(P;N) ; C:(N;P) ; D:(N,N) but the 5-th point E should be in one of these four forms.

Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	2
B	Analysing of possible cases	2
C	Giving the number of points	1
D	Answer in English	1

Exercice 1. Les milieux pas entiers (6 points)

Solution:

Le milieu d'un segment dans le système de coordonnés a des coordonnées entières seulement quand leurs deux abscisses sont paires ou leurs deux abscisses sont impaires. C'est la même chose pour leurs ordonnées. Ainsi peut-on marquer 4 points en évitant cette situation, par exemple:
A:(P;P); B:(P;N); C:(N;P); D:(N,N), mais si on veut marquer un cinquième point, ses coordonnées seront déjà inscrites dans une des quatre formes énumérées.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Analyse des cas possibles	2
C	Nombres de points	1
D	Réponse en langue étrangère	1

Tarea 1. Centros no completos (6 puntos)

Solución:

El centro del segmento en el sistema de coordenadas posee las coordenadas completas solamente entonces cuando sus abscisas son las dos pares o las dos impares. Lo mismo concierne sus ordenadas. Se puede marcar 4 puntos evitando esta situación: por ejemplo:
A:(P;P); B:(P;N); C:(N;P); D:(N,N), pero si se pusiera el punto quinto, sus coordenadas serían ya escritas en una de cuatro formas enumeradas.

Puntuación:

Acción	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Análisis de los casos posibles	2
C	Determinación de la cantidad de puntos	1
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Unvollständige Mitte (6 Punkte)

Lösung:

Der Abschnittsmittelpunkt in Koordinatensystem hat ganze Koordinaten dann, und nur dann, wenn seine beiden Abszissen entweder gerade oder ungerade sind, und dasselbe betrifft seine Ordinaten. Man kann also 4 Punkte markieren, um diese Situation zu vermeiden: zum Beispiel:
A:(P;P); B:(P;N); C:(N;P); D:(N,N), aber wenn wir den fünften Punkt markieren wollten, werden seine Koordinaten in einer der 4 genannten Gestalten aufgeschrieben.

Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	2
B	Analyse der möglichen Fällen	2
C	Angabe der Punktezahl	1
D	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Esercizio 1. I mezzi non completi (6 punti)

Soluzione:

Il centro del segmento nel sistema di coordinate ha le coordinate intere solamente quando le loro ascisse sono ambedue pari o dispari, lo stesso concerne le loro ordinate. Possiamo quindi indicare 4 punti evitando una tale situazione per esempio:
A:(P;P); B:(P;N); C:(N;P); D:(N,N), ma se vorremmo indicare un quinto punto, le sue coordinate saranno scritte in una di 4 forme elencate.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	2
B	Analisi dei casi possibili	2
C	Presentazione del numero li punti	1
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	1

Zadanie 2. Grać, wygrywać! (4 punkty)

Rozwiązanie:

Rozpoczynający ma strategię wygrywającą. W pierwszej urnie mamy 5 grup kul niebieskich po 3, a w drugiej 6 grup kul białych po 2. Rozpoczynający powinien tak brać kule, aby ilość grup w każdej urnie była jednakowa, tzn. za pierwszym razem powinien wziąć dwie kule białe z drugiej urny. Jego przeciwnik będzie musiał naruszyć te równość.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podział kul na grupy	2
B	Zaproponowanie strategii wygrywającej	2

Zadanie 3. Wieś Miasteczko (3 punkty)

Rozwiązanie:

W tym miejscu, w którym mieszka więcej dzieci, ponieważ wtedy suma kilometrów będzie najmniejsza.

Punktacja:

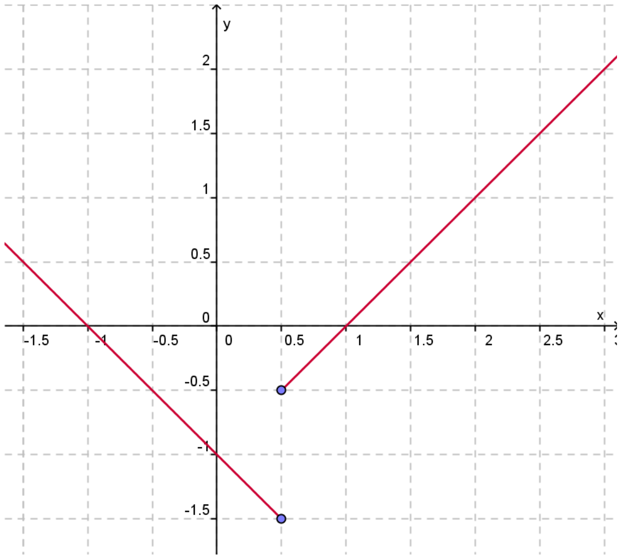
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie odpowiedzi z uzasadnieniem	3

Zadanie 4. Co to będzie (6 punktów)[10]

Rozwiązanie:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, dla\ x > \frac{1}{2} \\ -x - 1, dla\ x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Otrzymujemy wykres: [11]



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie wzoru funkcji w dwóch przypadkach	3
B	Wykonanie wykresu funkcji	3

Zadanie 5. Pierwsze czy drugie? (5 punktów)

Rozwiązanie:

Dla $p = 2$ liczba $8 \cdot 2^2 + 1 = 33$ nie jest liczbą pierwszą.
Dla $p = 3$ liczba $8 \cdot 3^2 + 1 = 73$, zatem spełnia warunki zadania.
Niech $\boldsymbol{p}$ jest liczbą pierwszą i $p > 3$ to liczba $\boldsymbol{8p^2 + 1}$ nie jest liczbą pierwszą, ponieważ jest ona podzielna przez 3. Ostatecznie, jedynie liczba pierwsza $\boldsymbol{p = 3}$ ma tę własność, że liczba $8p^2 + 1$ jest także liczbą pierwszą.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Sprawdzenie, że liczba 2 nie spełnia warunków zadania	1
B	Sprawdzenie, że liczba 3 spełnia warunki zadania	1
C	Przeprowadzenie rozumowania dotyczącego podzielności	2
D	Uzasadnienie, że jedynie liczba 3 ma zadaną własność	1

[10] Zadanie własne Anny Rybak
[11] Wykres wykonała Anna Rybak za pomocą programu GeoGebra

Zadanie 6. Literki (4 punkty)

Rozwiązanie:

Niech $\overline{ABC} = x$ $\overline{ABC} = x$.

Daną równość: $\overline{2ABC1} \div \overline{1ABC2} = 21 \div 12$ możemy zapisać w postaci:

$$(20000 + 10x + 1) \div (10000 + 10x + 2) = 21 \div 22 \Rightarrow$$

$$(20000 + 10x + 1) \div (10000 + 10x + 2) = 21 \div 12$$

$$\Rightarrow 21 \cdot (10000 + 10x + 2) = 12 \cdot (20000 + 10x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7000 + 70x + 14 = 8000 + 40x = 2 \Rightarrow x = 333$$

Odpowiedź:

Szukaną liczbą jest 333. Istnieje jedna liczba spełniająca warunki zadania.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ułożenie równania wynikającego z treści zadania	2
B	Obliczenie szukanej liczby	2

Zadanie 7. Będzie co jeść (5 punktów)

Rozwiązanie:

Oznaczamy:

przez x x liczbę mężczyzn, przez y y liczbę kobiet, a przez z $z$liczbę dzieci -

$(x, y, z \in N)$ $(x, y, z) \in N$

Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 12 \end{cases} \quad x + y + z = 12 \text{ i } 2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 12,$$

$$\text{czyli układ: } \begin{cases} x + y + z = 12 \\ x = \dfrac{36 - y}{7} \end{cases}$$

Rozwiązując powyższy układ w liczbach naturalnych otrzymujemy:

$$x = 5,\ y = 1,\ z = 6 \quad x = 5, y = 1, z = 6$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ułożenie pierwszego równania	1
B	Ułożenie drugiego równania	1
C	Obliczenie każdej z niewiadomych	3

Zadanie 8. Kolejno czy nie? (4 punkty)[12]

Rozwiązanie:

Niech $D = (x; y)$.
Wiadomo, że $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$,
czyli $[620; 400] = [650 - x; -300 - y] \Rightarrow$ Punkt $D = (30; -700)$.
Usunięcie słowa: „kolejnymi" spowoduje konieczność rozpatrzenia jeszcze dwóch przypadków, czyli wyznaczenie współrzędnych wierzchołka D z równości:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ oraz $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie równania pozwalającego obliczyć współrzędne szukanego wierzchołka	1
B	Obliczenie współrzędnych punktu *D*	1
C	Zapisanie wniosku	2

Zadanie 9. Trrrygonometria (3 punkty)[13]

Rozwiązanie:

Z treści zadania - rozwiąż równanie:

$$\frac{x \cdot \sin^2 45° - 2\cos^2 60°}{\sin^2 15° + \sin^2 75°} = tg\,50° \cdot ctg\,40°,$$

mamy: $$\frac{x \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\sin^2 15° + \cos^2 15°} = tg\,50° \cdot ctg\,50°$$

stąd: $$\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{1} = 1, \text{ czyli: } \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 1,$$

zatem $$\frac{1}{2}x = \frac{3}{2} \text{ więc } x = 3$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zastosowanie wzorów prowadzących do jedynki trygonometrycznej	1
B	Zastosowanie wzorów prowadzących do wartości tangensa i cotangensa tego samego kąta	1
C	Obliczenie niewiadomej	1

[12] Zadanie własne Anny Rybak
[13] Zadanie własne Anny Rybak

Zadanie 10. Rzeczy dziwne, ciekawe (3 punkty)[14]

Rozwiązanie:

$\sqrt{22-4\sqrt{10}}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}-2\sqrt{5}+\sqrt{2}=\left|2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|-2\sqrt{5}+\sqrt{2}=0,$

czyli jest liczbą całkowitą.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zastąpienie wyrażenia podpierwiastkowego wzorem skróconego mnożenia	2
B	Redukcja i zapisanie odpowiedzi	1

Zadanie 11. Pola i obwody (4 punkty)[15]

Rozwiązanie:

Skala podobieństwa wynosi $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Niech x oznacza szukany obwód wielokąta.
Mamy: $\frac{x}{12}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ lub $\frac{12}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ l. Wtedy $x=4\sqrt{3}$ lub $x=12\sqrt{3}$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie skali	1
B	Zapisanie równań wynikających z treści zadania	1
C	Obliczenie dwóch obwodów	2

Zadanie 12. Smacznego (3 punkty)

Rozwiązanie:

Kelner otrzymał 2 zł nie z 33 zł, lecz z 30 zł, które zapłacili klienci (28 zł wziął szef).

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przeprowadzenie logicznego rozumowania i udzielenie odpowiedzi	3

[14] Zadanie własne Anny Rybak
[15] Zadanie własne Anny Rybak

Pakiet MN-1.2 „Wędrówki, nie tylko geometryczne"

I. Treści merytoryczne:

- wzajemne położenie kół (okręgów), pole koła, pole wycinka koła, pole trójkąta,
- trójkąt prostokątny, twierdzenie Pitagorasa i twierdzenie odwrotne do niego,
- trójkąt równoboczny wpisany w kwadrat,
- konstrukcje wykonywane za pomocą cyrkla i linijki,
- działania na liczbach wymiernych i liczbach niewymiernych, przybliżenia,
- związki miarowe w figurach płaskich, pola wielokątów,
- ostrosłup, pole powierzchni ostrosłupa,
- rozwiązywanie układów równań liniowych,
- twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie,
- trójkąt rozwartokątny, wysokości trójkąta,
- okrąg wpisany w trójkąt, związek między promieniem okręgu (koła) wpisanego w wielokąt a polem i obwodem wielokąta,
- gwiazda ośmiokątna, gwiazda sześciokątna.

II. Cele szczegółowe:

- doskonalenie umiejętności wykonywania działań na liczbach postaci $a+b\sqrt{c}$,
- kształcenie umiejętności rozwiązywania zadań konstrukcyjnych,
- kształcenie umiejętności wykonywania konstrukcji za pomocą prostych i okręgów,
- kształcenie umiejętności interpretacji tekstu matematycznego i formułowania uzyskanych wyników,
- kształcenie umiejętności doboru modelu matematycznego do zaistniałej sytuacji,
- kształcenie umiejętności tworzenia i stosowania strategii,
- prowadzenie rozumowania (tworzenie łańcucha argumentów) i uzasadnianie jego poprawności,
- kształcenie i rozwijanie umiejętności w zakresie wykorzystania i tworzenia informacji,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności obliczania pól powierzchni,
- kształcenie i doskonalenie umiejętności podawania wartości przybliżonych z zadaną dokładnością,
- kształcenie umiejętności budowania modelu matematycznego danej sytuacji, z uwzględnieniem ograniczeń i zastrzeżeń, kształcenie wyobraźni przestrzennej,
- kształcenie umiejętności użycia i tworzenia strategii, która jasno wynika z treści zadania,
- kształcenie umiejętności rozumowania i argumentacji (prowadzenie prostego rozumowania, składającego się z niewielkiej liczby kroków),
- kształcenie i doskonalenia umiejętności używania języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

III. Metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające" (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup (zespoły zadaniowe w innym składzie niż na poprzednich spotkaniach).
4. Praca w grupach: każdy zespół wymyśla dla siebie nazwę (związaną z matematyką, działaniami społecznymi, historycznymi lub współczesnymi postaciami świata odkryć, dokonań naukowych) oraz logo zespołu.
5. Przedstawienie nazw i logo przez poszczególne grupy.
6. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
7. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
8. Zebranie kart z rozwiązaniami.
9. Podsumowanie zajęć.
10. Zakończenie zajęć.

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do zestawu „Ćwiczeń otwierających"

[1] Kartasiński S., Okołowicz M., *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych. Część druga, Geometria i trygonometria*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1965
(Zadanie 2 - Strona 8, zadanie 33)
[2] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez Granic", Konkurs 3 marca 2005 (Zadanie 1)
[3] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez Granic", Zadania przygotowawcze, grudzień 2004 (Zadanie 3)
[4] Etap finałowy Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic - 4 marca 2010 (Zadanie 4)
[5] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article298; zadania przygotowawcze, grudzień 2004 (Zadanie 5)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem”.
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu „Rozwiążmy razem”

[1] Kartasiński S., Okołowicz M., *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych. Część druga, Geometria i trygonometria*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1965 (Zadanie 2 - Strona 5, zadanie 3; Zadanie 3 - Strona 5, zadanie 5; Zadanie 12 - Strona 5, zadanie 2)
[2] Etap finałowy Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic - 4 marca 2010 (Zadanie 9, Zadanie 10)
[3] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka Bez Granic”, Konkurs 7 marca 2007 (Zadanie 1)
[4] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka bez Granic”, Zadania przygotowawcze, grudzień 2005 - Zadanie 6 (Zadanie 8)
[5] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/FichPDF/MSF01_02D.pdf (Zadanie 4)
[6] http://www.edusektor.net/matematyka-ciek.html (Zadanie 5)
[7] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/FichPDF/MSF02_03E.pdf (Zadanie 6); (Zadanie 7)
[8] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php?article398 marzec 2002 (Zadanie 11)

Spotkanie 3. „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadań.
3. Nauczyciel ocenia pracę zespołów zadaniowych (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem” będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” - „ Wędrówki, nie tylko geometryczne”

Exercise 1. Umbrellas (6 points)

Ikar made small umbrellas from paper, to decorate the dishes on Birthday party, according to the next instruction:

Umbrella is of a pyramid shape with a regular hexagon in the basis. The side of hexagon is 5cm. The lateral sides of a pyramid are the congruent isosceles triangles. The lateral edges of a pyramid are of length 6cm. Make from one piece of paper the net of this pyramid and glue it on the answer card. Calculate the altitude of this pyramid with the 1 millimeter accuracy.

Exercice 1. Parasols (6 points)

[16] Pour décorer les plats pour une fête d’anniversaire Ícar a fait des parasols en papier le mode d’emploi suivant :

Le parasol est en forme d’une pyramide et sa base est un hexagone régulier de 5cm de côté. Les faces latérales de cette pyramide sont des triangles congruents isocèles. Les arêtes latérales de la pyramide font 6cm de longueur. Fais le patron de cette pyramide avec un seul morceau de papier et colle-le sur la feuille-réponse. Calcule au millième près, la hauteur de la pyramide obtenue de cette façon.

Tarea 1. Los paraguas (6 puntos)

Para decorar los platos para la recepción de cumpleaños, Icar hizo los paraquas de papel según la instrucción siguiente:
El paraguas tiene la forma de pirámide con la base de hexágono regular con el lado de 5cm. Las caras laterales de esta pirámide son triángulos isósceles congruentes. Las aristas laterales de la pirámide tienen la longitud de 6cm. De una pieza de papel realiza la red de esta pirámide y pégala sobre la hoja de respuesta. Calcula la altitud de la pirámide obtenida de esta manera, con la exactitud de un milimetro.

Aufgabe 1. Regenschirm (6 Punkte)

Um die Gerichte auf einer Geburtstagsparty zu dekorieren, machte Ikar Schirme aus Papier gemäß folgender Anweisung aus:
Ein Schirm hat eine Form von einer Pyramide mit der Grundfläche in Form von einem regelmäßigen Sechseck mit der 5cm langen Seite. Seitenflächen von dieser Pyramide sind kongruente gleichschenklige Dreiecke. Seitenlänge der Pyramide sind von 6cm Länge. Mache aus einem Papierstück das Netz dieser Pyramide und klebe es auf der Antwortkarte. Berechne, mit der Genauigkeit auf 1mm, die Höhe der auf diese Weise erhaltenen Pyramide.

[16] Ilustracja ze źródła zadania

Esercizio 1. Gli ombrellini (6 punti)

Per decorare i piatti alla festa di compleanno Icar ha fatto gli ombrellini di carta secondo le istruzioni seguenti:
L'ombrellino ha la forma della piramide con la base di esagono regolare e il suo lato di 5cm. Le faccette laterali di questa piramide sono i triangoli isosceli congruenti. I bordi laterali della piramide hanno la lunghezza di 6cm. Effettua di un foglio di carta la rete di questa piramide ed incollalo sul foglietto di risposte. Calcola, con la precisione di un millimetro, l'altezza della piramide ottenuta di questo modo.

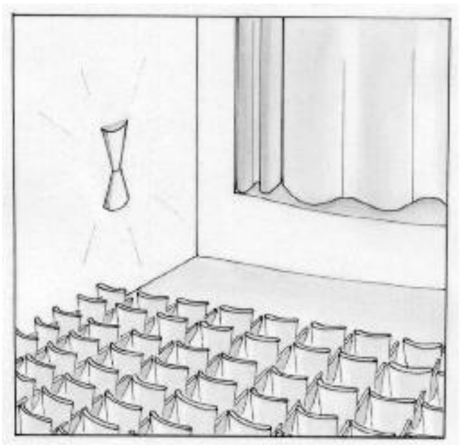
Zadanie 2. Trzy kółka (10 punktów)

Trzy koła o promieniach $r_1 = \sqrt{3} - 1\,cm$, $r_2 = \sqrt{3} + 1\,cm$, $r_3 = 3 - \sqrt{3}$ stykają się zewnętrznie. Obliczyć pole figury, zawartej między tymi kołami.

Zadanie 3. Jeden w drugim (10 punktów)

Abu al-Wafa, matematyk Perski (940-998) postawił następujący problem geometrii:
W kwadrat o danym boku, wpisać trójkąt równoboczny, w taki sposób, że jeden wierzchołek trójkąta pokrywa się z jednym wierzchołkiem kwadratu, a pozostałe dwa są umieszczone na bokach kwadratu. Uzasadnij, że otrzymany trójkąt jest równoboczny.
Konstrukcję Abu al-Wafa należy wykonać przy użyciu tylko linijki i cyrkla.

Zadanie 4. Ustawna sala (5 punktów)

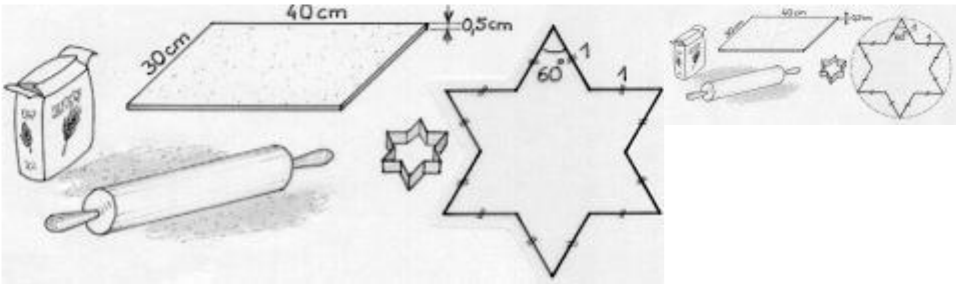


[17]

Miasto Fiesta City dysponuje piękną salę koncertową o zmiennym ustawieniu. Można ją „uszykować" na 3 różne sposoby. W każdym z trzech ustawień krzesła ustawione są w prostokąt: rzędy liczą tyle samo miejsc. Odejmując z początkowego ustawienia wszystkie krzesła z pierwszego rzędu, można zwiększyć o 4 liczbę krzeseł w każdym pozostałym rzędzie, utrzymując jednocześnie taką samą całkowitą liczbę krzeseł na sali.Można również zdecydować się na dostawienie do początkowego ustawienia 4 rzędów krzeseł, również nie zmieniając całkowitej liczby miejsc na sali. Jednak w tym przypadku liczba krzeseł w rzędzie zmieni się o 11 sztuk.
Jaka jest całkowita liczba miejsc na sali? Uzasadnij.

[17] Ilustracja ze źródła zadania

Zadanie 5. Świąteczne pierniczki (5 punktów)



[18]

Mama Nikoli chce upiec świąteczne pierniczki w kształcie gwiazdek.
Przygotowała i rozwałkowała ciasto. Rozwałkowane ciasto jest grubości $0{,}5\,cm$. Ma kształt prostokąta o długości $40\,cm$ i szerokości $30\,cm$.Nikola wykrawa ciasteczka za pomocą foremki w kształcie regularnej gwiazdy sześcioramiennej o boku $1\,cm$.Mama zbiera ciasto pozostałe po wykrawaniu gwiazdek, ugniata i znowu rozwałkowuje na placek grubości $0{,}5\,cm$. Nikola znowu wykrawa. Mama zbiera i rozwałkowuje…
Postępują w ten sposób tak długo jak to możliwe, to znaczy do chwili, gdy już nie ma resztek ciasta.
Grubość wszystkich pierniczków wynosi $0{,}5\,cm$.
Ile pierniczków wykroją? Uzasadnij.

[18] Ilustracja ze źródła zadania

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających" „Wędrówki, nie tylko geometryczne"

Zadanie 1. Parasolki (6 punktów)

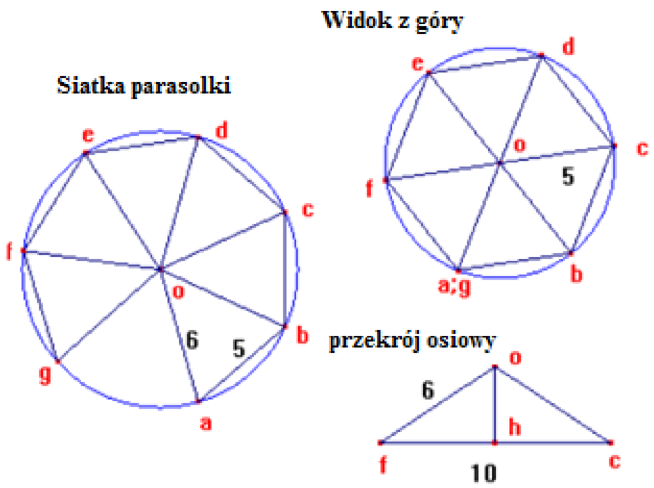
Aby udekorować potrawy na przyjęciu urodzinowym Ikar wykonał parasolki z papieru według następującej instrukcji:

Parasolka ma kształt ostrosłupa o podstawie sześciokąta foremnego o boku $5\ cm$. Ściany boczne tego ostrosłupa są przystającymi trójkątami równoramiennymi. Krawędzie boczne ostrosłupa mają długość $6\ cm$.

Wykonaj z jednego kawałka papieru siatkę tego ostrosłupa i przyklej ją na karcie odpowiedzi.

Oblicz, z dokładnością do jednego milimetra, wysokość otrzymanego w ten sposób ostrosłupa.

Rozwiązanie:



[19]

Rysunek po lewej przedstawia siatkę parasolki, a ten po prawej widok z góry na sklejoną już parasolkę. Trójkąt poniżej, to przekrój osiowy wzdłuż najdłuższej przekątnej. Parasolka widziana z góry przedstawia sześciokąt foremny o boku $5\ cm$. Przekrój osiowy pokazuje, że wysokość ostrosłupa jest wysokością trójkąta równoramiennego o ramionach długości $6\ cm$, a podstawa ma $10\ cm$. Wysokość ostrosłupa wynosi $\sqrt{6^2-5^2}\ cm = \sqrt{11}\ cm$

Odpowiedź: Wysokośc ostrosłupa wynosi $\sqrt{11}\ cm \approx 3{,}3\ cm$.$\sqrt{11} cm \approx 3{,}3 cm$

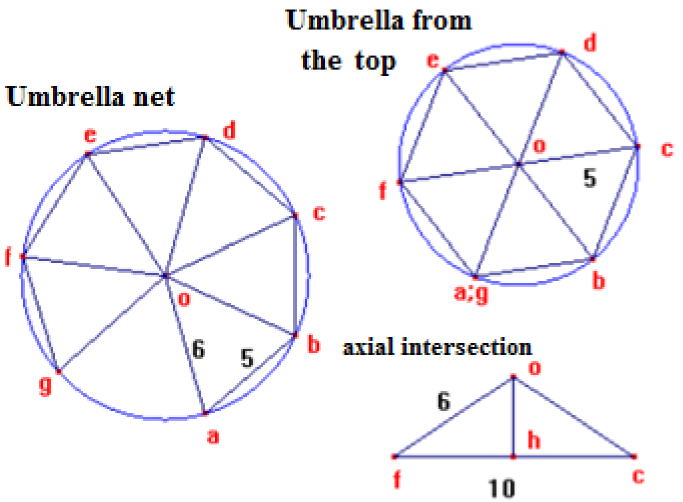
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Wykonanie siatki	1
C	Obliczenie wysokości ostrosłupa	2
D	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

[19] Ilustracja ze źródła zadania

Exercise 1. Umbrellas (6 points)

Solution:



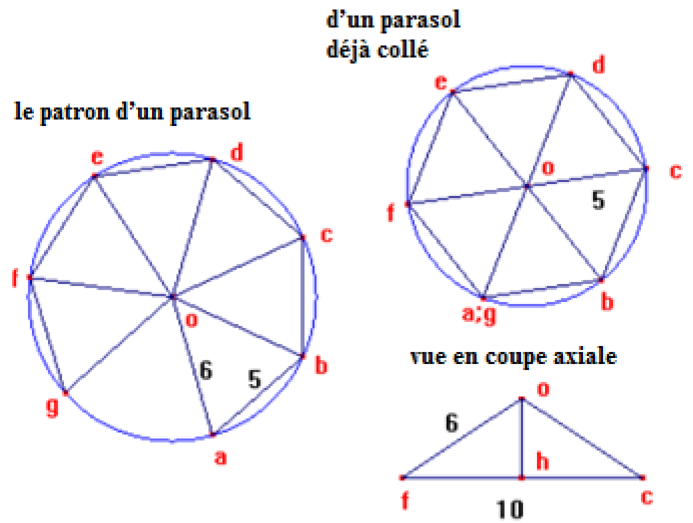
Picture on the left shows the umbrella net and the picture on the right shows the glued umbrella looking from the top. The triangle below is the axial intersection along the longest diagonal. Umbrella from the top is the regular hexagon with a side of 5cm.
The axial intersection shows that the pyramid altitude is the altitude of isosceles triangle with arms of length 6cm and the basis of 10cm. The altitude of a pyramid is $\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}$ cm
Answer: The pyramid altitude is $\sqrt{11}cm \approx 3{,}3cm$

Scores:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	2
B	Net making	1
C	Pyramid’s altitude calculation	2
D	Answer in English	1

Exercice 1. Parasols (6 points)

Solution:



Le dessin de gauche présente le patron d'un parasol et celui de droite la vue de dessus d'un parasol déjà collé.
Le triangle est une vue en coupe axiale le long de la diagonale la plus longue. Le parasol vu d'un haut est un hexagone régulier de 5cm de côté. La vue en coupe montre que la hauteur de la pyramide est la hauteur du triangle isocèle dont les côtés font 6cm et la base 10cm.

La hauteur de la pyramide est de $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$ cm

Réponse: La hauteur de la pyramide est égale à $\sqrt{11}cm \approx 3{,}3cm$

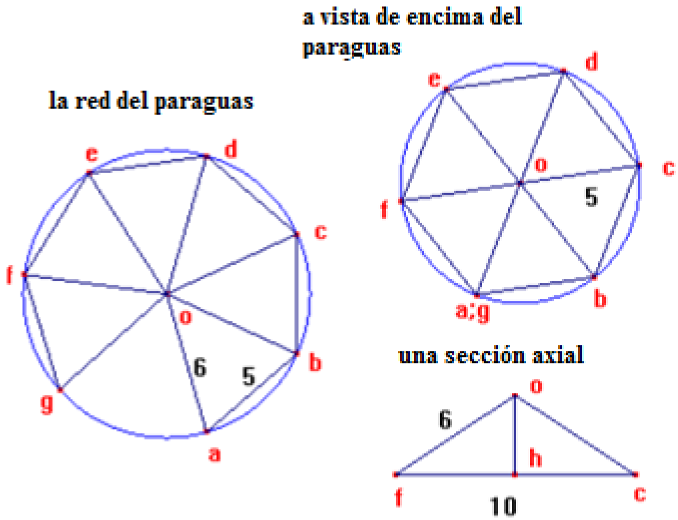
Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Elaboration du patron	1
C	Calcul de la hauteur de la pyramide	2
D	Réponse en langue étrangère	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Tarea 1. Los Paraguas (6 puntos)

Solución:



El dibujo a la izquierda presenta la red del paraguas y él a la derecha la vista de encima del paraguas ya pegado. El triángulo más abajo es una sección axial a lo largo de la diagonal más larga. El paraguas visto de encima representa un hexágono regular con el lado de 5cm. La sección axial muestra que la altura de la pirámide es una altura del triángulo isósceles con los lados de la longitud de 6cm y la base de 10cm.

La altura de la pirámide es: $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$ cm

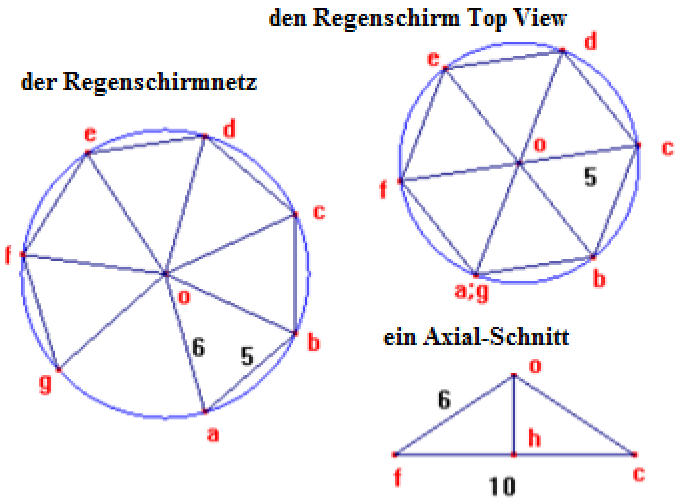
Respuesta: La altura de la pirámide es: $\sqrt{11}cm \approx 3{,}3cm$

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Realización de la red	1
C	Cálculo de la altura de la pirámide	2
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Regenschirm (6 Punkte)

Lösung:



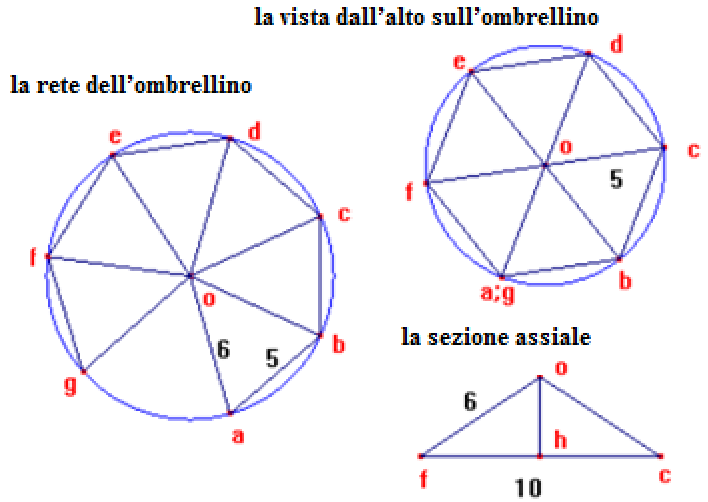
Das linke Bild stellt einen Regenschirmnetz und das rechte Bild einen schon zusammengeklebten Regenschirm dar. Das Dreieck unten ist ein Axial-Schnitt längs der längsten Diagonale. Der Regenschirm von oben stellt einen regelmäßigen Sechseck mit der Seite von 5cm dar. Der Axial-Schnitt zeigt, dass die Höhe der Pyramide eine Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit Schenkeln von 6cm und einer Basis von 10 cm ist. Die Höhe der Pyramide beträgt $\sqrt{6^2-5^2}=\sqrt{11}cm$.
Antwort: Die Höhe der Pyramide beträgt $\sqrt{11}cm \approx 3{,}3cm$

Punktwertung:

Tätigkeits nummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	2
B	Ausführung des Netzes	1
C	Berechnung der Pyramidenhöhe	2
D	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. Gli ombrellini (6 punti)

Soluzione:



Il disegno a sinistra presenta la rete dell'ombrellino, ed a destra la vista dall'alto sull'ombrellino incollato. Il triangolo sotto è la sezione assiale sulla più lunga diagonale. L'ombrellino visto di sopra è un esagono regolare con il lato di 5cm. La sezione assiale dimostra che l'altezza della piramide è anche l'altezza del triangolo con i lati lunghi di 6cm, e dove la base ha 10 cm. L'altezza della piramide fa $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$ cm

Risposta: L'altezza della piramide fa $\sqrt{11}cm \approx 3{,}3cm$

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	2
B	Esecuzione della rete.	1
C	Calcolo dell'altezza di piramide	2
D	Formulazione della risposta nella lingua straniera	1

Zadanie 2. Trzy kółka (10 punktów)

Dane:

Koła: $k_1(A;r_1);\ k_2(B;r_2);\ k_3(C;r_3)$ parami styczne zewnętrznie

$$r_1 = \sqrt{3} - 1\,cm$$

$$r_2 = \sqrt{3} + 1\,cm$$

$$r_3 = 3 - \sqrt{3}$$

Obliczyć pole P figury zawartej między tymi kołami

Rozwiązanie:

Oznaczenia:

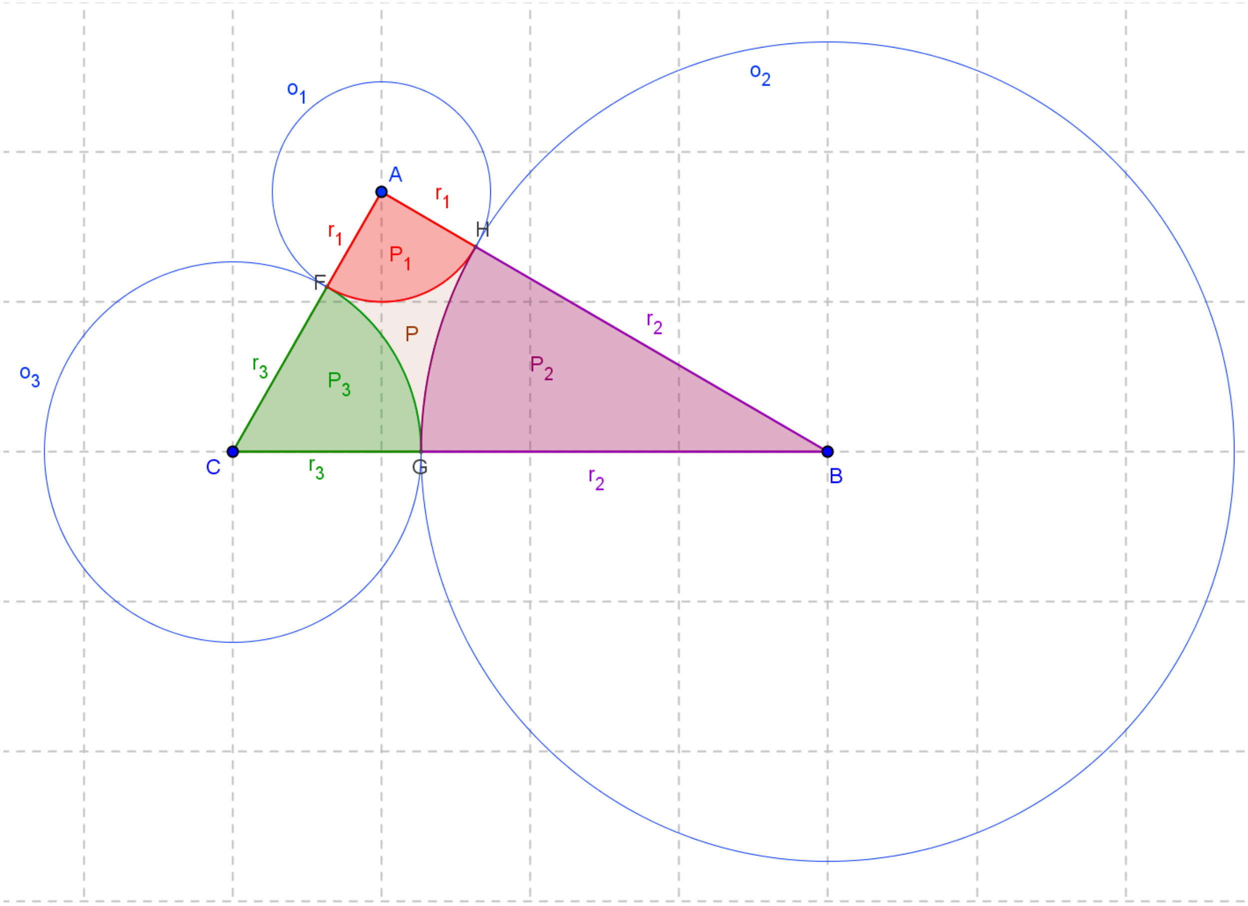
P - szukane pole figury

P_Δ - pole trójkąta ΔABC, wierzchołkami tego trójkąta są środki kół

P_1 - pole wycinka koła $k_1(A;r_1)$ zawartego w kącie $\angle FAH$

P_2 - pole wycinka koła $k_2(B;r_2)$ zawartego w kącie $\angle HBG$

P_3 - pole wycinka koła $k_3(A;r_3)$ zawartego w kącie $\angle GCF$



[20]

[20] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Zgodnie z rysunkiem i oznaczeniami mamy: $P = P_\Delta - (P_1 + P_2 + P_3)$

Koła: $k_1(A;r_1)$; $k_2(B;r_2)$ są styczne zewnętrznie, zatem $AB = r_1 + r_2 = \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1 = 2\sqrt{3}$

Koła: $k_1(A;r_1)$; $k_3(C;r_3)$ są styczne zewnętrznie, stąd $AC = r_1 + r_3 = \sqrt{3} - 1 + 3 - \sqrt{3} = 2$

Koła: $k_2(B;r_2)$; $k_3(C;r_3)$ są styczne zewnętrznie, więc $BC = r_2 + r_3 = \sqrt{3} + 1 + 3 - \sqrt{3} = 4$

Zauważamy, że $AB^2 + AC^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16$ oraz $BC^2 = 4^2 = 16$, co oznacza, że w trójkącie ΔABC suma kwadratów dwóch boków równa jest kwadratowi trzeciego boku, zatem na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa ΔABC jest prostokątny. Ponadto długość przyprostokątnej $AC = 2$ a przeciwprostokątnej $BC = 4$, więc miara kąta $|\angle ABC| = 30^\circ$, stąd $|\angle ACB| = 60^\circ$.

Pole trójkąta ΔABC:

$$P_\Delta = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}$$

Pola wycinków:

$$P_1: \frac{P_1}{\pi \cdot r_1^2} = \frac{90^\circ}{360^\circ} \Rightarrow P_1 = \pi \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow P_1 = \frac{\pi}{4}\left(3 - 2\sqrt{3} + 1\right), \text{ czyli } P_1 = \frac{\pi}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$P_2: \frac{P_2}{\pi \cdot r_2^2} = \frac{30^\circ}{360^\circ} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 \Rightarrow P_2 = \frac{\pi}{12}\left(3 + 2\sqrt{3} + 1\right), \text{ czyli } P_2 = \frac{\pi}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$P_3: \frac{P_3}{\pi \cdot r_3^2} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \Rightarrow P_3 = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \left(3 - \sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow P_3 = \frac{\pi}{6}\left(9 - 6\sqrt{3} + 3\right), \text{ więc } P_3 = \pi\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Suma pól wycinków:

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{\pi}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right) + \pi\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{3\pi}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right) + \frac{\pi}{6}\left(2 + \sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}\left(5 - 2\sqrt{3}\right)$$

Pole figury: $P = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\left(5 - 2\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\left[3\sqrt{3} - \pi\left(5 - 2\sqrt{3}\right)\right] \approx 0{,}25\ cm^2$

Odpowiedź:

Koła ograniczają figurę o polu równym $P = \frac{2}{3}\left[3\sqrt{3} - \pi\left(5 - 2\sqrt{3}\right)\right]\ cm^2 \approx 0{,}25\ cm^2$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia i rysunek	2
B	Obliczenie odległości środków kół - warunek styczności okręgów	1
C	Wykazanie, że trójkąt, którego wierzchołkami są środki kół jest prostokątny. Określenie kątów tego trójkąta.	2
D	Obliczenie pól wycinków i ich sumy	2
E	Obliczenie pola figury	2
F	Odpowiedź	1

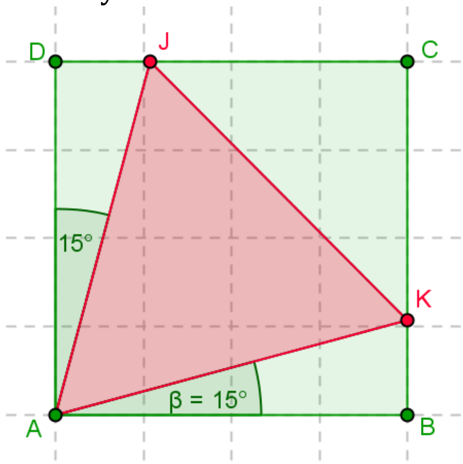
Zadanie 3. Jeden w drugim (10 punktów)

Rozwiązanie:

I. Analiza zadania i poszukiwanie metody konstrukcji:

Przypuśćmy, że zadanie jest rozwiązane.

Niech trójkąt równoboczny ΔAKJ jest trójkątem wpisanym w kwadrat $\square ABCD$ zgodnie z treścią zadania i oznaczeniami na rysunku:

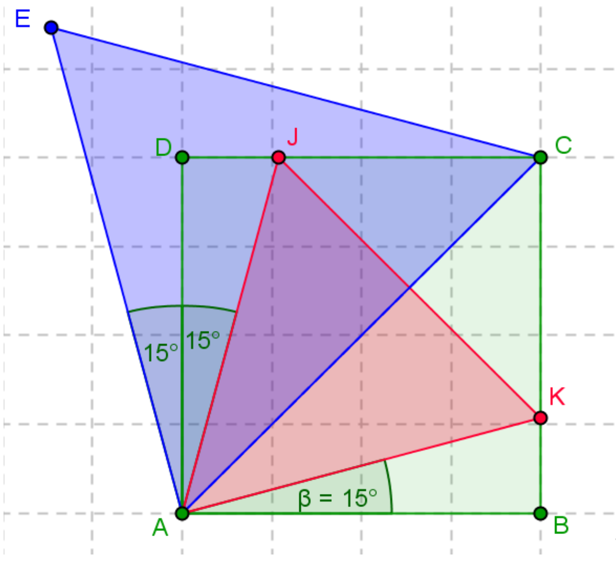


[21]

Prosta $pr.AC$ jest osią symetrii kwadratu $\square ABCD$ i trójkąta równobocznego ΔAKJ

Zauważamy, że $|\angle DAJ| = |\angle BAK| = \dfrac{90° - 60°}{2} = 15°$

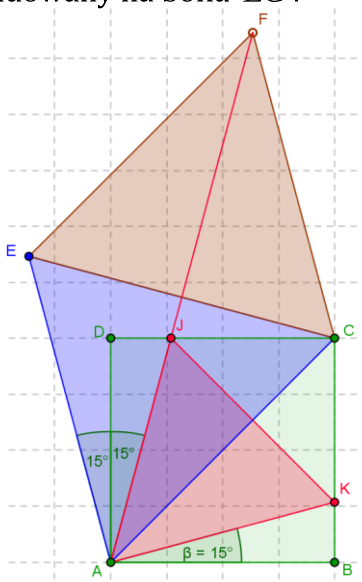
W trójkącie równobocznym ΔACE mamy: $|\angle EAJ| = |\angle JAC| = 30°$, zatem wierzchołek J szukanego trójkąta należy do dwusiecznej kąta $\angle CAE$, która pokrywa się z symetralną boku $\overline{EC}$ oraz wysokością trójkąta prowadzoną z wierzchołka A trójkąta ΔACE



[22]

[21] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[22] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Trójkąt równoboczny ΔCEF zbudowany na boku $\overline{EC}$:



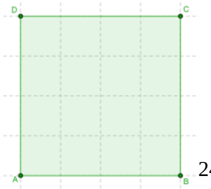
[23]

Szukany wierzchołek $J \in \overline{AF}$ oraz $J \in \overline{DC}$.

Szukany trójkąt jest, więc trójkątem równobocznym o boku $\overline{AJ}$

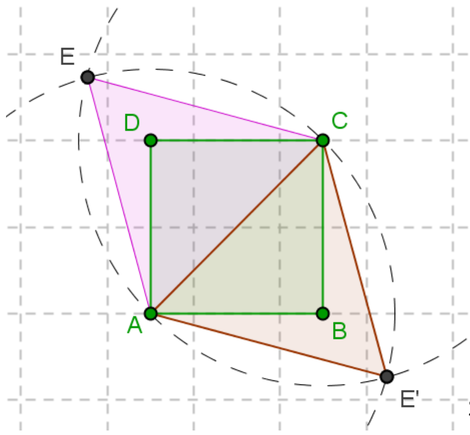
II. Konstrukcja i opis konstrukcji

Dany jest kwadrat □ $ABCD$



[24]

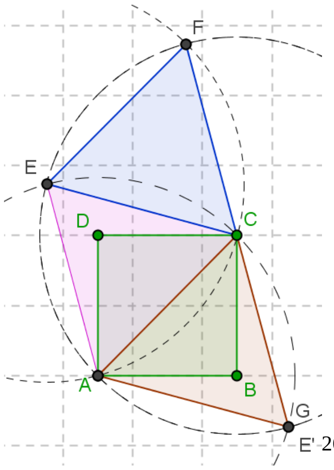
1. Niech punkt A jest wspólnym wierzchołkiem kwadratu i poszukiwanego trójkąta. Budujemy trójkąt ΔACE równoboczny o boku $\overline{AC}$:
   $o\left(A; \overline{AC}\right);\ o\left(C; \overline{AC}\right);\ o\left(A; \overline{AC}\right) \cap o\left(C; \overline{AC}\right) = \{E;\ E'\}$



[25]

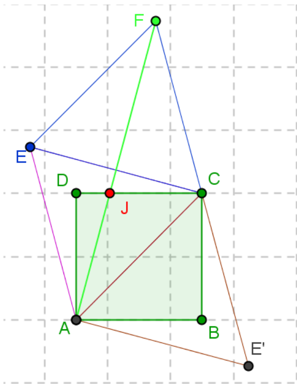
[23] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[24] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[25] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

2. Budujemy trójkąt ΔACE równoboczny o boku $\overline{EC}$:
   $o\left(E;\overline{EC}\right);\ o\left(C;\overline{EC}\right);\ o\left(E;\overline{EC}\right)\cap o\left(C;\overline{EC}\right)=\{F;\ F'=A\}$



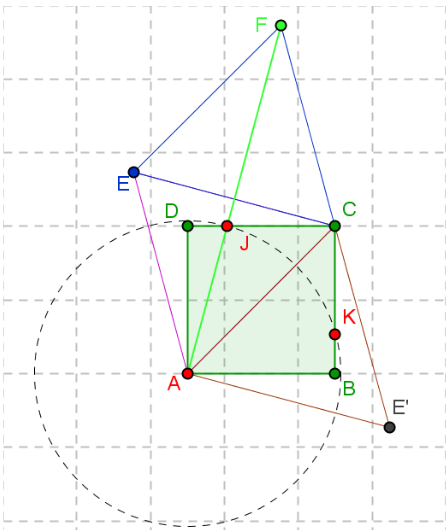
[26]

3. Wyznaczamy $\overline{AF}\cap\overline{DC}=\{J\}$



[27]

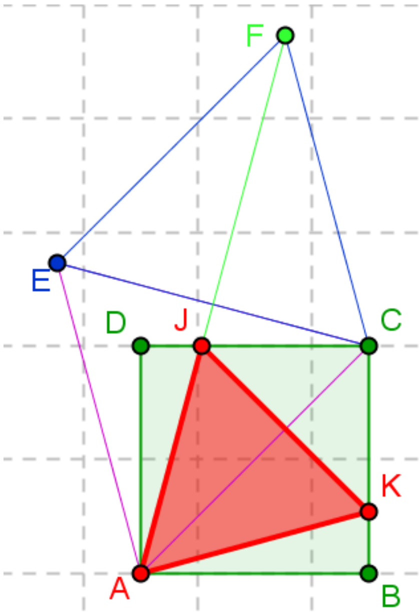
4. Wyznaczamy $o(A;\ AJ)\cap\overline{BC}=\{K\}$



[28]

[26] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[27] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

5. Rysujemy trójkąt ΔAJK ; który jest poszukiwanym trójkątem równobocznym:



29

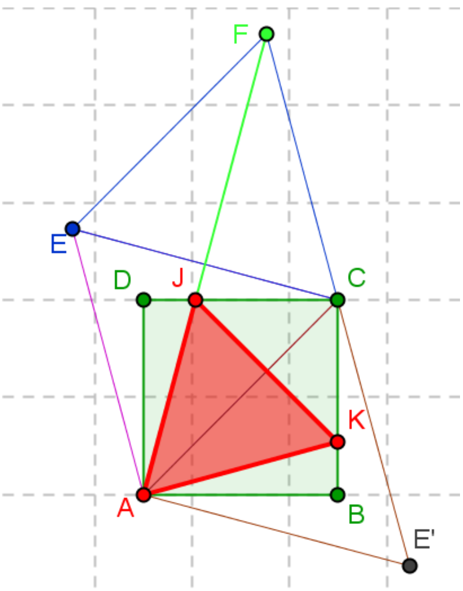
III. Dowód poprawności konstrukcji wynika z analizy.

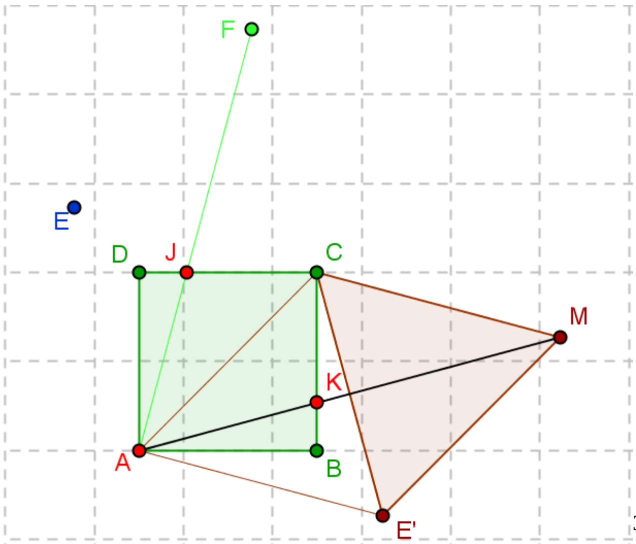
IV. Istnienie i liczba rozwiązań:

W każdy kwadrat można wpisać trójkąt równoboczny spełniający warunki zadania.

W każdym wierzchołku kwadratu można skonstruować dokładnie jeden taki trójkąt równoboczny:

Gdyby konstrukcję zgodnie z opisem wykonywać dla punktu E', to wierzchołki trójkąta równobocznego wyznaczymy w kolejności $K; J$ zamiast w kolejności podanej w opisie $J; K$, ale trójkąt będzie ten sam.



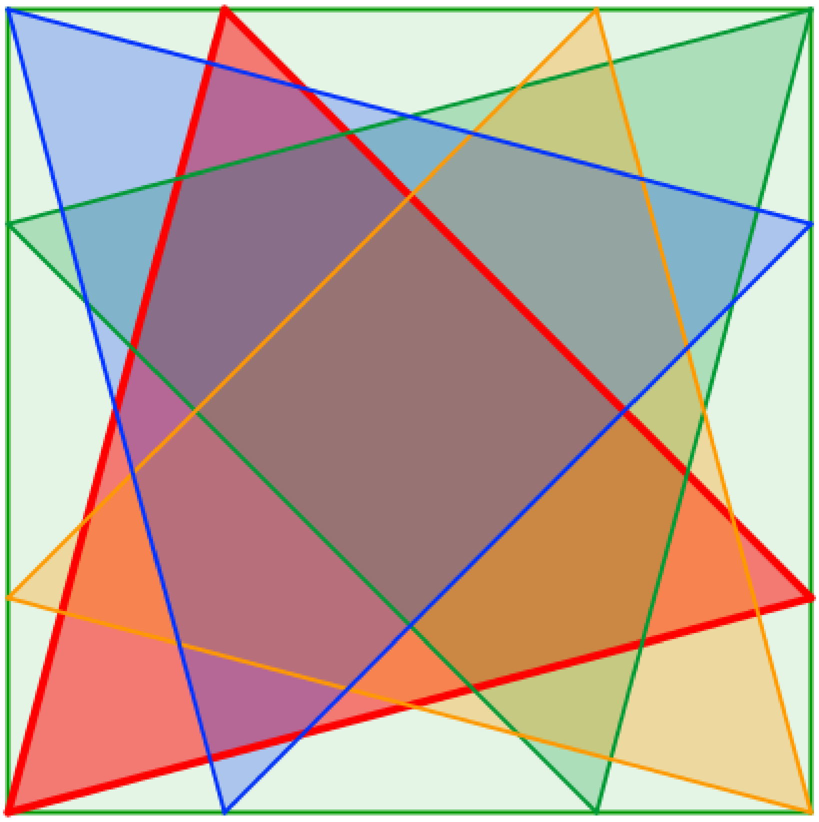


30

[28] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

[29] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Istnieją cztery przystające trójkąty równoboczne spełniające warunki zadania:



31

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Analiza zadania i poszukiwanie metody konstrukcji	4
B	Konstrukcja i opis konstrukcji	4
C	Dowód poprawności konstrukcji	1
D	Dyskusja istnienia i liczby rozwiązań	1

[30] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[31] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Zadanie 4. Ustawna sala (5 punktów)

Rozwiązanie:

$[n \in N_+ \wedge \quad (n-1) \in N_+ \quad \wedge \quad (n+4) \in N_+] \Rightarrow n \in N_+ \setminus \{1\}$

$[m \in N_+ \wedge \quad (m+4) \in N_+ \quad \wedge \quad (m-11) \in N_+] \Rightarrow m \in N_+ \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

	Liczba rzędów	Liczba krzeseł w rzędzie	Liczba wszystkich krzeseł
I ustawienie	n	m	$m \cdot n$
II ustawienie	$n-1$	$m+4$	$(n-1)\cdot(m+4)$
III ustawienie	$n+4$	$m-11$	$(n+4)\cdot(m-11)$

Liczba krzeseł się nie zmienia – w każdym ustawieniu jest taka sama, zatem:

$$\begin{cases}(n-1)\cdot(m+4) = m \cdot n \\ (n+4)\cdot(m-11) = m \cdot n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mn + 4n - m - 4 = mn \\ mn - 11n + 4m - 44 = mn\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 4n = 4 \\ 4m - 11n = 44\end{cases}$$

Rozwiązujemy ostatni układ równań:

$$\begin{cases} -m + 4n = 4 \\ 4m - 11n = 44\end{cases} \Big| \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad + \begin{cases} -4m + 16n = 16 \\ 4m - 11n = 44\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 5n = 60 \,|: 5 \quad \Rightarrow n = 12.$$

Z pierwszego równania: $m = 4n - 4 \quad \Rightarrow \quad m = 4 \cdot 12 - 4 = 44$. W I ustawieniu było 12 rzędów po 44 krzesła w rzędzie. Całkowita ilość miejsc w sali wynosi: $12 \cdot 44 = 528$.

Sprawdzenie:

				Razem
n	12	m	44	528
n-1	11	m+4	48	528
n+4	16	m-11	33	528

Odpowiedź: Całkowita liczba miejsc na sali wynosi 528

Punktacja:

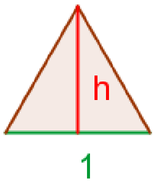
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń, zapisanie danych	1
B	Ułożenie układu równań	1
C	Rozwiązanie układu równań	2
D	Obliczenie ilości miejsc na sali, sprawdzenie poprawności, odpowiedź	1

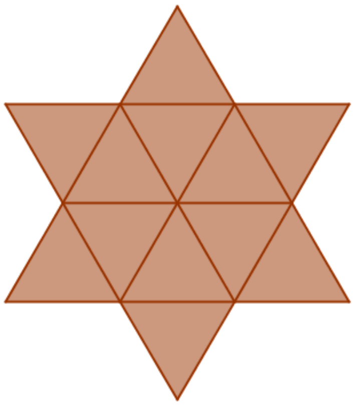
Zadanie 5. Świąteczne pierniczki (5 punktów)

Rozwiązanie:

Pole powierzchni ciasta wynosi $P_{ciasta} = 30\ cm \cdot 40\ cm = 1200\ cm^2$.

Gwiazdka składa się z dwunastu trójkątów równobocznych o boku długości $1\ cm$.[32]





Pole powierzchni gwiazdy $P_{gwiazdki}$ wynosi 12 razy pole trójkąta równobocznego o boku $1\ cm$.

Pole takiego trójkąta jest równe:

$$P_{\Delta} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Mamy, więc $P_{gwiazdki} = 12 \cdot P_{\Delta} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$

L_P - liczba pierniczków

Z treści zadania wynika, że na pierniczki wykorzystano całe ciasto. Oznacza to, że powierzchnia wszystkich pierniczków jest równa powierzchni ciasta. Tak, więc $L_P = \frac{P_{ciasta}}{P_{gwiazdki}} = \frac{1200}{3\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = \frac{400\sqrt{3}}{3} = 133,(3) \cdot \sqrt{3} \approx 230,94010767585030580365951220078$ Odpowiedź: Nikola z Mamą wykroją 230 pierniczków, a jeśli trochę „oszukają” na grubości, to 231.

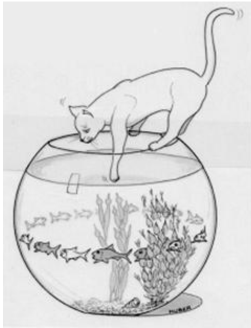
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Obliczenie pola powierzchni rozwałkowanego ciasta	1
B	Obliczenie pola powierzchni gwiazdki	1
C	Stwierdzenie, że suma pól wszystkich pierniczków jest równa polu rozwałkowanego ciasta	1
D	Obliczenie ilości pierniczków, odpowiedź	2

[32] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” – „Wędrówki, nie tylko geometryczne”

Exercise 1. Shoal (5 points)

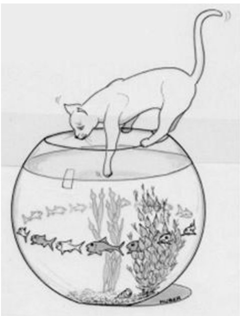


In a glass aquarium the red and white fishes swim in a circle in one direction. Each of them has exactly one fish before itself. It can be calculated that:

- there are 7 red fishes, which swim behind a red fish,
- there are 12 red fishes which swim behind a white fish,
- there are 3 white fishes which swim behind a white fish.

How many fishes are there in the aquarium? Substantiate the answer.

Exercice1. Un banc de poissons (5 points)

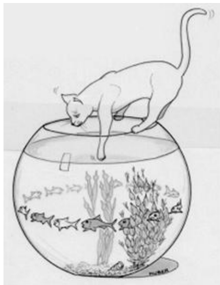


[33] Dans un bocal en verre, il y a des poissons rouges et des poissons blancs qui nagent en cercle dans une seule direction. Chacun d’eux a devant lui exactement un poisson. On peut compter que:

- il y a 7 poissons rouges qui suivent un poisson rouge,
- il y a 12 poissons rouges qui suivent un poisson blanc,
- il y a 3 poissons blancs qui suivent un poisson blanc.

Combien de poissons nagent-ils dans le bocal? Justifier la réponse.

Tarea 1. Banco de pececitos (5 puntos)



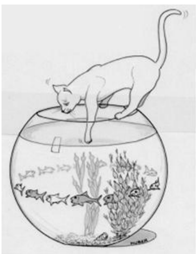
En el acuario de cristal los pececitos rojos y blancos nadan todo el tiempo en la misma dirección. Cada de ellos tiene delante de él exactamente un pececito. Se puede calcular que:

- hay 7 pececitos rojos que nadan detrás de un pececito rojo,
- hay 12 pececitos rojos que nadan detrás de un pececito blanco,
- hay 3 pececitos blancos, que nadan detrás de un pececito blanco.

¿Cuántos pececitos nada en el acuario? Argumentar la respuesta.

Aufgabe 1. Schwarm (5 Punkte)

In einem Glasaquarium schwimmen rote und weiße Fische im Kreis in einer Richtung. Jeder von ihnen hat genau einen Fisch vor sich. Man kann zählen, dass:

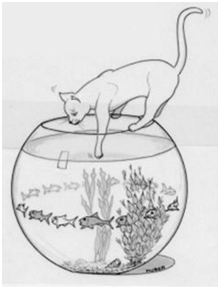


- es 7 rote Fische gibt, die hinter einer roten Fisch schwimmen,
- es 12 rote Fische gibt, die hinter einer weißen Fisch schwimmen,
- es 3 weiße Fische gibt, die hinter einer weißen Fisch schwimmen,

Wie viele Fische schwimmen im Aquarium? Die Antwort begründen.

[33] Ilustracja ze źródła zadania

Esercizio 1. Il banco (5 punti)



Nell'aquario di vetro nuotano nella stessa direzione in tondo i pesci rossi e bianchi. Ognuno di loro ha davanti sempre un pesce. Possiamo calcolare che:

- ci sono 7 pesci rossi i quali seguono il pesce rosso,
- ci sono 12 pesci rossi i quali seguono il pesce bianco,
- ci sono 3 pesci bianchi i quali seguono il pesce bianco.

Quanti pesci nuotano nell'aquario? Giustificare la risposta.

Zadanie 2. Wewnętrzny i zewnętrzny (5 punktów)

W trójkącie prostokątnym ΔABC przyprostokątna $|BC| = a = 6cm$, a przeciwprostokątna $|AB| = 10cm$. Dwusieczna $\angle ABC$ i dwusieczna kąta do niego przyległego przecinają przyprostokątną AC i jej przedłużenie w punktach D i E.

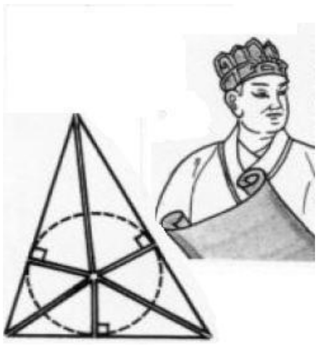
Obliczyć odcinek DE *(długość odcinka* $|\overline{DE}|$*).*

Wskazówka: Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie:
Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.

Zadanie 3. Rozwartokątny (4 punkty)

W trójkącie rozwartokątnym największy bok równa się $16\,cm$, a spodki wysokości poprowadzonych z obydwu jego końców na pozostałe boki są oddalone od wierzchołka kąta rozwartego o $2\,cm$ i $3\,cm$. Obliczyć pozostałe boki trójkąta.

Zadanie 4. Jest to jest - Chiu czy Chu? (5 punktów)



[34] Podczas podróży do Chin, w rękopisie Księgi „Chu Chang Suan Shu" („*Chiu – chang Suan- shu"* - dziewięć rozdziałów o arytmetyce - szacuje się, że książka została napisana około roku 200 p.n.e.) Marco znalazł puzzle pokazujące okrąg wpisany w trójkąt. W tym trójkącie poprowadzono odcinki łączące wierzchołki trójkąta ze środkiem okręgu i promienie okręgu prowadzone do punktów styczności z bokami trójkąta. Rozcięto trójkąt wzdłuż poprowadzonych odcinków, otrzymano sześć trójkątnych kawałków.
Za pomocą tych puzzli można wykazać prawdziwość wzoru:

$R = \dfrac{2S}{P}$ gdzie S oznacza pole trójkąta, P jego obwód i R jest promieniem koła wpisanego.

Jak to zrobić?

Narysuj trójkąt o bokach $10\,cm, 12\,cm, 14\,cm$. Wykonaj puzzle zgodnie z opisem w treści zadania.

Z otrzymanych części ułóż prostokąt, którego pole będzie równe polu trójkąta. Uzasadnij wzory.

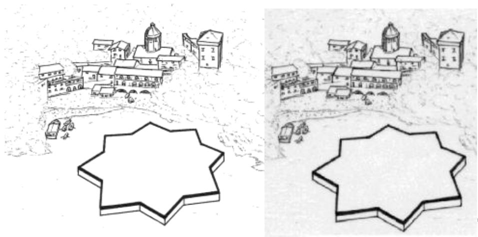
[34] Ilustracja ze źródła zadania

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 5. Jak odmierzyć? (2 punkty)

Mamy następujący problem: Szef kazał nam odmierzyć dokładnie sześć litrów wody. Do wykonania tego zadania dał nam tylko naczynia o pojemności pięć i siedem litrów. Nie możemy lać wody „na oko”, bo jeśli źle odmierzymy 6 litrów, to szef zwolni nas z pracy. Jak odmierzyć 6 litrów wody, gdy nie mamy takiego naczynia?

Zadanie 6. Płytka z Ligurii (4 punkty)


[35]

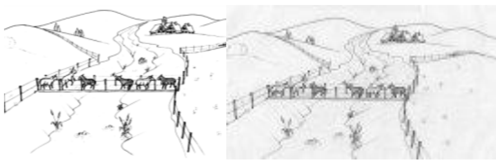
Przy wykopaliskach w okolicach Genui archeolodzy z oddziału San Frauttuoso odnaleźli posadzkę wykładaną płytami kamiennymi. Posadzka ta składa się z dwóch rodzajów kafli, które przylegają do siebie. Ilość kafli każdego rodzaju jest jednakowa. Kafle jednego rodzaju mają kształt regularnej ośmioramiennej gwiazdy. Gwiazdę tą otrzymuje się kładąc na siebie dwa kwadraty o krawędzi długości 1dm tak, aby punkty przecięcia się ich przekątnych pokrywały się. Kafle drugiego rodzaju wypełniają puste przestrzenie między pierwszymi tak, że powstaje zwarty parkiet.

Rozmiar kafli każdego rodzaju jest jednakowy.W skali 1:2 wykonaj z papieru 6 kafli, po 3 z każdego rodzaju.

Ułóż fragment takiej posadzki przyklej ją na karcie odpowiedzi.

Zadanie 7. Oczekiwana zmiana miejsc! (2 punkty)

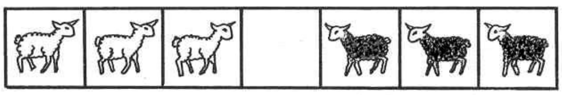
Owce białe i czarne owce muszą zamienić pastwiska.


[36]

Trzy czarne owce w kwadracikach powinny zamienić swoje miejsce z trzema białymi owcami.

Przy czym dozwolone są tylko następujące ruchy do przodu:

- Ruch na wolny kwadracik leżący przed owcą
- Przeskok na wolny kwadracik przez jedno stojące przed nią zwierzę.


[37]

Na końcu czarne owce powinny stać po lewej stronie, a białe po prawej i powinny być oddzielone przez jeden pusty kwadracik na środku.

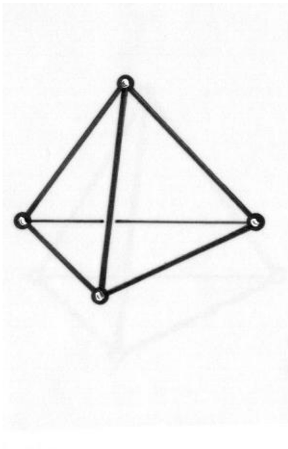
Podaj kolejne ruchy, jakie należy wykonać do takiej zamiany miejsc.

[35] Ilustracja ze źródła zadania
[36] Ilustracja ze źródła zadania
[37] Ilustracja ze źródła zadania

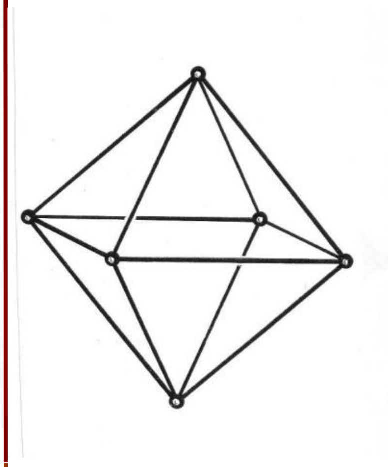
Zadanie 8. Platoniczny (4 punkty)

Elementy pewnej gry pozwalają na wykonanie szkieletów wielościanów foremnych poprzez łączenie ze sobą identycznych metalowych kulek i identycznych magnetycznych patyczków. Szkielet ośmiościanu mam masę 132 g zaś szkielet czworościanu ma masę 76 g .

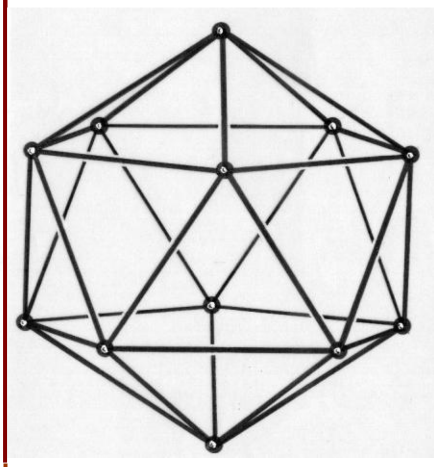
Jaka jest masa szkieletu dwudziestościanu foremnego?
Odpowiedź uzasadnij. (Wszystkie figury przedstawiono na rysunku poniżej) [38]



Czworościan



Ośmiościan



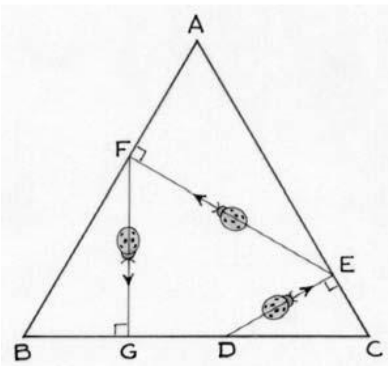
Dwudziestościan

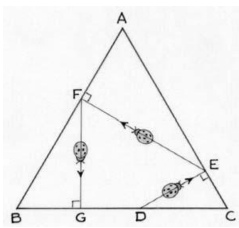
Zadanie 9. Powrót biedronki (3 punkty)

Biedronka spaceruje w trójkącie równobocznym ΔABC o boku 12 cm

Wychodząc z punktu D na boku $\overline{BC}$, kieruje się w stronę boku $\overline{AC}$, obierając jak najkrótszą drogę i dociera do punktu E. Stąd kieruje się w stronę boku $\overline{AB}$ i idąc jak najkrótszą drogą dociera do niego w punkcie F .W ten sam sposób kieruje się w stronę $\overline{BC}$ i dociera do punktu G .

Gdzie umieścić punkt wyjścia na boku $\overline{BC}$, aby punkt G był jednocześnie punktem D? [39]

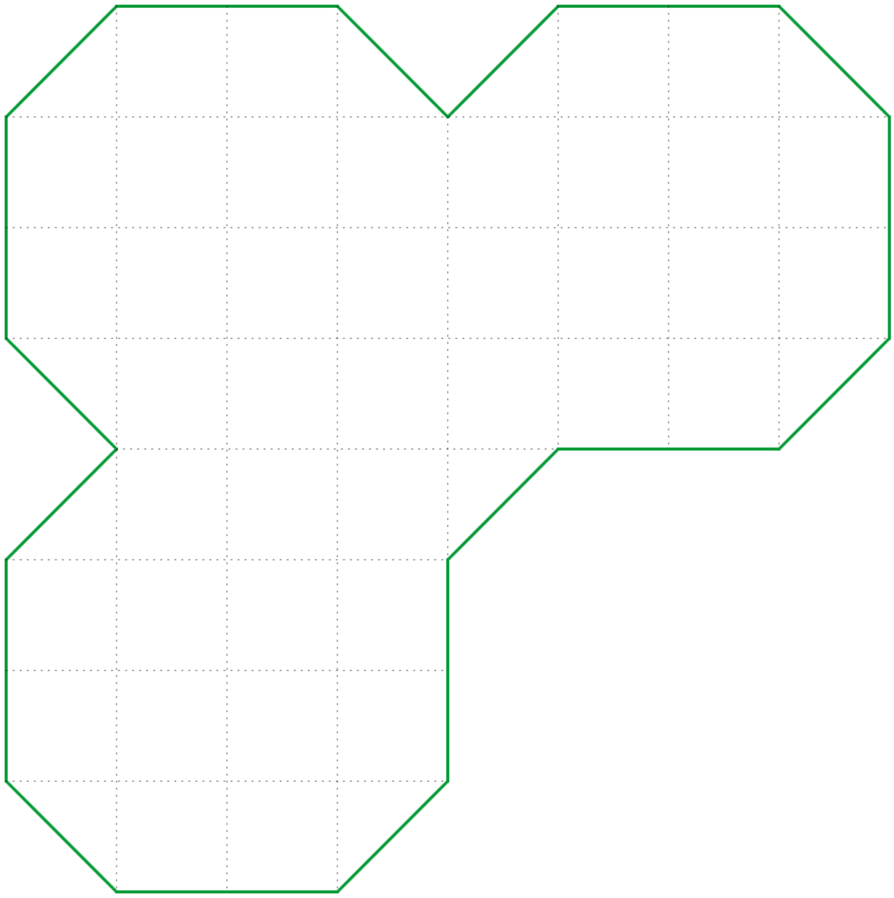




[38] Ilustracja ze źródła zadania
[39] Ilustracja ze źródła zadania

Zadanie 10. Każdy ma swoje miejsce (5 punktów)


40


41

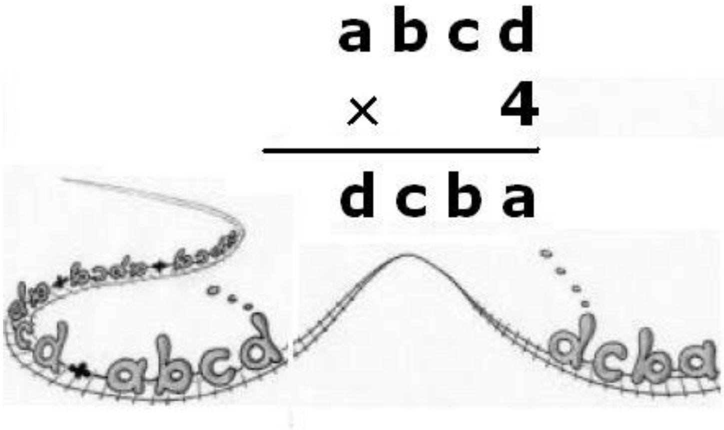
W swojej nowej siedzibie, pan Wielkojański musi podzielić przestrzeń do pracy (patrz ilustracja) między czterech młodych dynamicznych pracowników przedsiębiorstwa. Żeby sprawiedliwości stało się zadość, chce im zaproponować biura o takich samych wymiarach oraz takim samym kształcie.

W jaki sposób należy umieścić przegrody, aby podzielić przestrzeń tak, jak chciałby szef? Narysuj plan i przegrody na karcie odpowiedzi.

[40] Ilustracja ze źródła zadania

[41] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Zadanie 11. Cztery razy tam i raz z powrotem (5 punktów)



[42]

Znajdź czterocyfrową liczbę całkowitą taką, że jej iloczyn przez 4 jest liczbą, która jest zapisana za pomocą takich samych cyfr, co dana liczba, ale zapisanych w odwrotnej kolejności.

Zadanie 12. Jedna i dwie (6 punktów)

W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych $15\,dcm$ i $2\,m$ poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość oraz dwusieczne obydwu kątów, jakie wysokość tworzy z przyprostokątnymi. Obliczyć odcinek przeciwprostokątnej zawarty między dwusiecznymi.

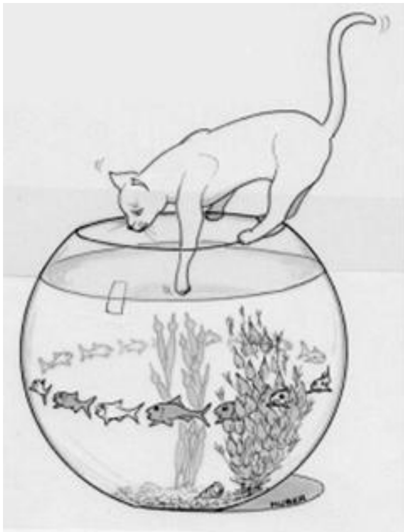
Wskazówka: Prawdziwe jest twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie:

> Dwusieczna kąta wewnętrznego w trójkącie dzieli przeciwległy bok proporcjonalnie do długości pozostałych boków.

[42] Ilustracja ze źródła zadania

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” „Wędrówki, nie tylko geometryczne”

Zadanie 1. Ławica (5 punktów) [43]



W szklanym akwarium rybki czerwone i białe pływają w kółko w jednym kierunku.
Każda z nich ma przed sobą dokładnie jedną rybkę.
Można policzyć, że:

- jest 7 rybek czerwonych, które płyną za rybką czerwoną,
- jest 12 rybek czerwonych, które płyną za rybką białą,
- są 3 rybki białe, które płyną za rybką białą.

Ile rybek pływa w akwarium?
Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie:

Z pierwszych dwóch informacji wynika, że jest w sumie $12 + 7 = 19$ rybek czerwonych. Jeśli 12 czerwonych ma przed sobą białą rybkę, 12 białych ma czerwoną za sobą. A że 3 białe mają za sobą białą, białych jest w sumie 15, czyli wszystkich ryb – 34.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Tłumaczenie na język polski	2
B	Wykonanie siatki. Obliczenie wysokości ostrosłupa	2
C	Sformułowanie odpowiedzi w języku obcym	1

[43] Ilustracja ze źródła zadania

Exercise 1. Shoal (5 points)

Solution:

From the first two information it follows that there are $12 + 7 = 19$ of red fishes. We know that 12 of red fishes have a white fish before themselves thus 12 white fishes have a red fish behind themselves. We know that 3 white fishes have a white fish behind themselves, the whole number of white fishes is 15 so, the number of all fishes is 34.

Scores:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	2
B	The appropriate reasoning	2
C	Answer in English	1

Exercice 1. Un banc de poissons (5 points)

Solution:

Il s'ensuit des deux premières informations qu'il y a en tout $12 + 7 = 19$ poissons rouges.
Si 12 poissons rouges ont devant eux un poisson blanc, 12 poissons blancs ont derrière eux un poisson rouge. Et puisque 3 poissons blancs ont derrière eux un poisson blanc, les blancs sont 15 en tout, donc il y a 34 poissons.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction en langue polonaise	2
B	Logique	2
C	Réponse en langue étrangère	1

Tarea 1. Banco de pececitos (5 puntos)

Solución:

De dos primeras informaciones resulta que hay en total: $12 + 7 = 19$ pececitos rojos. Si 12 pececitos rojos tienen delante de ellos un pececito blanco, 12 blancos tienen un rojo detrás de ellos. Y como 3 blancos tienen detrás de ellos un pececito blanco, hay en total 15 blancos, es decir todos los pececitos son – 34.

Puntuación:

Número de la actividad	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	2
B	Argumentación	2
C	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Aufgabe 1 Schwarm (5 Punkte)

Lösung:

Aus zwei ersten Informationen resultiert, dass es insgesamt $12 + 7 = 19$ rote Fische gibt. Wenn 12 rote Fische einen weißen Fisch vor sich haben, haben 12 weiße Fische einen roten Fisch hinter sich. Und da 3 weiße Fische hinter sich eine weiße haben, gibt es insgesamt 15 weiße, also im Gesamtergebnis gibt es 34 Fische.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung der Aufgabe ins Polnisch	2
B	Durchführung des Gedankenganges	2
C	Richtige Antwortformulierung in einer Fremdsprache	1

Esercizio 1. Il banco (5 punti)

Soluzione:

Di due prime informazioni risulta che in totale ci sono $12 + 7 = 19$ pesci rossi. Se 12 pesci rossi hanno davanti il pesce bianco, 12 pesci bianchi hanno dietro un pesce rosso. E come 3 pesci bianchi hanno dietro un pesce bianco, i pesci bianchi sono in totale 15, allora tutti i pesci sono – 34.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione nella lingua polacca	2
B	Modo di ragionare	2
C	Formulazione della risposta nella lingua straniera	1

Zadanie 2. Wewnętrzny i zewnętrzny (5 punktów)

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku:

Dane:

Trójkąt prostokątny ΔABC, w którym $|\angle ACB| = 90°$

$BC = a = 6cm$

$AB = c = 10cm$

$\overline{BD}$ - dwusieczna kąta $\angle ABC$

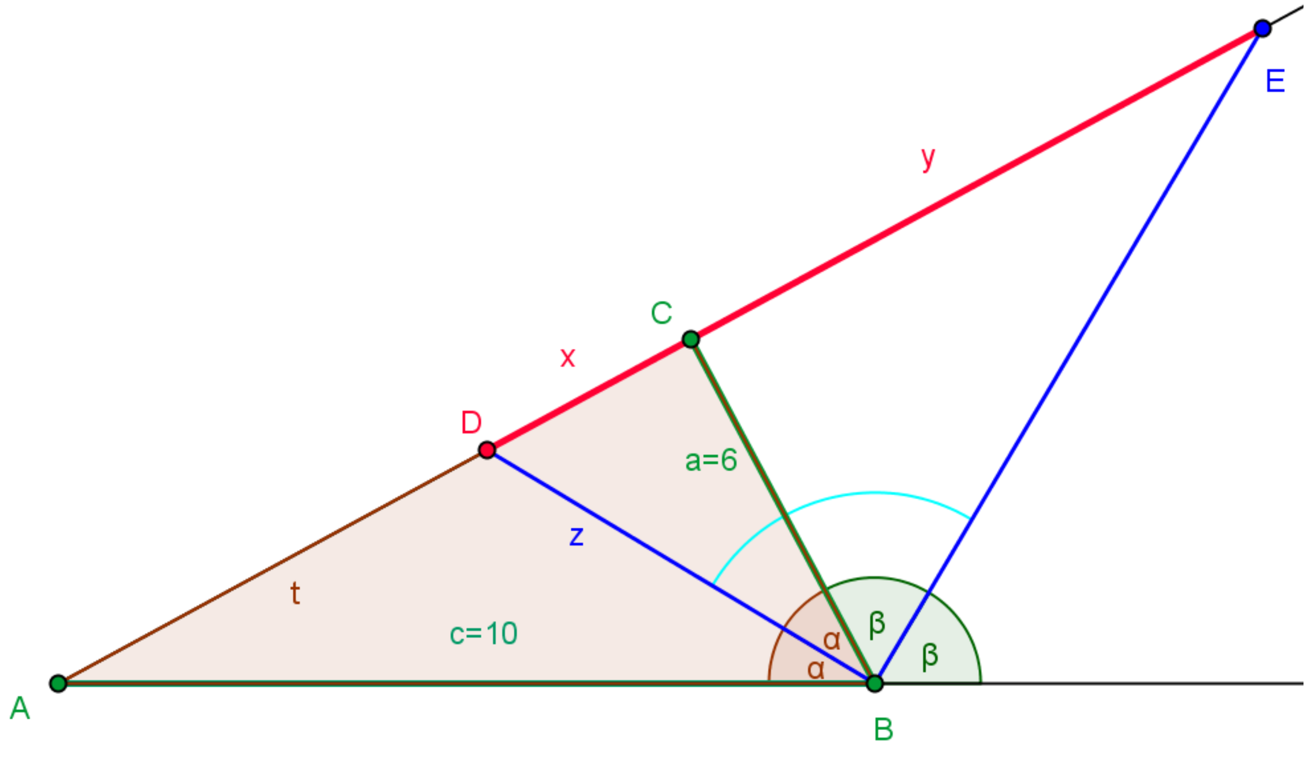
$\overline{BE}$ - dwusieczna kąta przyległego do kąta $\angle ABC$

$\overline{CF}$ - dwusieczna kąta $\angle CDB$

Oblicz:

Długość odcinka $\overline{DE} = ?$

Rozwiązanie:[44]



Zgodnie z oznaczeniami na rysunku przyjmujemy, że $DE = DC + CE = x + y$

Wyznaczamy długości odcinków potrzebnych do obliczenia x oraz y

W ΔABC

1. Obliczamy długość przyprostokątnej AC:

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow AC^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$$

Otrzymujemy $AC = 8$

[44] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

2. Z powyższego i oznaczeń na rysunku mamy $t+x=8 \Rightarrow t=8-x$
3. Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie wynika:
   $\frac{DC}{AD}=\frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{t}{x}=\frac{10}{6} \Rightarrow \frac{8-x}{x}=\frac{5}{3}$, stąd $5x=24-3x \Rightarrow 8x=24 \Rightarrow x=3$
4. Zauważamy, że $|\angle DBE|=\alpha+\beta$ oraz, że $2\alpha+2\beta=180° \Rightarrow \alpha+\beta=90°$, stąd $|\angle DBE|=90°$, czyli ΔDBE jest trójkątem prostokątnym.
   Zatem $\Delta BCD \sim \Delta ECB$
5. Z powyższego podobieństwa otrzymujemy:
   $\frac{BC}{DC}=\frac{CE}{BC}$, czyli $\frac{6}{3}=\frac{y}{6}$, zatem $y=\frac{6\cdot 6}{3}=12$
6. Ostatecznie $|\overline{DE}|=x+y=3+12=15$

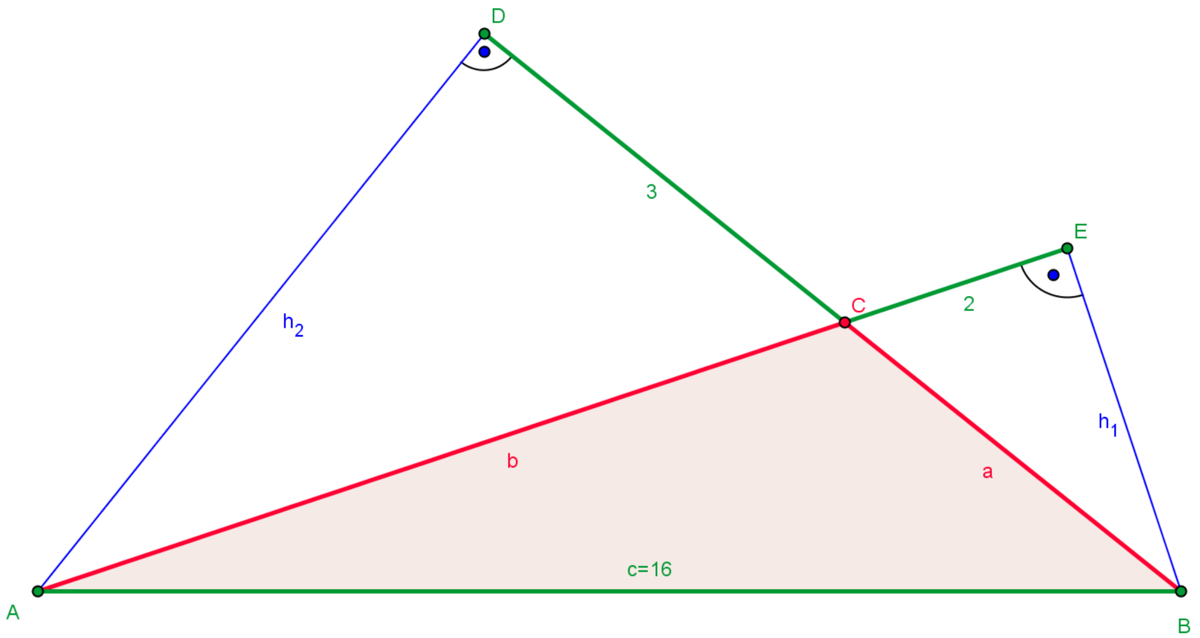
Odpowiedź:

Długość odcinka $\overline{DE}$ jest równa $15\,cm$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia i rysunek	1
B	Obliczenie długości przyprostokątnej AC	1
C	Zastosowanie twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie do obliczenie długości $\lvert\overline{DC}\rvert=x$	1
D	Obliczenie długości $\lvert\overline{CE}\rvert=y$	1
E	Obliczenie długości odcinka $\overline{DE}$ i odpowiedź	1

Zadanie 3. Rozwartokątny (4 punkty)



[45]

Dane i oznaczenia:

Trójkąt rozwartokątny ΔABC

$\left|\angle ACB\right| > 90°$; $h_1 = \left|\overline{BE}\right|$ - wysokość; $h_2 = \left|\overline{AD}\right|$ - wysokość

$\left|\overline{AB}\right| = c = 16\ cm$; $\left|\overline{DC}\right| = 3\ cm$; $\left|\overline{EC}\right| = 2\ cm$

Obliczyć:

$\left|\overline{BC}\right| = a = ?$ oraz $\left|\overline{AC}\right| = b = ?$

Rozwiązanie:

Na mocy twierdzenia Pitagorasa z poszczególnych trójkątów otrzymujemy związki:

$\Delta BEC: \ a^2 = h_1^{\,2} + 2^2$ - *(I)*; $\Delta ADC: \ b^2 = h_2^{\,2} + 3^2$ - *(II)*

$\Delta ADB: \ h_2^{\,2} + (a+3)^2 = 16^2$ - *(III)*; $\Delta AEB: \ h_1^{\,2} + (b+2)^2 = 16^2$ - *(IV)*

Z (III) wyznaczamy $h_2^{\,2}$ *:-* $h_2^{\,2} = 16^2 - (a+3)^2$ i podstawiamy do *(II)*

oraz z *(IV)* wyznaczamy $h_1^{\,2}$ *:-* $h_1^{\,2} = 16^2 - (b+2)^2$ i podstawiamy do *(I)*

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} a^2 = 16^2 - (b+2)^2 + 4 \\ b^2 = 16^2 - (a+3)^2 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16^2 - b^2 - 4b - 4 + 4 \\ b^2 = 16^2 - a^2 - 6a - 9 + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 16^2 - 4b \\ a^2 + b^2 = 16^2 - 6a \end{cases}$$

po odjęciu równań stronami mamy: $6a = 4b \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$

podstawiamy do dowolnego z powyższych równań, porządkujemy i otrzymujemy:

[45] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

$$\frac{13}{4}a^2+6a-16^2=0 \quad \left\{\begin{array}{l} \Delta=6^2-4\cdot\frac{13}{4}\cdot\left(-16^2\right)=36+3328=3364=58^2 \\ \sqrt{\Delta}=58 \\ a_1=\dfrac{-6-58}{2\cdot\frac{13}{4}}<0 \\ a_2=\dfrac{-6+58}{2\cdot\frac{13}{4}}=\dfrac{52\cdot 2}{13}=8 \end{array}\right\}$$

czyli $a=8$ wtedy $b=\frac{3}{2}\cdot 8=12$

Odpowiedź:

Pozostałe boki trójkąta mają długość $8\,cm$ oraz $12\,cm$.

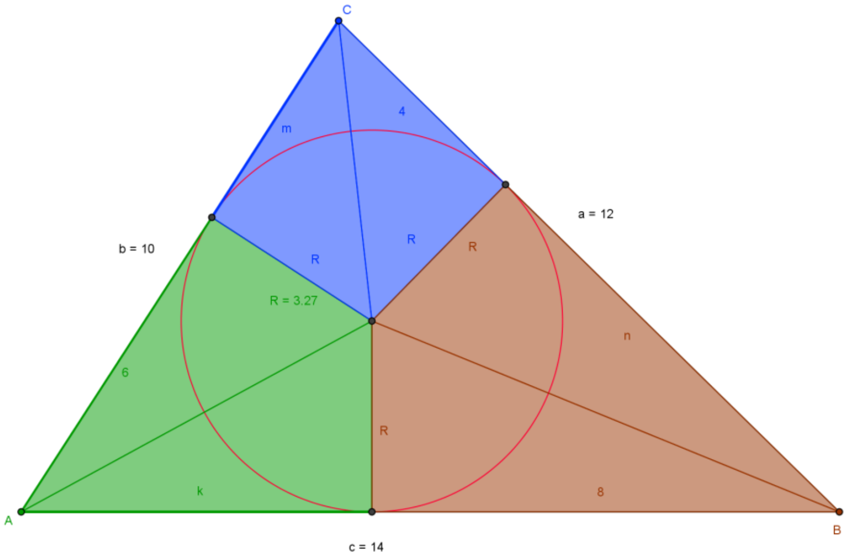
Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Rysunek i oznaczenia	1
B	Zapisanie układu czterech równań z czterema niewiadomymi	1
C	Wyeliminowanie niewiadomych h_1 i h_2.	1
D	Rozwiązanie układu równań z niewiadomymi a i b. Odpowiedź	1

Zadanie 4. Jest to jest - Chiu czy Chu? (5 punktów)

Rozwiązanie:

Trójkąt jest podzielony na 6 trójkącików prostokątnych wśród, których są trzy pary przystających trójkątów prostokątnych. Jedna z przyprostokątnych każdego trójkącika równa jest promieniowi koła wpisanego w trójkąt.

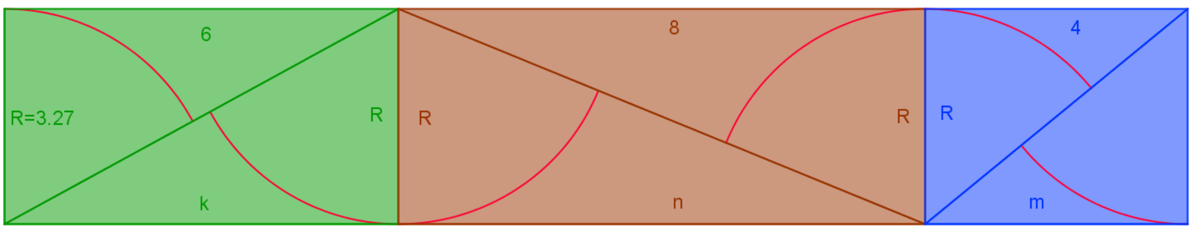


[46]

Obwód trójkąta jest równy $S = a + b + c = 12 + 10 + 14 = 36$, ale również $S = n + m + k + m + k + n = 2 \cdot (k + m + n) = 2 \cdot 18$

Z każdej pary trójkącików można ułożyć prostokąt, którego jeden z boków równy jest promieniowi koła wpisanego w trójkąt.

Układamy te prostokąty obok siebie.



[47]

Otrzymujemy prostokąt, którego jeden z boków równy jest promieniowi koła zaś długość drugiego jest równa: $k + n + m = 18$ czyli połowie obwodu trójkąta.

Prostokąt jest złożony z tych samych części, z których zbudowany jest dany trójkąt.

Stąd równość: $S = R \times \frac{P}{2}$, zatem $R = \frac{2S}{P}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie puzzli	3

[46] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[47] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

B	Uzasadnienie wzorów	2

Zadanie 5. Jak odmierzyć? (2 punkty)

Rozwiązanie:

Podsumujmy: z treści zadania wynika, że mamy do dyspozycji:

- kran z dowolną ilością wody,
- naczynie o pojemności pięciu litrów,
- naczynie o pojemności siedmiu litrów.

Musimy odmierzyć dokładnie sześć litrów wody.

Proces przelewania z jednego naczynia do drugiego, wraz z opisem znajduje się w tabeli poniżej:

Nr czynności	Zawartość większego naczynia **(7 litrów)**	Zawartość mniejszego naczynia **(5 litrów)**	Czynność
Start	**0**	**0**	Początek
1	**7**	**0**	Napełniamy dużą butlę
2	**2**	**5**	Przelewamy z dużej do małej
3	**2**	**0**	Opróżniamy małą butlę
4	**0**	**2**	Przelewamy z dużej do małej
5	**7**	**2**	Napełniamy dużą butlę
6	**4**	**5**	Przelewamy z dużej do małej
7	**4**	**0**	Opróżniamy małą butlę
8	**0**	**4**	Przelewamy z dużej do małej
9	**7**	**4**	Napełniamy dużą butlę
10	**6**	**5**	Przelewamy z dużej do małej

Po dziesiątym przelewaniu mamy w większym naczyniu odmierzone dokładnie 6 litrów

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne rozwiązanie problemu	2

Zadanie 6. Płytka z Ligurii (4 punkty)

Rozwiązanie:

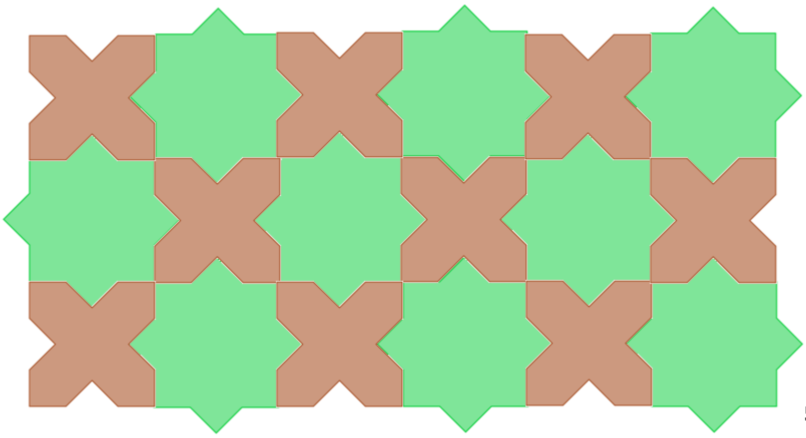
Kafle, o kształcie regularnej ośmioramiennej gwiazdy wykonane w skali $1:2$ powstały z nałożenia na siebie (zgodnie z instrukcją) dwóch kwadratów o boku $5\ cm$


[48]

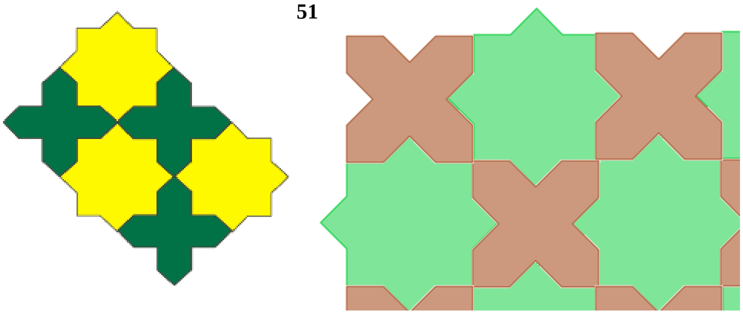
Kafle drugiego rodzaju też powstają na bazie kwadratu o boku $5\ cm$ .Należy z niego odpowiednio wyciąć trójkąty prostokątne.


[49]

Fragment posadzki wykonanej z takich kafli przedstawia rysunek:


[50]

Do karty odpowiedzi należy przykleić fragment posadzki (sześć kafli - po trzy kafle każdego rodzaju) w następujący sposób:

[51]


Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wykonanie „kafli” pierwszego rodzaju	1
B	Wykonanie „kafli” drugiego rodzaju	1
C	Ułożenia „posadzki”	1
D	Zachowanie proporcji staranność wykonania	1

[48] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[49] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[50] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra
[51] Ilustracja ze źródła zadania

Zadanie 7. Oczekiwana zmiana miejsc (2 punkty)

Rozwiązanie:

Możliwe są 2 rozwiązania. Oto jedno z rozwiązań (drugie rozwiązanie jest symetryczne.):
Wymiana 3 owiec białych i 3 czarnych na pastwiskach nastąpi w 15 ruchach.

	○	○	○		●	●	●
1	○	○		○	●	●	●
2	○	○	●	○		●	●
3	○	○	●	○	●		●
4	○	○	●		●	○	●
5	○		●	○	●	○	●
6		○	●	○	●	○	●
7	●	○		○	●	○	●
8	●	○	●	○		○	●
9	●	○	●	○	●	○	
10	●	○	●	○	●		○
11	●	○	●		●	○	○
12	●		●	○	●	○	○
13	●	●		○	●	○	○
14	●	●	●	○		○	○
15	●	●	●		○	○	○

Uogólnienie: Dla wymiany n białych owiec i n czarnych owiec na pastwiskach w sposób opisany w zadaniu trzeba wykonać $n \cdot (n+2)$ ruchy.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne rozwiązanie	2

Zadanie 8. Platoniczny (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez x $(x>0)$ masę metalowej kulki i przez y $(y>0)$ masę metalowego pręta.
Czworościan ma cztery wierzchołki i sześć krawędzi, zatem $4x+6y$ wyraża masę czworościanu.
Ośmiościan ma sześć wierzchołków i dwanaście krawędzi, więc $6x+12y$ wyraża masę ośmiościanu
Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 4x+6y=76 & \big| :2 \\ 6x+12y=132 & \big| :6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=38 \\ x+2y=22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+3y=38 & \big| \cdot(-1) \\ x+2y=22 & \big| \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow +\begin{cases} -2x-3y=-38 \\ 2x+4y=22 \end{cases} \Rightarrow y=6$$

$$\begin{cases} 2x+3y=38 & \big| \cdot 2 \\ x+2y=22 & \big| \cdot(-3) \end{cases} \Leftrightarrow +\begin{cases} 4x+6y=76 \\ -3x-6y=-66 \end{cases} \Rightarrow x=10$$

Rozwiązaniem układu jest para $(x;\ y)=(10;\ 6)$, co oznacza, że kulka waży $10\ g$ natomiast metalowy pręt waży $6\ g$.
Dwudziestościan ma 12 wierzchołków i 30 krawędzi.
Co oznacza, że masa dwudziestościanu wynosi: $12x+30y=12\cdot10+30\cdot6=120+180=300$
Odpowiedź: Masa dwudziestościanu wynosi $300\ g$.

Punktacja:

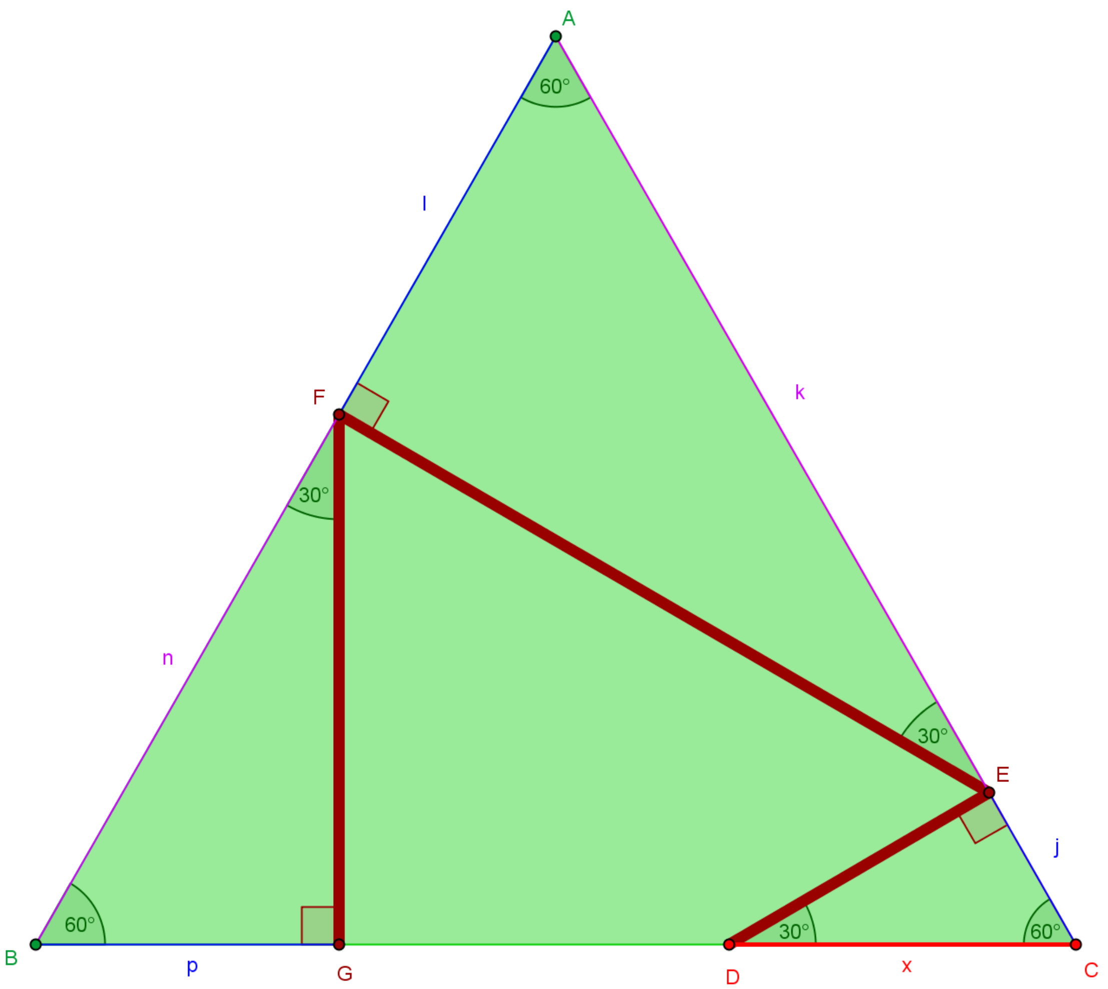
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń i zapisanie masy brył w postaci równań	1
B	Poprawne równania i układ równań	1
C	Rozwiązanie układu równań	1
D	Obliczenie masy dwudziestościanu, odpowiedź	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 9. Powrót biedronki (3 punkty)

Rozwiązanie:

Najkrótsza odległość punktu od punktu leżącego na prostej, to odległość tego punktu od jego rzutu prostokątnego na tą prostą. Ponieważ biedronka chce obierać jak najkrótszą drogę z obranego punktu do wybranego boku, to musi iść wzdłuż prostej prostopadłej do tego boku. Trasę biedronki na rysunku przedstawia łamana $DEFG$. [52]



Dane:

ΔABC - trójkąt równoboczny

$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 12\ cm$

$D \in \overline{BC}$; $E \in \overline{AC}$; $F \in \overline{AB}$; $G \in \overline{BC}$

Szukane:

Położenie punktu D takie, że $G = D$; $|DC| = x = ?$

Przyjmujemy oznaczenia:

$CJ = j$; $EA = k$; $AF = l$; $AF = n$; $BP = p$

[52] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

W trójkącie prostokątnym o kątach ostrych $30°$ i $60°$ długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta $30°$ równa jest połowie długości przeciwprostokątnej, zatem otrzymujemy:

W ΔDEC: $j=\frac{1}{2}x$; AFE: $l=\frac{1}{2}k$; ΔBGC: $p=\frac{1}{2}n$

Uwzględniając rysunek mamy: $k=12-j=12-\frac{1}{2}x$,

zatem $l=\frac{1}{2}k=\frac{1}{2}\left(12-\frac{1}{2}x\right)=6-\frac{1}{4}x$

Dalej $n=12-l$,

więc $n=12-\left(6-\frac{1}{4}x\right)=6+\frac{1}{4}x$

stąd $p=\frac{1}{2}\left(6+\frac{1}{4}x\right)=3+\frac{1}{8}x$

Jeżeli $G=D$, to $p+x=12$, więc mamy:

$$3+\frac{1}{8}x+x=12$$

skąd $\frac{9}{8}x=9$,

zatem $x=8$

Drugi sposób:

Jeżeli $G=D$, to trasa biedronki, łamana $DEFG$ będzie łamaną zamkniętą $DEFD$, czyli brzegiem ΔDEF.

Trójkąty: ΔDEC, ΔEFA i ΔFDB są trójkątami prostokątnymi o kątach ostrych $30°$ i $60°$, zatem $|\angle DEF|=|\angle EFD|=|\angle FDE|=60°$, czyli trójkąt ΔDEF jest trójkątem równobocznym.

Stąd trójkąty: ΔDEC, ΔEFA i ΔFDB są przystające, zatem $DC=AE=BF=x$ oraz $EC=AF=BD=\frac{1}{2}x$, czyli $x+\frac{1}{2}x=12 \Rightarrow x=8$.

Odpowiedź:

Biedronka wróci do punktu wyjścia, gdy punkt D będzie oddalony od punktu C o $|\overline{DC}|=8cm$, natomiast od punktu B o $4cm$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne określenie punktu wyjścia i uzasadnienie	2
B	Odpowiedź	1

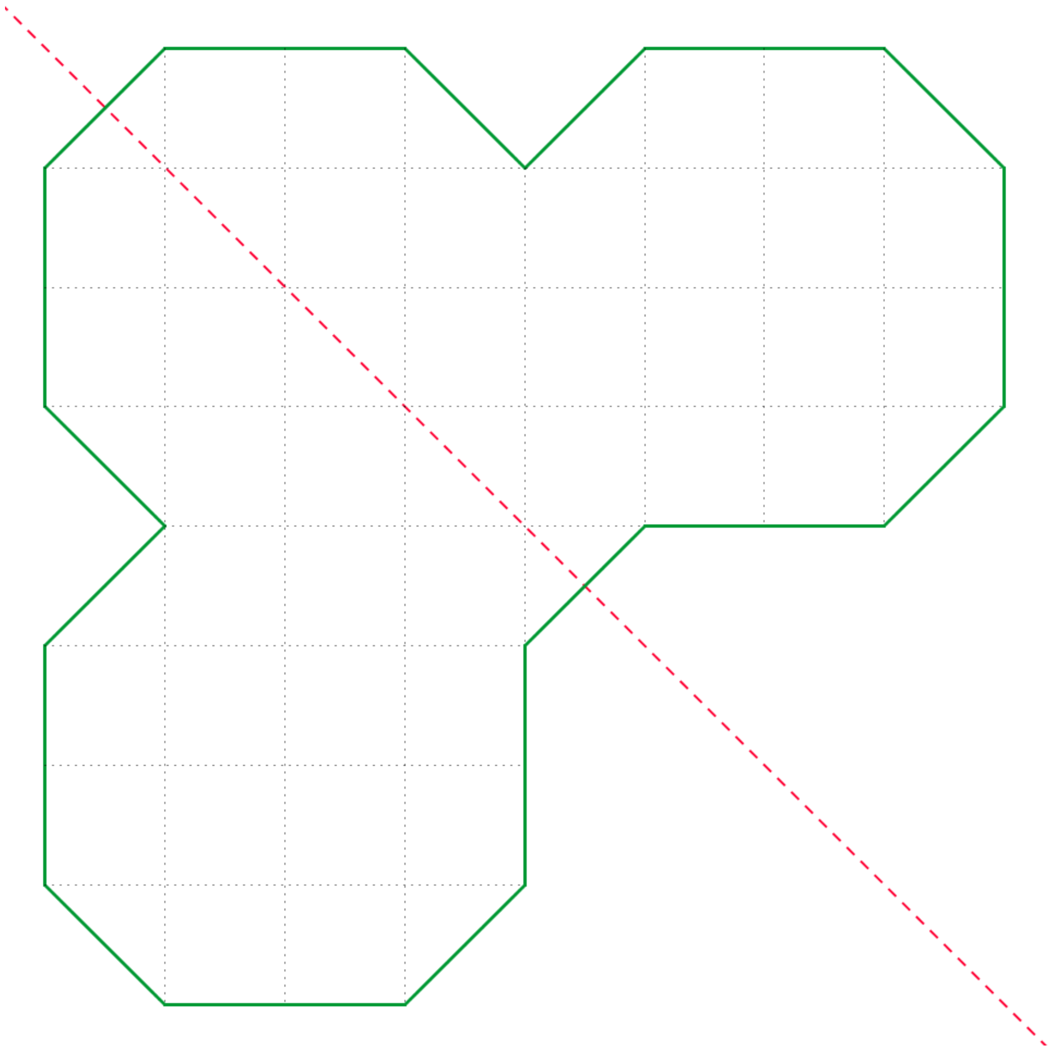
Zadanie 10. Każdy ma swoje miejsce (5 punktów)

Rozwiązanie:

Spostrzeżenia:

I. Przestrzeń przeznaczona na biura ma jedną oś symetrii

[53]



II. Niech pole kwadracika jest równe $1\,m^2$, wtedy pole powierzchni biura jest równe:

$$2 \cdot 2 \cdot 1m^2 + 2 \cdot 8 \cdot 1m^2 + 6 \cdot 1m^2 + 3 \cdot 1m^2 + 2 \cdot 4 \cdot 1m^2 + 2 \cdot 1m^2 + 10 \cdot 0{,}5m^2 = 44\,m^2$$

Zatem każdy pracownik powinien mieć pomieszczenie o powierzchni: $44m^2 : 4 = 11m^2$

Kwadracików o powierzchni $1\,m^2$ jest 39

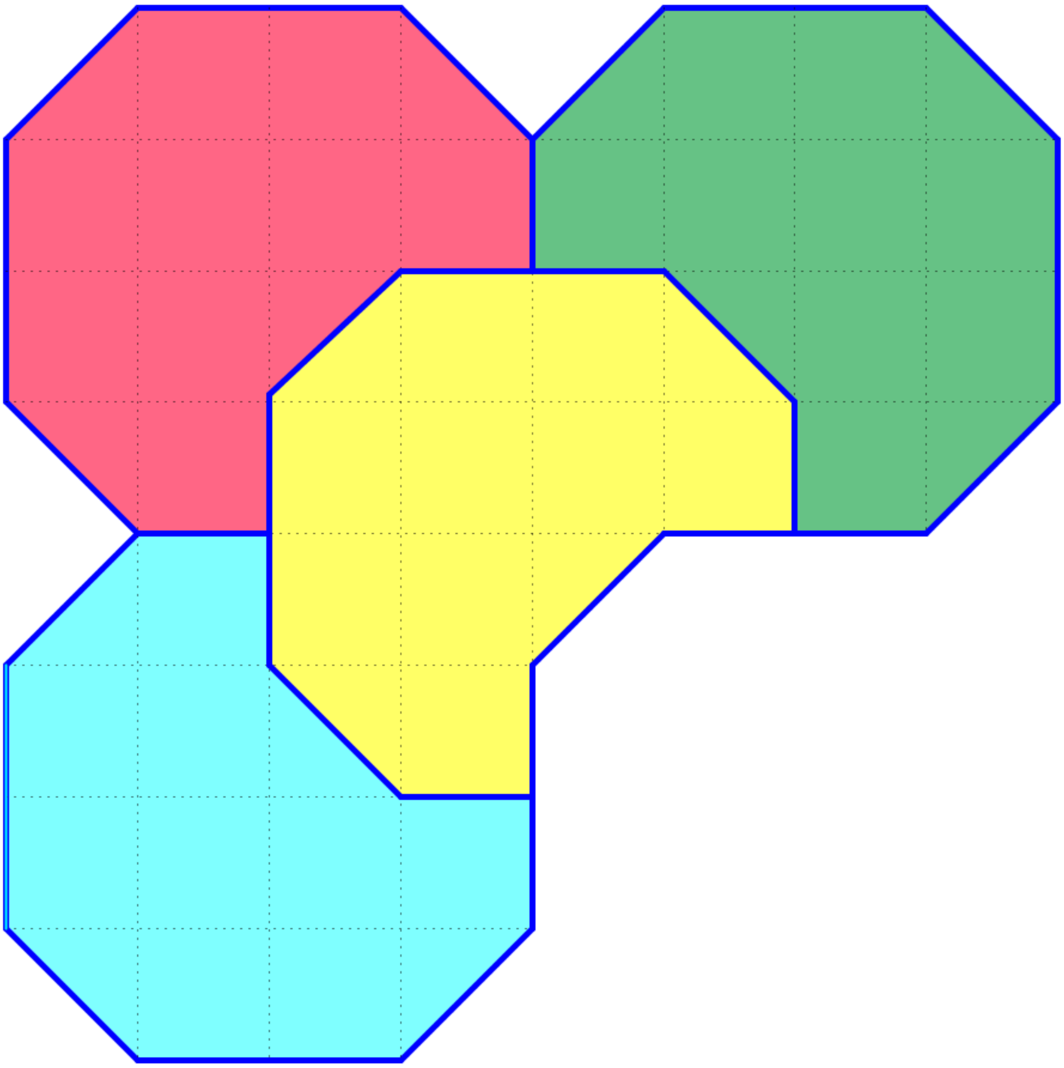
$39 : 4 = 9$ *reszty* 3, czyli w każdym z czterech biur będzie dokładnie 9 kwadracików.

Pozostałe 3 kwadraciki dzielimy na pół, otrzymamy 6 „połówek", co daje razem $6 + 10 = 16$ połówek, zatem w każdym biurze będą dokładnie $16 : 4 = 4$ „połówki".

Zatem na powierzchnię $11m^2$ (każdego z biur) wykorzystamy 9 kwadracików oraz 4 „połówki".

[53] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

III. Aby podzielić przestrzeń tak, jak chciałby szef należy powierzchnię przeznaczoną na biura umieścić przegrody w następujący sposób: [54]



Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Poprawne rozwiązanie	3
B	Uzasadnienie	2

[54] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

Zadanie 11. Cztery razy tam i raz z powrotem! (5 punktów)

Rozwiązanie:

Oznaczenia: $\{a,b,c,d\} \subset \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,

Niech $\overline{abcd}\,\overline{abcd}$ oznacza zapis liczby w systemie dziesiętnym

Szukana liczba $\overline{abcd}$ taka, że $\overline{abcd} \times 4 = \overline{dcba}$.

Iloczyn szukanej liczby przez 4 jest liczbą czterocyfrową, co oznacza, że $\overline{abcd} \times 4 < 10000$.

Jeśli $a \geq 3$, to $\overline{abcd} \times 4 > 10000$ czyli ma pięć cyfr, zatem musi być $a < 3$, więc $a = 1$ lub $a = 2$.

Nie może być $a = 1$, bo ***a*** jest ostatnią cyfra iloczynu pewnej liczby przez 4, więc ***a*** musi być cyfrą parzystą.

Zatem $a = 2$.

Mamy więc $4 \cdot \overline{2bcd} = \overline{dcb2}$,

czyli ostatnią cyfrą iloczynu cyfry ***d*** przez 4 jest 2, taką cyfrą ***d*** jest 8 (warunków zadania nie spełnia $d = 3$ - jest za małe więc odrzucamy, gdyż $a = 2$ i iloczyn musi być większy równy 8000)

Szukamy więc liczby $\overline{2bc8}$ takiej, że $4 \cdot \overline{2bc8} = \overline{8cb2}$.

Otrzymujemy:

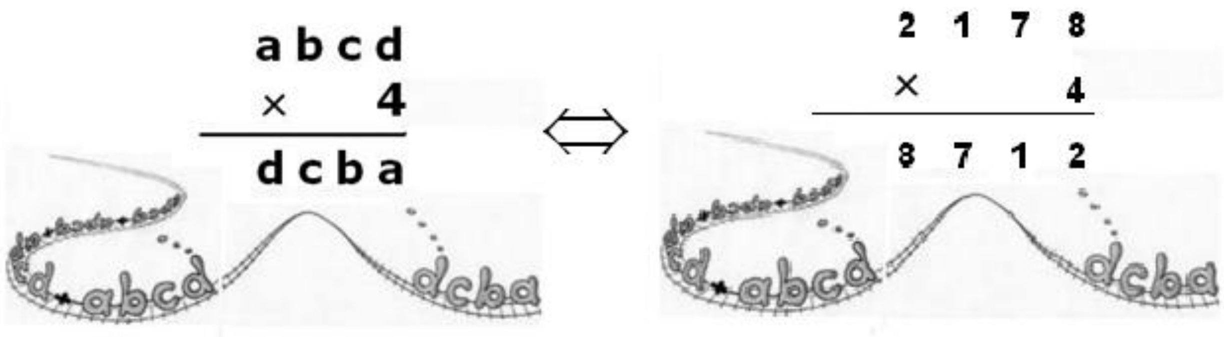
$4 \cdot (2000 + 100b + 10c + 8) = 8000 + 100c + 10b + 2$,

dalej mamy, stąd po uporządkowaniu otrzymujemy

$13b + 1 = 2c$, ale $2c < 20$, zatem $13b + 1 < 20 \Rightarrow 13b < 19$, stąd otrzymujemy $b = 1$ dalej mamy:

$b = 1 \Rightarrow 2c = 13 \cdot 1 + 1 \Rightarrow c = 7$

Odpowiedź: Szukaną liczbą jest 2178

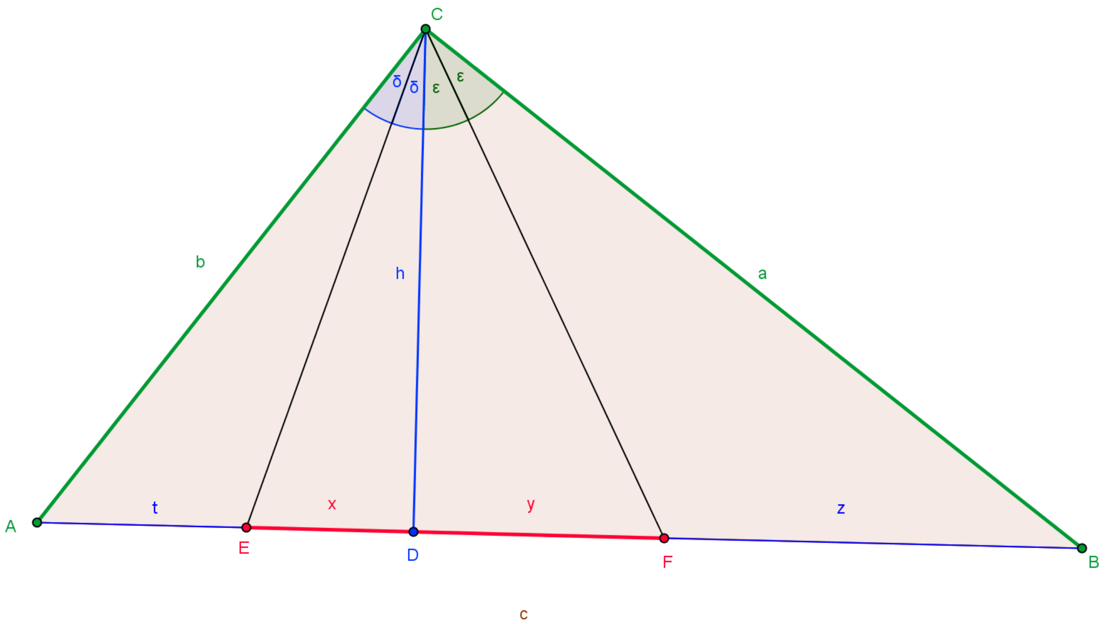


Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wyznaczenie cyfr a i d	2
B	Wyznaczenie cyfr b i c	2
C	Zapisanie szukanej liczby, odpowiedź	1

Zadanie 12. Jedna i dwie (6 punktów)

Rozwiązanie:



55

Przyjmujemy oznaczenia zgodnie z rysunkiem:

$\overline{CD}$ - wysokość; $\overline{CE}$ dwusieczna kąta $\angle ACD$; $\overline{CF}$ - dwusieczna kąta $\angle CDB$

Dane:

Trójkąt prostokątny ΔABC, w którym $|\angle ACB| = 90°$

$BC = a = 2m$

$AC = b = 15dcm = 1{,}5m$

Oblicz:

Długość odcinka $\overline{EF}$; $|\overline{EF}| = ?$

Zgodnie z oznaczeniami na rysunku $|\overline{EF}| = x + y$.

Wyznaczamy długości odcinków potrzebnych do obliczenia x oraz y

1. Trójkąt prostokątny ΔABC

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = 2^2 + 1{,}5^2 = 4 + 2{,}25 = 6{,}25$$

$$\text{zatem } c = 2{,}5$$

2. Z podobieństwa trójkątów ΔADC i ΔADC otrzymujemy:

$$\frac{CD}{AC} = \frac{BC}{AB} \text{ stąd } \frac{h}{1{,}5} = \frac{2}{2{,}5},$$

$$\text{zatem } h = \frac{2 \cdot 1{,}5}{2{,}5} = 1{,}2$$

[55] Rysunek wykonała Helena Ewert-Fechner za pomocą programu GeoGebra

3. Trójkąt prostokątny ΔADC:

Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $AD^2 = AC^2 - CD^2$,

czyli $AD^2 = 1{,}5^2 - 1{,}2^2 = 2{,}25 - 1{,}44 = 0{,}81$, zatem $AD = 0{,}9$

4. Trójkąt prostokątny ΔCDB: $BD^2 = 2^2 - 1{,}2^2 = 4 - 1{,}44 = 2{,}56$, zatem $BD = 1{,}6$

5. Zapisujemy twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie ΔADC

$\frac{AE}{ED} = \frac{AC}{CD}$, czyli $\frac{t}{x} = \frac{1{,}5}{1{,}2}$ więc $\frac{t}{x} = \frac{5}{4}$, ale $t + x = 0{,}9 \Rightarrow t = 0{,}9 - x$, zatem $\frac{0{,}9 - x}{x} = \frac{5}{4}$ skąd

$5x = 3{,}6 - 4x \Rightarrow x = 0{,}4$

6. Zapisujemy twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie: ΔCDB

$\frac{FB}{DF} = \frac{BC}{CD}$, czyli $\frac{z}{y} = \frac{2}{1{,}2}$ więc $\frac{z}{y} = \frac{5}{3}$, ale $z + y = 1{,}6 \Rightarrow z = 1{,}6 - y$, zatem $\frac{1{,}6 - y}{y} = \frac{5}{3}$

skąd $5y = 4{,}8 - 3y \Rightarrow y = 0{,}6$

7. Otrzymaliśmy: $\left|\overline{EF}\right| = x + y = 0{,}4 + 0{,}6 = 1$

Odpowiedź:

Odcinek przeciwprostokątnej zawarty między dwusiecznymi ma długość $1\,m$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia i rysunek, ujednolicenie jednostek	1
B	Obliczenie przeciwprostokątnej i wysokości danego trójkąta	1
C	Obliczenie AD i BD	1
D	Obliczenie x i y	2
E	Obliczenie długości $\left|\overline{EF}\right|$ i odpowiedź	1

Pakiet MN-1.3 „Ile, czy możliwe, że aż tyle?”

I. Treści merytoryczne:

- definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym i proste równania trygonometryczne,
- zadania prowadzące do prostych równań wymiernych (liniowych, kwadratowych) w kontekście praktycznym,
- wzory skróconego mnożenia i ich zastosowania w wykazywaniu złożoności liczb,
- zbiory i działania na zbiorach, liczebność zbiorów,
- dzielenie z resztą,
- równania stopnia pierwszego i drugiego w liczbach naturalnych,
- pola figur płaskich.

II. Cele szczegółowe:

- kształcenie rozumowania, tworzenia łańcucha logicznego i umiejętności uzasadnienia argumentacji,
- dobieranie modelu do sytuacji problemowej,
- tworzenie strategii rozwiązywania problemów, w tym praktycznych.

III. Proponowane metody i formy pracy:

- praca w grupach,
- burza mózgów,
- karty pracy.

IV. Przebieg zajęć:

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” (1 godzina lekcyjna)

1. Sprawy organizacyjne (sprawdzenie obecności).
2. Podział uczniów na zespoły zadaniowe (grupy 4 - 5 osobowe).
3. Wybór liderów, sekretarzy, asystentów poszczególnych grup.
4. Rozdanie każdej z grup zestawów ćwiczeń otwierających oraz materiałów potrzebnych do rozwiązywania zadań.
5. Rozwiązywanie ćwiczeń przez uczniów pod kierunkiem nauczyciela.
6. Przedstawienie i porównanie rozwiązań zadań przez przedstawicieli grup.
7. Zebranie kart z rozwiązaniami.
8. Podsumowanie i zakończenie zajęć.

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Uwaga: Rozwiązania poszczególnych zadań uczniowie powinni zapisywać na oddzielnych kartkach, podpisanych nazwą zespołu i oznakowanych poprzez logo. Materiały dla uczniów stanowi pierwsza strona dokumentu „Ćwiczenia otwierające".

Bibliografia do zestawu „Ćwiczeń otwierających"

[1] Bobiński Z., Kourliandtchik L., Pogoda T., Pogoda Z., Świątek A., Ustki M., *Miniatury Matematyczne*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2001, (Zadanie 3 - zad.5, str.46; Zadanie 4 - zad.11, str.38)
[2] Gdowski B., Pluciński E., *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo - Techniczne WNT, Warszawa 2003 (Zadanie 1 - zad.194, str.2)
[3] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 5*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1988, (Zadanie 2 - zad.69, str. 48)

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem" (2 godziny lekcyjne)

1. Uczniowie siadają we wcześniej ustalonych zespołach zadaniowych.
2. Nauczyciel rozdaje jeden egzemplarz zestawu zadań „Rozwiążmy razem".
3. Uczniowie dokonują podziału, która grupa będzie rozwiązywała dane zadanie. Uczniowie powinni pociąć zestaw zadań i rozdzielić zadania do odpowiednich grup.
4. Każda grupa rozwiązuje zadania samodzielnie. Po rozwiązaniu zadania uczniowie redagują odpowiedź na karcie odpowiedzi (kartka formatu A4).
5. Jeżeli dany zespół zadaniowy zakończy pracę, to jej członkowie powinni przyłączyć się i pomóc w rozwiązywaniu zadań innym grupom.
6. Nauczyciel zbiera karty z rozwiązanymi zadaniami.
7. Zakończenie zajęć.

Bibliografia do zestawu zadań „Rozwiążmy razem"

[1] Bobiński Z., Kourliandtchik L., Pogoda T., Pogoda Z., Świątek A., Ustki M., *Miniatury Matematyczne*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2001, (Zadanie 3 - zad.5, str.46; Zadanie 4 - zad.11, str.38; Zadanie 6 - zad.2, str.52)
[2] Butrym P., *Matematyka w zadaniach praktycznych*, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2004, (Zadanie 11 - zad. 30, str. 14)
[3] Gdowski B., Pluciński E., *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie,* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, (Zadanie 10 - zad.195, str.25)
[4] Kacierzyński J., *150 zadań z matematyki z rozwiązaniami*, ODN Zielona Góra1995, (Zadanie 1 - zad.42, str.13; Zadanie 9 - zad.32, str. 11)
[5] Klorek F., *Wartość bezwzględna w różnych zadaniach matematycznych,* Wydawnictwo Klorek, Zielona Góra 1997, (Zadanie 12 - zad.21, str.49)
[6] Rams S., Rams T., *Międzynarodowy Konkurs Matematyczny „Matematyka bez Granic", Cześć I, Zadania konkursowe* 1998-2002, Nowy Sącz 2003, (Zadanie 7 - zad. 6 str.52)
[7] Steinhaus H., *100 zadań*, PHU „DIP", Warszawa 1993, (Zadanie 2 - zad.50, str.24; Zadanie 5 - zad. 55, str. 26; Zadanie 8 - zad.58, str.27)

Spotkanie 3: „Ćwiczenia podsumowujące” (1 godzina lekcyjna)

1. Nauczyciel rozdaje poprawione i wypunktowane karty pracy zespołom zadaniowym.
2. Liderzy poszczególnych grup prezentują rozwiązania zadania.
3. Nauczyciel ocenia pracę grup (pozytywne wzmocnienie).
4. Podsumowanie zajęć.

Uwaga: Karty odpowiedzi uczniów z zestawu „Rozwiążmy razem” będą stanowić załącznik do raportu z realizacji zajęć.

Spotkanie 1: „Ćwiczenia otwierające” – „ Ile, czy możliwe, że aż tyle?”

Exercise1. Sailing (5 points)

A ship sails on Odra river from Wroclaw to Szczecin 3 days and from Szczecin to Wroclaw 6 days. What is the time of Odra water flow from Wroclaw to Szczecin?

Exercice 1. Excursion en bateau (5 points)

Le bateau navigue sur l’Oder et met 3 jours pour se rendre de Wroclaw à Szczecin et 6 jours pour se rendre de Szczecin à Wroclaw.Quel est le temps de l’écoulement d’eau du fleuve Oder de Wroclaw à Szczecin?

Tarea1. Un crucero (5 puntos)

Un barco navega sobre el río Odra de Wrocław a Szczecin 3 días y de Szczecin a Wrocław 6 días. ¿Cuál es el tiempo del paso del agua de Wrocław a Szczecin?

Aufgabe 1. Reise mit einem Schiff (5 Punkte)

Ein Schiff fährt auf der Oder aus Wrocław nach Szczecin 3 Tage und aus Szczecin nach Wrocław 6 Tage. Was ist die Zeit, in der das Wasser der Oder aus Wrocław nach Szczecin durchfließt?

Esercizio 1. La gita con la nave (5 punti)

La nave va sull’Odra di Wrocław a Szczecin 3 giorni, e di Szczecin a Wrocław 6 giorni. Quanto tempo l’acqua dell’Odra passa di Wrocław a Szczecin?

Zadanie 2. Czy to możliwe? (4 punkty)

W trójkącie równoramiennym jeden bok jest dwukrotnie dłuższy niż drugi. Czy także w tym trójkącie jeden z kątów jest dwukrotnie większy od drugiego?

Zadanie 3. Równanko 1 (4 punkty)

Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie: $9x + xy - 4y = 12$

Zadanie 4. Złożony problem 1 (3 punkty)

Pokazać, że liczba $2^{3^{1997}} + 1$ jest złożona.
Wskazówka:
Zauważ, że $2^{3^{1997}} = 2^{3^{1996+1}} = 2^{3^{1996}\cdot 3^{1}} = 2^{3^{1996}\cdot 3} = \left(2^{3^{1996}}\right)^{3}$ i $1 = 1^{3}$

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu „Ćwiczeń otwierających” „Ile, czy możliwe, że aż tyle?”

Zadanie1. Wycieczka statkiem (5 punktów)

Statek płynie Odrą z Wrocławia do Szczecina 3 dni, a ze Szczecina do Wrocławia 6 dni. Jaki jest czas przepływu wody Odry z Wrocławia do Szczecina?

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

s – odległość między Szczecinem i Wrocławiem
v_s – prędkość własna statku
v_r – prędkość prądu rzeki
t – czas przepływu wody Odry z Wrocławia do Szczecina
$s=(v_s+v_r)\cdot 3$ i $s=(v_s-v_r)\cdot 6$

Otrzymujemy równanie: $3v_s+3v_r=6v_s-6v_r$, zatem $v_s=3v_r$

Więc droga $s=(3v_r+v_r)\cdot 3=4v_r\cdot 3=12v_r$.

Wynika stąd, że potrzeba 12 dni, by woda Odry przepłynęła z Wrocławia do Szczecina.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie tłumaczenia	1
B	Zapisanie poprawnego układu równań	2
C	Rozwiązanie zadania, t=12 dni	1
D	Podanie odpowiedzi w wybranym języku	1

Exercise 1. Ship sailing (5 points)

Solution:

s – distance between Szczecin and Wroclaw
v_s – ship's own speed
v_r – river's midstream speed
t – time of flow of water from Wroclaw to Szczecin
$s=(v_s+v_r)\cdot 3$ i $s=(v_s-v_r)\cdot 6$

We obtain an equation: $3v_s+3v_r=6v_s-6v_r$, thus $v_s=3v_r$.

So the trip is $s=(3v_r+v_r)\cdot 3=4v_r\cdot 3=12v_r$.

We need 12 days to flowing of Odra water from Wroclaw to Szczecin.

Scores:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation of exercise	1
B	The correct system of equations	2
C	Solution of exercise, t=12 days	1

D	Answer in English	1

Exercice 1. Excursion en bateau (5 points)

Solution:

Déterminons:
$s -$ la distance entre Szczecin et Wroclaw
$v_s -$ la vitesse propre du bateau
$v_r -$ la vitesse du courant du fleuve
$t -$ le temps de l'écoulement d'eau de l'Oder de Wroclaw à Szczecin
$s = (v_s + v_r) \cdot 3$ i $s = (v_s - v_r) \cdot 6$
Nous obtenons une l'équation : $3v_s + 3v_r = 6v_s - 6v_r$, donc $v_s = 3v_r$
Le chemin $s = (3v_r + v_r) \cdot 3 = 4v_r \cdot 3 = 12v_r$.
Ainsi, faut-il 12 jours pour que l'eau de l'Oder s'écoule de Wroclaw à Szczecin.

Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Présenter la traduction	1
B	Présenter le système d'équation correct	2
C	Trouver la solution, t=12 jours	1
D	Donner la réponse dans la langue choisie	1

Tarea 1. Un crucero (5 puntos)

Solución:

Marquemos:
$s -$ la distancia entre Szczecin y Wrocław
$v_s -$ la velocidad propia del barco
$v_r -$ la velocidad del corriente del río
$t -$ tiempo del paso del agua de Odra de Wrocław a Szczecin
$s = (v_s + v_r) \cdot 3$ i $s = (v_s - v_r) \cdot 6$. Obtenemos la ecuación: $3v_s + 3v_r = 6v_s - 6v_r$,entonces $v_s = 3v_r$. Entonces, el camino $s = (3v_r + v_r) \cdot 3 = 4v_r \cdot 3 = 12v_r$.
De eso resulta que se necesita 12 días para que el agua de Odra pase de Wrocław a Szczecin.

Puntuación:

Acción	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción en polaco	1
B	Formación del sistema correcto de ecuaciones	2
C	Solucion de la tarea, t=12 días	1
D	Formulación de la respuesta en lengua extranjera escogida	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Aufgabe 1. Reise mit einem Schiff (5 Punkte)

Lösung:

Bezeichnen wir:

s – Entfernung zwischen Szczecin und Wrocław

v_s – eigene Geschwindigkeit des Schiffes

v_r – Geschwindigkeit der Flussströmung

t – Zeit, in der das Wasser der Oder aus Wrocław nach Szczecin durchfließt

$s=(v_s+v_r)\cdot 3$ und $s=(v_s-v_r)\cdot 6$

Wir bekommen eine Gleichung: $3v_s+3v_r=6v_s-6v_r$, folglich $v_s=3v_r$

Also der Weg $s=(3v_r+v_r)\cdot 3=4v_r\cdot 3=12v_r$.

Daraus folgt, dass man 12 Tage braucht, damit das Wasser der Oder aus Wrocław nach Szczecin durchfließt.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Aufschreiben der Übersetzung	1
B	Aufschreiben eines richtigen Gleichungssystems	2
C	Aufgabenlösung, t=12 Tage	1
D	Antwortangabe in einer gewählten Fremdsprache	1

Esercizio 1. La gita con la nave (5 punti)

Soluzione:

Indichiamo:

s – distanza tra Szczecin e Wrocław

v_s – velocità propria della nave

v_r – velocità della corrente del fiume

t – tempo del scorrimento dell'acqua di Odra di Wrocław a Szczecin

$s=(v_s+v_r)\cdot 3$ i $s=(v_s-v_r)\cdot 6$

Otteniamo l'equazione: $3v_s+3v_r=6v_s-6v_r$, allora $v_s=3v_r$

Dunque la via $s=(3v_r+v_r)\cdot 3=4v_r\cdot 3=12v_r$.

Di questo risulta che bisogna 12 giorni purché l'acqua di Odra passi di Wrocław a Szczecin.

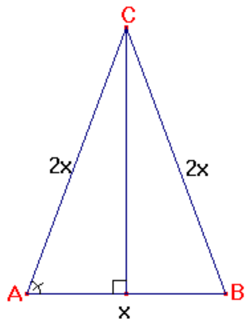
Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione scritta	1
B	Formulazione dellle equazioni corrette	2
C	Soluzione dell'esercizio, t=12 giorni	1
D	Soluzione nella lingua scelta	1

Zadanie 2. Czy to możliwe? (4 punkty)

Rozwiązanie:

Jeżeli w trójkącie równoramiennym jeden z boków jest dwukrotnie większy od drugiego, to musi to być trójkąt: $x,\ 2x,\ 2x$.



[56]

Oznaczmy kąt przy podstawie α.

Mamy $\cos\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{2x} = \frac{1}{4}$, co daje kąt $\alpha \approx 75^o 31'$, wtedy kąt $\beta = 180^o - 2\alpha \approx 28^o 58'$.

Zatem $\alpha \neq 2\beta\ oraz\ \beta \neq 2\alpha$.

Wniosek:

Nie istnieje trójkąt równoramienny, w którym jeden bok jest dwukrotnie dłuższy niż drugi i jednocześnie jeden z kątów dwukrotnie większy od drugiego.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenie trójkąta zgodnie z warunkami zadania	1
B	Wyznaczenie wartości funkcji trygonometrycznej	1
C	Rozwiązanie równania trygonometrycznego i podanie odpowiedzi	2

[56] Rysunek wykonała Iwona Derendarz za pomocą programu Cabri Geometry II

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 3. Równanko 1 (4 punkty)

Rozwiązanie:

Równanie $9x + xy - 4y = 12$ zapiszemy w postaci:

$$x(9+y) = 4(y+3).$$

Rozważmy możliwe postacie iloczynu:

$$\begin{cases} x=1 \\ 9+y=4y+12 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ 9+y=2y+6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4 \\ 9+y=y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} 9+y=1 \\ x=4y+12 \end{cases} \quad \begin{cases} 9+y=2 \\ x=2y+6 \end{cases} \quad \begin{cases} 9+y=4 \\ x=y+3 \end{cases}$$

Mamy zatem:

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x=4 \\ 6=0 \end{cases} \text{układ sprzeczny lub } \begin{cases} y=-8 \\ x=-20 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=-7 \\ x=-8 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} y=-5 \\ x=-2 \end{cases}$$

Podajemy rozwiązanie naturalne: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie równania w postaci iloczynowej	1
B	Rozważenie możliwych iloczynów	2
C	Wybranie rozwiązań naturalnych	1

Zadanie 4. Złożony problem 1 (3 punkty)

Rozwiązanie:

Zauważ, że $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Zatem:

$$2^{3^{1997}} + 1 = \left(2^{3^{1996}}\right)^3 + 1 = \left(2^{3^{1996}} + 1\right) \cdot \left[\left(2^{3^{1996}}\right)^2 - 2^{3^{1996}} + 1 \right].$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby w postaci sumy sześcianów	1
B	Rozkład do postaci iloczynowej	1
C	Udzielenie odpowiedzi do zadania	1

Spotkanie 2: „Rozwiążmy razem” - „Ile, czy możliwe, że aż tyle?”

Exercise 1. Sport class (6 points)

In the class room there are 40 pupils. 26 pupils play basketball, 25 swim, 27 ski. Simultaneously: swim and play basketball 15 pupils, play basketball and ski 16 pupilsswim and ski 18 pupils. One of pupils is not interested in sport. How many pupils are interested in all three kinds of sport? How many pupils are interested in only one kind of sport?

Exercice 1. Une classe sportive (6 points)

Il y a 40 élèves dans une classe. 26 élèves jouent au volley-ball, 25 personnes nagent et 27 font du ski. Il y en a 15 qui nagent et jouent au volley-ball en même temps, 16 qui jouent au volley-ball et font du ski et 18 qui nagent et font du ski. Un élève ne fait pas du tout de sport. Combien d’élèves pratiquent tous les 3 sports? Combien d’élèves ne pratiquent qu’une seule discipline?

Tarea 1. La clase deportiva (6 puntos)

En la clase hay 40 alumnos. Al balonvolea juegan 26 de ellos, la natación practican 25, esquian 27. Al mismo tiempo, 15 practican la natación y juegan al balonvolea. 16 juegan al balonvolea y esquian, 18 practican la natación y esquian. Un alumno no hace ningún deporte. ¿Cuántos alumnos practican todos los tres deportes? ¿Cuántos alumnos practican solamente una disciplina deportiva?

Aufgabe 1. Sportklasse (6 Punkte)

In einer Klasse sind 40 Schüler. 26 Schüler spielen Volleyball, 25 schwimmen, 27 laufen Ski. Zugleich schwimmen und spielen Volleyball 15 Schüler, 16 spielen Volleyball und laufen Ski, 18 schwimmen und laufen Ski. Ein Schüler beschäftigt sich mit dem Sport nicht. Wie viele Schüler treiben alle drei Sportarten? Wie viele Schüler treiben nur eine Sportart?

Esercizio 1. La classe di sport (6 punti)

Nella classe ci sono 40 studenti. La pallavolo praticano 26 studenti, nuotano 25, 27 praticano lo sci. Nello stesso tempo 15 nuotano e praticano la pallavolo, 16 praticano la pallavolo e lo sci, 18 nuotano e praticano lo sci. Uno studente non fa dello sport. Quanti studenti praticano tutti i tre sport? Quanti studenti praticano solo una disciplina sportiva?

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 2. Szynka świąteczna (4 punkty)


[57]

Trzy sąsiadki złożyły się po 15 złotych i kupiły szynkę (bez skóry, tłuszczu i kości).
Jedna z nich podzieliła ją na trzy części zapewniając, że części są równe co do ciężaru. Druga oświadczyła, że ma zaufanie tylko do wagi w sklepie na rogu; okazało się tam, że części rzekomo równe odpowiadają po przeliczeniu wartości 14, 15 i 16 złotych. Trzecia wspólniczka postanowiła sprawdzić to na swojej wadze domowej, która dała znowu inny rezultat.
Powstała kłótnia, bo pierwsza obstawała przy równości swego podziału, druga uznawała tylko wagę sklepową, a trzecia swoją. Jak można załagodzić spór i rozdzielić kawałki (bez naruszenia ich dalszym krajaniem) tak, żeby każda kobieta musiała przyznać, że dostała szynki co najmniej za 15 złotych po obliczeniu wartości według tej wagi, w którą ona wierzy?

Zadanie 3. Równanko 2 (4 punkty)

Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie: $3x^2 + 5y^2 = 345$.

Zadanie 4. Złożony problem 2 (3 punkty)

Pokazać, że liczba $2^{3^{1997}} - 1$ jest złożona.

Zadanie 5. Ile ryb jest w stawie? (4 punkty)

Pewien ichtiolog chciał oszacować ile jest w stawie ryb nadających się do połowu. Zarzucił sieć o przepisowych okach, po wyciągnięciu znalazł w niej 30 ryb, naznaczył każdą odpowiednią farbą i wrzucił z powrotem do stawu. Na drugi dzień zarzucił tą samą sieć i złowił 40 ryb, z których dwie miały znaki. Jak z tego obliczył w przybliżeniu liczbę ryb w stawie?

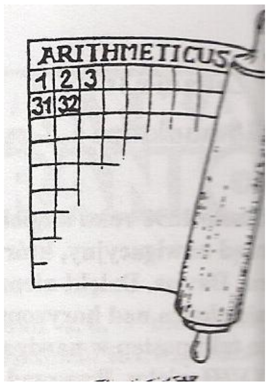
[57] Zdjęcie wykonała Iwona Derendarz

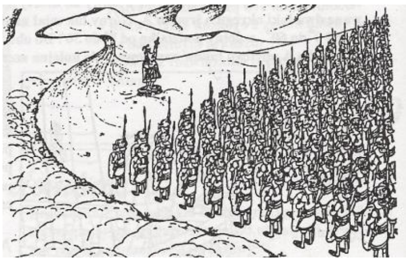
Zadanie 6. Bajka dla niegrzecznych licealistów (6 punktów)


[58] Baba Jaga i Zbój zbierali w lesie muchomory. Okazało się, że kropek na muchomorach Baby Jagi było 13 razy więcej niż na muchomorach Zbója. Przesądna Baba Jaga oddała Zbójowi swój muchomor z najmniejszą liczbą kropek i wtedy miała 8 razy więcej kropek niż Zbój. Pokazać, że Baba Jaga zebrała nie więcej niż 23 muchomory.

Zadanie 7. 5-ta kolumna (4 punkty)

Jeżeli chodzi o dyscyplinę, to w armii rzymskiej nie było żartów. Każdy legionista miał swój numer, aby dokładnie wiedział jakie miejsce ma zająć w szyku. Gdy generał Arithmeticus nakazał swoim 990 legionistom ustawienie się, to tworzyli oni szyk w kształcie prostokąta złożonego z 33 szeregów i 30 kolumn. Przy czym każdy szereg numerowany był w porządku rosnącym, tak jak pokazano obok na zapisanej rolce.[59] Dwaj legioniści Hocus i Pokus stali w piątej kolumnie, ale żaden z nich nie stał w pierwszym szeregu. Gdy Arithmeticus został wezwany do Rzymu, dowództwo przejął generał Calculus. Zażądał on, aby legioniści ustawili się w porządku rosnącym, jednakże tym razem w prostokąt o 30 szeregach i 33 kolumnach. Jednak Hocus i Pokus dalej stali w piątej kolumnie. Jakie numery mają obaj legioniści? Uzasadnij odpowiedź!





Zadanie 8. Wstążka na rurce (4 punkty)

[60] 25 metrów wstążki o grubości $0.1mm$ nawinięto ściśle na rurkę kartonową, otrzymując wałek o średnicy $1dm$. Jaka jest średnica rurki?

Zadanie 9. Bez przesady.. (4 punkty)

Rozwiązać równanie $1-\big|x-|x-1|\big|=x$.

[58] Zdjęcie wykonała Iwona Derendarz
[59] Ilustracje – skany obrazków ze źródła
[60] Zdjęcie wykonała Iwona Derendarz

Zadanie 10. Rozkład jazdy (4 punkty)

Z dwóch stacji wyjeżdżają jednocześnie naprzeciw siebie dwa pociągi. Pierwszy jedzie z prędkością $15km/h$ większą niż drugi. Pociągi te spotkały się po 40 minutach jazdy. Gdyby drugi pociąg wyjechał o 9 minut wcześniej od pierwszego, to pociągi spotkałyby się w połowie drogi. Obliczyć odległość między stacjami.

Zadanie 11. Młodzi ogrodnicy (4 punkty)

Chłopiec może wykosić ogródek w ciągu 80 minut, a jego siostra może to zrobić za 60 minut. Ile czasu zajęłoby im wykoszenie ogrodu przy użyciu dwóch kosiarek?

Zadanie 12. Pola figur (3 punkty)

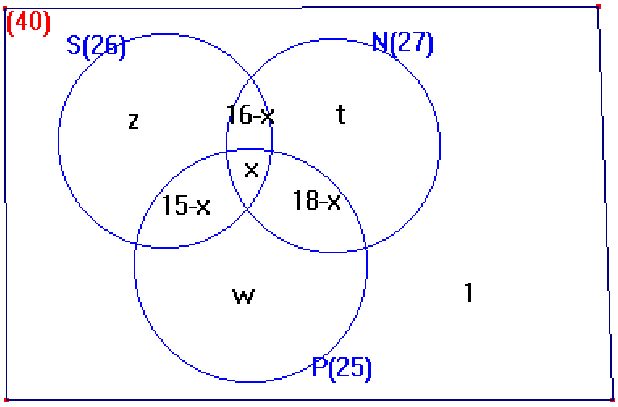
Oblicz pole figury ograniczonej wykresami funkcji $y = \left||x-1|-2\right|$ i $y = 2$.

Rozwiązania oraz schemat punktacji zestawu ćwiczeń „Rozwiążmy razem” „Ile, czy możliwe, że aż tyle?”

Zadanie1. Sportowa klasa (6 punktów)

W klasie jest 40 uczniów. W siatkówkę gra 26, pływa 25, jeździ na nartach 27. Jednocześnie pływa i gra w siatkówkę 15, gra w siatkówkę i jeździ na nartach 16, pływa i jeździ na nartach 18. Jeden uczeń nie zajmuje się sportem. Ilu uczniów uprawia wszystkie trzy sporty? Ilu uczniów uprawia tylko jedną dyscyplinę sportową?

Rozwiązanie:



Oznaczmy:

S-uczniowie grający w siatkówkę

N.- uczniowie jeżdżący na nartach

P - uczniowie uprawiający pływanie

x - uczniowie uprawiający wszystkie trzy dyscypliny

z - tylko siatkówkę

t - tylko narty

w-tylko pływanie

[61]

Mamy:

$z+(16-x)+x+(15-x)=26$

$t+(16-x)+x+(18-x)=27$

$w+(15-x)+x+(18-x)=25$

Więc: $z=x-5$

$t=x-7$

$w=x-8$

Otrzymujemy równanie: $26+(x-7)+(18-x)+x+(x-8)=39$, co daje $x=10$.

Wszystkie dyscypliny uprawia 10 uczniów. Tylko siatkówkę uprawia 5 uczniów, tylko narty - 3, tylko pływanie - 2.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Przetłumaczenie treści zadania	2
B	Oznaczenie zbiorów i ich liczności	1
C	Zapisanie równań	1
D	Wyznaczenie wartości wybranej niewiadomej	1
E	Udzielenie odpowiedzi w wybranym języku	1

[61] Rysunek wykonała Iwona Derendarz za pomocą programu Cabri Geometry II

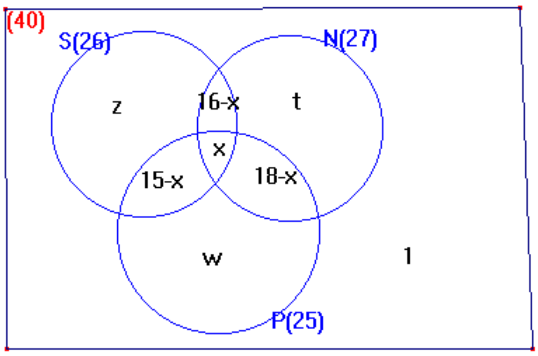
Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Exercise1. Sport class (6 points)

Solusion:

Denote:

S-pupils playing the basketball
N- pupils who ski
P- pupils who are interested in swimming
x-pupils interested in all three sports
z-only basketball
t- only ski
w-only swimming



We have:

$z+(16-x)+x+(15-x)=26$

$t+(16-x)+x+(18-x)=27$

$w+(15-x)+x+(18-x)=25$

Thus: $z=x-5$

$t=x-7$

$w=x-8$

We obtain the equation: $26+(x-7)+(18-x)+x+(x-8)=39$

What gives $x=10$. So, 10 pupils are interested in all three sports. 5 pupils basketball, 3 ski and 2 swimming.

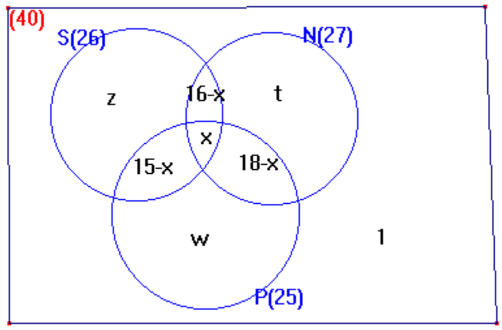
Points:

Activity	Stages of solution	Points
A	Translation in Polish	2
B	Determination of cardinalities of sets	1
C	Writing of equations	1
D	Finding of value of one unknown	1
E	Answer in English	1

Exercice 1. Une classe sportive (6 points)

Solution:

Déterminons:



S- les élèves qui jouent au volley-ball

N- les élèves qui font du ski

P- les élèves qui nagent

x- les élèves qui pratiquent toutes les trois disciplines

z- seulement le volley-ball

t- seulement le ski

w- seulement la natation

Nous avons:

$$z+(16-x)+x+(15-x)=26$$
$$t+(16-x)+x+(18-x)=27$$
$$w+(15-x)+x+(18-x)=25$$

Alors: $z=x-5$

$t=x-7$

$w=x-8$

Nous obtenons une équation : $26+(x-7)+(18-x)+x+(x-8)=39$

Cela donne $x=10$. Toutes les trois disciplines sont pratiquées par 10 élèves. 5 élèves pratiquent seulement le volley-ball, 3 - seulement le ski et 2 - seulement la natation.

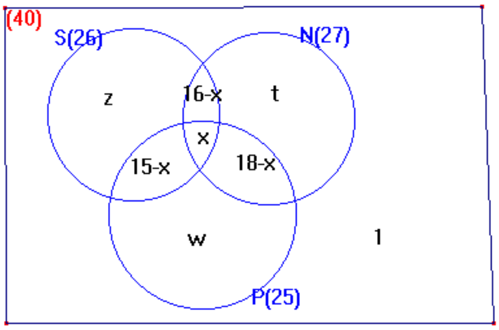
Pointage:

Activité	Solution étape par étape	Nombre de points
A	Traduction du contenu de l'exercice	2
B	Déterminer les ensembles et leurs nombres	1
C	Écrire les équations	1
D	Déterminer la valeur de l'inconnu choisi	1
E	Donner la réponse dans la langue choisie	1

Tarea 1. La clase deportiva (6 puntos)

Solución:

Marqueemos:



S-alumnos que juegan al balonvolea
N-alumnos que esquian
P- alumnos que practican la natación
x- alumnos que practican todas las tres disciplinas
z-solamente el balonvolea
t- solamente esqui
w- solamente la natación

Tenemos:

$z+(16-x)+x+(15-x)=26$

$t+(16-x)+x+(18-x)=27$

$w+(15-x)+x+(18-x)=25$

Entonces: $z=x-5$

$t=x-7$

$w=x-8$

Obtenemos una ecuación: $26+(x-7)+(18-x)+x+(x-8)=39$

Lo que da: $x=10$. Todas las tres disciplinas practican 10 alumnos. Solamente el balonvolea practican 5 alumnos, solamente el esqui -3, solamente la natación-2.

Puntuación:

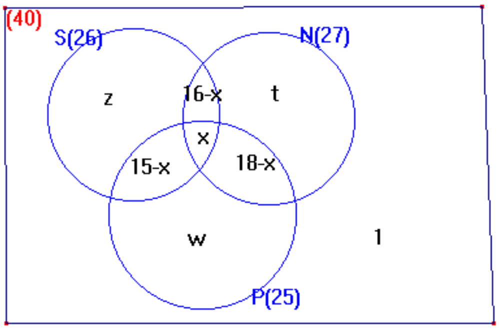
Acción	Etapas de la solución de la tarea	Cantidad de puntos
A	Traducción del contenido de la tarea	2
B	Designación de los conjuntos y su número de elementos	1
C	Notación de las ecuaciones	1
D	Cálculo del valor de una incógnita escogida	1
E	Formulación de la respuesta en lengua extranjera	1

Aufgabe 1. Sportklasse (6 Punkte)

Lösung:

Bezeichnen wir:

S- Schüler, die Volleyball spielen
N- Schüler, die Ski laufen
P- Schüler, die schwimmen
x-Schüler, die alle drei Sportarten treiben
z-nur Volleyball
t- nur Skifahren
w-nur Schwimmen



Wir haben:

$$z+(16-x)+x+(15-x)=26$$
$$t+(16-x)+x+(18-x)=27$$
$$w+(15-x)+x+(18-x)=25$$

Also: $z=x-5$
$t=x-7$
$w=x-8$

Wir bekommen eine Gleichung: $26+(x-7)+(18-x)+x+(x-8)=39$

Was $x=10$ gibt. Alle Sportarten treiben 10 Schüler. Nur Volleyball treiben 5 Schüler, nur Skifahren - 3, nur Schwimmen - 2.

Punktwertung:

Tätigkeitsnummer	Etappen der Aufgabenlösung	Punktezahl
A	Übersetzung des Aufgabeninhalts	2
B	Bezeichnung der Mengen und ihrer Mächtigkeiten	1
C	Aufschreiben der Gleichungen	1
D	Bestimmung der Wert von einer gewählten Unbekannten	1
E	Antwortangabe in einer gewählten Fremdsprache	1

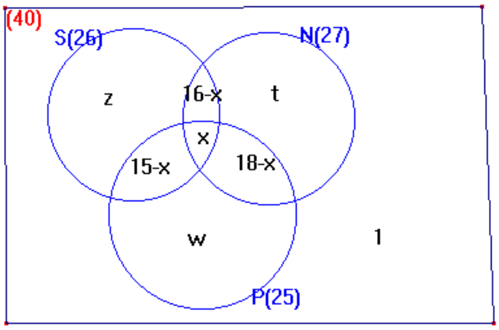
Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Esercizio 1. La classe di sport (6 punti)

Soluzione:

Indichiamo:

s - studenti praticando la pallavolo
n - studenti praticando lo sci
p - studenti praticando il nuoto
x – studenti praticando tre discipline sportive
z - solo la pallavolo
t - solo lo sci
w - solo il nuoto



Abbiamo:

$z+(16-x)+x+(15-x)=26$

$t+(16-x)+x+(18-x)=27$

$w+(15-x)+x+(18-x)=25$

Dunque : $z=x-5$

$t=x-7$

$w=x-8$

Otteniamo l'equazione: $26+(x-7)+(18-x)+x+(x-8)=39$

Questo fa $x=10$.10 studenti praticano tutte le discipline. 5 studenti praticano solo la pallavolo, solo lo sci - 3, solo il nuoto - 2.

Punteggio:

Attività	Tappe della soluzione dell'esercizio	Numero di punti
A	Traduzione di contenuto dell'esercizio	2
B	Definizione degli insiemi e del loro quantità	1
C	Formulazione delle equazioni	1
D	Designazione del valore della incognita scelta	1
E	Soluzione nella lingua celta	1

Zadanie 2. Szynka świąteczna (4 punkty)

Rozwiązanie:

Spór można załagodzić w następujący sposób:
Pierwszeństwo wyboru kawałka szynki dajemy trzeciej wspólniczce. Wybierze ona oczywiście ten kawałek, który na wadze domowej ważył nie mniej od każdego z dwóch pozostałych kawałków, a więc ten, który- w jej mniemaniu- odpowiadał po przeliczeniu wartości nie mniejszej od 15 złotych. Taki kawałek musi istnieć, gdyż przy podziale całości na trzy części jedna z tych części musi być nie mniejsza od 1/3 całości. Następnie wybiera swój kawałek druga wspólniczka. I ta musi być zadowolona, gdyż po dokonaniu wyboru przez trzecią wspólniczkę pozostał co najmniej jeden kawałek, który według wagi w sklepie na rogu odpowiadał po przeliczeniu wartości nie mniejszej niż 15 złotych. Pierwsza wspólniczka otrzymuje pozostały kawałek; ona także musi być zadowolona, bo uważała wszystkie kawałki za równe co do wagi.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Opracowanie strategii wyboru	3
B	Udzielenie poprawnej przejrzystej odpowiedzi	1

Zadanie 3. Równanko 2 (4 punkty)

Rozwiązanie:

$3x^2 + 5y^2 = 345$. Podstawmy: $y = 3u$. Mamy: $3x^2 + 5 \cdot 9u^2 = 345$
Po podzieleniu stronami: $x^2 + 15u^2 = 115$
Teraz $x = 5w$. Otrzymujemy: $25w^2 + 15u^2 = 115$. Dalej: $5w^2 + 3u^2 = 23$
Zatem: $5w^2 \le 23$, $w^2 \le 4$, $w \le 2$.
Biorąc: $w = 2$ mamy: $5 \cdot 4 + 3u^2 = 23$, $u = 1$
Dla $w = 1$ mamy: $5 \cdot 1 + 3u^2 = 23$, $u^2 = 6$ co niemożliwe w liczbach naturalnych.
Zatem: $\begin{cases} x = 5 \cdot 2 = 10 \\ y = 3 \cdot 1 = 3 \end{cases}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Podanie pełnego rozwiązania	3
B	Podanie odpowiedzi (jeśli odpowiedź została „wstrzelona”- tylko 1 pkt)	1

Zadanie 4. Złożony problem 2 (3 punkty)

Rozwiązanie:

Zauważ, że $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Zatem:

$$2^{3^{1997}} - 1 = \left(2^{3^{1996}}\right)^3 - 1 = \left(2^{3^{1996}} - 1\right) \cdot \left[\left(2^{3^{1996}}\right)^2 + 2^{3^{1996}} + 1 \right]$$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie liczby w postaci różnicy sześcianów	1
B	Rozkład do postaci iloczynowej	1
C	Udzielenie odpowiedzi do zadania	1

Zadanie 5. Ile ryb jest w stawie? (4 punkty)

Rozwiązanie:

Niech **n** oznacza liczbę ryb w stawie nadających się do połowu. Stosunek liczby ryb oznaczonych(farbą) do wszystkich ryb wynosi $\frac{30}{n}$. Za drugim razem ichtiolog złowił 40 ryb, spośród których 2 były oznaczone. Stosunek liczb oznaczonych do wszystkich wynosił $\frac{2}{40} = \frac{1}{20}$. Jeśli przyjmiemy, że oznaczone były w stawie równomiernie rozłożone wśród wszystkich ryb, to oba stosunki muszą być jednakowe, czyli $\frac{30}{n} = \frac{1}{20}$, skąd $n = 600$.

Liczba ryb w stawie nadających się do połowu daną siecią wynosi więc w przybliżeniu 600.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Wprowadzenie oznaczeń niezbędnych do rozwiązania zadania	1
B	Ustalenie współczynnika proporcjonalności	1
C	Zbudowanie równania wymiernego	1
D	Obliczenie przybliżonej ilości ryb w stawie	1

Zadanie 6. Bajka dla niegrzecznych licealistów (6 punktów)

Rozwiązanie:

Oznaczmy:
n- liczba grzybów zebranych przez Babę Jagę
k- liczba wszystkich kropek na muchomorach Baby Jagi
x- liczba kropek na muchomorach z najmniejszą liczbą kropek, wśród muchomorów Baby Jagi
z- liczba kropek na muchomorach zebranych przez Zbója

Mamy: $\begin{cases} k = 13z \\ k - x = 8(z + x) \\ k - x \geq (n-1)x \end{cases}$

Z dwóch pierwszych równań mamy: $13z = x + 8z + 8x$; $5z = 9x$, czyli $z = \frac{9}{5}x$, $k = \frac{13 \cdot 9x}{5}$.

Wstawiając do ostatniej nierówności $\frac{13 \cdot 9x}{5} - x \geq (n-1)x$

otrzymujemy: $n - 1 \leq \frac{13 \cdot 9}{5} - 1$, $n \leq \frac{117}{5}$, $n \leq 23$, co należało pokazać.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia niezbędne do rozwiązania zadania	1
B	Zapisanie układu równań i nierówności po 1 punkcie za każde	3
C	Analiza związków między niewiadomymi	1
D	Doprowadzenie do prawidłowej odpowiedzi	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 7. 5-ta kolumna (4 punkty)

Rozwiązanie:

W ustawieniu Arithmeticusa legioniści piątej kolumny mają numery $5+30a$, gdzie $1<a<32$.
W ustawieniu Calculusa w piątej kolumnie stoją legioniści z numerami $5+33b$, gdzie $1<b<29$.
Gdy legionista, w obu ustawieniach stoi w 5 kolumnie, to jego numer spełnia równanie: $5+30a=5+33b$, czyli: $30a=33b$.

Dla $\begin{cases} a=11 \\ b=10 \end{cases}$ otrzymuje się numer 335.

Dla $\begin{cases} a=22 \\ b=20 \end{cases}$ otrzymuje się numer 665.

Hocus i Pokus mają numery 335 i 665.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Zapisanie numerów obu żołnierzy pod dowództwem Arthmeticusa	1
B	Zapisanie numerów obu żołnierzy pod dowództwem Calculusa	1
C	Porównanie	1
D	Podanie poprawnych numerów obu żołnierzy	1

Zadanie 8. Wstążka na rurce (4 punkty)

Rozwiązanie:

Pole przekroju poprzecznego wałka ma $25\pi\ cm^2\ (r=5\ cm)$, z czego wstążka wypełnia pole $25\ cm^2$, więc rdzeń ma pole $25(\pi-1)\ cm^2$.

Oznaczmy przez d średnicę rurki(bez wstążki); wówczas z równania $\pi\frac{d^2}{4}=25(\pi-1)$ wynika

$d=10\sqrt{\frac{\pi-1}{\pi}}\ cm \approx 8.26\ cm.$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ustalenie pola wałka z wstążką	1
B	Ustalenie pola zajmowanego przez wstążkę	1
C	Ustalenie pola samego kartonowego wałka	1
	Wyznaczenie średnicy wałka	1

Zadanie 9. Bez przesady.. (4 punkty)

Rozwiązanie:

$1-x=\left|x-|x-1|\right|$, aby istniało rozwiązanie, musi być spełniony warunek: $1-x\geq 0$, czyli $x\leq 1$.

Wtedy: $1-x=|x+x-1|$, $1-x=|2x-1|$

Rozważmy dwie możliwości:

1) $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ wtedy: $1-x=-2x+1,\ x=0$

2) $x\in\left\langle\frac{1}{2},\ 1\right\rangle$ wtedy: $1-x=2x-1,\ x=\frac{2}{3}$.

Odpowiedź: $x\in\left\{0,\ \frac{2}{3}\right\}$

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Ograniczenie zbioru rozwiązań równania (niekoniecznie przy kompletnym rozwiązaniu)	1
B	Rozważenie poszczególnych przypadków	2
C	Zebranie i udzielenie poprawnej odpowiedzi	1

Zadanie 10. Rozkład jazdy (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

s-odległość między stacjami

v-prędkość drugiego pociągu

t- czas potrzebny na przejechanie połowy drogi między stacjami przez szybszy pociąg

Mamy równania:

$$s=\frac{40}{60}(v+15)+\frac{40}{60}v=\frac{4}{3}v+10$$

$t(v+15)=\left(t+\frac{9}{60}\right)v$, z drugiego równania wyznaczamy: $t=\frac{1}{100}v$

Porównujemy odległość między miejscowościami podstawiając $t=\frac{1}{100}v$:

$$\frac{1}{100}v(v+15)+\left(\frac{1}{100}v+\frac{3}{20}\right)v=\frac{4}{3}v+10$$

$\frac{2}{100}v^2+\frac{15}{100}v+\frac{3}{20}v-\frac{4}{3}v-10=0$, otrzymujemy: $\frac{1}{50}v^2-\frac{31}{30}v-10=0$

$3v^2-155v-1500=0$, $\Delta=24025+18000=42025$, $\sqrt{\Delta}=205$, $v_1=60\ km/h$, $v_2<0$.

Dla $v=60$ mamy $s=\frac{4}{3}\cdot 60+10=90\ km$

Odległość między stacjami wynosi 90km.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia niezbędne do rozwiązania zadania i ujednolicenie jednostek	1
B	Zbudowanie równań wiążących drogę, prędkości i czasy przejazdu pociągów	1
C	Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą	1
D	Podanie odległości między stacjami	1

Zadanie 11. Młodzi ogrodnicy (4 punkty)

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

P - powierzchnia ogrodu do wykoszenia

w_c – wydajność chłopca

w_d – wydajność dziewczynki

t – czas potrzebny na wykoszenie ogrodu przy użyciu obu kosiarek

Mamy: $P = \frac{80}{60} w_c$ i $P = \frac{60}{60} w_d$, zatem: $w_d = \frac{4}{3} w_c$

Razem: $P = (w_c + w_d) \cdot t$

$P = \left(\frac{4}{3} w_c + w_c\right) \cdot t$, tak więc $P = \frac{7}{3} w_c \cdot t$

Mamy równanie: $\frac{4}{3} w_c = \frac{7}{3} w_c \cdot t$, mamy: $t = \frac{4}{7} h = \frac{4}{7} \cdot 60 \ \ \text{min.} \approx 34 \ \ \text{min.}$

Punktacja:

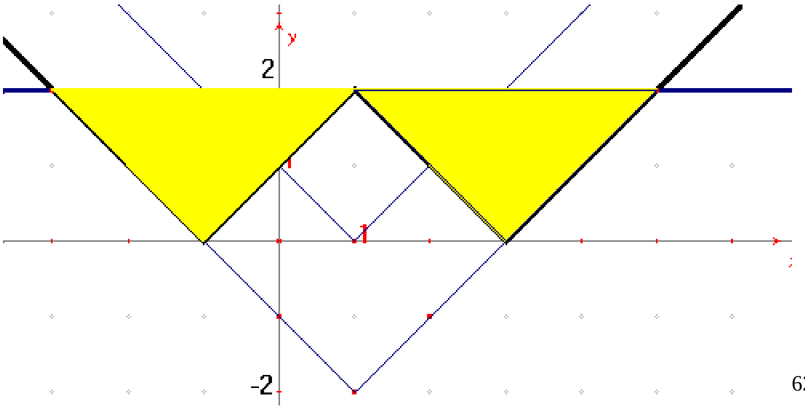
Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Oznaczenia niezbędne do rozwiązania zadania	1
B	Zapisanie równania umożliwiającego porównanie wydajności rodzeństwa	1
C	Porównanie wykonanej pracy	1
D	Uzyskanie poprawnej odpowiedzi	1

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic"
współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 12. Pola figur (3 punkty)

Rozwiązanie:

Wykonujemy wykresy funkcji: $y = \left||x-1|-2\right|$ i $y = 2$



[62]

Figurę tworzą dwa przystające trójkąty równoramienne o podstawie 4 i wysokości 2.

Obliczamy pole: $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 8$.

Punktacja:

Czynność	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
A	Narysowanie wykresu funkcji z wartością bezwzględną	1
B	Zaznaczenie figur	1
C	Obliczenie ich pola	1

[62] Wykres wykonała Iwona Derendarz za pomocą programu Cabri Geometry II

Bibliografia

[1] Bednarek W., *Zbiór zadań dla uczniów lubiących matematykę*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk 1995
[2] Bobiński Z., Kourliandtchik L., Pogoda T., Świątek A., Uscki M., *Miniatury matematyczne 5*, Wydawnicywo Aksjomat, Toruń 2001
[3] Butrym P., *Matematyka w zadaniach praktycznych*, Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2004
[4] Gdowski B., Pluciński E., *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, Warszawa 2003
[5] Kacierzyński J., *150 zadań z matematyki z rozwiązaniami*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra1995
[6] Kartasiński S., Okołowicz M., *Zbiór zadań maturalnych i egzaminacyjnych. Część druga, Geometria i trygonometria*, Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych, Warszawa 1965
[7] Klorek F., *Wartość bezwzględna w różnych zadaniach matematycznych,* Wydawnictwo Klorek, Zielona Góra 1997
[8] Pyrdoł P., *Matematyka. Zbiór zadań Linia 2*, Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON, Gdynia 2003
[9] Rams S., Rams T., *Międzynarodowy Konkurs Matematyczny „Matematyka bez Granic”, Cześć I, Zadania konkursowe 1998-2002*, Nowy Sącz 2003
[10] Steinhaus H., *100 zadań*, PHU „DIP”, Warszawa 1993
[11] Śnieżek A., Tęcza P., *Zbiór zadań z algebry dla szkół średnich*, Wydawnictwa szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1994
[12] Red. Klorek F., *Materiały dla nauczycieli matematyki, zeszyt 4*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1998
[13] Red. Klorek F., *Matematyka, Zeszyt 5*, Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli, Zielona Góra 1988
[14] Etap finałowy Międzynarodowego Konkursu „Matematyka bez Granic”, 4 marca 2010
[15] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka Bez Granic”, Konkurs 7 marca 2007
[16] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka Bez Granic”, Konkurs 3 marca 2005
[17] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka Bez Granic”, Zadania przygotowawcze, grudzień 2005
[18] Międzynarodowy Konkurs „Matematyka Bez Granic”, Zadania przygotowawcze, grudzień 2004
[19] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php/article231
[20] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php/article191
[21] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php/article298
[22] http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/spip/spip.php/article398
[23]http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/FichPDF/MSF01_02D.pdf
[24]http://www.edusektor.net/matematyka-ciek.html
[25]http://maths-msf.site2.ac-strasbourg.fr/FichPDF/MSF02_03E.pdf

Polskie Towarzystwo Matematyczne realizuje projekt "Wespół w zespół z Matematyką bez Granic" współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego