LEKCJE
E-LABORATORIUM MATEMATYCZNEGO

SPIS TREŚCI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE ▼

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▼

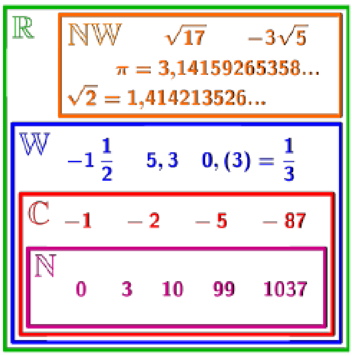
Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

Autor: **Dariusz Kulma**

Zacznijmy od powtórzenia PODZBIORÓW ZBIORU LICZB RZECZYWISTYCH. W zapamiętaniu podziału liczb rzeczywistych pomoże Ci poniższa grafika.



Liczby naturalne to liczby 0, 1, 2, 3, 4 itd. Jak dodamy do nich liczby ujemne, to otrzymamy zbiór liczb **całkowitych**.

Zbiór liczb **wymiernych** tworzą natomiast liczby, które możemy przedstawić w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego. Korzystając z grafiki, łatwo zauważyć, że liczby całkowite, a więc i naturalne są również liczbami wymiernymi.

Liczby **niewymierne** to takie, których nie możemy przedstawić w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego i tworzą one oddzielny zbiór od liczb wymiernych.

Liczby wymierne i niewymierne tworzą łącznie zbiór liczb **rzeczywistych**.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

A teraz krótkie zadanie dla utrwalenia.

ZADANIE

Dany jest zbiór $A=\left\{-7;-2\frac{1}{2};-1;0;0,(3);\sqrt{3};\pi;2\sqrt{5};2^3;\sqrt{81};9\frac{1}{3};13\right\}$. Wypisz ze zbioru A liczby:

a. naturalne, **b.** całkowite, **c.** wymierne, **d.** niewymierne.

LICZBY ODWROTNE I PRZECIWNE

Kolejne zagadnienie to LICZBY ODWROTNE i PRZECIWNE**.** Często potrafią się mylić, więc przypomnijmy, które nazywamy odwrotnymi, a które przeciwnymi, a następnie zróbmy zadanie.

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
LICZBY PRZECIWNE	Liczbą przeciwną do liczby a jest liczba $-a$.	Liczbą przeciwną do 3 jest liczba -3. Liczbą przeciwną do 0 jest liczba 0. Liczbą przeciwną do $-\frac{1}{2}$ jest liczba $\frac{1}{2}$.
LICZBY ODWROTNE	Liczbą odwrotną do liczby a jest liczba $\frac{1}{a}$ dla $a \neq 0$.	Liczbą odwrotną do 2 jest liczba $\frac{1}{2}$. Liczbą odwrotną do $-\frac{2}{3}$ jest liczba $-\frac{3}{2}$.

ZADANIE

Uzupełnij tabelę.

a	3					$-1,3$				$1\frac{1}{5}$
$-a$			-2				$\sqrt{5}$			
$\frac{1}{a}$		$\frac{1}{4}$			$1\frac{1}{3}$				-4	
$-\frac{1}{a}$				8				$-0,2$		

LICZBY PIERWSZE i ZŁOŻONE

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Następny rodzaj liczb to LICZBY PIERWSZE I ZŁOŻONE - są bardzo ważne i często w zadaniach maturalnych występują. Koniecznie musisz wiedzieć, jakie liczby są liczbami pierwszymi, a jakie złożonymi. Przypomnij sobie definicje i przykłady.

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
LICZBY PIERWSZE	Liczbę naturalną p nazywamy liczbą pierwszą, jeśli ma dokładnie dwa dzielniki naturalne: jedynkę i samą siebie. Liczbami pierwszymi są np. 2, 3, 5, 7, 11 ...	Liczba 2 jest liczbą pierwszą, ponieważ jest liczbą naturalną większą od 1 oraz posiada dwa różne dzielniki: 1 oraz 2. Liczba 6 nie jest liczbą pierwszą, ponieważ posiada więcej dzielników niż dwa; jej dzielniki to: 1, 2, 3, 6.
LICZBY ZŁOŻONE	Liczbę z nazywamy liczbą złożoną, gdy jest iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych.	Liczba 6 jest liczbą złożoną, ponieważ możemy ją zapisać: $6 = 2 \cdot 3$, a liczby 2 oraz 3 są liczbami pierwszymi. Liczba 30 jest również liczbą złożoną, gdyż możemy ją zapisać: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, a liczby 2, 3 oraz 5 są liczbami pierwszymi. Liczbę złożoną możemy również rozpoznać po tym, że posiada więcej niż dwa różne dzielniki. Liczba 9 jest liczbą złożoną, gdyż ma trzy dzielniki: 1, 3, 9.

TEST

Powtórzyliśmy już najważniejsze rodzaje liczb. Dla utrwalenia zróbmy jeszcze kilka zadań testowych.

Moje Testy #26 - Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych...

TEST

[#26] Podzbiory zbioru liczb rzeczywistych

Zadanie 1 (1 pkt.) Dany jest zbiór $A = \{-4;\ (-2)^2;\ 6\sqrt{2};\ 4\pi;\ 12,(7);\ 15\}$. W zbiorze A są:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. dwie liczby całkowite **B.** trzy liczby całkowite **C.** trzy liczby wymierne **D.** dwie liczby naturalne

Zadanie 2 (1 pkt.) Liczbą odwrotną do $5\ \frac{4}{5}$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-5\ \frac{4}{5}$ **B.** 5 **C.** $\frac{5}{29}$ **D.** $\frac{29}{5}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczbą przeciwną do liczby $\sqrt{5} - 3$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ **B.** $-\sqrt{5} - 3$ **C.** $-\sqrt{5} + 3$ **D.** $\sqrt{5} + 3$

Zadanie 4 (1 pkt.) Dany jest zbiór liczb $A = \{0,(4);\ 0,(5);\ 1,(1)\}$. Suma elementów tego zbioru nie jest liczbą:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. wymierną **B.** niewymierną **C.** całkowitą **D.** naturalną

Zadanie 5 (1 pkt.) Suma danej liczby całkowitej i przeciwnej do niej nie może być liczbą:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. całkowitą **B.** wymierną **C.** nieparzystą dodatnią **D.** naturalną

Zadanie 6 (1 pkt.) Liczbą odwrotną do liczby $a\ \frac{b}{c}$, gdzie $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

A. $\frac{ab}{c}$ B. $\frac{c}{ab}$ C. $\frac{ac+b}{c}$ D. $\frac{c}{ac+b}$

Zadanie 7 (1 pkt.) Liczbą przeciwną do $\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -1 B. $3-2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}-3$ D. 1

Zadanie 8 (1 pkt.) Przeciwną odwrotnością liczby przeciwnej do $-\frac{5}{7}$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{5}{7}$ B. $-1,4$ C. $\frac{7}{5}$ D. $-\frac{5}{7}$

Zadanie 9 (1 pkt.) W zbiorze $B=\{1,2,3,4...20\}$ jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 9 liczb złożonych B. 10 liczb złożonych C. 11 liczb złożonych D. 12 liczb złożonych

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Logarytmy

Autor: Dariusz Kulma

OBLICZANIE LOGARYTMÓW Z DEFINICJI

Zacznijmy od przypomnienia definicji logarytmu i najważniejszych zależności.

DEFINICJA	PRZYKŁADY
$\log_a b = c$, ponieważ $a^c = b$ Założenia dotyczące dziedziny: 1. $b > 0$ 2. $a > 0$ 3. $a \neq 1$	$\log_2 8 = 3$, ponieważ $2^3 = 8$ $\log_3 9 = 2$, ponieważ $3^2 = 9$

Obliczanie logarytmów z definicji - przykłady z uzasadnieniem

WZÓR	PRZYKŁADY	ZAŁOŻENIA
$\log_a a = 1$	$\log_2 2 = 1,\ \log_5 5 = 1,\ \log 10 = \log_{10} 10 = 1$	$a > 0, a \neq 1$
$\log_a 1 = 0$	$\log_3 1 = 0,\ \log 1 = 0$	$a > 0, a \neq 1$

Wiesz na pewno, jak policzyć taki logarytm $\log_4 64$. Oczywiście jest to 3, ponieważ $4^3 = 64$.

Ale co zrobić, gdy mamy policzyć wartość takiego logarytmu $\log_9 27$? W takim przypadku już tak prosto nie jest.

Korzystając z poniższej planszy, zobaczmy sposób rozwiązania zadań tego typu, a następnie wykonajmy kilka przykładów z kolejnej planszy.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Obliczanie logarytmu z definicji z wykorzystaniem równania

Obliczanie logarytmów z definicji - zadanie z przykładami

WYKORZYSTANIE WZORÓW DOTYCZĄCYCH LOGARYTMÓW

Aby rozwiązywać zadania z logarytmami, musimy przede wszystkim powtórzyć sobie **WZORY (TWIERDZENIA)**.

WZÓR	PRZYKŁADY	ZAŁOŻENIA
$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$	$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 15$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$
$\log_a b - \log_a c = \log_a (b : c)$	$\log_3 10 - \log_3 5 = \log_3 (10 : 5) = \log_3 2$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0$
$p \log_a b = \log_a b^p$	$3 \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$	$a > 0, a \neq 1, b > 0, p \in \mathbb{R}$
$a^{\log_a b} = b$	$2^{\log_2 7} = 7$	$a > 0, a \neq 1, b > 0$

Do powtórzenia wzorów i ich zastosowania na konkretnych przykładach posłużymy się również poniższą planszą.

W planszy są omówione wszystkie wzory, które widzisz na grafice powyżej, ale również dwa dodatkowe, które są bardzo przydatne w wielu zadaniach, więc również warto je poznać i zapamiętać.

Logarytmy - najważniejsze wzory z przykładami

TEST

Dla przećwiczenia i utrwalenia wiadomości z logarytmów zróbmy test na zakończenie.

Moje Testy #27 - Logarytmy...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZ A POMOCN CZE ▼ Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
wyb erz k asę ▼

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#27] Logarytmy

Zadanie 1 (1 pkt.) Liczba $log_5 62,5 + log_5 2$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $log_5 64,5$ B. $log_5 1$ C. 3 D. $log_5 3$

Zadanie 2 (1 pkt.) Iloczyn $5log_{\frac{1}{3}} 27$ jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 15 B. $5log9$ C. -15 D. 15^{-1}

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczba $log_6 \frac{1}{216}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 36 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{36}$

Zadanie 4 (1 pkt.) Liczba $log_{\sqrt{3}} 27 - log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 4 B. $\frac{1}{3}$ C. 5 D. 6

Zadanie 5 (1 pkt.) Wyrażenie $log_5 (x+5) = 3$ jest prawdziwe dla:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $1,2 \cdot 10^2$ B. 130 C. $\sqrt{120}$ D. 15

Zadanie 6 (1 pkt.) Liczba $log_{\sqrt{7}} 343$ jest równa:

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\sqrt{7}$ B. 4 C. 10 D. 6

Zadanie 7 (2 pkt.) Oblicz $log_4(log_4 64) + log_4(log_3 27)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (2 pkt.) Oblicz $log_9\left(log12 + log83\,\frac{1}{3}\right)^2$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (4 pkt.) Oblicz $log_{128}16 - log_{32}64 + log_{64}128$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna | NARZĘDZIA POMOCNICZE | Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

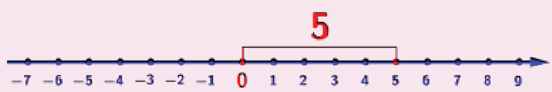
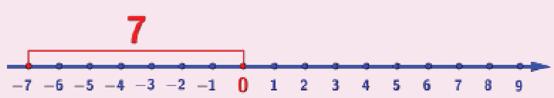
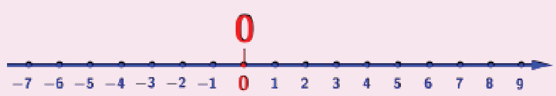
Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Błąd względny i błąd bezwzględny

Autor: Dariusz Kulma

WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA

Omawiając błąd względny i bezwzględny, posługujemy się pojęciem WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ, dlatego na początek przypomninamy, czym jest wartość bezwzględna z liczby.

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA	Wartość bezwzględna oznacza odległość dowolnego punktu na osi liczbowej od punktu oznaczającego wartość zero. Skoro więc jest to odległość, to wyrażamy ją tylko wartościami nieujemnymi. Wartość bezwzględną z liczby a oznaczamy $\|a\|$. Czasami używamy również określenia moduł.	$\|5\| = 5$  $\|-7\| = 7$  $\|0\| = 0$ 

PRZYBLIŻENIA

Zanim przejdziemy do błędów przypomnijmy jeszcze teorię związaną z przybliżeniami. Ważne jest rozróżnienie przybliżenia z nadmiarem i niedomiarem.

PRZYBLIŻENIA		
	Zaokrąglanie liczby polega na odrzuceniu końcowych cyfr tej liczby zgodnie z zasadą, według której ostatnią z zachowanych cyfr liczby:	
	• pozostawiamy bez zmian, gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3 lub 4 (przybliżenie z niedomiarem),	$25{,}748539 \approx 25{,}7485$ (przybliżenie do czterech miejsc po przecinku)
	• zwiększamy o jeden, gdy pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8 lub 9 (przybliżenie z nadmiarem).	$25{,}748539 \approx 25{,}75$ (przybliżenie do dwóch miejsc po przecinku)

Przybliżenia liczb - przykłady

BŁĄD BEZWZGLĘDNY

Możemy teraz już przejść do błędów. Zaczynamy od błędu bezwzględnego. Do zapamiętania mamy jeden wzór, w którym:

x - oznacza liczbę, którą przybliżamy,

a - oznacza przybliżenie liczby x.

Najważniejsze jest więc, żeby prawidłowo określić, którą liczbę przybliżamy, a która jest przybliżeniem.

BŁĄD BEZWZGLĘDNY		
	a — przybliżenie liczby x Błąd bezwzględny przybliżenia liczby to wartość bezwzględna różnicy tej liczby i jej przybliżenia a, czyli $\lvert x-a \rvert$.	Oblicz błąd bezwzględny przybliżenia liczby 45,2 liczbą 45. $\lvert x-a \rvert = \lvert 45{,}2-45 \rvert = \lvert 0{,}2 \rvert = 0{,}2$

Wykonajmy kilka przykładów z poniższej planszy.

Błąd bezwzględny

BŁĄD WZGLĘDNY

Drugim rodzajem błędu jest błąd względny. Do zapamiętania mamy również jeden wzór, w którym:

x - oznacza liczbę, którą przybliżamy,

a - oznacza przybliżenie liczby x.

Zapamiętaj, że w tym wzorze w liczniku występuje błąd bezwzględny, a w mianowniku wartość bezwzględna liczby, którą przybliżamy.

Błąd ten najczęściej będzie podawany w procentach.

BŁĄD WZGLĘDNY	a — przybliżenie liczby x Błąd względny przybliżenia liczby to stosunek błędu bezwzględnego do wartości bezwzględnej liczby x, czyli $\frac{\lvert x-a \rvert}{\lvert x \rvert}$. Błąd ten jest najczęściej wyrażany w procentach.	Oblicz błąd względny przybliżenia liczby 5,2 liczbą 6. $\frac{\lvert x-a \rvert}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert 5{,}2-6 \rvert}{\lvert 5{,}2 \rvert} = \frac{\lvert -0{,}8 \rvert}{\lvert 5{,}2 \rvert} = \frac{0{,}8}{5{,}2} \approx 0{,}1538$ Błąd względny wyrażony w procentach: $0{,}1538 \cdot 100\% \approx 15{,}38\%$

Wykonajmy kilka przykładów z poniższej planszy.

Błąd względny

TEST

Na zakończenie zrobimy test na podsumowanie.

Moje Testy #28 - Błąd względny i bezwzględny...

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy

« POWRÓT

TEST

[#28] Błąd względny i bezwzględny

Zadanie 1 (1 pkt.) Liczbę $\sqrt{5}$ przybliżono liczbą 2 . Błąd względny przybliżenia jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. większy niż 10 **B.** większy niż 12 **C.** mniejszy niż 10 **D.** mniejszy niż 5

Zadanie 2 (1 pkt.) Prawidłowym przybliżeniem liczby $14,9754$ nie jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 15 **B.** $14,976$ **C.** $14,98$ **D.** $14,975$

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczbę $5,5387$ przybliżono do liczby 6 . Błąd bezwzględny tego przybliżenia wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $46,13$ **B.** $-0,4613$ **C.** $0,4613$ **D.** $4,613$

Zadanie 4 (1 pkt.) Przybliżenie liczby π z nadmiarem, to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $3,14$ **B.** $3,142$ **C.** $3,141$ **D.** $3,14159$

Zadanie 5 (1 pkt.) Liczbę $4,60854$ przybliżono do liczby 5 . Błąd względny tego przybliżenia wynosi około:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 8% **B.** 9% **C.** $9,5\%$ **D.** $8,5\%$

Zadanie 6 (1 pkt.) Przybliżenie liczby 459545 z dokładnością do setek wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 459500 **B.** 450000 **C.** 459600 **D.** 459550

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 7 (1 pkt.) Liczbę $\frac{5}{7}$ przybliżono liczbą 1 . Błąd względny przybliżenia wynosi około:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 40% B. 25% C. 45% D. 32%

Zadanie 8 (1 pkt.) Przybliżenie dziesiętne liczby $\sqrt{42}$ z dokładnością do całości jest równe 6 . Liczba, która nie jest błędem względnym przybliżenia tej liczby, to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{42-6\sqrt{42}}{42}$

B. $\frac{\sqrt{42}-6}{\sqrt{42}}$

C. $\frac{7-\sqrt{42}}{7}$

D. $\frac{6\sqrt{42}-42}{42}$

Zadanie 9 (2 pkt.) Liczbę $11,5582$ przybliżono do liczby 12 . Oblicz błąd względny tego przybliżenia, podając wynik w procentach.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) Podaj przybliżenie dziesiętne liczby $\frac{15}{16}$ z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku. Oblicz błąd względny tego przybliżenia.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Obliczenia procentowe

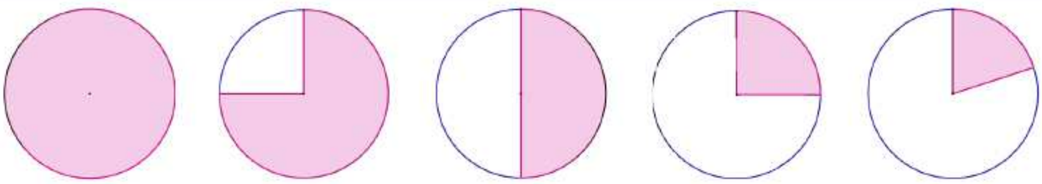
Autor: **Dariusz Kulma**

Na początek przypomnienie definicji.

PROCENT

DEFINICJA

Wyraz procent pochodzi od łacińskiego „pro centum”, czyli „na sto”. 1% danej liczby a to 0,01 z tej liczby, co obliczamy w następujący sposób: $0{,}01 \cdot a$.



$100\% = 1$ $\quad 75\% = \frac{3}{4}$ $\quad 50\% = \frac{1}{2}$ $\quad 25\% = \frac{1}{4}$ $\quad 20\% = \frac{1}{5}$

Ilustracja graficzna procentu jako wycinek koła

Bardzo często przy obliczeniach z procentami stosujemy **PROPORCJE.**

Przypomnijmy, jak z nich skorzystać.

Jak skorzystać z proporcji prostej przy obliczaniu procentów?

Obliczenia procentowe na maturze wystepują zawsze, a najczęściej spotkamy je w zadaniach za 1 punkt.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadania z procentami mogą być różnego rodzaju, ale żeby łatwiej było zapamiętać sposoby rozwiązywania takich zadań, to **wyróżniamy 7 podstawowych typów**, z którymi na maturze możemy spotkać się najczęściej.

Teraz, korzystając z poniższej planszy, przeanalizujmy **RODZAJE OBLICZEŃ PROCENTOWYCH.**

Krok po kroku przejdziemy przez wszystkie przykłady, zwracając szczególną uwagę na wskazówki zapisane na zielonym tle - ułatwią nam zapamiętanie pewnych zależności.

Rodzaje obliczeń procentowych

TEST

Moje Testy #40 - Obliczenia procentowe...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#40] Obliczenia procentowe

Zadanie 1 (1 pkt.) Pan Marek kupił samochód na raty, który kosztował 21600 zł. Łączna suma trzech pierwszych rat wynosi 3240 zł stanowi 15 całkowitej ceny samochodu. Aby spłacić cały samochód, Pan Marek potrzebuje:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 12 rat **B.** 40 rat **C.** 20 rat **D.** 15 rat

Zadanie 2 (1 pkt.) Aparat kosztował 4200 zł. Sprzedawca obniżył cenę najpierw o 20% , a potem podwyższył o 35% . Cena aparatu po przecenach wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 4600 zł **B.** 4536 zł **C.** $2550,50$ zł **D.** $1800,50$ zł

Zadanie 3 (1 pkt.) Cenę telefonu obniżono najpierw o 15% , a potem znowu o 15% . Wynika z tego, że cenę telefonu obniżono o:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 30% **B.** $22,5\%$ **C.** $27,75\%$ **D.** 40%

Zadanie 4 (1 pkt.) Po obniżce o 25% koszulka kosztuje $40,50$ zł. Cena początkowa koszulki wynosiła:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 54 zł **B.** $65,50$ zł **C.** $50,63$ zł **D.** 56 zł

Zadanie 5 (1 pkt.) Na wycieczkę klasową pojechało 64% uczniów całej klasy, co stanowi 16 osób. Klasa ta liczy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 30 uczniów **B.** 24 uczniów **C.** 16 uczniów **D.** 25 uczniów

Zadanie 6 (1 pkt.) Na trzyletnią lokatę o oprocentowaniu rocznym 7% wpłacono 50000 zł. Po tym czasie zysk z lokaty wynosił:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $61252,15$ zł **B.** $11252,15$ zł **C.** 12000 zł **D.** 10500 zł

Zadanie 7 (1 pkt.) Cena towaru bez podatku VAT jest równa 215 zł. Towar ten wraz z podatkiem VAT w wysokości 23% kosztuje:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $49,45$ zł **B.** $165,55$ zł **C.** $146,54$ zł **D.** $264,45$ zł

Zadanie 8 (2 pkt.) Ludność Warszawy stanowi ogółem $1\ 715\ 517$ osób (według Głównego Urzędu Statystycznego w 2012 r.). Oblicz, jaki procent ogółu stanowią kobiety, jeśli wiadomo, że mężczyzn jest $786\ 888$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) W sklepie rower kosztuje 620 zł. Oblicz, jaką kwotę podatku VAT zawiera cena roweru, jeśli podatek ten jest równy 23% .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) Oblicz zysk z lokaty dwuletniej o oprocentowaniu rocznym 6% , jeśli wiadomo, że kapitalizacja odsetek jest półroczna, a ulokowana kwota wynosi $35\ 000$ zł.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

POTĘGI i PIERWIASTKI

Autor: **Dariusz Kulma**

Zaczynamy od przypomnienia definicji potęgi i pierwiastka.

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
POTĘGA	$\begin{cases} a^0 = 1 \quad \text{dla} \quad a \neq 0 \\ a^1 = a \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}} \quad \text{dla} \quad n > 1 \end{cases}$	$3^0 = 1, 15^0 = 1, (-3)^0 = 1$ $3^1 = 3, (-7)^1 = -7$ $5^5 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
PIERWIASTEK ST. DRUGIEGO	$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$, przy czym liczby a i b są nieujemne	$\sqrt{25} = 5$, ponieważ $5^2 = 25$
PIERWIASTEK ST. TRZECIEGO	$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$, gdzie liczby a i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi	$\sqrt[3]{64} = 4$, ponieważ $4^3 = 64$ $\sqrt[3]{-27} = -3$, ponieważ $(-3)^3 = -27$

Przy **pierwiastku stopnia nieparzystego (np. stopnia trzeciego)** musisz pamiętać, że liczba pod pierwiastkiem może być również ujemna. To bardzo istotna informacja, którą musisz pamiętać.

Powtarzając potęgi i pierwiastki, musimy przede wszystkim powtórzyć **WZORY (TWIERDZENIA)**, dzięki którym będziemy mogli rozwiązywać trudniejsze zadania, w których trzeba będzie skorzystać z kilku wzorów jednocześnie

Na początek przypomnij sobie wszystkie wzory i przeanalizuj ich zastosowanie na konkretncyh przykładach.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

POTĘGI O TAKICH SAMYCH PODSTAWACH

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$	$n, m \in \mathbb{N}$
$a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2$, $\frac{10^{30}}{10^{25}} = 10^{30-25} = 10^5$	$n, m \in \mathbb{N}, a \neq 0$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$	$n, m \in \mathbb{N}$

Własności potęg o tej samej podstawie - wzory z przykładami

POTĘGI O WYKŁADNIKU CAŁKOWITYM UJEMNYM

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $a^k = \frac{1}{a^{-k}}$	$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{4}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$	$a \neq 0$ k — dowolna liczba całkowita, $a \neq 0$

Potęgi o wykładniku całkowitym ujemnym - przykłady

POTĘGI O WYKŁADNIKU WYMIERNYM

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ potęga o wykładniku wymiernym dodatnim	$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}_+$ gdzie dla n parzystego: $a \geq 0$, dla n nieparzystego: $a \in \mathbb{R}$
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ potęga o wykładniku wymiernym ujemnym	$16^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{1}{8}$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}_+$ gdzie dla n parzystego: $a > 0$, dla n nieparzystego: $a \neq 0$

Potęgi o wykładniku wymiernym - przykłady

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

POTĘGI O TAKIM SAMYM WYKŁADNIKU

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$	$n \in \mathbb{C}, a \neq 0, b \neq 0$
$a^n : b^n = \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	$6^5 : 2^5 = (6 : 2)^5 = 3^5$	$b \neq 0, n \in \mathbb{C}$

Własności potęg o tym samym wykładniku - wzory z przykładami

PIERWIASTKI

WZÓR	PRZYKŁAD	ZAŁOŻENIA
$\sqrt[n]{0} = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$n \in \mathbb{N}, n > 1$
$\sqrt[n]{1} = 1$	$\sqrt[7]{1} = 1$	$n \in \mathbb{N}, n > 1$
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$	$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{13{,}5} = \sqrt[3]{2 \cdot 13{,}5} = \sqrt[3]{27} = 3$	$n \in \mathbb{N}, n > 1$ gdzie dla n parzystego: $a \geq 0, b \geq 0$ dla n nieparzystego: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$	$n \in \mathbb{N}, n > 1$ Ponadto dla n parzystego: $a \geq 0$, $b > 0$, dla n nieparzystego: $a \in \mathbb{R}, b \neq 0$.
$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3 \cdot 2]{64} = \sqrt[6]{64} = 2$	$n \in \mathbb{N}, n > 1, m \in \mathbb{N}, m > 1$ Ponadto dla n i m — obu liczb nieparzystych: $a \in \mathbb{R}$, w przeciwnym wypadku: $a \geq 0$.
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} = \lvert 1-\sqrt{3} \rvert = \sqrt{3} - 1$	

Pierwiastki tego samego stopnia - wzory z przykładami

ZADANIA MATURALNE:

Potęgi, pierwiastki - MATURA P CZERWIEC 2013

Potęgi - MATURA LISTOPAD 2009

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Potęgi - MATURA SIERPIEŃ 2012

WYŁĄCZANIE CZYNNIKA PRZED ZNAK PIERWIASTKA

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka to czynność, z którą na pewno dobrze sobie radzisz. Gdybyś jednak potrzebował przypomnienia, to w poniższych planszach możesz wykonać kilka przykładów z wyłączaniem czynnika przed znak pierwiastka stopnia drugiego i trzeciego.

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka kwadratowego

Wyłączanie czynnika przed znak pierwiastka trzeciego stopnia

WŁĄCZANIE CZYNNIKA POD ZNAK PIERWIASTKA

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka kwadratowego

Włączanie czynnika pod znak pierwiastka trzeciego stopnia

ZADANIA RÓŻNE:

Zadanie 1161 - ...

Zadanie 1162 - Liczba $\sqrt{a^2 b}$ jest równa wyrażeniu:...

Zadanie 1175 - Liczba $5^{40} + 5^{15} \cdot 5^{25} + 5^{40} + \frac{5^{84}}{5^{21}} + 5^{40}$ ...

Zadanie 1179 - Oblicz wartość wyrażenia $\frac{25^{-3} \cdot (\frac{1}{5})^4 : 0,2^3}{125^{-2}}$ ...

Moje Testy #2 - POTĘGI I PIERWIASTKI...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

TEST

[#2] POTĘGI I PIERWIASTKI

Zadanie 1 (1 pkt.) Liczba $\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \cdot \sqrt{9^3}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 3 B. 9 C. 27 D. $3\sqrt{3}$

Zadanie 2 (1 pkt.) Liczba $5\sqrt{32} - 2\sqrt{128}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $8\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{96}$ C. $-\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{2}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczba $9\sqrt{3}$ jest równa liczbie:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\sqrt{27}$ B. $\sqrt{12}$ C. $\sqrt{243}$ D. $3\sqrt{81}$

Zadanie 4 (1 pkt.) Liczba $\left(\frac{2^{-2} \cdot 3^{-1}}{3^{-2} \cdot 2^{-1}}\right)^{-1}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 3

Zadanie 5 (1 pkt.) Iloczyn $25^3 \cdot 125^2$ jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 5^{36} B. 5^{12} C. 5^{10} D. 5^{25}

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sito Eratostenesa - liczby pierwsze

Autor: **Dariusz Kulma**

WSTĘP

W książce **"Liczby pierwsze - w drodze do nieskończoności" Enrique Graciana** możemy znaleźć taki fragment dotyczący liczb pierwszych:

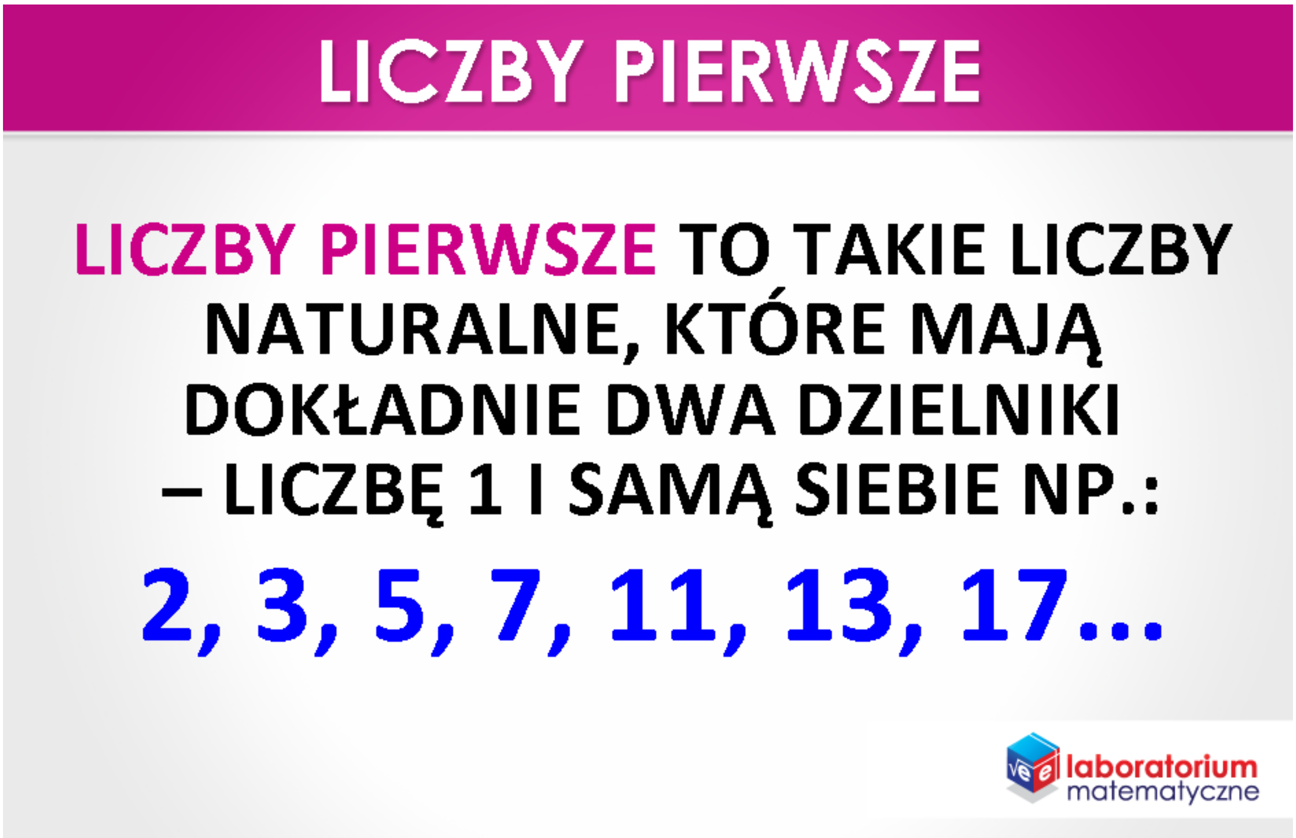
"Można powiedzieć, że w arytmetyce większość liczb zachowuje się porządnie. Liczby parzyste występują naprzemian z nieparzystymi, co trzecia liczba musi być wielokrotnością liczby 3, kwadraty liczby podlegają łatwej do wprowadzenia regule. [...] Natomiast liczby pierwsze to niesforna zgraja. Pojawiają się tam, gdzie chcą, bez ostrzeżenia, w sposób pozornie chaotyczny, bez żadnych reguł. A najgorsze, że nie da się ich ignorować - są absolutnie niezbędne w arytmetyce i całej matematyce."

Liczby pierwsze są zadziwiające mimo swej prostoty. Mamy z nimi do czynienia wszędzie, a szczególnie w przypadku ochrony danych - kart bankowych, systemów bezpieczeństwa komputerów czy ochrony prywatności rozmów mailowych czy telefonicznych. Jeden z nowoczesnych systemów kryptograficznych KRYPTOSYSTEM RSA opiera się właśnie na operacjach z wykorzystaniem liczb pierwszych.

Wielu największych matematyków takich jak **Euklides, Fermat, Euler czy Gauss** było zafascynowanych liczbami pierwszymi i wiele lat swego życia poświęcili na badanie ich swoistej "magii".

DEFINICJA

Zapoznajmy się z definicją liczb pierwszych.



JAK ZNALEŹĆ LICZBY PIERWSZE?

Aby stwierdzić, czy dana liczba jest pierwsza, to można sprawdzić, czy liczba ta nie dzieli się przez liczby naturalne mniejsze do niej.

PRZYKŁAD:

Chcemy stwierdzić, czy liczba 13 jest liczbą pierwszą. Sprawdzamy, czy liczba ta nie dzieli się przez 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Liczba 13 nie dzieli się przez żadną z tych liczb, więc jest liczbą pierwszą. Oczywiście sposób jest prosty, ale przy większych liczbach żmudny, a przy bardzo wielkich jest wręcz niemożliwy do zastosowania.

TESTY PIERWSZEŃSTWA

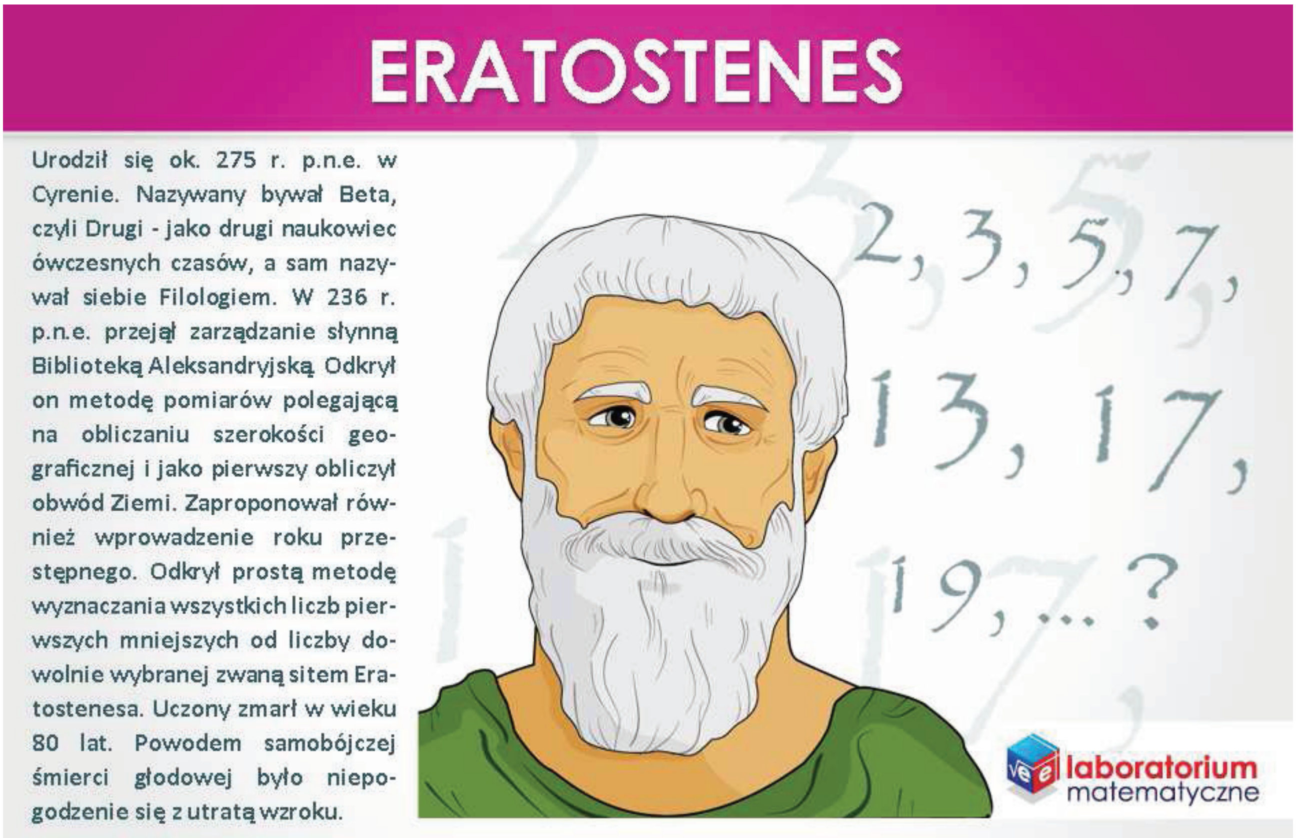
Samotna liczba 2 - jedyna taka pierwsza

Pewne liczby możemy od razy odrzucić, bo na pewno możemy stwierdzić, że nie są to liczby pierwsze.

Pierwszy test to **liczby parzyste**. Zauważmy, że jedyną liczbą pierwszą, która jest parzysta jest liczba 2. Wszystkie pozostałe liczby parzyste na pewno dzielą się przez 2, więc nie są pierwsze. To pierwszy z prostych testów, który możemy zrobić. Potem możemy usuwać liczby podzielne przez 3, 5, itd.

SITO ERATOSTENESA

Generowanie liczb pierwszych zawsze było problematyczne ze względu na czasochłonność. Jedna z pierwszych metod jest przypisywana **Eratostenesowi z Cyreny (275-194 p.n.e)**. Był to matematyk grecki zajmujący się również geografią i astronomią. Motodę nazywamy **sitem Eratostenesa**, ponieważ polega na swoistym przesiewaniu liczb, które na pewno nie są pierwsze od potencjalnie nadal pierwszych.



Sprawdźmy na planszy, jak działa **Sito Eratostenesa.**

Liczby pierwsze - sito Eratostenesa

Moje Testy #51 - Sito Eratostenesa - liczby pierwsze...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Wzory skróconego mnożenia

Autor: **Dariusz Kulma**

PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O WYRAŻENIACH ALGEBRAICZNYCH

Zanim przejdziemy do wzorów skróconego mnożenia, przypomnijmy podstawowe pojęcia dotyczące wyrażeń algebraicznych.

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
WYRAŻENIE ALGEBRAICZNE	Wyrażenie, które składa się z liter oraz liczb połączonych działaniami arytmetycznymi i/lub nawiasami, nazywamy wyrażeniem algebraicznym.	$2xy,\ a^2+b^2,\ \frac{x-y}{x+y},\ 5(8c+\sqrt{2}\,d)$
JEDNOMIAN	Pojedyncze zmienne, liczby lub iloczyny zmiennych i liczb nazywamy jednomianami.	$4x,\ 6,\ 2x^2,\ 5xy^2$
WSPÓŁCZYNNIK JEDNOMIANU	Liczbę występującą w jednomianie nazywamy współczynnikiem jednomianu.	$4x,\ 5xy^2$
SUMA ALGEBRAICZNA / WIELOMIAN	Skończoną sumę jednomianów nazywamy sumą algebraiczną lub wielomianem.	$a+b,\ 5x^2+6x+1,\ 4xy+x^2-y-1$
WYRAZY	Poszczególne jednomiany w sumie algebraicznej nazywamy wyrazami.	
WYRAZY PODOBNE	Jeśli jednomiany różnią się od siebie jedynie współczynnikiem liczbowym, to nazywamy je wyrazami podobnymi.	$4xy^2,\ xy^2,\ 12xy^2,\ -xy^2$
REDUKCJA WYRAZÓW PODOBNYCH	Wyrazy podobne można dodawać lub odejmować. Czynność taką nazywamy redukcją wyrazów podobnych.	$4x^2-5x^2+3x^2=2x^2$

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Są to jedne z najważniejszych wzorów, które koniecznie trzeba zapamiętać. Ich znajmość jest niezbędna w wielu innych działach, również w dowodach i zadaniach na wykazywanie.

WZORY Z PRZYKŁADAMI
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2\cdot 4x\cdot 3 + 3^2 = 16x^2 - 24x + 9$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(3+2\sqrt{2})^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2 = 9 + 12\sqrt{2} + 8 = 17 + 12\sqrt{2}$
$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
$(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

Korzystając z poniższych plansz, przeanalizujemy dowody geometryczne na poszczególne wzory.

- Dowód geometryczny kwadratu sumy
- Dowód geometryczny kwadratu różnicy
- Dowód geometryczny różnicy kwadratów

Teraz przećwiczmy zastosowanie wzorów na konkretnych przykładach.

- Kwadrat sumy - zadanie z przykładami
- Kwadrat różnicy - zadanie z przykładami
- Różnica kwadratów - zadanie z przykładami

USUWANIE NIEWYMIERNOŚCI Z MIANOWNIKA

Usuwanie niewymierności z mianownika dotyczy ułamków, które w mianownikach mają pierwiastki. Jest to ważna czynność, w której korzystamy ze wzorów skróconego mnożenia.

Przypomnijmy, jak to robimy.

PRZYKŁAD 1

Usuń niewymierność z mianownika ułamka $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$.

W celu usunięcia niewymierności z mianownika, który jest sumą (różnicą) dwóch liczb, należy licznik i mianownik pomnożyć przez różnicę (sumę) tych liczb, tak aby w mianowniku otrzymać wzór na różnicę kwadratów.

$$\frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}=\frac{2\sqrt{5}+2}{5-1}=\frac{2\sqrt{5}+2}{4}$$

Wyłączanie niewymierności z mianownika ułamka - przykłady

TEST

Na zakończenie zróbmy test.

Moje Testy #29 - Wzory skróconego mnożenia...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#29] Wzory skróconego mnożenia

Zadanie 1 (1 pkt.) Wielomian $9x^2 - 196$ jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $9(x-14)(x+14)$ **B.** $(3x-14)(3x+14)$ **C.** $(3x+14)^2$ **D.** $(3x-14)^2$

Zadanie 2 (1 pkt.) Kwadrat liczby $4-3\sqrt{5}$ jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $61-24\sqrt{5}$ **B.** $45+24\sqrt{5}$ **C.** $29+24\sqrt{5}$ **D.** $61-12\sqrt{5}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Wartość wyrażenia $(2x+4y)^2-(x+y)$ dla $x=4$ i $y=3$ można zapisać jako:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $3\cdot 10^2+9\cdot 10$ **B.** $3,93\cdot 10^2$ **C.** 20^2-49 **D.** 126

Zadanie 4 (1 pkt.) Jeżeli dla pewnych liczb c i d zachodzą równości $c^2-d^2=354$ i $c-d=59$, to dla tych liczb c i d wartość wyrażenia $c+d$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 295 **B.** $\sqrt{18}$ **C.** 6 **D.** 95

Zadanie 5 (1 pkt.) Liczba $(\sqrt{6}-4)^2+4(5+2\sqrt{6})$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 24 **B.** $6\sqrt{6}$ **C.** $42\sqrt{6}$ **D.** 42

Zadanie 6 (1 pkt.) Wyrażenie $16x^2+56x+49$ jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(4x-7)(4x+7)$ B. $(4x+7)^2$ C. $4x(4x+7)+49$ D. $(4x-7)^2$

Zadanie 7 (1 pkt.) Liczba $\left(2-\sqrt{2}\right)^2-2\left(4\sqrt{2}-1\right)\cdot 3\left(4\sqrt{2}+1\right)$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-180-4\sqrt{2}$ B. $-45\left(4+\sqrt{2}\right)$ C. $4(-45+\sqrt{2})$ D. $180-4\sqrt{2}$

Zadanie 8 (2 pkt.) Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie $(6x+5)^2-2(x+2)-5x-2$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Wykonaj działania: $\left(\frac{1}{3}x^2-5\right)(6xy+9)+(3x+2y)^2-3(x-y)(x+y)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{3}(4x-3y)^2+3(-3x-2)(3x-2)-12y+3$ dla $x=2$ i $y=-1$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Dowody z nierównością

Autor: **Dariusz Kulma**

WYKAZYWANIE NIERÓWNOŚCI

W tych dowodach, podobnie jak przy podzielności, korzystamy z jednej podstawowej zależności.

Tym razem musimy tak **przekształcić nierówność, aby sprowadzić ją do postaci kwadratu wyrażenia, które jest zawsze większe bądź równe zero**.

Znajomość wzorów skróconego mnożenia jest więc niezbędna !

Przeanalizujmy planszę poniżej.

Zauważmy, że:

$5^2 \geq 0$,	ponieważ $25 \geq 0$
$(-3)^2 \geq 0$,	ponieważ $9 \geq 0$
$(\sqrt{2})^2 \geq 0$,	ponieważ $2 \geq 0$
$0^2 \geq 0$,	ponieważ $0 \geq 0$
$(2-\sqrt{2})^2 \geq 0$,	ponieważ $(2-\sqrt{2})^2 \approx 0{,}35 \geq 0$

Można więc stwierdzić, że kwadrat sumy lub różnicy dowolnych liczb rzeczywistych jest wyrażeniem nieujemnym.

$(x+y)^2 \geq 0 \quad (x-y)^2 \geq 0 \quad x,y \in \mathbb{R}$ Wiele dowodów opiera się na tej zależności.

Bardzo ważną zależnością, którą warto zapamiętać, jest zależnośći, którą udowodnimy w przykładzie 1 w poniższej planszy.

Dowody z nierównościami - przykłady

Zróbmy teraz podobne przykłady.

Dowód z nierównością K1

Dowód z nierównością K2

Dowód z nierównością K3

TEST

Moje Testy #41 - Dowody z nierównością...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#41] Dowody z nierównością

Zadanie 1 (2 pkt.) Wykaż, że wyrażenie $n+5 \geq \frac{n-3}{n}$ jest prawdziwe dla $n \in R_+$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 2 (2 pkt.) Wykaż, że wyrażenie $\frac{(a+2)^2}{3} \geq 2a+1$ jest prawdziwe dla każdego $a \in R$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 3 (2 pkt.) Wykaż, że jeżeli $x>0$ i $y>0$, to $\frac{x+\frac{y^2}{x}}{2} - y \geq 0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 4 (2 pkt.) Wykaż, że dla każdej liczby $a \in R_+$ prawdziwa jest nierówność $a\left(1-2\sqrt{a}\right)+2a^2 \geq a^2$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Wykaż, że wyrażenie $\frac{p^2-2}{6} \geq \frac{1}{3}p - \frac{1}{2}$ jest prawdziwe dla $p \in R$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (2 pkt.) Wykaż, że wyrażenie $\frac{\frac{9}{4x}+5x}{3} - 2 \geq \frac{1}{4}\left(4+\frac{4}{3}x\right) - 1$ jest prawdziwe dla każdego $x \in R \backslash \{0\}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (2 pkt.) Wykaż, że jeśli $x>0$, to nierówność $\frac{3}{x}+3 \geq \sqrt{\frac{18}{x}}$ jest prawdziwa.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (2 pkt.) Wykaż, że dla każdej liczby $a \in R_+$ prawdziwa jest nierówność $\sqrt{a} + \frac{\sqrt{a}}{4a} \geq 1$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:

-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Dowody z wykorzystaniem podzielności liczb

Autor: **Dariusz Kulma**

PODZIELNOŚĆ LICZB

Zanim przejdziemy do dowodów przypomnijmy, jak zapisujemy liczby parzyste oraz zależność, że liczba jest podzielna przez inną liczbę.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Mówimy, że liczba całkowita k jest podzielna przez 2 (lub parzysta), gdy możemy ją zapisać w postaci $k = 2n$, gdzie n jest również liczbą całkowitą. Powiemy, że liczba 2 jest dzielnikiem liczby k.	Liczba 4 jest podzielna przez 2, ponieważ możemy liczbę 4 zapisać w postaci $4 = 2 \cdot 2$. Liczba -6 jest parzysta, ponieważ możemy ją zapisać w postaci: $-6 = 2 \cdot (-3)$.
Wszystkie liczby całkowite, które nie są parzyste, noszą nazwę liczb nieparzystych.	Liczba 5 jest liczbą nieparzystą, ponieważ nie można jej przedstawić w postaci iloczynu liczby 2 i innej liczby całkowitej.
Analogicznie możemy powiedzieć, że liczba całkowita k jest podzielna przez liczbę całkowitą n (różną od zera), gdy możemy zapisać związek: $k = n \cdot m$, gdzie m jest liczbą całkowitą. Możemy również powiedzieć, że liczba n jest dzielnikiem liczby k.	

Następnie przypomnijmy **podstawowe cechy podzielności przez 2, 3, 4, 5, 9 i 10.**

CECHA PODZIELNOŚCI	PRZYKŁAD
Liczba jest podzielna przez 2, jeśli cyfra jedności jest liczbą parzystą, czyli 0, 2, 4, 6, 8.	Liczba 126 jest liczbą podzielną przez 2, bo cyfra jedności (6) jest parzysta. Natomiast liczba 127 nie jest podzielna przez 2, bo cyfra jedności (7) nie jest parzysta.
Liczba jest podzielna przez 3, jeśli suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 3.	Liczba 126 jest liczbą podzielną przez 3, bo suma jej cyfr, $1+2+6=9$, jest liczbą podzielną przez 3. Natomiast liczba 127 nie jest podzielna przez 3, bo suma jej cyfr, $1+2+7=10$, nie jest liczbą podzielną przez 3.
Liczba jest podzielna przez 4, jeśli liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr liczby jest podzielna przez 4.	Liczba 128 jest podzielna przez 4, ponieważ liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr (28) jest podzielna przez 4. Natomiast liczba 126 nie jest podzielna przez 4, ponieważ liczba złożona z dwóch ostatnich cyfr (26) nie jest podzielna przez 4.
Liczba jest podzielna przez 5, jeśli cyfra jedności wynosi 0 lub 5.	Liczba 125 jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfra jedności wynosi 5. Natomiast liczba 126 nie jest podzielna przez 5, ponieważ jej cyfrą jedności nie jest ani 5, ani 0.
Liczba jest podzielna przez 9, jeśli suma jej cyfr jest liczbą podzielną przez 9.	Liczba 126 jest liczbą podzielną przez 9, bo suma jej cyfr, $1+2+6=9$, jest liczbą podzielną przez 9. Natomiast liczba 127 nie jest podzielna przez 9, bo suma jej cyfr, $1+2+7=10$, nie jest liczbą podzielną przez 9.
Liczba jest podzielna przez 10, jeśli cyfra jedności wynosi 0.	Liczba 130 jest podzielna przez 10, ponieważ jej cyfra jedności wynosi 0. Natomiast liczba 126 nie jest podzielna przez 10, ponieważ jej cyfrą jedności nie jest 0.

WYKAZYWANIE PODZIELNOŚCI

Dowody z wykazywaniem podzielności opierają się na jednej podstawowej zasadzie. Pamiętaj, że jeśli chcesz udowodnić podzielność przez jakąś liczbę, to musisz doprowadzić do postaci, w której otrzymasz iloczyn tej liczby i dowolnej liczby całkowitej.

Przeanalizuj grafikę lub planszę poniżej.

PODZIELNOŚĆ — WPROWADZENIE

Jeśli chcemy wykazać, że wyrażenie jest podzielne przez 7, to należy to wyrażenie przedstawić jako iloczyn liczby 7 i liczby całkowitej.

$14 = 2 \cdot 7$	liczba jest podzielna przez 7
$70 = 10 \cdot 7$	liczba jest podzielna przez 7
$1638 = 234 \cdot 7$	liczba jest podzielna przez 7

Zauważmy, że każdą liczbę podzielną przez 7 możemy rozłożyć na iloczyn liczby 7 i określonej liczby całkowitej, której wartość nie jest dla nas istotna. W dowodach wyrażenie, które jest liczbą całkowitą, zastępujemy dowolną literą, np.:

$$7 \cdot k, \text{ gdzie } k \in \mathbb{C}$$

Zapis ten oznacza, że wyrażenie $7k$ jest wielokrotnością liczby 7 i liczby całkowitej k, czyli jest liczbą podzielną przez 7.

Jak zapisywać dowody z podzielnością

Przeanalizujmy pięć różnych przykładów, w których należy doprowadzić do sytuacji, w których na końcu otrzymamy odpowiedni iloczyn.

Wykaż, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3

Wykazywanie podzielności wyrażeń - przykłady

Następnie w analogiczny sposób wykonajmy kolejne przykłady.

Dowód z podzielnością K1

Dowód z podzielnością K2

Dowód z podzielnością K3

Dowód z podzielnością K4

Dowód z podzielnością K5

W kolejnych przykładach **wykorzystamy wzory skróconego mnożenia**, ale zasada podejścia do dowodów jest caly czas taka sama, więc dążymy do otrzymania iloczynu.

Przeanalizujemy przykłady, a następnie wykonamy kilka przykładów.

Wykazywanie podzielności wyrażeń z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia - przykłady

Dowód z podzielnością K6

Dowód z podzielnością K7

Dowód z podzielnością K8

TEST

Moje Testy #42 - Dowody z wykorzystaniem podzielności liczb...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

laboratorium matematyczne

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy

« POWRÓT

TEST

[#42] Dowody z wykorzystaniem podzielności liczb

Zadanie 1 (2 pkt.) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $5^{n+2} + 5^{n+3} + 5^{n+4}$ jest podzielna przez 775 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 2 (2 pkt.) Wykaż, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych powiększona o jeden jest podzielna przez 3 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 3 (2 pkt.) Wykaż, że liczba $3^{12} - 1$ jest podzielna przez 104 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 4 (2 pkt.) Wykaż, że suma $7^4 + 7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8 + 7^9$ jest podzielna przez 8 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Wykaż, że iloczyn $12 \cdot 18 \cdot 30 \cdot 36 \cdot 42 \cdot 54 \cdot 216$ jest podzielny przez 6^{11} .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (2 pkt.) Wykaż, że liczba $CCC + CC + C$ jest podzielna przez 41 , wiedząc, że C oznacza dowolną cyfrę.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (2 pkt.) Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $2^{n+2} + 2^{n+3} + 2^{n+4}$ jest podzielna przez 56 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (2 pkt.) Wykaż, że suma kwadratów czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 2 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 9 (2 pkt.) Wykaż, że liczba $5^8 - 1$ jest podzielna przez 624 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Wykaż, że suma $3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7$ jest podzielna przez 4 .

odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 11 (2 pkt.) Wykaż, że iloczyn $6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 27 \cdot 30 \cdot 81$ jest podzielny przez 3^{13} .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 12 (2 pkt.) Wykaż, że liczba $ABCABC$, gdzie $A,\ B,\ C$ są cyframi, jest podzielna przez 1001 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Dwumian Newtona a trójkąt Pascala

Autor: **Dariusz Kulma**

DWUMIAN NEWTONA

Nieraz spotykamy się ze wzorami typu $(x+y)^n$. Oczywiście jest wzór, który pozwala rozpisywać takie wyrażenia i nazywamy go **Dwumianem Newtona**. Oto on:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

Przy każdym współczynniku mamy postać symbolu Newtona, który przyjmuje wzór:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Jednak stosowanie tego wzoru w praktyce, szczególnie przy rozbudowanych wyrażeniach, nie jest wygodne.

TRÓJKĄT PASCALA

Okazuje się, że współczynniki symbolu Newtona tworzą specyficzny trójkąt. Zaobserwuj, zmieniając wykładniki kolejnych potęg wyrażenia $(x+y)^n$, jakie liczby odpowiadają kolejnym współczynnikom we wzorze dwumianu. Zmieniaj również znaki + i - oraz obserwuj sumę wykładników w poszczególnych wyrażeniach rozłożonego wyrażenia.

Dwumian Newtona a trójkąt Pascala

Co można zaobserwować?

1° Kolejne wiersze powstają poprzez dopisywanie kolejnych 1 na bokach trójkąta, a poszczególne wyrazy wewnątrz trójkąta powstają przez dodawanie dwóch wyrazów z poprzedneigo wiersza znajdującęgo się nad wyrazem, który należy zapisać np. liczba 4 powstała z zsumowania liczby 1 i 3, które się nad tą liczbą znajdują.

2° Zawsze suma wykładników w kolejnych wyrażeniach jest równa n.

3° Kolejne wykładniki przy liczbie x maleją o 1, zaczynając od n, a kolejne wykładniki przy y rosną o 1, zaczynając od 0.

4° Jeśli pomiędzy x i y znajduje się "+", to wszystkie wyrażenia są dodatnie, a jeśli "-", to znaki piszemy przemiennie, zaczynając od "+".

ZADANIE

Posługując się zdobytą wiedzą, rozpisz wyrażenie $(x-y)^7$, a potem sprawdź za pomocą poniższej planszy swoje rozwiązanie.

Jak skorzystać z trójkąta Pascala

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Sposoby opisywania funkcji

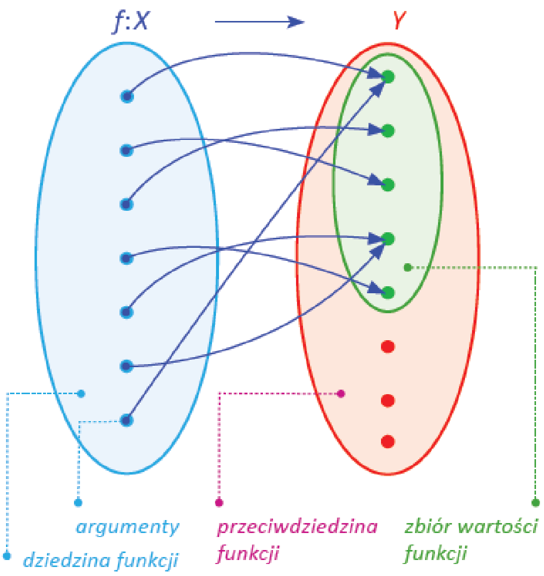
Autor: **Dariusz Kulma**

PODSTAWOWE WIADOMOŚCI O FUNKCJACH

Na początek przypomnijmy, jaki rodzaj przyporządkowania określamy nazwą funkcja.

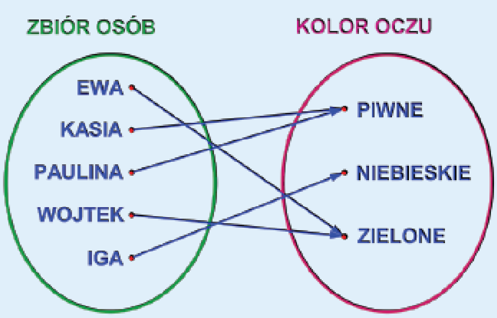
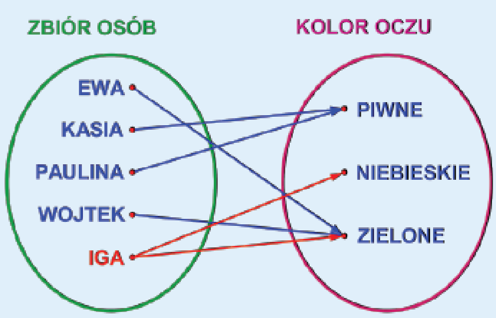
Najważniejsze, co należy zapamiętać to to, że jeden argument (czyli x) może mieć przyporządkowaną tylko jedną wartość (czyli y), natomiast jedna wartość (czyli y) może być przyporządkowana do wielu argumentów (czyli x).

Powtórzmy podstawowe definicje, wykorzystując poniższą planszę. Należy zwrócić uwagę na najważniejsze pojęcia przedstawione na grafie.

	DEFINICJA	PRZYKŁAD
FUNKCJA	Funkcja ze zbioru X w zbiór Y to przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X (dziedziny) dokładnie jednego elementu zbioru Y (przeciwdziedziny funkcji).	
ARGUMENT FUNKCJI	Elementy dziedziny nazywamy argumentami.	
WARTOŚĆ FUNKCJI	Elementy zbioru Y, które zostały przyporządkowane argumentom, nazywamy wartościami funkcji. Tworzą one zbiór wartości funkcji.	
	Aby określić funkcję, należy podać zbiór X i Y oraz regułę, według której argumentom ze zbioru X przyporządkowujemy wartości funkcji.	
	Funkcje zazwyczaj oznaczamy małymi literami, np.: f, g, h.	

Na pewno pamiętasz, że funkcja może być opisana w różny sposób (grafem, słownie, wzorem, tabelką lub wykresem). Przypomnijmy każdy z nich. Zwróć uwagę na przyporządkowania, które nie są funkcjami i przeanalizuj dlaczego.

OPIS FUNKCJI ZA POMOCĄ GRAFU

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Graf		 To nie jest funkcja, ponieważ jednemu elementowi pierwszego zbioru (Idze) przyporządkowano dwa elementy drugiego zbioru (dwa kolory oczu).

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

SŁOWNY OPIS FUNKCJI

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Opis słowny	Każde dziecko ma jedną mamę. Każde państwo ma dokładnie jedną stolicę. Każdej liczbie przyporządkowujemy jej kwadrat. Każdej liczbie można przyporządkować jej połowę.	Każdy człowiek ma jeden samochód. To nie jest funkcja, ponieważ niektóre osoby mogą w ogóle nie mieć samochodu lub mogą mieć więcej niż jeden.

OPIS FUNKCJI ZA POMOCĄ WZORU

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ
Wzór	$f(x)=2x+1$ $y=3x^2-x$ $f(x)=\sqrt{2x+1}$ Zapisy $f(x)=\dots$ lub $y=\dots$ są zapisami równoważnymi.	$y^2=x$ To nie jest funkcja, ponieważ jednemu argumentowi (x) przyporządkowane są dwie wartości $(y \text{ i } -y)$. Np. $(-2)^2=4$ i $2^2=4$

OPIS FUNKCJI ZA POMOCĄ TABELI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ

Tabela

Argumenty x	1	-1	0	2	-2
Wartości $y=f(x)$	4	5	2	1	2

Zapis informuje nas o tym, że poszczególnym argumentom przyporządkowane są następujące wartości:

$f(1)=4$

$f(-1)=5$

$f(0)=2$

$f(2)=1$

$f(-2)=2$

Argumenty x	2	-1	0	2	-2
Wartości $y=f(x)$	4	5	2	1	2

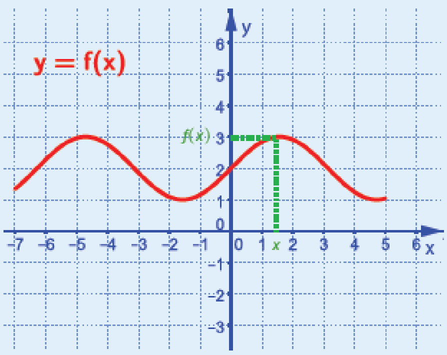
To nie jest funkcja, ponieważ temu samemu argumentowi $(x=2)$ przyporządkowane są dwie wartości $(y=4$ *i* $y=1)$.

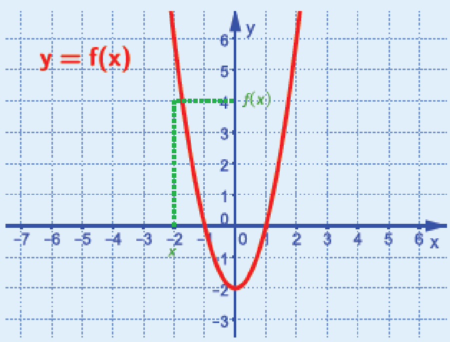
OPIS FUNKCJI ZA POMOCĄ WYKRESU

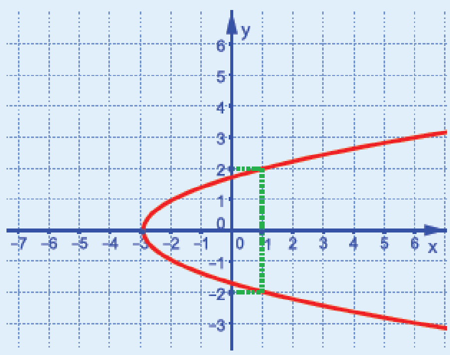
SPOSÓB OPISU FUNKCJI	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE JEST FUNKCJĄ	PRZYKŁAD PRZYPORZĄDKOWANIA, KTÓRE NIE JEST FUNKCJĄ

Wykres

Na osi OX odczytujemy argumenty (x), a na osi OY wartości $f(x)$.







To nie jest funkcja, ponieważ istnieją argumenty (x), którym przyporządkowane są dwie wartości $(y$ i $-y)$.

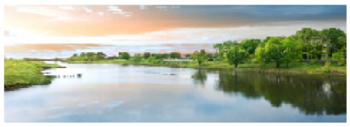
Np. $f(1)=2$ i $f(1)=-2$

Dla utrwalenia wiadomości zrób poniższe zadanie.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

ZADANIE



Na podstawie słownego opisu przyporządkowania określ, czy jest ono funkcją.

Opis słowny przyporządkowania	Przyporządkowanie	
	jest funkcją	nie jest funkcją
Każdej liczbie pierwszej przyporządkowany jest jej dzielnik różny od 1.		
Każdemu wielokątowi wypukłemu przyporządkowana jest liczba jego przekątnych.		
Każdej liczbie naturalnej przyporządkowany jest jej kwadrat.		
Każdej liczbie naturalnej przyporządkowana jest liczba o 10 większa.		
Każdej rzece przyporządkowana jest jej długość.		
Każdemu uczniowi w klasie przyporządkowany jest numer w dzienniku.		
Każdej osobie przyporządkowana jest data urodzenia.		
Każdej mamie przyporządkowane jest jej dziecko.		
Każdemu uczniowi przyporządkowany jest język obcy, którego się uczy.		
Każdemu pracownikowi firmy przyporządkowany jest jego adres e-mail.		

TEST

Na zakończenie zróbmy test.

Moje Testy #30 - Sposoby opisywania funkcji...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

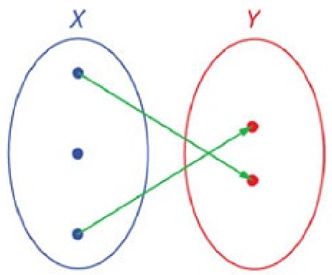
Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

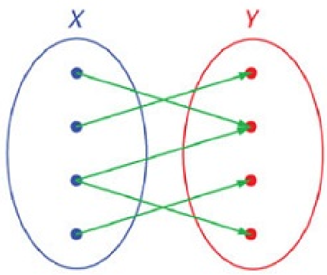
Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

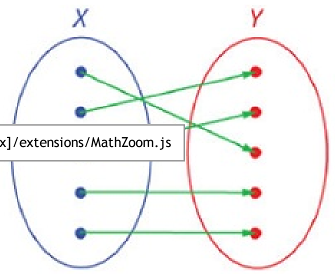
TEST

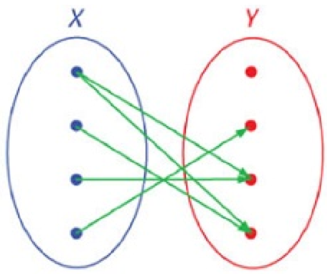
[#30] Sposoby opisywania funkcji

Zadanie 1 (1 pkt.) Graf, który przedstawia funkcję, to:

A.


B.


C.


D.


odpowiedź >>> kratka >>>

A. A **B.** B **C.** C **D.** D

Zadanie 2 (1 pkt.) Dana jest funkcja określona za pomocą tabeli:

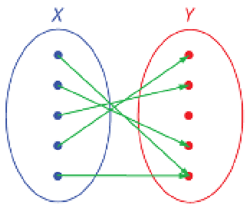
x	-3	-1	1	a	5
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3

Liczba a może być liczbą równą:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 1 **B.** -3 **C.** 5 **D.** 3

Zadanie 3 (1 pkt.) Graf przedstawia pewną funkcję:
Wynika z tego, że dziedzina zawiera:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 4 elementy, **B.** 5 elementów, **C.** 6 elementów, **D.** 8 elementów.

Zadanie 4 (1 pkt.) Zdanie, które jest opisem funkcji, to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. Każdemu człowiekowi przyporządkowany jest rozmiar buta.

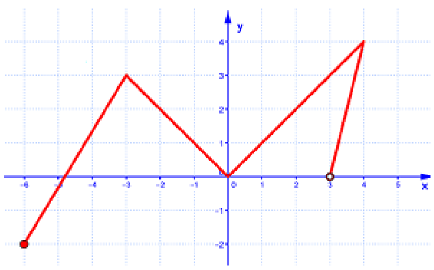
B. Każdemu województwu przyporządkowany jest znajdujący się w nim park narodowy.

C. Każdemu państwu przyporządkowane są kraje z nim sąsiadujące.

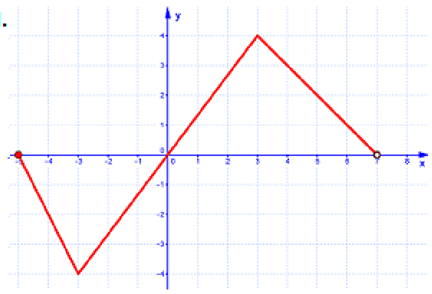
D. Każdemu nauczycielowi przyporządkowana jest klasa, w której uczy.

Zadanie 5 (1 pkt.) Wykresem funkcji jest:

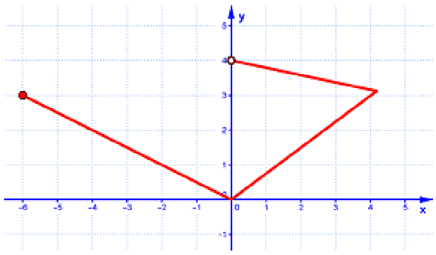
I.



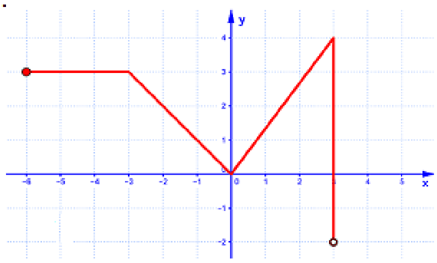
II.



III.



IV.



odpowiedź >>> kratka >>>

A. I **B.** II **C.** III **D.** IV

Zadanie 6 (1 pkt.) Dziedziną funkcji $f(x) = \dfrac{3x^2}{4x-5}$ jest zbiór:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{5\}$

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{1\frac{1}{4}\right\}$

Zadanie 7 (1 pkt.) Funkcję $f(x)$, która każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowuje jej odwrotność podniesioną do kwadratu i pomniejszoną dwa razy można zapisać wzorem:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-2$

B. $f(x)=\left(\frac{1}{2x}\right)^2$

C. $f(x)=\left(\frac{1}{2}-2\right)^2$

D. $f(x)=\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{2}$

Zadanie 8 (2 pkt.) Dana jest funkcja $f(x)=-\frac{3}{2}x+2$, gdzie $x\in\{-6\,;-4\,;0\,;2\,;4\}$. Narysuj graf funkcji f .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (4 pkt.) Narysuj wykres funkcji f , która każdej liczbie ze zbioru $x\in\{4\,;9\,;16\,;36\,;81\}$ przyporządkowuje jej pierwiastek kwadratowy.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

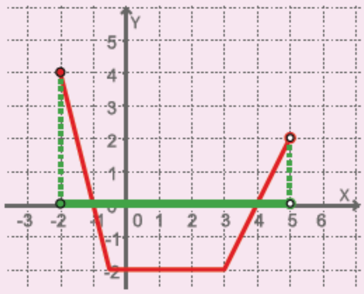
Odczytywanie własności funkcji z wykresu

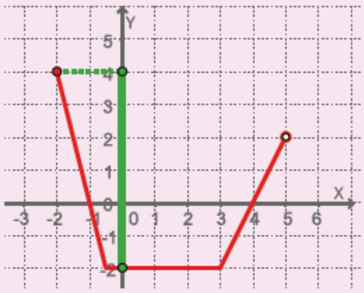
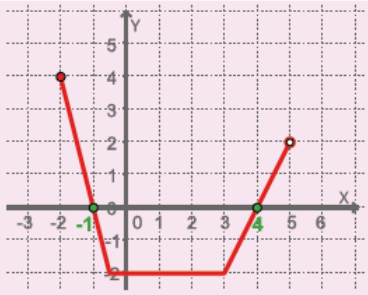
Autor: **Dariusz Kulma**

OGÓLNE WŁASNOŚCI FUNKCJI

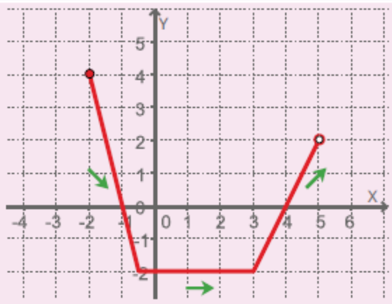
Na początek przypominamy podstawowe własności funkcji, czyli dziedzinę, zbiór wartości, miejsca zerowe, monotoniczność, znak funkcji.

Możesz przeanalizować poniższe grafiki lub przejść do planszy interaktywnej poniżej, w której zwizualizowane są wszystkie własności na konkretnych przykładach.

	ZAPIS SYMBOLICZNY FUNKCJI:	DZIEDZINA FUNKCJI TO:	
OPIS	$y = f(x)$	zbiór X	
PRZYKŁAD	$y = 2x + 3$ lub $f(x) = 2x + 3$		$x \in \langle -2; 5)$

	ZBIÓR WARTOŚCI FUNKCJI TO:		MIEJSCE ZEROWE FUNKCJI TO:	
OPIS	zbiór Y		x_0 to współrzędna x punktu, w którym wykres przecina oś OX.	
PRZYKŁAD		$y \in \langle -2; 4 \rangle$		$x_0 = -1$ i $x_0 = 4$

MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI:

DEFINICJA	W pewnym przedziale zawartym w dziedzinie funkcja jest:	rosnąca	gdy wraz ze wzrostem argumentów $(x_1 < x_2)$	rosną wartości $(f(x_1) < f(x_2))$.
		malejąca		maleją wartości $(f(x_1) > f(x_2))$.
		stała		wartości są stałe $(f(x_1) = f(x_2))$.
PRZYKŁAD				funkcja malejąca $f(x) \searrow \Leftrightarrow x \in \left\langle -2; -\frac{1}{2} \right\rangle$ funkcja stała $f(x)_{\rightarrow} \Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{1}{2}; 3 \right\rangle$ funkcja rosnąca $f(x) \nearrow \Leftrightarrow x \in \langle 3; 5)$

Przejdźmy do planszy i wykonajmy sześć przykładów.

Podstawowe własności funkcji

Rozwiążmy jeszcze nastepujące zadania.

Własności funkcji - zadanie 1

Własności funkcji - zadanie 2

Własności funkcji - zadanie 3

Własności funkcji - zadanie 4

TEST

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Na zakończenie rozwiąż zadania z testu.

Moje Testy #31 - Odczytywanie własności funkcji z wykresu...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

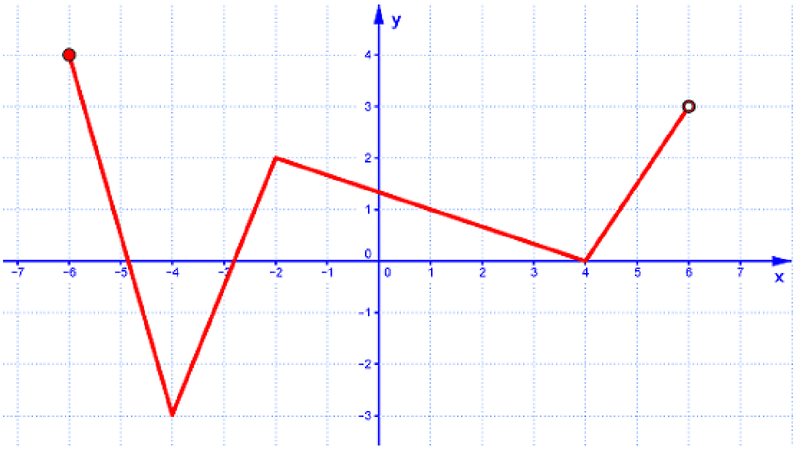
Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#31] Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Zadanie 1 (1 pkt.) Dziedziną funkcji f przedstawionej na rysunku poniżej jest przedział:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(-3;\ 3)$

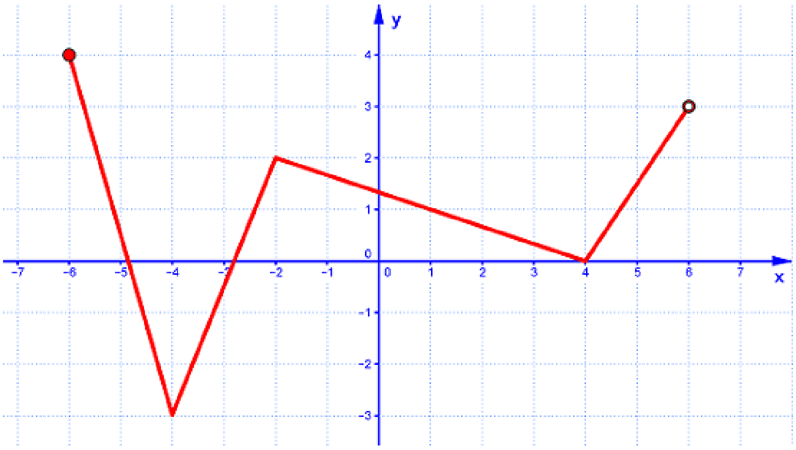
B. $(-5;\ 8)$

C. $\langle -3;\ 4)$

D. $\langle -6;\ 6)$

Zadanie 2 (1 pkt.) Zbiorem wartości funkcji f przedstawionej na rysunku poniżej jest przedział:

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



odpowiedź >>> kratka >>>

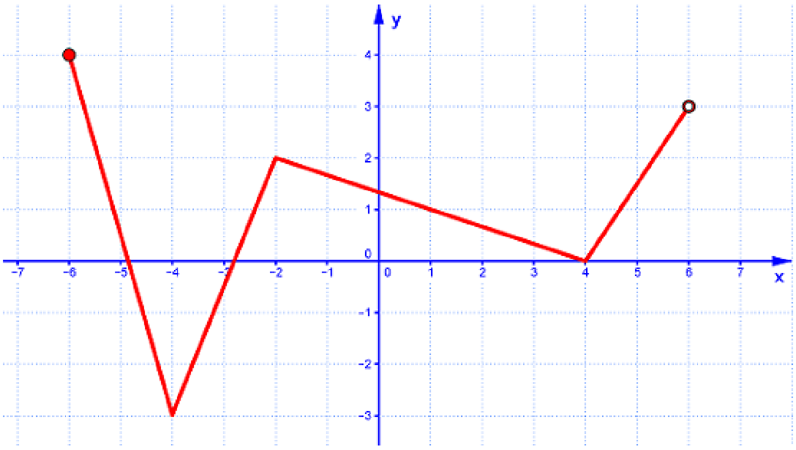
A. $\langle -3;\ 6)$

B. $\langle -3;\ 4\rangle$

C. $\langle -6;\ 6)$

D. $(-3;\ 4\rangle$

Zadanie 3 (1 pkt.) Na podstawie wykresu funkcji f można stwierdzić, że:



odpowiedź >>> kratka >>>

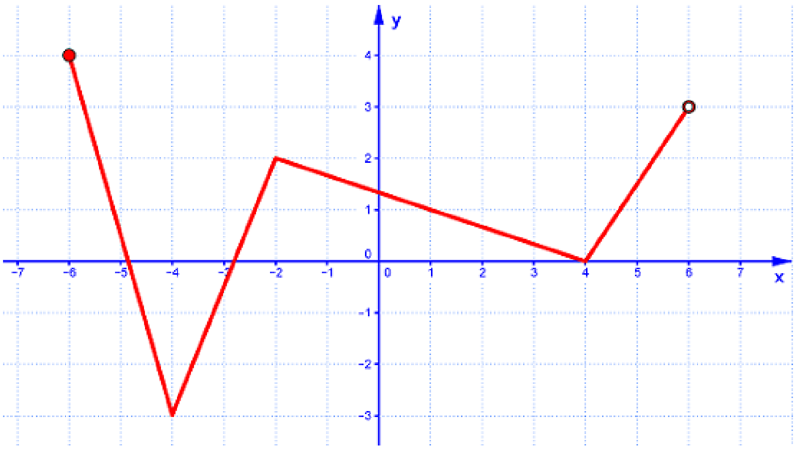
A. $f(-2) > f(4)$

B. $f(-5) < f(4)$

C. $f(2) < f(4)$

D. $f(-2) < f(0)$

Zadanie 4 (1 pkt.) Funkcja f przedstawiona na rysunku poniżej w przedziale $\langle 0;\ 6)$ jest:



odpowiedź >>> kratka >>>

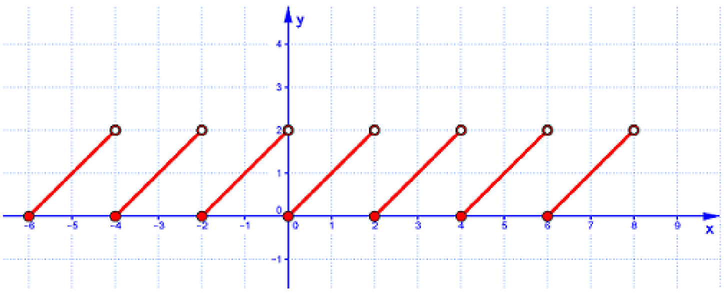
A. rosnąca

B. malejąca

C. stała

D. niemonotoniczna

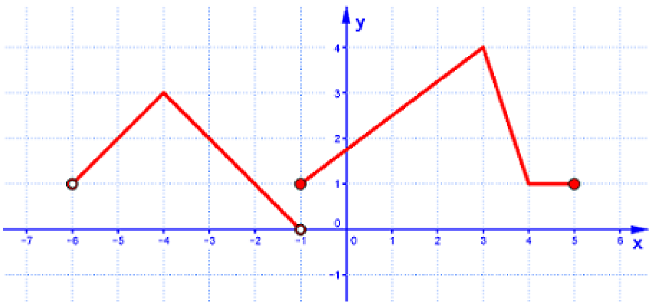
Zadanie 5 (1 pkt.) Na podstawie poniższego wykresu funkcji można stwierdzić, że wartość funkcji, której argumenty nigdy nie osiągają, to:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 0 **B.** 1 **C.** $1\frac{1}{2}$ **D.** 2

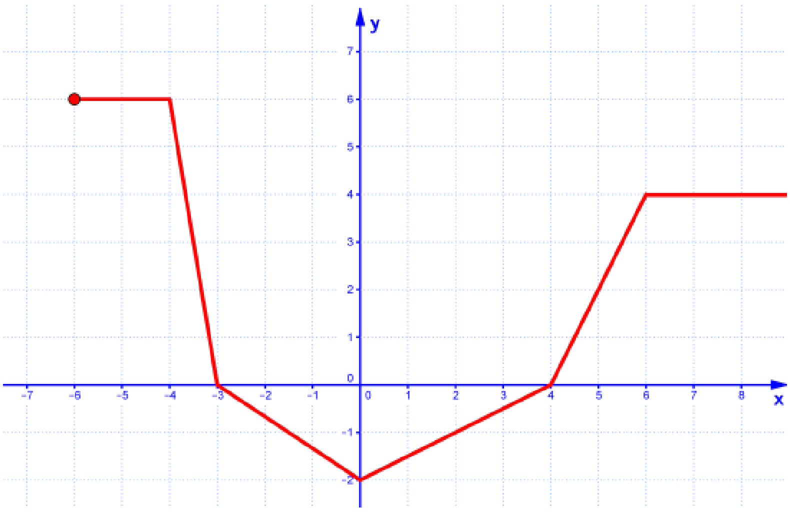
Zadanie 6 (1 pkt.) Największą wartość funkcja f przedstawiona na rysunku poniżej osiąga dla argumentu:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. -4 **B.** 3 **C.** 5 **D.** -6

Zadanie 7 (1 pkt.) Funkcja f , przedstawiona na rysunku poniżej, jest malejąca w przedziale:

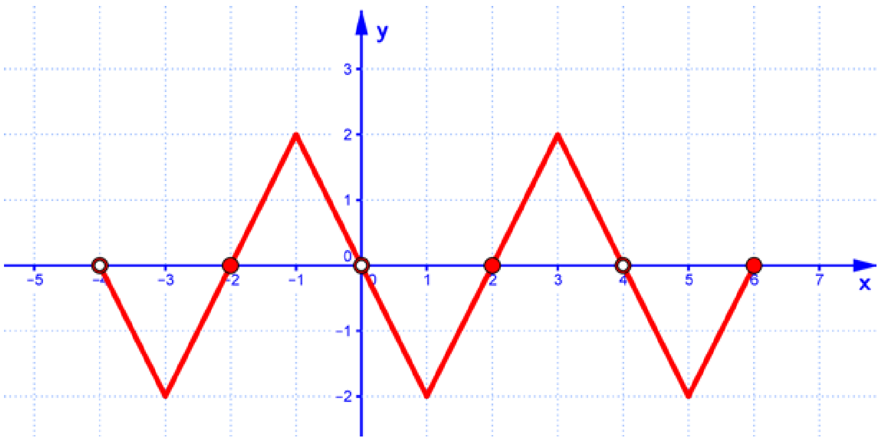


odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x \in \langle -4;\ 0\rangle$ **B.** $x \in \langle -6;\ 0\rangle$

C. $x \in \langle -4; -3\rangle$ **D.** $x \in \langle 0;\ \infty)$

Zadanie 8 (1 pkt.) Dziedziną funkcji f przedstawionej na rysunku poniżej jest przedział:



odpowiedź >>> kratka >>>

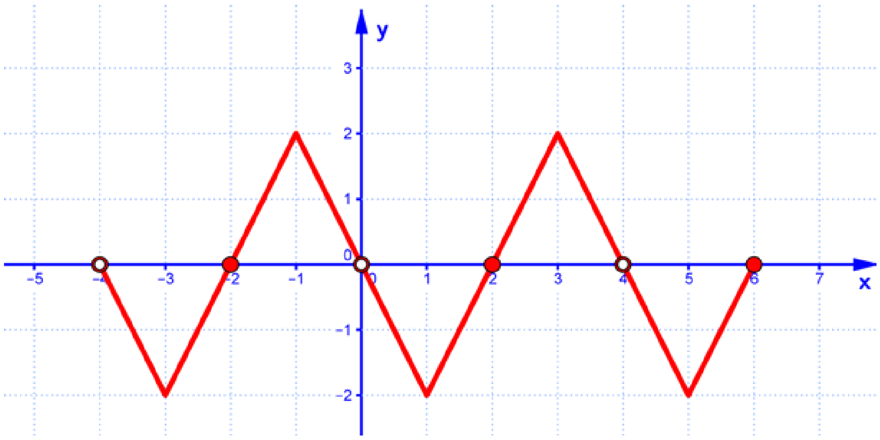
A. $(-4;\ 6\rangle \setminus \{0;\ 4\}$

B. $\langle -4;\ 6\rangle$

C. $(-4;\ 6) \setminus \{0;\ 4\}$

D. $(-4;\ 6\rangle$

Zadanie 9 (1 pkt.) Funkcja f przedstawiona na rysunku poniżej posiada:



odpowiedź >>> kratka >>>

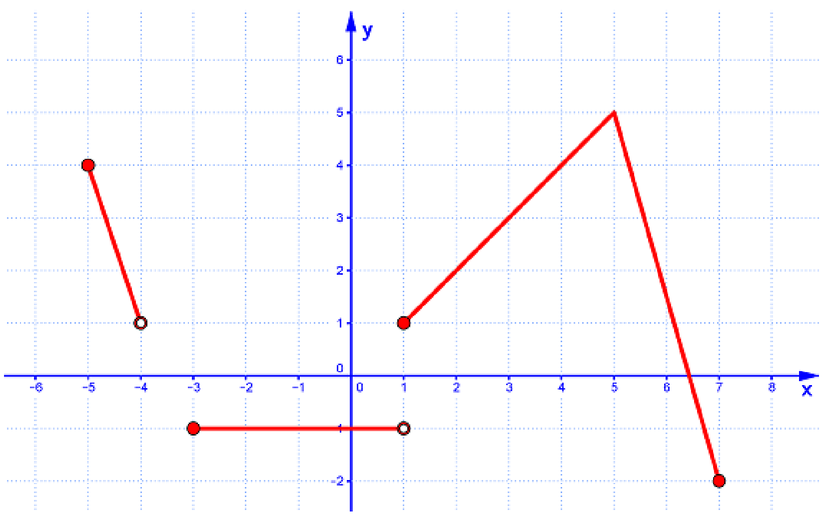
A. cztery miejsca zerowe,

B. trzy miejsca zerowe,

C. siedem miejsc zerowych

D. nieskończenie wiele miejsc zerowych.

Zadanie 10 (1 pkt.) Dziedziną funkcji f przedstawionej na rysunku poniżej jest suma przedziałów:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\langle -5; -4) \cup \langle -3;\ 7\rangle$

B. $\langle -5;\ 1) \cup (1;\ 7\rangle$

C. $\langle -3; -1) \cup (1;\ 5\rangle$

D. $(-5; -4\rangle \cup (-3;\ 7)$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą: -- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Przekształcenia wykresu funkcji

Autor: **Dariusz Kulma**

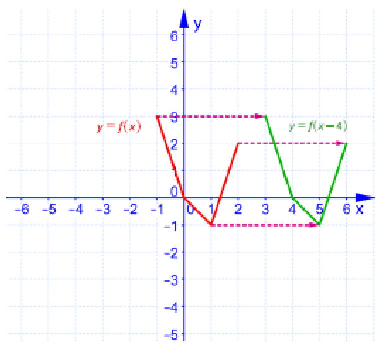
Omawiając temat przekształceń wykresu funkcji, możemy mówić o przekształceniach równoległych wzdłuż osi OX lub osi OY oraz o symetrii względem osi OX lub osi OY.

PRZESUNIĘCIA RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ POSZCZEGÓLNYCH OSI

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OX: $y = f(x+p)$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OX.

PRZYKŁAD 1

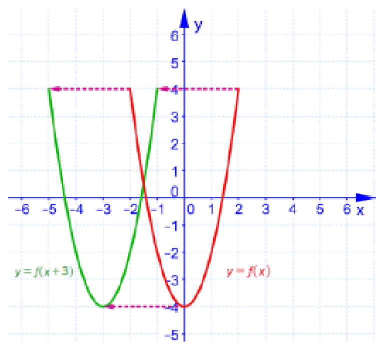


Wykres został przesunięty o 4 jednostki w prawo.

$p = -4$

Jeśli $p < 0$, to przesuwamy w prawo.

PRZYKŁAD 2



Wykres został przesunięty o 3 jednostki w lewo.

$p = 3$

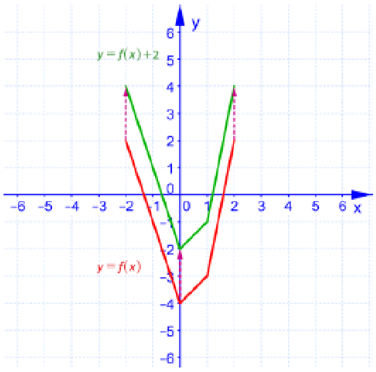
Jeśli $p > 0$, to przesuwamy w lewo.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PRZESUNIĘCIE RÓWNOLEGŁE WZDŁUŻ OSI OY: $y = f(x) + q$

Wykres funkcji należy przesunąć równolegle wzdłuż osi OY.

PRZYKŁAD 3

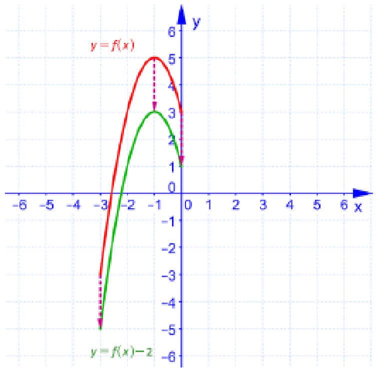


Wykres został przesunięty o 2 jednostki w górę.

$q = 2$

Jeśli $q > 0$, to przesuwamy w górę.

PRZYKŁAD 4



Wykres został przesunięty o 2 jednostki w dół.

$q = -2$

Jeśli $q < 0$, to przesuwamy w dół.

Przesunięcie równoległe funkcji - wstęp 1

Wykonajmy dwa zadania dotyczące przekształceń wzdłuż osi.

Przesunięcie równoległe funkcji - zadanie z przykładami

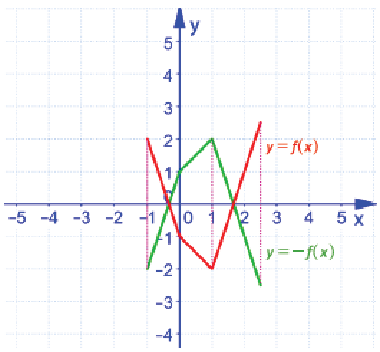
Przesunięcie równoległe funkcji - zadanie z przykładami 2

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM POSZCZEGÓLNYCH OSI

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI OX: $y = -f(x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OX.

PRZYKŁAD

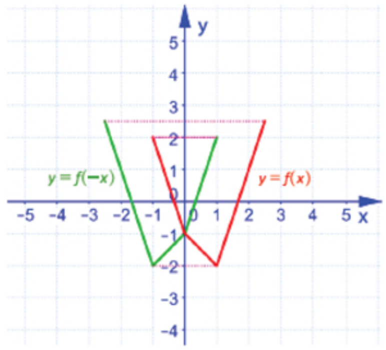


Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI OY:
$y = f(-x)$

Wykres należy odbić symetrycznie względem osi OY.

PRZYKŁAD



Przekształcenia wykresu funkcji względem osi układu współrzędnych

Wykonajmy dwa zadania dotyczące przekształceń symetrycznych względem osi.

Przekształcenia wykresu funkcji względem osi OX - zadanie z przykładami

Przekształcenia wykresu funkcji względem osi OY - zadanie z przykładami

TEST

Na zakończenie zróbmy test dla utrwalenia wiadomości.

Moje Testy #32 - Przekształcenia wykresu funkcji...

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

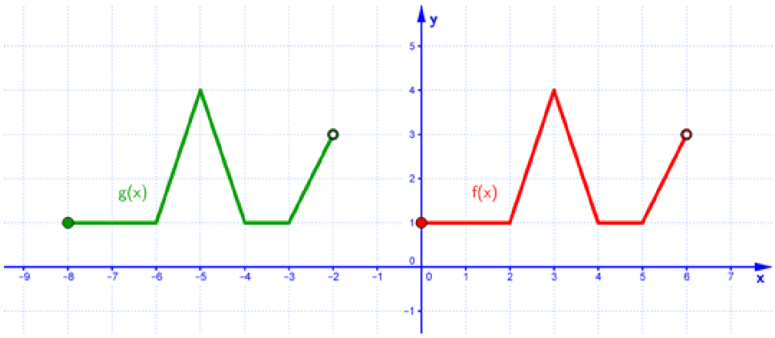
[#32] Przekształcenia wykresu funkcji

Zadanie 1 (1 pkt.) Funkcję $f(x) = x - 2$ przekształcono w symetrii względem osi OX . Otrzymano funkcję $g(x)$, której wzór ma postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $g(x) = x - 2$ **B.** $g(x) = 2 - x$ **C.** $g(x) = -x - 2$ **D.** $g(x) = x + 2$

Zadanie 2 (1 pkt.) Wykres funkcji $f(x)$ przesunięto i otrzymano wykres funkcji $g(x)$, której wzór ma postać:



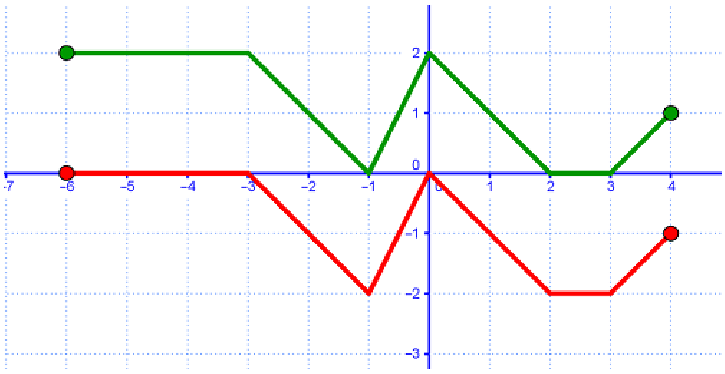
odpowiedź >>> kratka >>>

A. $g(x) = f(x) + 8$ **B.** $g(x) = f(x + 8)$ **C.** $g(x) = f(x - 8)$ **D.** $g(x) = f(x) - 8$

Zadanie 3 (1 pkt.) Wykres funkcji $f(x)$ przekształcono i otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wynika z tego, że:

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY



odpowiedź >>> kratka >>>

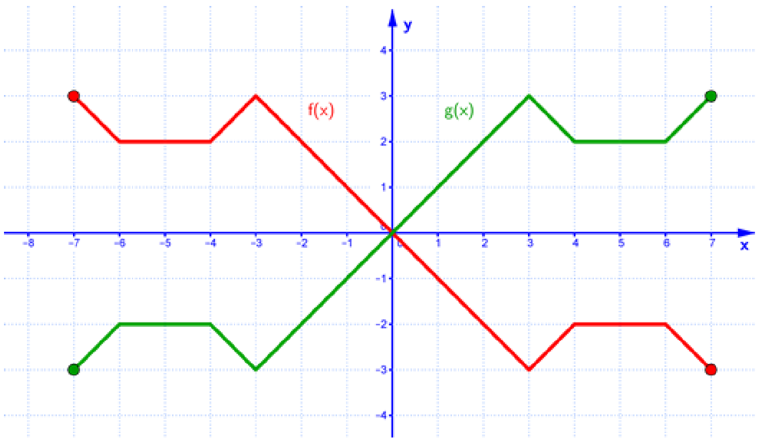
A. $g(x) = f(x) + 2$ **B.** $g(x) = f(x) - 2$ **C.** $g(x) = -f(x-2)$ **D.** $g(x) = -f(x+2)$

Zadanie 4 (1 pkt.) Jeśli wykres funkcji $y = f(x)$ zostanie najpierw przesunięty o 7 jednostek w dół, a potem o 4 jednostki w prawo, to funkcja po przesunięciu będzie miała postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y = f(x+4) + 7$ **B.** $y = f(x-4) - 7$ **C.** $y = f(x+4) - 7$ **D.** $y = f(x-4) + 7$

Zadanie 5 (1 pkt.) Wykres funkcji $f(x)$ przekształcono i otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wynika z tego, że:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $g(x) = -f(-x)$ **B.** $g(x) = f(-x)$ **C.** $g(x) = -f(x)$ **D.** $g(x) = f(x-1)$

Zadanie 6 (1 pkt.) Wykres funkcji $f(-x)$ został przekształcony w symetrii względem osi OX . Funkcja $g(x)$, która powstała w wyniku tego przekształcenia ma postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $g(x) = -f(-x)$ **B.** $g(x) = -f(x)$ **C.** $g(x) = f(x)$ **D.** $g(x) = f(-x) + 1$

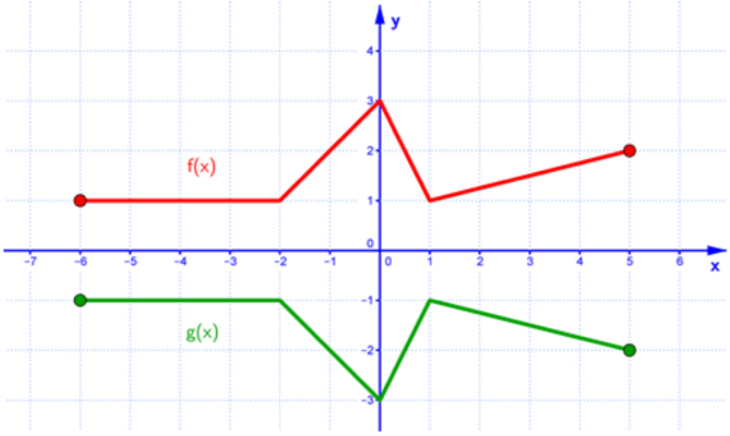
Zadanie 7 (1 pkt.) Wykres funkcji $f(x)$, której największa wartość wynosi 6 , a najmniejsza -6 , przekształcono w symetrii względem osi OY i otrzymano wykres funkcji $g(x)$. Wynika z tego, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. najmniejsza wartość funkcji $g(x)$ wynosi 6 , **B.** największa wartość funkcji $g(x)$ wynosi -6 ,

C. najmniejsza wartość funkcji $g(x)$ wynosi -6 , **D.** największa wartość funkcji $g(x)$ wynosi 0 ,

Zadanie 8 (1 pkt.) Wykres funkcji $g(x)$ otrzymano w wyniku przekształcenia funkcji $f(x)$ względem:

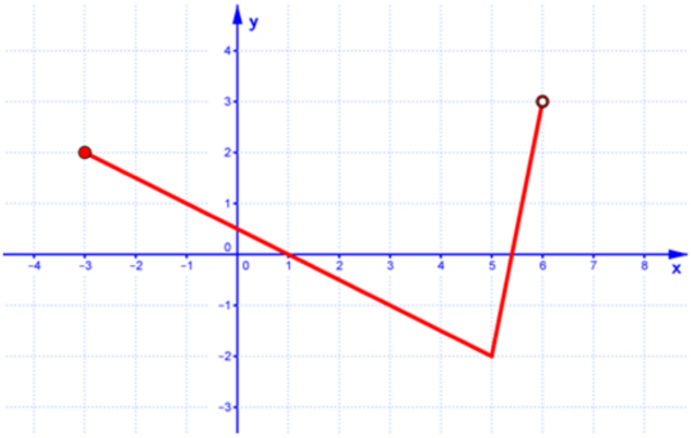


odpowiedź >>> kratka >>>

A. prostej $y = 2x$, **B.** osi OX , **C.** osi OY , **D.** punktu $(0;\ 0)$.

Zadanie 9 (2 pkt.) Wykres funkcji f , który znajduje się poniżej, przesuń o 3 jednostki w prawo, a następnie o 2 jednostki w górę i podaj wzór funkcji po przesunięciu.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 10 (2 pkt.) Miejscem zerowym pewnej funkcji jest $\sqrt{3}$. Znajdź miejsce zerowe funkcji g , jeśli $g(x) = f(-x)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

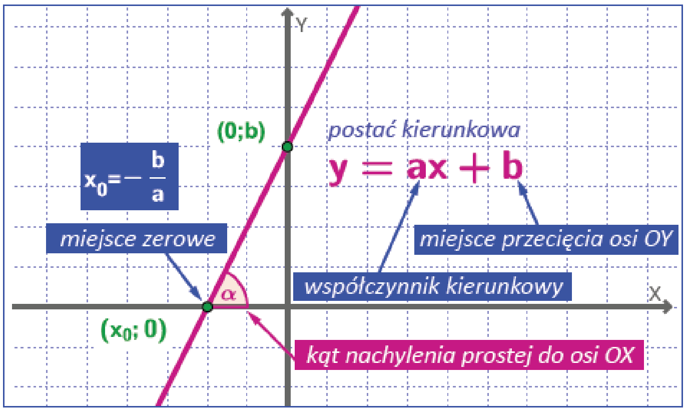
Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Funkcja liniowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Na początek szybkie powtórzenie najważniejszych zagadnień dotyczących funkcji liniowej. Należy zwrócić szczególną uwagę na współczynniki a i b występujące we wzorze funkcji.



NAJWAŻNIEJSZE POSTACI FUNKCJI LINIOWEJ	postać **kierunkowa**	$y = ax + b$
	postać **ogólna**	$Ax + By + C = 0$, współczynniki A i B nie są jednocześnie zerami
WŁASNOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKA KIERUNKOWEGO a	$a = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie kąt α oznacza kąt między wykresem funkcji a osią OX	
MONOTONICZNOŚĆ FUNKCJI LINIOWEJ zależy od współczynnika kierunkowego a	$a > 0$	funkcja jest rosnąca
	$a = 0$	funkcja jest stała
	$a < 0$	funkcja jest malejąca
PUNKTY PRZECIĘCIA WYKRESU FUNKCJI LINIOWEJ Z OSIAMI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH	współczynnik b	miejsce przecięcia osi OY w punkcie $(0; b)$
	miejsce zerowe	• dokładnie jedno miejsce zerowe, gdy $a \neq 0$ (jego postać: $x_0 = -\frac{b}{a}$) • nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = b = 0$ • brak miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$

SZKICOWANIE WYKRESU FUNKCJI LINIOWEJ

Aby narysować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa różne punkty należące do wykresu i przeprowadzić przez nie prostą. W szczególności można znaleźć przecięcia z osiami układu współrzędnych: z osią OX (miejsce zerowe) oraz z osią OY.

Jak narysować funkcję liniową

Jak szybko narysować funkcję liniową

Mając dany wykres funkcji liniowej, możemy również, wyznaczając punkty przecięcia z osiami OX i OY, odczytać wzór danej funkcji. Przypomnijmy, jak to zrobić.

Znajdowanie wzoru funkcji liniowej na podstawie wykresu

WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ

Ze wzoru funkcji liniowej również możemy odczytywać jej własności, podobnie jak w przypadku dowolnej funkcji.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Wykonajmy teraz dwa zadania związane ze współczynnikami funkcji liniowej.

Uzupełnij tabelę, określając monotoniczność funkcji.

Wzór funkcji	Funkcja jest:			Wzór funkcji	Funkcja jest:		
	rosnąca	malejąca	stała		rosnąca	malejąca	stała
$y=3x-1$				$y=-2$			
$y=-2x+5$				$y=-10-x$			
$y=x-3$				$y=3-\frac{x}{2}$			

Zaznacz w tabeli, przez które ćwiartki przechodzi funkcja liniowa o podanym wzorze.

Wzór funkcji	Funkcja przechodzi przez ćwiartkę:				Wzór funkcji	Funkcja przechodzi przez ćwiartkę:			
	I	II	III	IV		I	II	III	IV
$y=4x$					$y=-3x+1$				
$y=2x-1$					$y=x+3$				
$y=-x-1$					$y=\pi$				
$y=6$					$y=4x+2$				

PROSTE PROSTOPADŁE I RÓWNOLEGŁE

Należy zwrócić uwagę na współczynniki kierunkowe we wzorach prostych, które są równoległe lub prostopadłe.

PROSTE PROSTOPADŁE I RÓWNOLEGŁE

Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y = a_1 x + b_1$ oraz $l: y = a_2 x + b_2$, to:

Prosta k jest **równoległa** do l $(k \parallel l)$, jeśli $a_1 = a_2$, czyli oba współczynniki kierunkowe są takie same.	np.: $y = 2x + 3$ oraz $y = 2x - 7$ są równoległe
Prosta k jest **prostopadła** do l $(k \perp l)$, jeśli $a_2 = -\frac{1}{a_1}$, $a_1 \neq 0$, czyli jeden współczynnik jest odwrotnością drugiego z przeciwnym znakiem. Jeśli funkcja liniowa jest stała (tzn. $y = b$), to prosta prostopadła nie jest już funkcją liniową, lecz prostą o równaniu $x = c$.	np.: $y = 3x - 3$ oraz $y = -\frac{1}{3}x + 4$ są prostopadłe, ponieważ odwrotnością 3 z przeciwnym znakiem jest $-\frac{1}{3}$

Prosta równoległa do danej przechodząca przez wybrany punkt

Prosta prostopadła do danej przechodząca przez wybrany punkt

TEST

Zróbmy test podsumowujący wiadomości o funkcji liniowej.

Moje Testy #33 - Funkcja liniowa...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

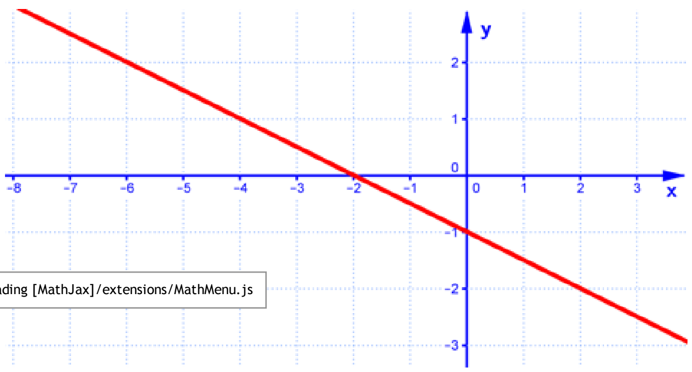
Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#33] Funkcja liniowa

Zadanie 1 (1 pkt.) Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji liniowej $y = ax + b$. Wynika z tego, że:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a < 0$ i $b < 0$ **B.** $a > 0$ i $b < 0$ **C.** $a < 0$ i $b > 0$ **D.** $a > 0$ i $b > 0$

Zadanie 2 (1 pkt.) Funkcja liniowa $y = -3x - 2$:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0;\ 2)$,

B. jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0; -2)$,

C. jest rosnąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0; -2)$,

D. jest malejąca i jej wykres przechodzi przez punkt $(0;\ 2)$.

Zadanie 3 (1 pkt.) Miejscem zerowym funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = -\sqrt{2}x + \sqrt{8}$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

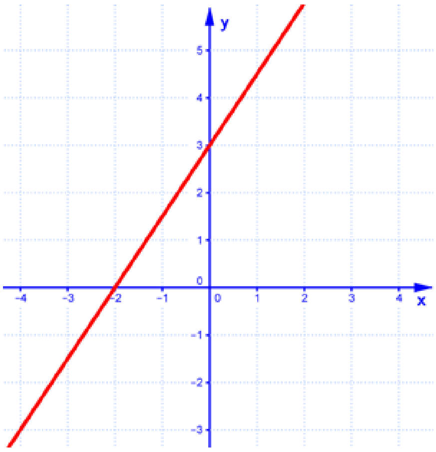
A. 2 **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $-2\sqrt{2}$ **D.** 4

Zadanie 4 (1 pkt.) Jeśli prosta o równaniu $y = -2x + k + 3$ przecina w układzie współrzędnych oś OY w punkcie $(0;\ 4)$, to wartość k wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $k = 1$ **B.** $k = 3$ **C.** $k = -\frac{4}{3}$ **D.** $k = \frac{4}{3}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Wzór funkcji liniowej przedstawionej na rysunku ma postać:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y = 3x - 2$ **B.** $y = -2x + 3$ **C.** $y = 1\frac{1}{2}x - 3$ **D.** $y = 1\frac{1}{2}x + 3$

Zadanie 6 (1 pkt.) Miejscem zerowym funkcji liniowej jest -8 , a współczynnik kierunkowy ma wartość $\frac{1}{2}$. Wynika z tego, że wzór funkcji ma postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y = \frac{1}{2}x - 8$ **B.** $y = -8x + \frac{1}{2}$ **C.** $y = \frac{1}{2}x - 4$ **D.** $y = \frac{1}{2}x + 4$

Zadanie 7 (1 pkt.) Funkcja $y = (8 + m^3)x + 2$ jest stała, jeśli:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = \sqrt{8}$ **D.** $m = 0$

Zadanie 8 (1 pkt.) Funkcja $y = 3x + 9$ jest ujemna, jeśli:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x \in (-\infty\, ; 3)$ **B.** $x \in (3\, ; \infty)$ **C.** $x \in (-\infty\, ; -3)$ **D.** $x \in (-3\, ; \infty)$

Zadanie 9 (1 pkt.) Funkcja $y = (27 - m^3)x + \sqrt{2}$ jest malejąca, jeśli:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $m = -3$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 2$ **D.** $m = 27$

Zadanie 10 (1 pkt.) Funkcja $y = 5x - 4$ jest dodatnia, jeśli:

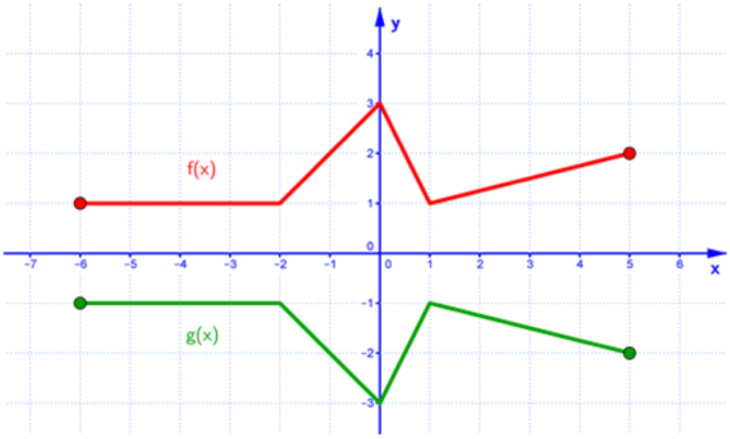
odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x \in \left(\frac{5}{4}\, ; \infty\right)$ **B.** $x \in (5;\ \infty)$

C. $x \in (-\infty;\ -4)$ **D.** $x \in \left(\frac{4}{5}\, ; \infty\right)$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

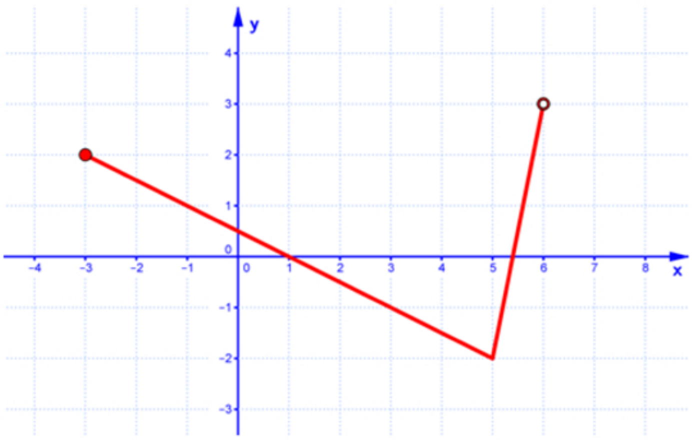


odpowiedź >>> kratka >>>

A. prostej $y = 2x$, **B.** osi OX , **C.** osi OY , **D.** punktu $(0;\ 0)$.

Zadanie 9 (2 pkt.) Wykres funkcji f , który znajduje się poniżej, przesuń o 3 jednostki w prawo, a następnie o 2 jednostki w górę i podaj wzór funkcji po przesunięciu.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 10 (2 pkt.) Miejscem zerowym pewnej funkcji jest $\sqrt{3}$. Znajdź miejsce zerowe funkcji g , jeśli $g(x) = f(-x)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Funkcja kwadratowa

Autor: **Dariusz Kulma**

Na początek powtórzmy najważniejsze zagadnienia dotyczące funkcji kwadratowej.

TRZY POSTACI FUNKCJI KWADRATOWEJ	postać **ogólna**	$f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$
	postać **kanoniczna**	$f(x)=a(x-p)^2+q$, gdzie $a\neq 0$ i (p,q) to współrzędne wierzchołka paraboli
	postać **iloczynowa**	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie $a\neq 0$ i x_1, x_2 są miejscami zerowymi funkcji (pierwiastkami)
MIEJSCA ZEROWE FUNKCJI KWADRATOWEJ Liczba rozwiązań (pierwiastków), inaczej: miejsc zerowych, zależy od delty. Jeżeli:	$\Delta>0$	**parabola** ma dwa różne miejsca zerowe
	$\Delta=0$	**parabola** ma jedno miejsce zerowe (podwójny pierwiastek)
	$\Delta<0$	**parabola** nie ma miejsc zerowych

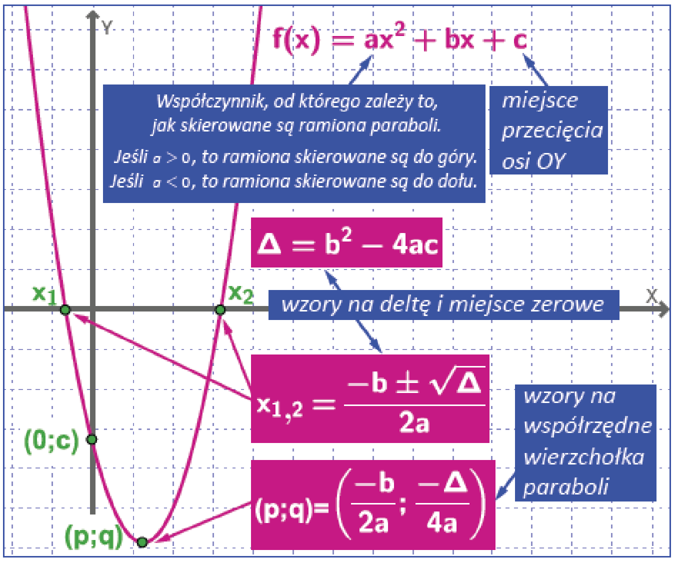
Loading [MathJax]/extensions/MathZoom.js

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

WYKRES FUNKCJI KWADRATOWEJ

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Funkcja ma oś symetrii w punkcie $x = p$.

W celu narysowania paraboli potrzebujemy następujących punktów (patrz rysunek obok): miejsca zerowe (pod warunkiem, że istnieją), wierzchołek paraboli oraz współrzędne przecięcia osi.



ZAMIANA POSTACI OGÓLNEJ FUNKCJI KWADRATOWEJ NA POSTAĆ ILOCZYNOWĄ LUB KANONICZNĄ

Przypomnijmy, w jaki sposób zamieniamy postać ogólną funkcji kwadratowej na postać iloczynową lub kanoniczną. Wykorzystamy dwie plansze poniżej, rozwiązując kolejne przykłady.

Zamiana postaci ogólnej funkcji kwadratowej na postać iloczynową

Zamiana postaci ogólnej funkcji kwadratowej na postać kanoniczną

SZKICOWANIE WYKRESU FUNKCJI KWADRATOWEJ

Przypomnijmy, jak rysujemy parabolę, czyli wykres funkcji kwadratowej.

Szkicowanie wykresu funkcji kwadratowej

WŁASNOŚCI FUNKCJI KWADRATOWEJ

Przy określaniu własności funkcji kwadratowej wykorzystamy wiadomości dotyczące odczytywania własności dowolnej funkcji z wykresu funkcji.

Własności funkcji kwadratowej na podstawie wykresu - przykłady

TEST

Moje Testy #34 - Funkcja kwadratowa...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#34] Funkcja kwadratowa

Zadanie 1 (1 pkt.) Wierzchołek funkcji $f(x) = 3x^2 + 2$ ma współrzędne:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(0;\ 2)$ B. $(-2;\ 0)$ C. $(1;\ 2)$ D. $(0;\ -2)$

Zadanie 2 (1 pkt.) Jeżeli funkcję $y = -6x^2$ przesunięto o 4 w prawo, to jej wzór będzie miał postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y = -6(x-4)^2$ B. $y = 6(x-4)^2$ C. $y = -6x^3 + 4$ D. $y = -6(x+4)^2$

Zadanie 3 (1 pkt.) Funkcja $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$ przecina oś OY w punkcie $(0;\ -1)$. Wynika z tego, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $c = 2$ B. $c = -1$ C. $c = -\frac{1}{2}$ D. $c = 1$

Zadanie 4 (1 pkt.) Osią symetrii paraboli o wzorze $y = x^2 + 2x - 3$ jest prosta:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x = 0$ B. $x = 1$ C. $x = 2$ D. $x = -1$

Zadanie 5 (1 pkt.) Dana jest funkcja $f(x) = (x-3)^2 + 2$. Prawdą jest, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $f(3) > f(2)$ B. $f(1) < f(4)$ C. $f(0) = f(6)$ D. $f(5) < f(2)$

Zadanie 6 (1 pkt.) Zbiór wartości funkcji $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$ określony jest przedziałem:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(-\infty;\ 4\rangle$ B. $\langle 4;\ \infty)$ C. $(-\infty;\ -4\rangle$ D. $\langle -4;\ \infty)$

Zadanie 7 (1 pkt.) Miejscami zerowymi funkcji $f(x) = x^2 - 4x - 5$ są:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x_1 = 5,\ x_2 = 1$ B. $x_1 = 1,\ x_2 = -5$ C. $x_1 = -4,\ x_2 = 1$ D. $x_1 = -1,\ x_2 = 5$

Zadanie 8 (1 pkt.) Dana jest funkcja $f(x) = (x-1)^2 - 3$. Funkcja jest malejąca w przedziale:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x \in \langle 1;\ \infty)$ B. $x \in (3;\ \infty)$ C. $x \in (-\infty;\ 1\rangle$ D. $x \in (-\infty;\ -1)$

Zadanie 9 (1 pkt.) Zbiór wartości funkcji $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - 2$ określony jest przedziałem:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\langle -2; \infty)$ B. $(-\infty;\ 2\rangle$ C. $(-\infty; -2\rangle$ D. $\langle 2; \infty)$

Zadanie 10 (1 pkt.) Dana jest funkcja $f(x) = (x-2)^2 - 4$. Funkcja jest malejąca w przedziale:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x \in (-\infty; -2\rangle$ B. $x \in (-\infty; 2\rangle$ C. $x \in \langle 2; \infty)$ D. $x \in \langle -2; \infty)$

Zadanie 11 (2 pkt.) Zapisz wzór funkcji $f(x) = 4x^2 - 6x - 4$ w postaci iloczynowej.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 12 (2 pkt.) Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = (x+1)^2 + 1$ oraz określ:

a. miejsca zerowe, o ile istnieją,

b. zbiór wartości funkcji.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Funkcja wykładnicza

Autor: **Dariusz Kulma**

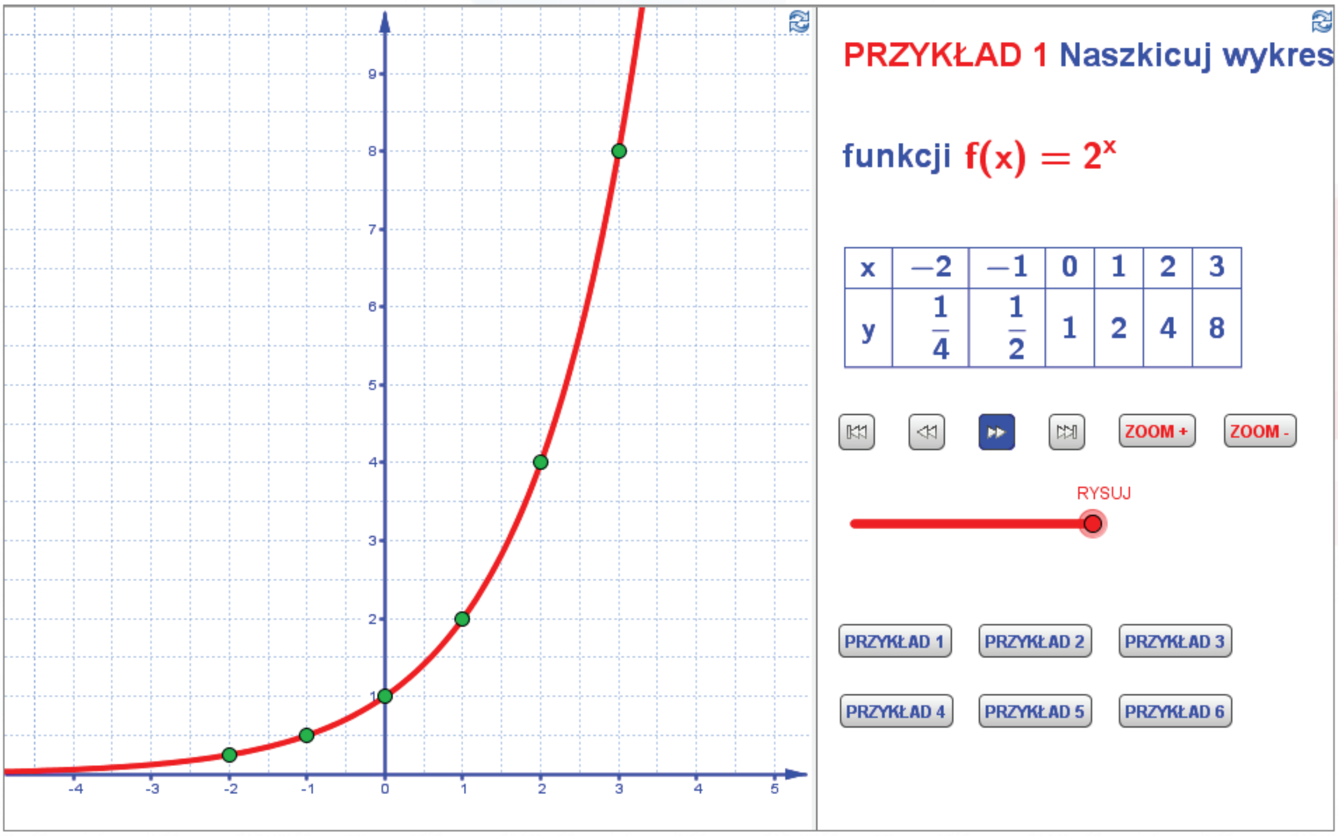
DEFINICJA

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci $f(x)=a^x$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą dodatnią ($a>0$ i $a\neq 1$), a litera x oznacza argument. Dziedziną funkcji wykładniczej jest zbiór liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$.

Wykresem funkcji jest krzywa wykładnicza.

Wykorzystując poniższą planszę, naszkicujmy kilka przykładowych wykresów funkcji wykładniczej.

Szkicowanie funkcji wykładniczej - przykłady

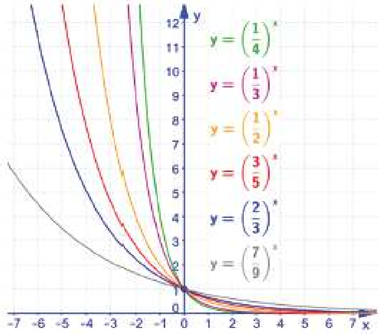
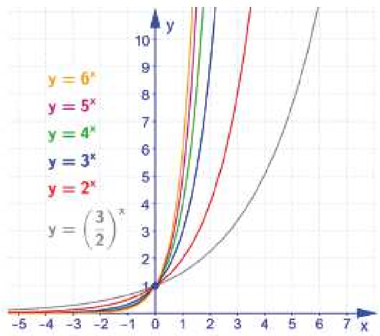


Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 30 Październik 2014, Utworzony z GeoGebra

Zauważmy, że w zależności od "a" krzywa wykładnicza jest inaczej położona i wykres ten ma inne własności, które możemy uogólnić na wszystkie przypadki - **gdy "a" przyjmuje wartości od 0 do 1 lub gdy "a" przyjmuje wartości od 1 do nieskończoności.**

Wykorzystajmy do tego planszę poniżej.

Funkcja wykładnicza

<table>
<tr><td>Wykres</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Współczynnik a</td><td>$y=a^x, a\in(0;1)$</td><td>$y=a^x, a\in(1;\infty)$</td></tr>
<tr><td>Dziedzina</td><td colspan="2">$D=\mathbf{R}$</td></tr>
<tr><td>Zbiór wartości</td><td colspan="2">$ZW=(0;\infty)$</td></tr>
<tr><td>Przedziały monotoniczności</td><td>Funkcja jest malejąca.</td><td>Funkcja jest rosnąca.</td></tr>
<tr><td>Przecięcie z osią OY</td><td colspan="2">Każda krzywa wykładnicza przecina oś OY w punkcie $(0;1)$, ponieważ $f(0)=a^0=1$ dla $a>0$.</td></tr>
<tr><td>Miejsca zerowe</td><td colspan="2">Brak</td></tr>
<tr><td>Asymptota pozioma</td><td colspan="2">oś OX</td></tr>
</table>

PRAKTYCZNE WYKORZYSTANIE FUNKCJI WYKŁADNICZEJ

Do rozwiązania poniższego przykładu wykorzystamy planszę interaktywną.

PRZYKŁAD 1

Pan Grzegorz zamierza ulokować oszczędności w funduszu inwestycyjnym, który będzie przynosił mu 5% zysku rocznie. Zyski co roku będą kapitalizowane. Na wykresie przedstawiono wysokość kapitału w zależności od czasu inwestycji.

a. Zapisz wzór funkcji przedstawiającej zmianę kapitału K w czasie t lat.

b. Oblicz kwotę, jaka zgromadzi się w funduszu po 10 latach od zainwestowania 50 000 złotych.

c. Oblicz, po ilu latach zainwestowany kapitał się podwoi.

d. Jaką kwotę musi zainwestować pan Grzegorz, aby po 3 latach odebrać 92 610 zł?

e. Oblicz, jaki zysk można by otrzymać po 5 latach, inwestując 40 000 zł, gdyby oprocentowanie wzrosło dwukrotnie.

Funkcja wykładnicza - zadanie praktyczne 1

TEST

Moje Testy #67 - Funkcja wykładnicza...

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy

« POWRÓT

TEST

[#67] Funkcja wykładnicza

Zadanie 1 (1 pkt.) Funkcja wykładnicza przechodząca przez punkt $(2;\ 25)$ ma postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $f(x) = -5^x$ **B.** $f(x) = -4^x$ **C.** $f(x) = 5^x$ **D.** $f(x) = 2^x$

Zadanie 2 (1 pkt.) Funkcje $f(x) = 2^x$ i $g(x) = -2^x$ są:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. jednocześnie malejące,

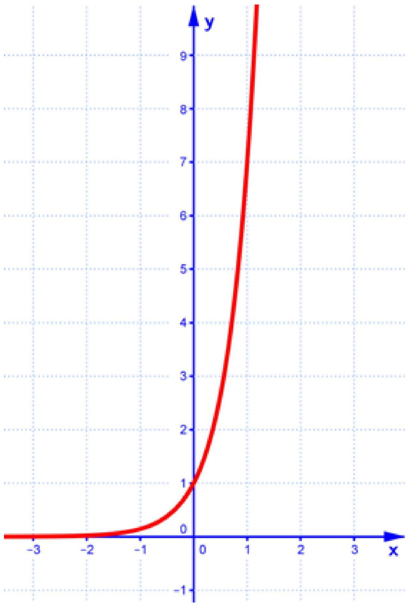
B. symetryczne względem punktu $(0;\ 0)$,

C. osi OY ,

D. osi OX .

Zadanie 3 (1 pkt.) Na wykresie przedstawiono funkcję $f(x) = a^x$. Prawdą jest, że do wykresu tej funkcji nie należy punkt:

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(0;\ 1)$ **B.** $(2;\ 14)$ **C.** $\left(\frac{1}{2};\sqrt{7}\right)$ **D.** $(3;\ 21)$

Zadanie 4 (1 pkt.) Jedno miejsce zerowe ma funkcja:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $f(x)=3^x-2$ **B.** $f(x)=3^{x-2}$ **C.** $f(x)=3^x+1$ **D.** $f(x)=3^{x+1}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Do wykresu funkcji wykładniczej należy punkt $(3;\ 4)$. Wynika z tego, że wzór tej funkcji może mieć postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y=\sqrt[3]{4}^x$ **B.** $y=-\sqrt[3]{4}^x$ **C.** $y=\sqrt[3]{4}^{-x}$ **D.** $y=\sqrt[4]{4}^x$

Zadanie 6 (2 pkt.) Naszkicuj wykres funkcji $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-4$. Określ:

a. zbiór wartości funkcji,
b. przedział, w którym funkcja jest dodatnia,
c. miejsce zerowe (o ile istnieje).

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (1 pkt.) Pewna higroskopijna cząstka ma masę 120 g. Cząstka pochłaniając wodę, zwiększa swoją masę o 5% w ciągu godziny. Wzór wyrażający masę m tej cząstki po upływie t godzin ma postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $m=105^t\cdot 120$ g **B.** $m=5^t\cdot 120$ g

C. $m=1,05^t\cdot 120$ g **D.** $m=0,95^t\cdot 120$ g

Zadanie 8 (1 pkt.) Zysk pewnej firmy w ciągu pierwszych sześciu lat jej istnienia wzrastał o 30% rocznie. Firma ta podwoiła swoje zyski:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. po czwartym roku istnienia, **B.** po trzecim roku istnienia,

C. w czasie drugiego roku istnienia, **D.** w czasie trzeciego roku istnienia.

Zadanie 9 (1 pkt.) Wartość kapitału K_0 zainwestowanego w lokatę terminową po t latach można wyrazić wzorem $K=K_0\cdot 1,02^t$. Wartość kapitału potroi się po:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 12 latach, **B.** 20 latach, **C.** 45 latach, **D.** 56 latach,

Zadanie 10 (1 pkt.) Przyrost naturalny indiańskiego plemienia można wyrazić wzorem funkcji $f(t)=1,012^t$, gdzie t oznacza czas w latach. Jeśli plemię liczby obecnie 300 osób, to za dziesięć lat jego liczba zwiększy się o:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 22 osoby, **B.** 38 osób, **C.** 50 osób, **D.** 62 osoby.

Zadanie 11 (1 pkt.) Zmianę wielkości kapitału na lokacie można wyrazić wzorem $k(t)=\left(\frac{409}{400}\right)^t$, gdzie t oznacza czas w latach. Wynika z tego, że oprocentowanie roczne tej lokaty wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 2% **B.** 102.25% **C.** $0,2\%$ **D.** $2,25\%$

Zadanie 12 (2 pkt.) W ramach badań naukowych udało się wyhodować 15 sztuk pewnych pierwotniaków, których liczba zwiększa się trzy razy w ciągu tygodnia. Liczbę pierwotniaków oznaczamy jako P , a liczbę tygodni jako t .

a. Zapisz wzór na liczbę pierwotniaków P w zależności od czasu t .

b. Oblicz, ile będzie pierwotniaków po 4 tygodniach.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Równania wymierne

Autor: **Dariusz Kulma**

WYRAŻENIA WYMIERNE

Zanim przejdziemy do równań wymiernych przypomnijmy, czym są wyrażenia wymierne i jak wykonujemy na nich podstawowe działania.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Wyrażeniem wymiernym nazywamy wyrażenie zapisane w postaci ułamka $\frac{L(x)}{M(x)}$, którego licznikiem jest wielomian $L(x)$, a mianownikiem wielomian $M(x)$ i $M(x) \neq 0$.	$\frac{-x^3+1}{x-3}, \frac{-x^2+1}{x^2+4}$

Wykonując działania na wyrażeniach wymiernych, postępujemy w taki sam sposób jak w przypadku ułamków zwykłych.

Przypomnijmy na przykładzie:

PRZYKŁAD

Dane są wyrażenia wymierne: $w_1 = \frac{-x+1}{x-3}$, $D_1 = R \setminus \{3\}$ oraz $w_2 = \frac{2x-3}{x+2}$, $D_2 = R \setminus \{-2\}$.

Wyznacz $w_1 \cdot w_2$.

Mnożenie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} \cdot \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)}$$

Aby pomnożyć dwa wyrażenia wymierne, należy pomnożyć przez siebie liczniki i mianowniki.

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{-x+1}{x-3} \cdot \frac{2x-3}{x+2} = \frac{(-x+1)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{-2x^2+5x-3}{(x-3)\cdot(x+2)},\ D = R \setminus \{3; -2\}$$

Wyznacz $\frac{w_1}{w_2}$.

Dzielenie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} : \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x)}{P(x)} \cdot \frac{M(x)}{L(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x)}{P(x) \cdot L(x)}$$

Aby podzielić dwa wyrażenia wymierne, należy pomnożyć pierwsze wyrażenie przez odwrotność drugiego.

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{-x+1}{x-3} : \frac{2x-3}{x+2} = \frac{-x+1}{x-3} \cdot \frac{x+2}{2x-3} = \frac{(-x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(2x-3)} = \frac{-x^2-x+2}{(x-3)\cdot(2x-3)},\ D = R \setminus \left\{-2; \frac{3}{2}; 3\right\}$$

Wyznacz $w_1 + w_2$.

Dodawanie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} + \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x)}{P(x) \cdot M(x)} + \frac{P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x) + P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)}$$

Aby dodać dwa wyrażenia wymierne, należy najpierw sprowadzić oba wyrażenia do wspólnego mianownika, a potem dodać ich liczniki.

$$w_1 + w_2 = \frac{-x+1}{x-3} + \frac{2x-3}{x+2} = \frac{(-x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)} + \frac{(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{(-x+1)\cdot(x+2)+(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{x^2-10x+11}{(x-3)\cdot(x+2)},\ D = R \setminus \{-2; 3\}$$

Wyznacz $w_1 - w_2$.

Odejmowanie wyrażeń wymiernych

$$\frac{W(x)}{P(x)} - \frac{L(x)}{M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x)}{P(x) \cdot M(x)} - \frac{P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)} = \frac{W(x) \cdot M(x) - P(x) \cdot L(x)}{P(x) \cdot M(x)}$$

Aby odjąć dwa wyrażenia wymierne, należy najpierw sprowadzić oba wyrażenia do wspólnego mianownika, a potem odjąć ich liczniki.

$$w_1 - w_2 = \frac{-x+1}{x-3} - \frac{2x-3}{x+2} = \frac{(-x+1)\cdot(x+2)}{(x-3)\cdot(x+2)} - \frac{(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} =$$

$$= \frac{(-x+1)\cdot(x+2)-(x-3)\cdot(2x-3)}{(x-3)\cdot(x+2)} = \frac{-3x^2+8x-7}{(x-3)\cdot(x+2)},\ D = R \setminus \{-2; 3\}$$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

RÓWNANIA WYMIERNE

Możemy teraz przejść do równań wymiernych.

DEFINICJA

Równaniem wymiernym z niewiadomą x nazywamy równanie postaci $\frac{L(x)}{M(x)} = 0$, gdzie $L(x)$ i $M(x)$ są wielomianami i $M(x) \neq 0$ lub takie, które można przekształcić równoważnie do tej postaci.

WYJAŚNIENIA

Każde równanie zbudowane tylko z ułamków algebraicznych można przekształcić do postaci $\frac{L(x)}{M(x)} = 0$.

Wyznaczając dziedzinę takiego wyrażenia, należy pamiętać, że jest to zbiór liczb rzeczywistych z wyłączeniem liczb, które są pierwiastkami wielomianów występujących w mianownikach poszczególnych ułamków.

Zaczynamy od takich równań, które po obu stronach znaku równości mają wyrażenia.

Takie równanie ma postać **proporcji** i postępujemy jak w przypadku proporcji, czyli mnożymy "na skos".

Rozwiązując równania tego typu, postępujemy w następujący sposób:

- robimy **założenia** czyli wyznaczamy takie "x", które zerują nam mianownik i usuwamy je z dziedziny

- **"mnożymy na skos"** i rozwiązujemy powstałe równanie

- **sprawdzamy, czy rozwiązania**, które otrzymaliśmy, **należą do dziedziny**

Wykonajmy cztery przykłady z poniższej planszy.

Równania wymierne - przykłady

RÓWNANIA WYMIERNE RÓWNE ZERO

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Drugim rodzajem równań wymiernych są równania, które po prawej stronie mają zero.

Podstawowa rzecz, którą musisz zapamiętać to to, że skoro wyrażenie w mianowniku nie może być równe zero, to całe równanie wymierne będzie równe zero, gdy licznik będzie równy zero.

Z tego względu, rozwiązując równania tego typu, postępujemy w następujący sposób:

- **robimy założenia** czyli wyznaczamy takie "x", które zerują nam mianownik i usuwamy je z dziedziny

- **przyrównujemy do zera tylko licznik** i rozwiązujemy powstałe równanie

- **sprawdzamy, czy rozwiązania**, które otrzymaliśmy, **należą do dziedziny**

Wykonajmy cztery przykłady z poniższej planszy,

Równania wymierne równe zero - przykłady

TEST

Na koniec wykonajmy krótki test.

Moje Testy #38 - Równania wymierne...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#38] Równania wymierne

Zadanie 1 (1 pkt.) Rozwiązaniami równania $\frac{(x^2-16)(x-5)}{x+4}=0$ są liczby:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. których suma wynosi 9 ,

B. które są parzyste,

C. które są podzielne przez 3 ,

D. których największy wspólny dzielnik to 5 .

Zadanie 2 (1 pkt.) Rozwiązaniem równania $\frac{x+1}{4}=\frac{a}{2}$ jest liczba 3 . Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a=3$

B. $a=-1$

C. $a=1$

D. $a=2$

Zadanie 3 (1 pkt.) Równanie $\frac{x(x-5)}{x^2+a}=0$ ma jedno rozwiązanie, gdy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a=5$

B. $a=-5$

C. $a=25$

D. $a=-25$

Zadanie 4 (1 pkt.) Równanie $\frac{2x^2+32}{x-4}=0$:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. ma dokładnie trzy rozwiązania,

B. ma dokładnie dwa rozwiązania,

C. ma dokładnie jedno rozwiązanie,

D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 5 (1 pkt.) Równanie $\frac{(x-6)(x+7)}{(x-7)(x+6)}=0$ ma:

odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

A. dokładnie cztery rozwiązania,
B. dokładnie trzy rozwiązania,
C. dokładnie dwa rozwiązania,
D. dokładnie jedno rozwiązanie.

Zadanie 6 (1 pkt.) Rozwiązaniem równania $\frac{x+13}{x+5}=\frac{9}{5}$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -5
B. -9
C. 5
D. 9

Zadanie 7 (1 pkt.) Równanie $\frac{x^2-9x}{(x+9)(x-9)}=0$:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. nie ma rozwiązań,
B. ma dokładnie jedno rozwiązanie,
C. ma dokładnie dwa rozwiązania,
D. ma dokładnie cztery rozwiązania.

Zadanie 8 (1 pkt.) Równanie $\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}=0$ w zależności od parametrów a i b , gdzie $a>0$ i $b>0$:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. ma cztery rozwiązania,
B. ma dwa rozwiązania,
C. ma jedno rozwiązanie,
D. nie ma rozwiązań.

Zadanie 9 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $\frac{2x-8}{x+12}=x+2$, dla $x\neq-12$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $\frac{3x-6}{4}=\frac{x-3}{2}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Równania i nierówności kwadratowe

Autor: **Dariusz Kulma**

RÓWNANIA KWADRATOWE Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Na początek jak zawsze krótkie przypomnienie teorii.

DEFINICJA

Równaniem kwadratowym (równaniem stopnia drugiego) z jedną niewiadomą nazywamy równanie postaci $ax^2+bx+c=0$, $(a \neq 0)$, gdzie litery a, b, c oznaczają parametry (współczynniki liczbowe), a litera x oznacza zmienną.

WYJAŚNIENIA

Aby rozwiązać równanie z niewiadomą x, należy wyznaczyć wszystkie wartości x, dla których równanie jest spełnione. Zbiór wszystkich x nazywamy zbiorem rozwiązań równania.

Rozwiązania równania nazywamy również pierwiastkami równania.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

laboratorium matematyczne

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

TWIERDZENIA		
Dla równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ zachodzi:		
$\Delta<0$	równanie nie ma rozwiązania	—
$\Delta=0$	równanie ma jedno rozwiązanie	$x_0=\frac{-b}{2a}$
$\Delta>0$	równanie ma dwa rozwiązania	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

RÓWNANIE KWADRATOWE	POSTAĆ	PRZYKŁAD
zupełne	$ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$	$2x^2+4x-3=0$
niezupełne	$ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0$ i $(b=0$ lub $c=0)$	$4x^2=0$ $5x^2+3x=0$ $2x^2-6=0$

RODZAJE RÓWNAŃ KWADRATOWYCH - MOŻLIWE POSTACI PO UPROSZCZENIU

Po uproszczeniu równania kwadratowego najczęściej otrzymamy jeden z poniższych rodzajów równania. Przypomnijmy, co robimy w każdym z tych przypadków, wykorzystując grafikę lub planszę interaktywną poniżej.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

				PRZYKŁAD
RODZAJ 1	Postać ogólna	$ax^2+bx+c=0$, $a \neq 0$	W takim przypadku liczymy deltę i miejsca zerowe ze wzorów.	$x^2+3x-4=0$ $\Delta=25 \quad \sqrt{\Delta}=5$ $x_{1,2}=\frac{-3\pm5}{2}= {}^{\nearrow -4}_{\searrow 1}$ $x_1=-4 \quad x_2=1$
RODZAJ 2	Postać, w której $c=0$	$ax^2+bx=0$, $a \neq 0$	W takim przypadku wyłączamy x przed nawias. Jednym z rozwiązań zawsze będzie zero.	$x^2+5x=0$ $x(x+5)=0$ $x_1=0 \quad x_2=-5$
RODZAJ 3	Postać, w której $b=0$ oraz $a>0$ i $c>0$	$ax^2-c=0,\ a\neq 0$ lub $-ax^2+c=0,\ a\neq 0$	W takim przypadku stosujemy wzór skróconego mnożenia.	$x^2-9=0$ $(x-3)(x+3)=0$ $x_1=3 \quad x_2=-3$
RODZAJ 4	Postać, w której $b=0$ oraz $a>0$ i $c>0$	$ax^2+c=0,\ a\neq 0$ lub $-ax^2-c=0,\ b\neq 0$	W takim przypadku równania nie mają miejsc zerowych, czyli rozwiązań.	$x^2+9=0$ czy $-2x^2-7=0$ Takie równania nie mają rozwiązań, czyli $x \in \varnothing$
RODZAJ 5	Postać iloczynowa	$a(x-x_1)(x-x_2)=0$, $a\neq 0$	W takim przypadku rozwiązaniami są miejsca zerowe poszczególnych nawiasów.	$(x-3)(x+8)=0$ $x_1=3 \quad x_2=-8$

Rodzaje równań kwadratowych

Rozwiążmy teraz kilka przykładów:

Równania kwadratowe - przykłady

NIERÓWNOŚCI KWADRATOWE

Wstęp teoretyczny na początek.

DEFINICJA	PRZYKŁADY
Nierównością kwadratową z jedną niewiadomą nazywamy nierówność postaci $ax^2+bx+c<0$ lub $ax^2+bx+c>0$, lub $ax^2+bx+c\le 0$, lub $ax^2+bx+c\ge 0$, gdzie $a\neq 0$. Litery a, b, c oznaczają parametry (współczynniki liczbowe), a litera x oznacza zmienną.	$-2x^2+6x+\frac{4}{5}<0$ $\sqrt{2}\,x^2+8\ge 0$ $-\frac{2}{5}x^2+x\le 0$

WYJAŚNIENIA

Aby rozwiązać nierówność z niewiadomą x, należy wyznaczyć te wartości x, dla których nierówność jest spełniona. Zbiór wszystkich x nazywamy zbiorem rozwiązań nierówności.

Znając wykres funkcji kwadratowej i jej miejsca zerowe, możemy wyznaczyć zbiór rozwiązań danej nierówności.

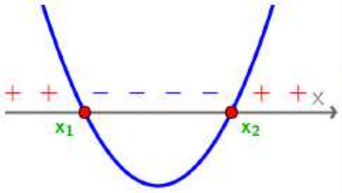
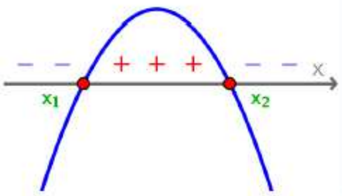
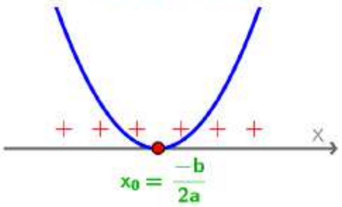
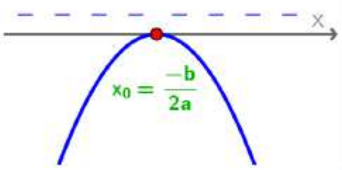
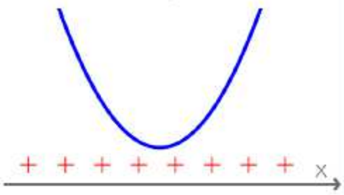
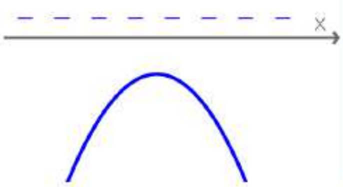
Wykres funkcji kwadratowej pozwala na odczytanie zbioru argumentów, dla których wartości funkcji są dodatnie lub ujemne, a tym samym na określenie, co jest zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej $ax^2+bx+c>0$ lub $ax^2+bx+c<0$.

Zauważmy, że do rozwiązania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu funkcji, ponieważ współrzędne wierzchołka paraboli czy punkt przecięcia wykresu z osią OY nie mają wpływu na zbiór rozwiązań nierówności. Wystarczy nam znajomość miejsc zerowych funkcji i informacja o tym, jak skierowane są ramiona paraboli.

Następnie przeanalizujmy różne przypadki nierówności i zbioru rozwiązań w zależności od **delty (która decyduje o liczbie miejsc zerowych)** i **współczynnika kierunkowego "a" (który decyduje o tym, jak skierowane są ramiona paraboli)**.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

NIERÓWNOŚĆ	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
WYKRES	ZBIÓR ROZWIĄZAŃ NIERÓWNOŚCI			
$\Delta>0, a>0$ 	$(-\infty; x_1)\cup(x_2;\infty)$	$(-\infty; x_1\rangle\cup\langle x_2;\infty)$	$(x_1; x_2)$	$\langle x_1; x_2\rangle$
$\Delta>0, a<0$ 	$(x_1; x_2)$	$\langle x_1; x_2\rangle$	$(-\infty; x_1)\cup(x_2;\infty)$	$(-\infty; x_1\rangle\cup\langle x_2;\infty)$
$\Delta=0, a>0$ 	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$
$\Delta=0, a<0$ 	$\varnothing$	$\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-b}{2a}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\Delta<0, a>0$ 	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\Delta<0, a<0$ 	$\varnothing$	$\varnothing$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Znaki „+" wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie.

Znaki „−" wskazują zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Nierówność kwadratowa - wstęp

Rozwiązując nierówności, postępujemy w podobny sposób jak przy równaniach kwadratowych. Musisz jednak pamiętać, że na koniec należy **zaznaczyć rozwiązanie na osi liczbowej i odczytać przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności.**

Wykonajmy teraz kilka przykładów:

Nierówność kwadratowa - przykłady 2

TEST

Moje Testy #39 - Równania i nierówności kwadratowe...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:

-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#39] Równania i nierówności kwadratowe

Zadanie 1 (2 pkt.) Suma kwadratów trzech kolejnych boków naturalnych wynosi 50 . Znajdź te liczby.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 2 (1 pkt.) Dana jest nierówność $-4x^2+6\le 0$. Do zbioru rozwiązań tej nierówności nie należy liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\sqrt{3}$ **B.** 2 **C.** $\frac{\sqrt{7}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczb całkowitych, które spełniają nierówność $x^2-4x-9<0$, jest dokładnie:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. trzy, **B.** pięć, **C.** sześć, **D.** siedem.

Zadanie 4 (2 pkt.) Rozwiąż nierówność $\frac{x^2}{2}+4x+\frac{5}{2}>0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Rozwiąż nieróność $-\frac{2}{3}x^2-3x+6\ge 0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (1 pkt.) Rozwiązanie równania $2x(x-4)=x^2-4x-4$ należy do przedziału:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(2;\ \infty)$ **B.** $(-\infty;\ 2)$ **C.** $(-2;\ \infty)$ **D.** $(-\infty;\ -2\rangle$

Zadanie 7 (1 pkt.) Dziedziną funkcji $f(x)=\sqrt{3x-4x^2}$ jest przedział:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$

B. $\left(0; \frac{3}{4}\right)$

C. $\left\langle -\frac{3}{4}; 0\right\rangle$

D. $\left\langle 0; \frac{3}{4}\right\rangle$

Zadanie 8 (1 pkt.) Równanie $3x^2 + \log_2 8 = 0$:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. ma dwa rozwiązania, w tym jedno ujemne,

B. nie ma rozwiązań,

C. ma dwa rozwiązania,

D. ma jedno rozwiązanie.

Zadanie 9 (2 pkt.) Jeden bok prostokąta jest o 3 krótszy od drugiego boku. Oblicz długości boków tego prostokąta, wiedząc, że jego pole wynosi 10 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (1 pkt.) Połowa kwadratu liczby naturalnej jest równa podwojonej różnicy tej liczby oraz liczby 1 . Liczba ta jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 2

B. 1

C. 4

D. -2

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Równania i nierówności liniowe

Autor: Dariusz Kulma

RÓWNANIA LINIOWE

Zaczynamy od powtórzenia równań liniowych, czyli równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą .

DEFINICJA	PRZYKŁADY
Równaniem liniowym z jedną niewiadomą nazywamy równanie postaci: $ax+b=0$. Litery a i b to parametry (współczynniki liczbowe), natomiast litera x oznacza zmienną. Ponieważ tylko jedna litera oznacza zmienną, dlatego jest to równanie z jedną niewiadomą. Ponadto zmienna ta występuje w pierwszej potędze (czyli $x=x^1$) — stąd mówimy, że jest to równanie pierwszego stopnia lub równanie liniowe.	$2x-3=0$, gdzie parametr $a=2$, parametr $b=-3$. $-6x+1=0$, gdzie $a=-6$, $b=1$. $\sqrt{2}\,x+\frac{1}{3}=0$, gdzie $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{1}{3}$.

Równanie z niewiadomą x postaci $ax+b=0$, gdzie $b\in R$ nazywamy:

- równaniem pierwszego stopnia, gdy $a\neq 0$.
- równaniem liniowym, gdy $a\in R$.

Równania pierwszego stopnia zaliczamy do równań liniowych.

Biorąc pod uwagę zbiór rozwiązań możemy wyróżnić równania:

- oznaczone (mają jedno rozwiązanie)

- niezonaczone (mają nieskończenie wiele rozwiązań)

- sprzeczne (nie mają rozwiązań)

Przypomnijmy poszczególne rodzaje równań:

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Zadania tekstowe

Autor: **Dariusz Kulma**

ETAPY ROZWIĄZYWANIA ZADAŃ TEKSTOWYCH

1° Analiza zadania — określenie niewiadomych i zależności wynikających z treści zadania.

2° Ułożenie równania lub układu równań.

3° Rozwiązanie równania lub układu równań.

4° Ewentualne pozostałe obliczenia i sprawdzenie otrzymanego rozwiązania, szczególnie w przypadku, gdy otrzymujemy wiele rozwiązań.

5° Sformułowanie odpowiedzi.

ZADANIA TEKSTOWE Z RÓWNANIEM LINIOWYM

Zadanie tekstowe z równaniem liniowym 1

Zadanie tekstowe z równaniem liniowym 2

ZADANIA TEKSTOWE Z UKŁADEM RÓWNAŃ

Zadanie tekstowe z układem równań 1

- Zadanie tekstowe z układem równań 2

ZADANIA TEKSTOWE Z RÓWNANIEM KWADRATOWYM

- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 1
- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 2
- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 3
- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 4
- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 5
- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 6
- Zadanie tekstowe z równaniem kwadratowym 7

ZADANIA TEKSTOWE Z RÓWNANIEM WYMIERNYM

- Zadanie tekstowe - prędkość średnia 1
- Zadanie tekstowe z równaniem wymiernym

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna
NARZĘDZIA POMOCNICZE
Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje
« POWRÓT

Rozwiązywanie równań z wykorzystaniem definicji pierwiastka trzeciego stopnia oraz własności iloczynu

Autor: **Dariusz Kulma**

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ TYPU $x^3 = -8$

Do rozwiązywania **równań typu $x^3 = -8$** wykorzystujemy definicję pierwiastka trzeciego stopnia. Zobaczmy przykład.

WPROWADZENIE

Rozwiąż równanie $x^3 = -8$.

Aby znaleźć rozwiązanie tego równania, wykorzystamy wiadomości o pierwiastku stopnia trzeciego.

1° Pierwiastkujemy równanie stronami, czyli zapisujemy równanie, które jest równoważne wyjściowemu, (ma taki sam zbiór rozwiązań).

$x^3 = -8$ jest równoważne równaniu $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-8}$

2° Korzystamy z własności pierwiastków nieparzystego stopnia: $\sqrt[n]{a} = b$, gdy $b^n = a$.

$\sqrt[3]{x^3} = x$ oraz $\sqrt[3]{-8} = -2$

3° Zatem jedynym rozwiązaniem równania $x^3 = -8$ jest $x = -2$.

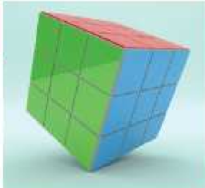
Przypomnijmy **sześciany** niektórych liczb naturalnych. Warto je zapamiętać, ponieważ ich znajomość jest przydatna przy rowiązywaniu równań trzeciego stopnia.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Sześciany wybranych liczb naturalnych

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728



Zróbmy kilka zadań z przykładami do rozwiązania według podanego sposobu.

- Proste równania trzeciego stopnia - przykłady
- Równania trzeciego stopnia - przykłady
- Równania z wykorzystaniem równań stopna trzeciego - przykłady

WYKORZYSTANIE WŁASNOŚCI ILOCZYNU DO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ

WPROWADZENIE

Rozważmy równanie $R(x)=0$, gdzie lewa strona jest zapisana w postaci iloczynu kilku czynników, czyli: $W(x)\cdot P(x)\cdot Q(x)=0$.

Aby rozwiązać równanie takiego typu, zauważmy, że iloczyn kilku czynników jest równy zero, gdy przynajmniej jeden z tych czynników będzie wynosił zero.

Wynika z tego, że $W(x)\cdot P(x)\cdot Q(x)=0$, gdy $W(x)=0$ lub $P(x)=0$ lub $Q(x)=0$.

Zróbmy dwa zadania z przykładami.

- Równania w postaci iloczynowej - przykłady
- Równania w postaci iloczynowej - zadanie

METODA GRUPOWANIA

Metodę grupowania omówimy na przykładach, zacznijmy od pierwszego przykładu z poniższej planszy.

Aby rozwiązać równanie, należy przekształcić je do postaci iloczynowej. W tym celu będziemy chcieli wyłączyć wspólny czynnik przed nawias. Zanim jednak to zrobimy, należy pogrupować wyrazy i z każdej pary wyłączyć wspólny czynnik. Jest to tzw. metoda grupowania wyrazów.

Rozwiązywanie równań trzeciego stopnia metodą grupowania

TEST

Moje Testy #63 - Rowiązywanie równań z wykorzystaniem definicji pierwiastka trzeciego s...

TEST

[#63] Rowiązywanie równań z wykorzystaniem definicji pierwiastka trzeciego stopnia oraz własności iloczynu

Zadanie 1 (1 pkt.) Rozwiązaniem równania $-x^3+\frac{64}{343}=0$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-\frac{4}{7}$ **B.** $\frac{4}{7}$ **C.** $-\frac{7}{4}$ **D.** $\frac{7}{4}$

Zadanie 2 (1 pkt.) Rozwiązaniem równania $(x^2-3)^3=27$ może być liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-\sqrt{6}$ **B.** 6 **C.** 3 **D.** -3

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczba 4 jest rozwiązaniem równania:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $3+x^3=61$ **B.** $4x^3-54=0$ **C.** $\frac{x^3}{8}-4=4$ **D.** $3x^3-64=0$

Zadanie 4 (1 pkt.) Jeżeli $x^3=-512$, to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x=-8$ **B.** $x=8$ **C.** $x=\sqrt[3]{8}$ **D.** $x=\sqrt{8}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Rozwiązaniem równania $\frac{x^3}{3}+\frac{8}{12}=\frac{x^3}{4}$ jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. pierwsza, **B.** parzysta, **C.** nieparzysta, **D.** naturalna.

Zadanie 6 (1 pkt.) Rozwiązaniami równania $2x(x^3-512)(x^2+2)(x^3+8)=0$ są liczby:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-2,\ 0,\ 8$ **B.** $-8,\ 0,\ 2$ **C.** $-2,\ 0,\ 2,\ 8$ **D.** $-2,\ 0,\ 2$

Zadanie 7 (1 pkt.) Równanie $(x^3-2)(x^2-36)(x^2+1)=0$ ma:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. pięć rozwiązań, **B.** trzy rozwiązania, **C.** cztery rozwiązania, **D.** siedem rozwiązań.

Zadanie 8 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $2x^3-10x^2=0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $(3x+9)(x^2-10)=0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $5x^4-125x^2=0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 11 (2 pkt.) Rozwiąż równanie $6x^3-15x^2-225x=0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 12 (4 pkt.) Rozwiąż równanie $2x^3+6x^2-12x-36=0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 13 (4 pkt.) Rozwiąż równanie $(x-1)\left(\frac{1}{2}x^2-12x+54\right)(x^2+4)(x^3-1728)=0$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

Podstawowe wiadomości o ciągach

Autor: **Dariusz Kulma**

Na początek przypomnijmy, czym jest ciąg.

DEFINICJA

Ciągiem nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb naturalnych dodatnich (ciąg nieskończony) lub skończony k- elementowy podzbiór od 1 do k (ciąg skończony). Możemy to zapisać symbolicznie: $D = N_+$ lub $D = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$.

Wartości tak zdefiniowanych funkcji nazywamy wyrazami ciągu.

W celu stwierdzenia, czy dane przyporządkowanie jest ciągiem, należy sprawdzić, czy jest ono funkcją oraz jaką ma dziedzinę.

SPOSOBY OKREŚLANIA CIĄGÓW

SPOSÓB 1 — wzór ogólny

Opisuje on zależność podobnie jak przy wzorze funkcji.

PRZYKŁAD

$a_n = n + 2 - n^2$ — za pomocą tego wzoru można od razu obliczyć dowolną wartość, czyli dowolny wyraz ciągu: $a_1 = 1 + 2 - 1^2 = 2$, $a_4 = 4 + 2 - 4^2 = -10$ itd.

SPOSÓB 2 — tabelka

Podając w jednym wierszu argumenty, wskazujemy wartości w drugim wierszu.

PRZYKŁAD

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	3	4	-10	3	12	$\sqrt{2}$	0	0

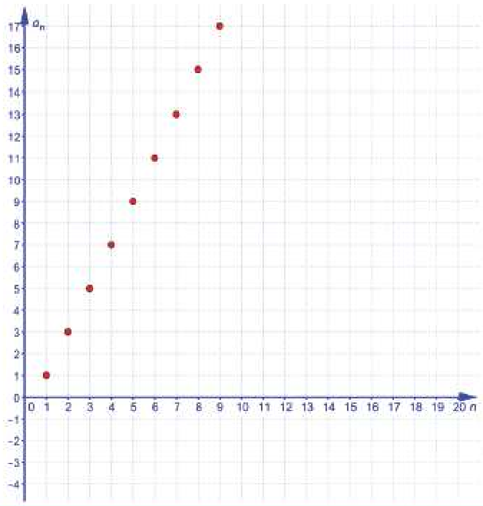
Z tabelki odczytujemy, że $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = -10$, $a_4 = 3$, $a_5 = 12$, $a_6 = \sqrt{2}$, $a_7 = 0$, $a_8 = 0$.

SPOSÓB 3 — wykres

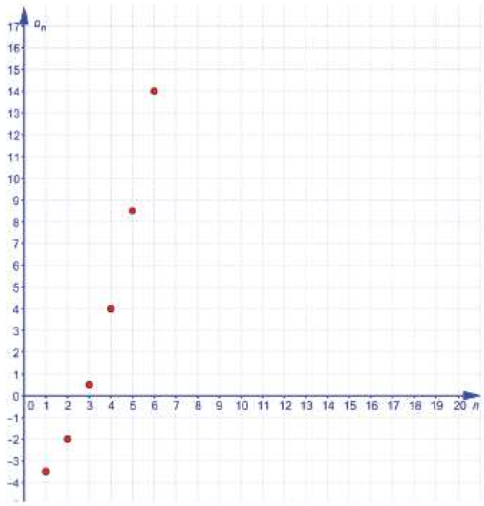
Ze względu na specyficzną dziedzinę ciągu wykres znajduje się w I lub IV ćwiartce układu współrzędnych, ponadto sam wykres składa się z pojedynczych kropek.

PRZYKŁAD

$a_n = 2n - 1$



$a_n = \frac{1}{2}n^2 - 4$



SPOSÓB 4 — wyliczanie elementów

W nawiasie okrągłym podajemy kolejne wartości. Ten zapis stosujemy, gdy ciąg jest skończony lub wyrazy ciągu układają się w pewien regularny sposób.

PRZYKŁAD

Ciąg $(1, 4, 10, 2, -1, 7)$
Jest to ciąg sześcioelementowy, pozycja liczby w nawiasie oznacza argument, zatem: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 10$, $a_4 = 2$, $a_5 = -1$, $a_6 = 7$.

Ciąg $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$
Badając zależność między kolejnymi wyrazami ciągu, odczytujemy, że następną liczbą będzie 11, potem 13 itd.

WYZNACZANIE WYRAZÓW CIĄGÓW OKREŚLONYCH WZOREM OGÓLNYM

Pierwszą umiejętnością, którą musimy opanować jest wyznaczanie wskazanego wyrazu ciągu, gdy dany jest wzór ogólny. Jest to nic innego, jak wstawienie we wzorze ogólnym w miejsce litery "n" liczby, która określa numer wyrazu.

Wyrazy ciągu - przykłady

Obliczanie wyrazu ciągu - zadanie

Spotykamy się też z zadaniami, w których jest podana wartość wyrazu i należy określić, który wyraz ciągu przyjmuje daną wartość.

Zobaczmy na przykładach.

Wyznaczanie numeru wyrazu dla danej wartości - przykłady

MONOTONICZNOŚĆ CIĄGÓW

Do omówienia monotoniczności ciagów wykorzystamy poniższą grafikę oraz planszę poniżej.

Skoro ciąg jest definiowany jako funkcja w dziedzinie N_+, to możemy badać jego monotoniczność. Monotoniczność określamy dla ciągów liczbowych (o wyrazach, które są liczbami rzeczywistymi).

TWIERDZENIE

Jeżeli dla każdego $n \in N_+$ mamy:

- $a_{n+1} > a_n$, to ciąg jest rosnący (tzn. każdy następny wyraz jest większy od poprzedniego)
- $a_{n+1} < a_n$, to ciąg jest malejący (tzn. każdy następny wyraz jest mniejszy od poprzedniego)
- $a_{n+1} \geq a_n$, to ciąg jest niemalejący (tzn. każdy następny wyraz jest większy lub równy poprzedniemu)
- $a_{n+1} \leq a_n$, to ciąg jest nierosnący (tzn. każdy następny wyraz jest mniejszy lub równy poprzedniemu)
- $a_{n+1} = a_n$, to ciąg jest stały (tzn. każdy następny wyraz jest równy poprzedniemu)

Ciąg liczbowy spełniający którykolwiek z powyższych warunków nazywamy ciągiem monotonicznym, pozostałe ciągi są niemonotoniczne.

W praktyce, chcąc określić monotoniczność ciągu, badamy znak wyrażenia $a_{n+1} - a_n$

Monotoniczność ciągów - przykłady

Rozwiążmy poniższy przykład, żeby sprawdzić, jak wykorzystujemy powyższe zależności w praktyce.

Badanie monotoniczności ciągu - zadanie

TEST

Na koniec zrobimy test utrwalający powyższy materiał.

Moje Testy #43 - Podstawowe wiadomości o ciągach...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

TEST

[#43] Podstawowe wiadomości o ciągach

Zadanie 1 (1 pkt.) Ciąg (b_n) jest określony wzorem $b_n = \sqrt{3n+19}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $b_{15} = 3\sqrt{81}$ **B.** $b_{15} = \sqrt{46}$ **C.** $b_{15} = 8$ **D.** $b_{15} = 16$

Zadanie 2 (1 pkt.) Dany jest ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = \frac{(-3)^{2n}}{n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $b_3 = 1$ **B.** $b_3 = 243$ **C.** $b_3 = -1$ **D.** $b_3 = 729$

Zadanie 3 (1 pkt.) Ciąg (c_n) jest określony wzorem $c_n = \sqrt{4n+2}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $c_4 = 9$ **B.** $c_4 = 3\sqrt{2}$ **C.** $c_4 = 2\sqrt{18}$ **D.** $c_4 = 9\sqrt{2}$

Zadanie 4 (1 pkt.) Dany jest ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = \frac{n+1}{(-4)^n}$ dla $n \geq 1$. Wówczas:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $c_3 = -\frac{1}{16}$ **B.** $c_3 = \frac{1}{8}$ **C.** $c_3 = -\frac{1}{4}$ **D.** $c_3 = \frac{1}{16}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Dany jest ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = 2n^2 + 5n$. Wyraz o wartości -18 jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. dziewiątym wyrazem tego ciągu, **B.** piątym wyrazem tego ciągu,

C. trzecim wyrazem tego ciągu, **D.** drugim wyrazem tego ciągu.

Zadanie 6 (1 pkt.) Ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = -\frac{2}{5}n + 3$:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. jest stały,
B. jest malejący,
C. jest rosnący,
D. nie jest monotoniczny.

Zadanie 7 (1 pkt.) Dany jest ciąg (c_n) , gdzie $c_{125} = 225$ i $c_{135} = 275$. Wynika z tego, że ciąg (c_n) może być określony wzorem:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $c_n = -3n + 100$
B. $c_n = 5n - 400$
C. $c_n = 4n - 200$
D. $c_n = n + 400$

Zadanie 8 (1 pkt.) Dany jest ciąg (c_n) określony wzorem $c_n = \frac{2n+1}{n-2}$. Prawdą jest, że wyraz c_{n+2} ma wartość:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{2n-2}{n+2}$
B. $n + \frac{3}{2}$
C. $\frac{3n+2}{n}$
D. $\frac{5}{n} + 2$

Zadanie 9 (1 pkt.) Dany jest ciag (c_n) określony wzorem $c_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$. Niech $x = c_3,\ y = c_4,\ z = c_5$. Wtedy prawdą jest, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y < z < x$
B. $z < y < x$
C. $x < y < z$
D. $x < z < y$

Zadanie 10 (2 pkt.) Wykaż, że ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = 8n + 12$ jest rosnący.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Ciąg arytmetyczny

Autor: **Dariusz Kulma**

Dwa podstawowe rodzaje ciągów to **ciąg arytmetyczny** (w którym występuje **różnica ciągu**) i **geometryczny** (w którym występuje **iloraz ciągu**).

Zaczynamy od przypomnienia podstawowych informacji o ciągu arytmetycznym.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	CIĄG ARYTMETYCZNY
CECHA CHARAKTERYSTYCZNA	Ciąg liczb jest arytmetyczny, gdy każdy następny wyraz powstaje przez dodanie do poprzedniego stałej liczby (r).
PRZYKŁAD	2, 5, 8, 11, 14, 17 ... Pierwszy wyraz ciągu to $a_1 = 2$ **Różnica ciągu** to $r = 3$
NAJWAŻNIEJSZE WZORY	
WZÓR NA WYRAZ OGÓLNY CIĄGU	$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$
WZÓR NA SUMĘ n POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$
ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY KOLEJNYMI WYRAZAMI	$a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1} = \ldots = r$
ŚREDNIE	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ średnia arytmetyczna

Na początku będzie nas interesowała przede wszystkim **zależność pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu.** Korzystamy z niej przy wyznaczaniu wyrazów ciągu.

W poniższej planszy jest 6 przykładów. Zauważ, że **znając dwa wyrazy ciągu, możemy wyznaczyć wartość dowolnego wyrazu.** Możemy posłużyć się jedną z dwóch przedstawionych w planszy metod. **Czasami można korzystać z pierwszej, a czasami z drugiej metody w zależności od danych.**

METODA 1 — jest to sposób uniwersalny, który może być wykorzystywany niezależnie od tego, czy wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, czy wyrażeniami arytmetycznymi.

METODA 2 — jest to krótszy sposób rozwiązania, ale może być wykorzystywany tylko wtedy, gdy dane wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, a nie wyrażeniami algebraicznymi, co pozwala na obliczenie różnicy r.

Obliczanie brakujących wyrazów ciągu arytmetycznego - przykłady

Zróbmy trzy zadania, żeby przećwiczyć te umiejętności.

Obliczanie wyrazów ciągu arytmetycznego - zadanie 1

Obliczanie wyrazów ciągu arytmetycznego - zadanie 2

Obliczanie wyrazów ciągu arytmetycznego - zadanie 3

Teraz przejdziemy do wyznaczania podstawowych parametrów ciągu arytmetycznego, korzystając z własności tego ciągu.

Zaczniemy od zadań, w których mamy wyznaczyć pierwszy wyraz, różnicę oraz wzór ogólny ciągu - zróbmy trzy zadania.

Wyznaczanie najważniejszych parametrów ciągu arytmetycznego - zadanie 1

Wyznaczanie najważniejszych parametrów ciągu arytmetycznego - zadanie 2

Wyznaczanie najważniejszych parametrów ciągu arytmetycznego - zadanie 3

W kolejnym zadaniu mamy wyznaczyć dwa wyrazy ciągu, korzystając z zależności pomiędzy wyrazami ciągu.

Obliczanie różnicy i pierwszego wyrazu ciągu arytmetycznego, gdy dane są dwa wyrazy - przykłady

ZASTOSOWANIE WZORU NA SUMĘ n POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU

Na początek przypomnijmy wzór.

DEFINICJA

Jeżeli (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu (czyli n-ty wyraz ciągu sum częściowych) wyraża się wzorem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

dla dowolnej liczby naturalnej dodatniej n.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Wykonajmy najpierw cztery przykłady z planszy, a następnie jeszcze dwa zadania z wykorzystaniem tego wzoru.

Obliczanie sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego - przykłady

Wykorzystanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego - zadanie 1

Wykorzystanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego - zadanie 2

TEST

Moje Testy #45 - Ciąg arytmetyczny...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą: -- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#45] Ciąg arytmetyczny

Zadanie 1 (1 pkt.) W ciągu arytmetycznym (c_n) określonym wzorem $c_n = \frac{1}{2}n - 1$ dla $n \geq 1$ różnica ciągu jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-\frac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** -2 **D.** $\frac{1}{2}$

Zadanie 2 (1 pkt.) W ciągu arytmetycznym drugi wyraz jest równy -2 , a siódmy 6 . Różnica tego ciągu to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -4 **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

Zadanie 3 (1 pkt.) W ciagu arytmetycznym (c_n) dane są : $c_3 = 17$ i $c_9 = 29$. Wtedy c_1 jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 13 **B.** 5 **C.** 9 **D.** 12

Zadanie 4 (1 pkt.) Ciąg $(36;\ 28;\ x+6)$ jest arytmetyczny. Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x = 21$ **B.** $x = 14$ **C.** $x = 12$ **D.** $x = 16$

Zadanie 5 (2 pkt.) Dane są kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego $x-5;\ 4x;\ x+3$. Oblicz x .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (1 pkt.) Dany jest ciąg arytmetyczny (c_n) określony wzorem $c_n = -4n+2$. Suma ośmiu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 2^7 **B.** 2^5 **C.** -2^7 **D.** -2^6

Zadanie 7 (1 pkt.) W ciągu arytmetycznym (c_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są dwa wyrazy: $c_4 = 24$ i $c_6 = 30$. Suma sześciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 128 **B.** 135 **C.** 155 **D.** 180

Zadanie 8 (1 pkt.) Liczby $8,\ 6,\ 4$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego (c_n) . Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -100 **B.** 20 **C.** -20 **D.** -10

Zadanie 9 (1 pkt.) Suma $3 + 6 + 12 + \ldots + 192$ wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -381 **B.** 213 **C.** -213 **D.** 381

Zadanie 10 (1 pkt.) Suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi -15 , a szósty wyraz tego ciągu ma wartość -15 . Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $c_1 = 0$ **B.** $c_1 = 10$ **C.** $c_1 = 5$ **D.** $c_1 = -5$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel

wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:

-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

Ciąg geometryczny

Autor: **Dariusz Kulma**

Dwa podstawowe rodzaje ciągów to **ciąg arytmetyczny** (w którym występuje **różnica ciągu**) i **geometryczny** (w którym występuje **iloraz ciągu**).

Zaczynamy od przypomnienia podstawowych informacji o ciągu geometrycznym.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	CIĄG GEOMETRYCZNY
CECHA CHARAKTERYSTYCZNA	Ciąg liczb jest geometryczny, gdy każdy następny wyraz powstaje przez pomnożenie poprzedniego przez stałą liczbę (q).
PRZYKŁAD	2, 6, 18, 54, 162, 486 ... Pierwszy wyraz ciągu to $a_1 = 2$ **Iloraz ciągu** to $q = 3$
NAJWAŻNIEJSZE WZORY	
WZÓR NA WYRAZ OGÓLNY CIĄGU	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
WZÓR NA SUMĘ n POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW	$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1$ dla $q \neq 1$ $S_n = n \cdot a_1$ dla $q = 1$ (ciąg stały)
ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY KOLEJNYMI WYRAZAMI	$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \ldots = q$ dla ciągu geometrycznego o niezerowych wyrazach
ŚREDNIE	$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$ średnia geometryczna dla nieujemnych wyrazów ciągu

Na początku będzie nas interesowała przede wszystkim **zależność pomiędzy kolejnymi wyrazami ciągu**. Korzystamy z niej przy wyznaczaniu wyrazów ciągu.

W poniższej planszy jest 6 przykładów. Zauważ, że znając dwa wyrazy ciągu, możemy wyznaczyć wartość dowolnego wyrazu. Możemy posłużyć się jedną z dwóch przedstawionych w planszy metod. **Czasami można korzystać z pierwszej, a czasami z drugiej metody w zależności od danych.**

METODA 1 — podobnie jak w przypadku ciągów arytmetycznych jest to sposób uniwersalny, który może być wykorzystywany niezależnie od tego, czy wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, czy wyrażeniami arytmetycznymi.

METODA 2 — podobnie jak w przypadku ciągów arytmetycznych, jest to krótszy sposób rozwiązania, ale może być wykorzystywany tylko wtedy, gdy dane wyrazy ciągu określone są konkretnymi liczbami, a nie wyrażeniami algebraicznymi, co pozwala na obliczenie ilorazu q.

Obliczanie brakujących wyrazów ciągu geometrycznego - przykłady

Zróbmy dwa zadania, żeby przećwiczyć te umiejętności.

Obliczanie wyrazów ciągu geometrycznego - zadanie 1

Obliczanie wyrazów ciągu geometrycznego - zadanie 2

Teraz przejdziemy do wyznaczania podstawowych parametrów ciągu arytmetycznego, korzystając z własności tego ciągu.

Zaczniemy od zadań, w których mamy wyznaczyć pierwszy wyraz, iloraz ciągu oraz wzór ogólny ciągu - zróbmy trzy zadania.

Wyznaczanie najważniejszych parametrów ciągu geometrycznego - zadanie 1

Wyznaczanie najważniejszych parametrów ciągu geometrycznego - zadanie 2

Wyznaczanie najważniejszych parametrów ciągu geometrycznego - zadanie 3

W kolejnym zadaniu mamy wyznaczyć dwa wyrazy ciągu, korzystając z zależności pomiędzy wyrazami ciągu.

Obliczanie ilorazu i pierwszego wyrazu ciągu geometrycznego, gdy dane są dwa wyrazy

ZASTOSOWANIE WZORU NA SUMĘ n POCZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU

Na początek przypomnijmy wzór.

DEFINICJA

Jeżeli (a_n) jest ciągiem geometrycznym, to suma n początkowych wyrazów tego ciągu (czyli n-ty wyraz ciągu sum częściowych) wyraża się wzorem:

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q} \cdot a_1 & \text{dla } q \neq 1 \text{ i dowolnej liczby naturalnej dodatniej } n \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \text{ i dowolnej liczby naturalnej dodatniej } n \end{cases}$$

Wykonajmy najpierw cztery przykłady z planszy, a następnie jeszcze jedno zadanie z wykorzystaniem tego wzoru.

Obliczanie sumy n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego - przykłady

Wykorzystanie wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego - zadanie 1

TEST

Moje Testy #46 - Ciąg geometryczny...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#46] Ciąg geometryczny

Zadanie 1 (1 pkt.) Nieskończony ciąg geometryczny (c_n) jest określony wzorem $c_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$, dla $n \geq 1$. Iloraz tego ciągu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 3^{-1} B. 3^{1} C. 3^{-2} D. $3^{\frac{1}{2}}$

Zadanie 2 (1 pkt.) W malejącym ciągu geometrycznym (c_n) dane są: $c_1 = 24$ i $c_3 = 6$. Wtedy c_5 równy jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{2}$ B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Dany jest malejący ciąg geometryczny $\left(\frac{8}{3},\ c,\ \frac{2}{3}\right)$. Wówczas:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $c = -\frac{4}{3}$ B. $c = \frac{4}{3}$ C. $c = -\frac{8}{3}$ D. $c = -\frac{2}{3}$

Zadanie 4 (2 pkt.) Liczby $144,\ x,\ 6$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz szósty wyraz tego ciągu.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Ciąg $(8;\ x;\ 28)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(y,\ x,\ 12,\ z)$ jest geometryczny. Oblicz $x,\ y,\ z$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (1 pkt.) W ciągu geometrycznym (c_n), określonym dla $n \geq 1$, wyraz $c_1 = 4$, natomiast iloraz $q = -1$. Suma piętnastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 4 B. 15 C. -15 D. -4

Zadanie 7 (1 pkt.) Dany jest ciąg geometryczny (c_n) określony wzorem $c_n = 4^{n+1}$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 1494 B. 1360 C. 945 D. 2620

Zadanie 8 (1 pkt.) Liczby $5,\ 10,\ 20$ w podanej kolejności są pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego (c_n) . Suma pięciu początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 200 B. -155 C. -200 D. 155

Zadanie 9 (1 pkt.) Dany jest ciąg geometryczny (c_n) określony wzorem $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Suma czterech początkowych wyrazów tego ciągu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{65}{27}$ B. $-\frac{130}{81}$ C. $\frac{195}{54}$ D. $\frac{130}{81}$

Zadanie 10 (1 pkt.) Dany jest skończony ciąg geometryczny (c_n) , w którym $c_1 = 5,\ q = \frac{1}{2}$ i $n = 8$. Wynika z tego, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $S_8 = 10,5$ B. $S_8 = 10,2$ C. $S_8 = -10,2$ D. $S_8 = 10,4$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

Ciąg Fibonacciego czyli o złotej proporcji

Autor: **Dariusz Kulma**

WSTĘP

Jednym z matematyków, który zajmował się złotą liczbą był **Leonardo Pisano Fibonacciego**, który żył w latach ok. 1175 - 1250 n.e. Co ciekawe, nazwisko jest tak naprawdę przydomkiem, ponieważ Fibonacci znaczy po prosty "syn Bonacciego". Warto dodać, że Fibonacci był gorącym zwolennikiem wprowadzenia arabskiego zapisu liczbowego.

KRÓLIKI A ODKRYCIA MATEMATYCZNE

Fibonacci w 1202 roku wydał książkę **Liber Abaci (Księga Abaku)**. W książce poruszone są tematy podzielności, teorii liczb, symbolika matematyczna, ale również zasady księgowania, reguły zysków i strat czy wymiany pieniędzy. Jednak najsłynniejszym zadaniem stało się zadanie o królikach. Oto ono:

Ile par królików będziemy mieli na końcu roku, jeśli zaczniemy w styczniu z jedną parą królików, ta w każdym następnym miesiącu, poczynając od marca, wyda na świat kolejną parę królików i z każdej pary urodzą się kolejne pary po dwóch miesiącach od narodzin?

Jako przesiębiorca i finansista, zamieścił swoje obliczenia w tabeli. Okazało się, że łączna liczba królików w poszczególnych miesiącach tworzyła zadziwiający ciąg liczb. Kolejne liczby były sumą dwóch poprzednich! Zobacz taką tabelę z danymi.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

MIESIĄC	POKOLENIE 1	POKOLENIE 2	POKOLENIE 3	POKOLENIE 4	POKOLENIE 5	POKOLENIE 6	RAZEM
STYCZEŃ	1	...	...	...	...	...	1
LUTY	1	...	...	...	...	...	1
MARZEC	1	1	...	...	...	...	2
KWIECIEŃ	1	2	...	...	...	...	3
MAJ	1	3	1	...	...	...	5
CZERWIEC	1	4	3	...	...	...	8
LIPIEC	1	5	6	1	...	...	13
SIERPIEŃ	1	6	10	4	...	...	21
WRZESIEŃ	1	7	15	10	1	...	34
PAŹDZIERNIK	1	8	21	20	5	...	55
LISTOPAD	1	9	28	35	15	1	89
GRUDZIEŃ	1	10	36	56	35	6	144

Liczby **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...** można tworzyć w nieskończoność. Taki ciąg nazywamy **ciągiem rekurencyjnym** - każdy kolejny wyraz zależny jest od poprzednich.

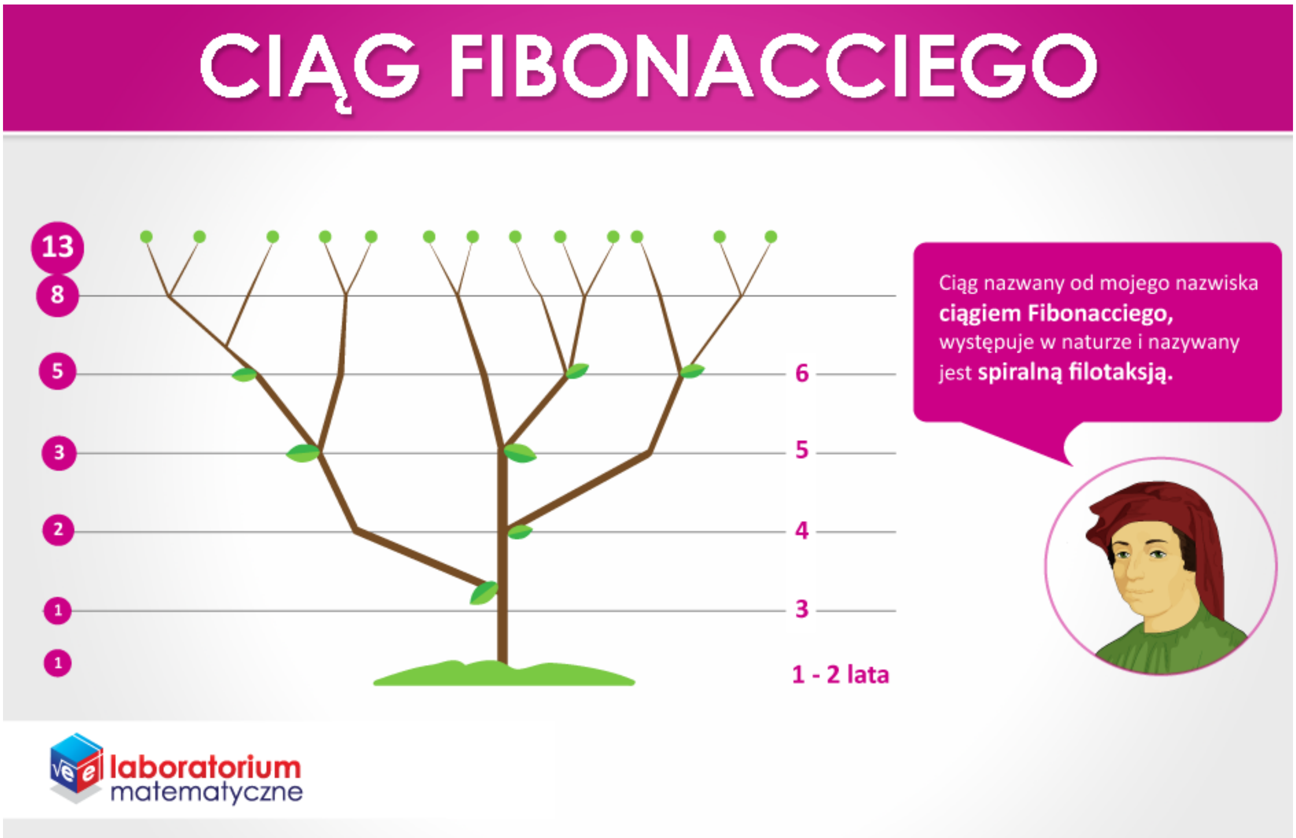
NIESKOŃCZENIE ZŁOTY CIĄG

Ciąg Fibonacciego jest wręcz nibywale powiązane ze złotą liczbą. **Dzieląc kolejne wyrazy tego ciągu przez wyraz poprzedni, otrzymujemy liczby coraz bliższe liczbie zlotej** φ (patrz tabela poniżej). Już dzieląc wyraz trzynasty przez dwunasty mamy błąd rzędu 0.00002. **Granicą ciągu Fibonacciego jest więc złota liczba.**

WYRAZ CIĄGU	a_n + 1/a_n	RÓŻNICA MIĘDZY LICZBĄ φ
1	1	0.6180339887
1	2	0.3819660113
2	1.5	0.1180339887
3	1.6666666667	0.0486326779
5	1.6	0.0180339887
8	1.625	0.0069660113
13	1.6153846154	0.0026493734
21	1.619047619	0.0010136303
34	1.6176470588	0.0003869299
55	1.6181818182	0.0001478294
89	1.6179775281	0.0000564607
144	1.6180555556	0.0000215668

CIĄG FIBONACCIEGO W PRZYRODZIE

Co zadziwiające ciąg Fibonacciego można odnaleźć w wielu aspektach w przyrodzie. Chociażby ilość kolejnych pędów czy gałęzi drzew albo płatków liścia tworzy ten specyficzny ciąg.



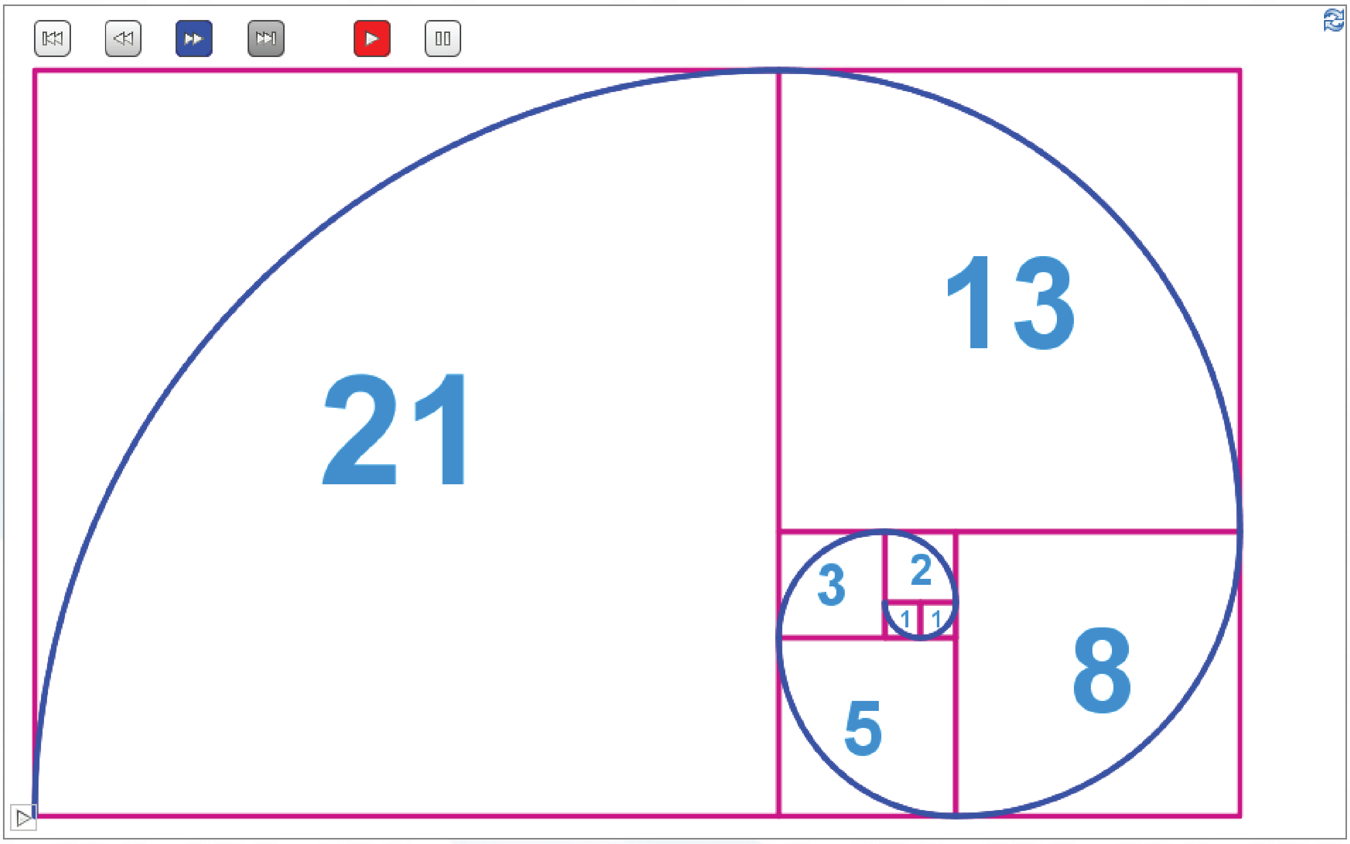
ZŁOTY PROSTOKĄT I SPIRALA FIBONACCIEGO

Niezwykle ciekawą zależnością jest **spirala Fibonacciego**, która ma bezpośredni związek ze **złotym postokątem, czyli takim, którego stosunek długości do szerokości jest w złotym podziale.**

W złotym prostokącie, to gdy zaczniemy rysować łuki o długości promienia, który jest kolejnym wyrazem ciągu Fibonacciego, to otrzymamy spiralę.

Zobaczmy animację, posługując się poniższą planszą.

Graficzna interpretacja ciągu Fibonacciego



Spirala Fibonacciego

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, 10 Grudzień 2012, Utworzony z GeoGebra

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

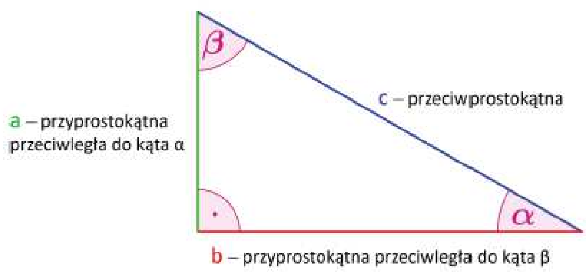
Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Autor: **Dariusz Kulma**

OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH Z DEFINICJI

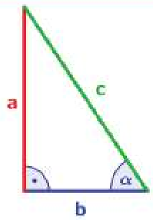
Zaczniemy od powtórzenia, jak liczymy poszczególne wartości funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.

Przypomnijmy również, że **przeciwprostokątna** to bok leżący naprzeciwko kąta prostego w trójkącie, a **przyprostokątne** to boki, pomiędzy którymi znajduje się kąt prosty w trójkącie.



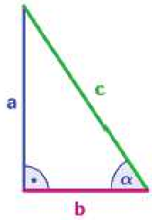
DEFINICJE

Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.



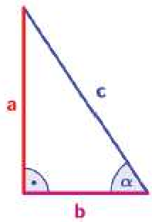
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α .



$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Zróbmy dwa zadania, żeby utrwalić poszczególne funkcje trygonometryczne.

Odczytywanie funkcji trygonometrycznych w trójkącie - przykłady

Obliczanie funkcji trygonometrycznych w trójkącie - przykłady

WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA KĄTÓW 30°, 45°, 60°

Najczęściej w zadaniach poszukujemy kątów prostokątnych, w których występują kąty 30°, 45° lub 60°. Przypomnijmy wartości funkcji dla tych wybranych kątów.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

PODSUMOWANIE

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Zróbmy dwa zadania.

Działania z wykorzystaniem wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów mniejszych niż 90 stopni - przykłady

Wyznaczanie kątów za pomocą funkcji trygonometrycznych - przykłady

WYZNACZANIE WARTOŚCI POZOSTAŁYCH FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH, GDY DANA JEST WARTOŚĆ JEDNEJ Z FUNKCJI

Jeżeli znamy wartość funkcji sinus lub cosinus dowolnego kąta ostrego, to możemy obliczyć wartości pozostałych funkcji, posługując się jedną z trzech metod.

SPOSÓB 1 — z wykorzystaniem jedynki trygonometrycznej

SPOSÓB 2 — z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa

SPOSÓB 3 — z wykorzystaniem trójek pitagorejskich

Wykorzystamy poniższą planszę.

Wyznaczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych, gdy podany jest sinus lub cosinus - wstęp

Wykonajmy kilka przykładów dla przećwiczenia.

Wyznaczanie pozostałych wartości funkcji trygonometrycznych z wykorzystaniem wzorów - przykłady

Obliczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych - przykłady

Obliczanie wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych 2 - przykłady

TEST

Moje Testy #47 - Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym...

TEST

[#47] Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

Zadanie 1 (1 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek). Kąt α ma wartość:

odpowiedź >>> kratka >>>

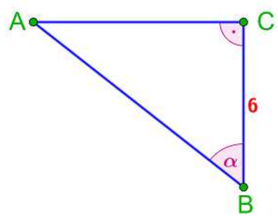
A. 85° B. 30° C. 45° D. 60°

Zadanie 2 (1 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny (zobacz rysunek), gdzie $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Wynika z tego, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $|AC| = 4\sqrt{3}$ B. $|AC| = 6$ C. $|AC| = 2\sqrt{3}$

D. $|AC| = 10$



Zadanie 3 (1 pkt.) Jeżeli $\alpha = 45^\circ$, to wyrażenie $\sin\alpha + \cos\alpha$ ma wartość:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 0 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $-2\sqrt{2}$

Zadanie 4 (1 pkt.) Kąt α jest kątem ostrym i $\cos\alpha = \dfrac{24}{25}$. Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{25}{7}$

B. $\sin\alpha = \dfrac{25}{7}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{25}{24}$

C. $\sin\alpha = \dfrac{7}{24}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{7}{25}$

D. $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}$ oraz $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{7}{24}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Dany jest kąt ostry α i $\cos\alpha = \dfrac{5}{9}$. Wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 1$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{25}{81}$ B. $\frac{9}{13}$ C. $-\frac{25}{81}$ D. $\frac{79}{81}$

Zadanie 6 (1 pkt.) Jeżeli kąt α jest kątem ostrym i $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$, to $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$ równa się:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $1,75$ B. $2,75$ C. $2,25$ D. $3,05$

Zadanie 7 (1 pkt.) Kąt α jest kątem ostrym i $\sin\alpha = \frac{3}{7}$. Wtedy $\cos\alpha$ jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{7}{40}$ B. $\frac{\sqrt{40}}{7}$ C. $\frac{7}{\sqrt{40}}$ D. $\frac{\sqrt{40}}{49}$

Zadanie 8 (2 pkt.) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin\alpha = \frac{5}{8}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\text{tg}^2\alpha + 2}{3}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Kąt α jest ostry oraz $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\text{tg}\alpha - 1}{2}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90 stopni

Autor: **Dariusz Kulma**

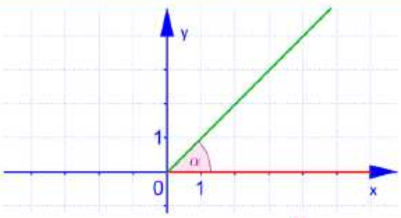
Wcześniej zajmowaliśmy się funkcjami trygonometrycznymi w trójkącie prostokątnym, a teraz przejdziemy do funkcji trygonometrycznych dla kątów o miarach od 0 stopni do 180 stopni.

Przypomnijmy, jak określamy funkcje trygonometryczne dla takich kątów.

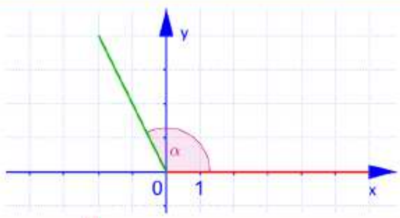
W celu określenia funkcji trygonometrycznych dla kątów od 0° do 180° umieszczamy kąt w układzie współrzędnych w następujący sposób:

- wierzchołek kąta znajduje się w początku układu współrzędnych $(0; 0)$,
- jedno ramię kąta (tzw. ramię początkowe) pokrywa się z dodatnią półosią x,
- drugie ramię kąta (tzw. ramię końcowe lub wodzące) to półprosta zaczepiona w początku układu współrzędnych. Miarę kąta obliczamy od pierwszego ramienia do drugiego ramienia przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Dla rozważanych kątów od 0° do 180° ramię drugie może znajdować się w I lub II ćwiartce układu współrzędnych lub na odpowiednich półosiach.

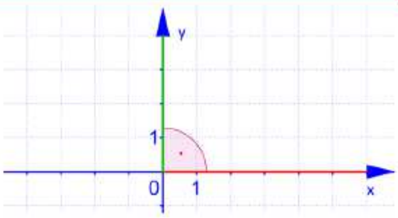
α – kąt ostry



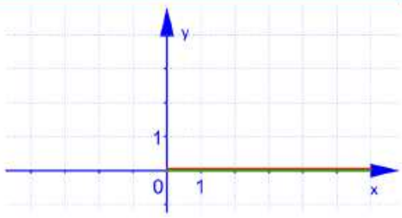
α – kąt rozwarty



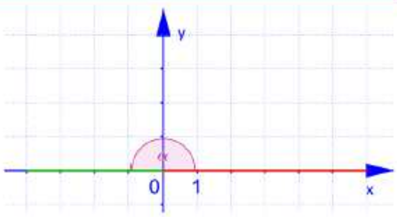
$\alpha = 90^\circ$



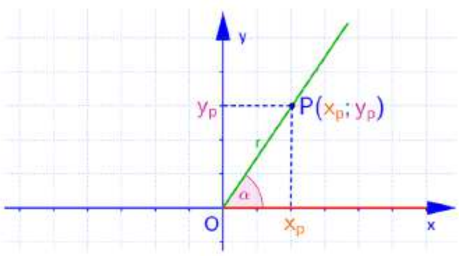
$\alpha = 0^\circ$

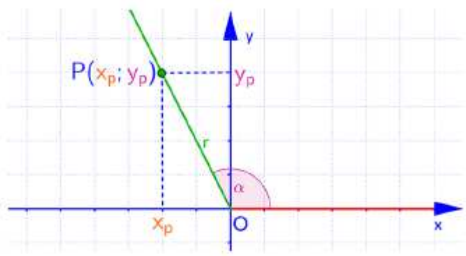


$\alpha = 180^\circ$



Aby określić wartość funkcji trygonometrycznych kąta $\alpha(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$, wybieramy na ramieniu wodzącym dowolny punkt P różny od punktu $O(0; 0)$, taki, że $P(x_p; y_p)$.





$r = |OP| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ – promień wodzący punktu P

Sinusem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu (różnego od punktu O) leżącego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

$$\sin\alpha = \frac{y_p}{r}$$

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek odciętej dowolnego punktu (różnego od punktu O) leżącego na ramieniu wodzącym kąta do promienia wodzącego tego punktu.

$$\cos\alpha = \frac{x_p}{r}$$

Tangensem kąta α nazywamy stosunek rzędnej dowolnego punktu (różnego od punktu O) leżącego na ramieniu wodzącym kąta do odciętej tego punktu, przy założeniu, że jest ona różna od zera.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_p}{x_p}$$

PODSUMOWANIE

α	0°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	nie istnieje	0

WYZNACZANIE WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH DLA KĄTÓW POWYŻEJ 90°

warto wiedzieć...

Do obliczania funkcji trygonometrycznych kątów większych z przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$ wystarczy nam umiejętność przedstawiania tych kątów w postaci: $180^\circ - \alpha$ oraz wiedza o tym, jaki znak przyjmują poszczególne funkcje trygonometryczne w drugiej ćwiartce układu współrzędnych.

Przypomnijmy więc **wzory redukcyjne** oraz **znaki funkcji w drugiej ćwiartce.**

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

WZORY REDUKCYJNE $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$			
φ	I	II	
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$
	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
$\sin \varphi$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
$\cos \varphi$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\mathrm{tg}\, \varphi$	$\mathrm{ctg}\, \alpha$	$-\mathrm{ctg}\, \alpha$	$-\mathrm{tg}\, \alpha$

TABELA ZNAKÓW FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH W POSZCZEGÓLNYCH ĆWIARTKACH				
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	–	–
$\cos \alpha$	+	–	–	+
$\mathrm{tg}\, \alpha$	+	–	+	–
$\mathrm{ctg}\, \alpha$	+	–	+	–

warto wiedzieć...

Tabelkę ze znakami funkcji można zapamiętać, odwołując się do wierszyka:

„W pierwszej ćwiartce
same plusy,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej
tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus".

W praktyce więc korzystamy z trzech wzorów:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$
$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$
$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$$

Przejdźmy do zadań. Na początek zrobimy kilka przykładów z pierwszej planszy, a następnie jeszcze jedno zadanie, w którym należy obliczyć wartość wyrażeń.

Wartości funkcji trygonometrycznych z przedziału 90 -180 stopni

Działania z wykorzystaniem wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów większych od 90 stopni a mniejszych niż 180 stopni - przykłady

TEST

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Moje Testy #48 - Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90 stopni...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#48] Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów powyżej 90 stopni

Zadanie 1 (1 pkt.) Wartość $\mathrm{tg}120^\circ$ wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\sqrt{3}$ **B.** -1 **C.** $-\sqrt{3}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 2 (1 pkt.) Liczba $\sin 150^\circ$ wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** 1 **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Liczba $\sin 135^\circ$ jest równa liczbie:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\mathrm{tg}\ 30^\circ$ **B.** $\sin 60^\circ$ **C.** $\cos 45^\circ$ **D.** $\cos 30^\circ$

Zadanie 4 (2 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\cos 150^\circ}{2\mathrm{tg}^2\ 135^\circ}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\sin 150^\circ \cdot \mathrm{tg}45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \mathrm{tg}150^\circ$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (1 pkt.) Wartość $\mathrm{tg}150^\circ$ wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ **D.** -1

Zadanie 7 (1 pkt.) Wartość $\sin 135^\circ$ wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 1 **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 8 (1 pkt.) Liczba $\sin 120^\circ$ jest równa liczbie:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\cos 30^\circ$ **B.** $\mathrm{tg}60^\circ$ **C.** $\cos 45^\circ$ **D.** $\cos 60^\circ$

Zadanie 9 (2 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\frac{3\mathrm{tg}^2 120^\circ}{2\cos^2 135^\circ}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Oblicz wartość wyrażenia $\mathrm{tg}135^\circ \cos 60^\circ + \mathrm{tg}60^\circ \cos 135^\circ$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Zależności między funkcjami trygonometrycznymi

Autor: **Dariusz Kulma**

Pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi dla tego samego kąta zachodzą następujące związki.

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości: $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ $\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = 1$

Równości te nazywamy wzorami redukcyjnymi.

Tożsamość $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ nazywamy jedynką trygonometryczną.
Jest ona prawdziwa dla każdego kąta $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

Dla dowolnego kąta ostrego α prawdziwe są równości: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Zobaczmy, jak wzory stosujemy w praktyce na podstawie czterech przykładów z poniższej planszy. Następnie zróbmy dwa kolejne zadania.

- Wykorzystanie zależności trygonometrycznych - przykłady
- Zadanie na wykorzystanie własności trygonometrycznych 1
- Zadanie na wykorzystanie własności trygonometrycznych 2

A teraz dwa zadania nieco trudniejsze, ale na początek przypomnijmy, czym jest **tożsamość trygonometryczna**.

Tożsamością trygonometryczną nazywamy równość dwóch wyrażeń zbudowanych ze związków trygonometrycznych prawdziwą dla wszystkich zmiennych z dziedziny.

Tożsamość trygonometryczna 4

Tożsamość trygonometryczna 3

TEST

Moje Testy #49 - Zależności między funkcjami trygonometrycznymi...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

TEST

[#49] Zależności między funkcjami trygonometrycznymi

Zadanie 1 (1 pkt.) Jeżeli kąt α jest ostry, to wyrażenie $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} - \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 0 B. 1 C. 2 D. $2\sin^2\alpha$

Zadanie 2 (1 pkt.) Jeżeli α jest kątem ostrym oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, to wartość wyrażenia $\frac{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}{3\sin\alpha - 8\cos\alpha}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-\frac{2}{7}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{7}$ D. $\frac{5}{9}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Wartość wyrażenia $\frac{\sin^2 49^\circ + \cos^2 49^\circ - \cos 60^\circ}{\sin^2 90^\circ}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

Zadanie 4 (1 pkt.) Wartość wyrażenia $\frac{\cos^2 65^\circ + \sin^2 65^\circ - 3}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ + 1}$ jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

Zadanie 5 (1 pkt.) Kąt α jest kątem ostrym oraz $\sin 29^\circ = \cos\alpha$. Wtedy miara kąta α wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 29° B. 71° C. 42° D. 61°

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 6 (1 pkt.) Wyrażenie $\sqrt{4\text{tg } 50^\circ \text{tg } 40^\circ}$ jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\sqrt{2}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** 2

Zadanie 7 (1 pkt.) Dana jest liczba $a = \cos 110^\circ \cos 70^\circ - \sin 70^\circ \sin 110^\circ$. Wtedy a^3 :

odpowiedź >>> kratka >>>

A. -1 **B.** -4 **C.** 9 **D.** 1

Zadanie 8 (2 pkt.) Oblicz bez użycia tablic trygonometrycznych wartość wyrażenia $\frac{2\cos^2 38^\circ + 2\cos^2 52^\circ}{\text{tg}42^\circ \text{tg}48^\circ + 4}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Kąt α jest kątem ostrym i $\text{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. Oblicz $\frac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 6\sin\alpha}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) Kąt α jest ostry i $\frac{4}{\cos^2\alpha} + \frac{4}{\sin^2\alpha} = 81$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Wykorzystanie tablic trygonometrycznych

Autor: **Dariusz Kulma**

ODCZYTYWANIE PRZYBLIŻONYCH WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH Z TABLIC

Aby podać wartości funkcji trygonometrycznych kątów o miarach od 0° do 90°, korzystamy z tablic wartości tych funkcji

Możemy również wykorzystać tablice, które opracowane są w formie planszy interaktywnej.

Tablice trygonometryczne

Można zaobserwować, że w kolejnych wierszach tablic trygonometrycznych zachodzą równości: $\sin 0^\circ = \cos 90^\circ$, $\sin 1^\circ = \cos 89^\circ$, $\sin 2^\circ = \cos 88^\circ$, $\sin 3^\circ = \cos 87^\circ$, itd. Wynika z tego, że istnieje zależność między sinusem a cosinusem, którą zapisujemy w postaci $\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$.

Skorzystajmy więc z tablic, aby zrobić pierwsze zadanie.

Odczytywanie wartości z tablic trygonometrycznych - przykłady

Umiejętność odczytywania wartości funkcji trygonometrycznych dla konkretnych miar kątów jest bardzo istotna i często niezbędna w zadaniach praktycznych, jak np. te poniżej.

Zadanie praktyczne z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych

ZAD. Kolejka linowa wjeżdża na górski szczyt pod kątem 32°, a jej długość wynosi 1200 m. Dolna stacja kolejki znajduje się na wysokości 850 m, a górna na szczycie. Oblicz, na jakiej wysokości znajduje się górna stacja kolejki.

ZAD. Paralotnia po starcie przebyła w linii prostej odległość 5 km, lecąc pod kątem 26°. Oblicz, ile metrów nad powierzchnią ziemi znajdowała się wtedy paralotnia.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

OBLICZANIE MIARY KĄTA OSTREGO, DLA KTÓREJ FUNKCJA TRYGONOMETRYCZNA PRZYJMUJE DANĄ WARTOŚĆ

Jest to kolejna umiejętność związana z odczytywaniem wartości z tablic trygonometrycznych, z tym, że teraz mamy sytuację odwrotną, czyli mamy podaną wartości funkcji, którą musimy odszukać w tablicach i odczytać miarę kąta, któremu odpowiada dana wartość.

Gdy dana wartość jest w tablicach, to sytuacja jest dość łatwa, ale co zrobić, gdy w tablicach nie możemy znaleźć wskazanej wartości funkcji? Wtedy postępujemy według schematu omówionego w przykładzie poniżej.

PRZYKŁAD

Korzystając z tablic wartości funkcji trygonometrycznych, odczytaj przybliżoną do całości miarę kąta α, dla której: $\sin\alpha = 0{,}6$

Liczby 0,6 nie ma w kolumnie drugiej oznaczonej $\sin\alpha \cos\beta$, więc szukamy w tej kolumnie dwóch liczb, pomiędzy którymi znajduje się dana liczba, i wybieramy z nich tę, która różni się od niej o mniejszą wartość.

$$\underbrace{0{,}5878}_{36^\circ} < 0{,}6 < \underbrace{0{,}6018}_{37^\circ}$$

$$\begin{array}{r} 0{,}6000 \\ -\ 0{,}5878 \\ \hline 0{,}0122 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}6018 \\ -\ 0{,}6000 \\ \hline 0{,}0018 \end{array}$$

Zatem $\alpha \approx 37^\circ$

TEST

Moje Testy #50 - Wykorzystanie tablic trygonometrycznych...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#50] Wykorzystanie tablic trygonometrycznych

Zadanie 1 (1 pkt.) Jeżeli $a = \cos 55^\circ$ i $b = \text{tg}\ 55^\circ$, to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a < b$ **B.** $a > b$ **C.** $\frac{a}{2} = 2b$ **D.** $a = b$

Zadanie 2 (1 pkt.) Prawdą jest, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\cos 43^\circ = \text{tg}\ 43^\circ$ **B.** $\sin 57^\circ = \cos 43^\circ$

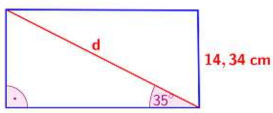
C. $\sin 24^\circ = \cos 66^\circ$ **D.** $\sin 66^\circ = \text{tg}\ 24^\circ$

Zadanie 3 (1 pkt.) Dana jest prostokątna działka (zobacz rysunek). Przekątna działki ma w przybliżeniu długość:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 28 metrów, **B.** $8,22$ metra, **C.** $15,25$ metra,

D. 25 metrów.



Zadanie 4 (1 pkt.) Jeżeli α i β są kątami ostrymi oraz $\alpha + \beta = 90^\circ$, to wartość wyrażenia $\dfrac{4\cos\beta + 2\sin\alpha}{3\sin\alpha + 3\cos\beta}$ wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

Zadanie 5 (2 pkt.) Drzewo o wysokości 7 metrów rzuca cień o długości 15 metrów. Oblicz kąt padania promieni słonecznych. Wynik podaj z dokładnością do 1° .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (1 pkt.) Murarz oparł drabinę o długości 4 metrów o ścianę. Górny kraniec drabiny sięgnął na wysokości 290 cm. Kąt, pod jakim nachylona jest drabina do podłoża wynosi około:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 46° **B.** 30° **C.** 36° **D.** 47°

Zadanie 7 (1 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny o bokach $5,\ 12,\ 13$. Najmniejszy kąt ma wartość około:

odpowiedź >>> kratka >>>

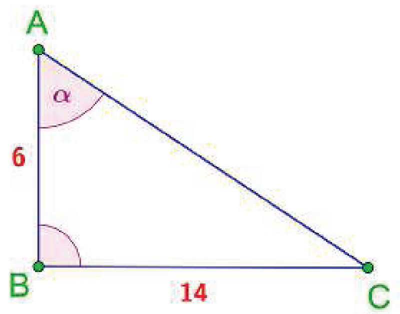
A. 23° **B.** 69° **C.** 82° **D.** 22°

Zadanie 8 (1 pkt.) Dany jest prostokąt o bokach 5 i 15 . Kąt między przekątną prostokąta a najdłuższym bokiem jest równy około:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 71° **B.** 19° **C.** 21° **D.** 20°

Zadanie 9 (1 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny ABC o przyprostokątnych $|AB| = 6,\ |BC| = 14$ (zobacz rysunek). Kąt α ma miarę około:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 66° **B.** 67° **C.** 68° **D.** 28°

Zadanie 10 (2 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny o długościach przyprostokątnych 5 oraz 6 . Wyznacz miary kątów ostrych tego trójkąta prostokątnego z dokładnością do 1° .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

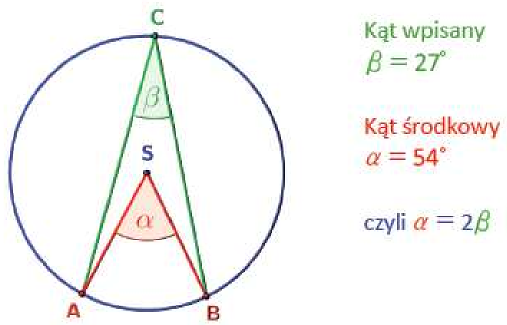
Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zależność między kątem wpisanym i środkowym

Autor: **Dariusz Kulma**

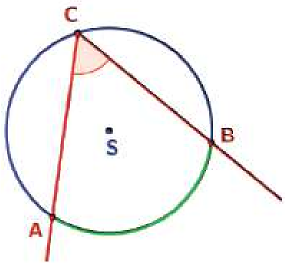
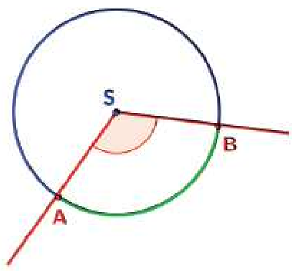
Jedna z podstowywych zależności, często pojawiających się w zadaniach z planimetrii, to **twierdzenie o kącie wpisanym i kącie środkowym opartym na tym samym łuku.**

Przypomnijmy to twierdzenie.

TWIERDZENIE	PRZYKŁAD
Jeżeli kąt wpisany i kąt środkowy oparte są na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.	

Kąt środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku okręgu

Skoro mówimy o kącie wpisanym i środkowym, to jeszcze przypomnijmy definicje obu kątów.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Kątem wpisanym w okrąg nazywamy kąt wypukły, którego wierzchołkiem jest dowolny punkt na okręgu, a w ramionach tego kąta zawierają się cięciwy.	
Kątem środkowym nazywamy kąt, którego wierzchołkiem jest środek okręgu.	

Na początek zróbmy kilka prostych przykładów z planszy poniżej.

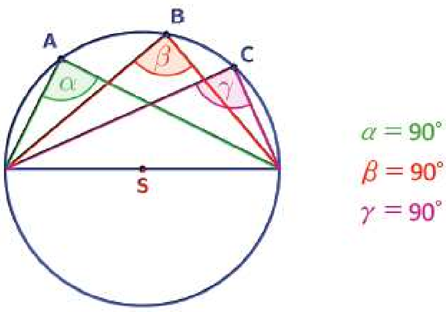
Kąty środkowe i wpisane oparte na tym samym łuku - przykłady

Bezpośrednio z tym twierdzeniem łączą się jeszcze trzy poniższe zależności.

W szczególnym przypadku, jeśli kąt środkowy ma miarę 180°, czyli jest oparty na półokręgu (mówimy również, że jest oparty na średnicy), to kąt wpisany, oparty na tym samym łuku, ma miarę 90°.

TWIERDZENIE

Kąt wpisany, oparty na półokręgu, jest kątem prostym.

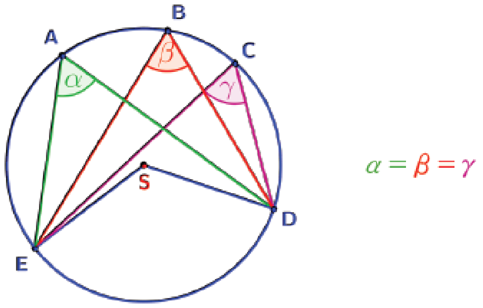


Twierdzenie o kątach wpisanych opartych na średnicy okręgu

TWIERDZENIE

Kąty wpisane, oparte na tym samym łuku, są równe.

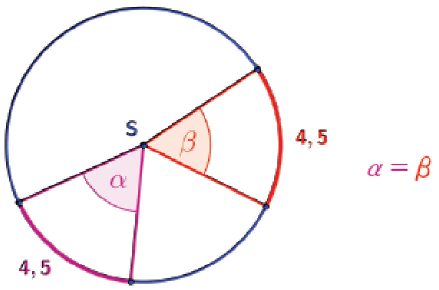
Możemy również uogólnić, że kąty wpisane oparte na łukach tej samej długości mają te same miary.



Twierdzenie o kątach wpisanych opartych na tym samym łuku.

TWIERDZENIE

Kąty środkowe oparte na łukach tej samej długości mają te same miary.



Twierdzenie o kątach środkowych opartych na tych samych łukach

Przechodzimy teraz do zadań z wykorzystaniem powyższych zależności.

Kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku - zadanie 1

Kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku - zadanie 2

Kąt środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku - zadanie 3

Kąt środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku - zadanie 4

Kąt środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku - zadanie 5

Kąty środkowy i wpisany oparte na tym samym łuku - zadanie 6

TEST

Na zakończenie test podsumowujący dany materiał.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Moje Testy #52 - Zależność między kątem wpisanym i środkowym...

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

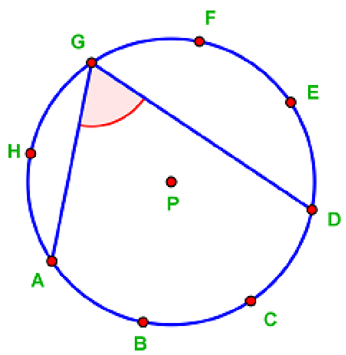
Materiały » BelferBOX » Moje Testy

« POWRÓT

TEST

[#52] Zależność między kątem wpisanym i środkowym

Zadanie 1 (1 pkt.) Okrąg o środku O został podzielony punktami na osiem równych łuków. Miara kąta wpisanego AGD zaznaczonego na rysunku wynosi:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 135° B. 70° C. 120° D. $67,5^\circ$

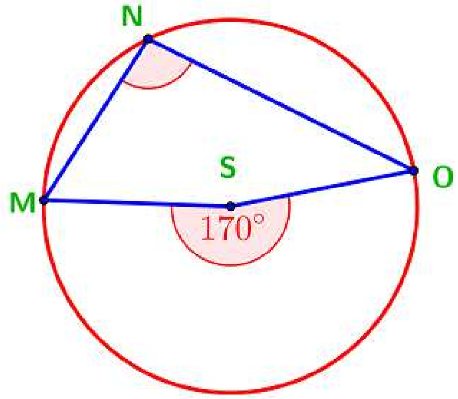
Zadanie 2 (1 pkt.) Kąt środkowy oparty na $\frac{5}{12}$ długości okręgu ma miarę:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 120° B. 150° C. 30° D. 75°

Zadanie 3 (1 pkt.) Punkty $M,\ N,\ O$ leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta wpisanego MNO jest równa:

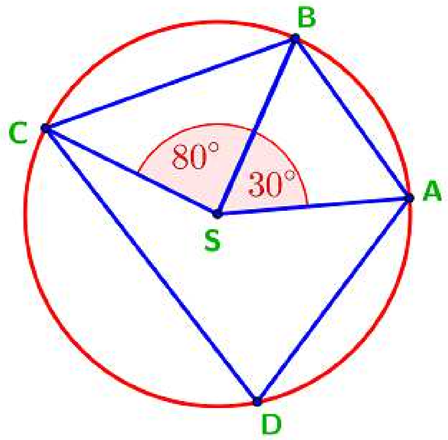
Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 95° **B.** 150° **C.** 190° **D.** 85°

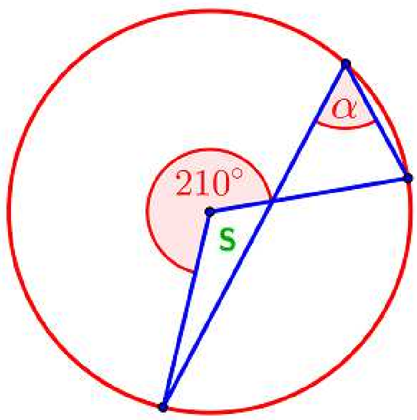
Zadanie 4 (1 pkt.) Punkt S jest środkiem okręgu. Kąt wpisany CBA ma miarę:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 250° **B.** 85° **C.** 125° **D.** 95°

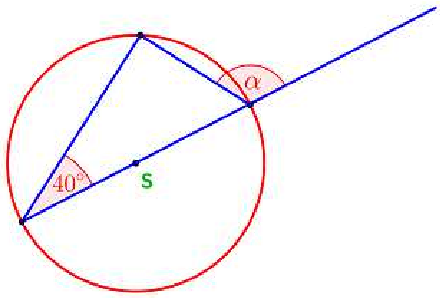
Zadanie 5 (1 pkt.) Punkt S jest środkiem okręgu. Kąt α zaznaczony na rysunku ma miarę:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 110° **B.** 150° **C.** 75° **D.** 80°

Zadanie 6 (1 pkt.) Punkt S jest środkiem okręgu. Kąt α zaznaczony na rysunku ma miarę:



odpowiedź >>> kratka >>>

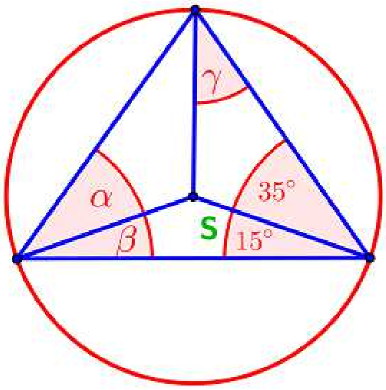
A. 130° B. 60° C. 30° D. 150°

Zadanie 7 (1 pkt.) Suma kątów: środkowego i wpisanego opartych na tym samym łuku wynosi 243° . Miara kąta wpisanego jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 81° B. 94° C. 162° D. 243°

Zadanie 8 (1 pkt.) Punkt S jest środkiem okręgu. Prawdą jest, że:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\gamma < \beta < \alpha$ B. $\beta < \gamma < \alpha$

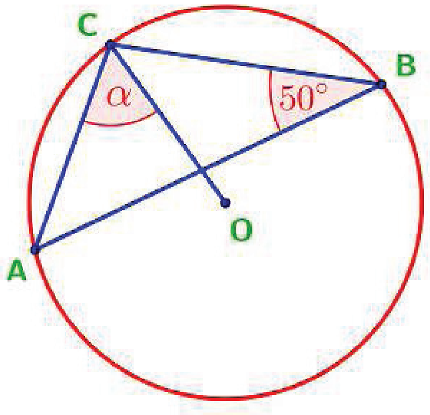
C. $\alpha < \beta < \gamma$ D. $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

Zadanie 9 (2 pkt.) Oblicz miary kątów: środkowego i wpisanego opartych na $\frac{46}{80}$ długości okręgu.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Dany jest trójkąt ABC wpisany w okrąg o środku w punkcie O . Miara kąta ABC jest równa 50° (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta α zaznaczonego na rysunku.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Dowody geometryczne

Autor: **Dariusz Kulma**

DOWODY GEOMETRYCZNE Z WYKORZYSTANIEM TW. O KĄCIE WPISANYM I ŚRODKOWYM

- Dowód geometryczny z wykorzystaniem kątów wpisanych

DOWODY GEOMETRYCZNE Z WYKORZYSTANIEM PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

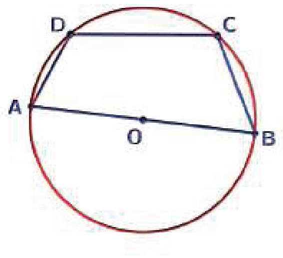
- Trójkąty przystające - dowód geometryczny 1
- Trójkąty przystające - dowód geometryczny 2
- Trójkąty przystające - dowód geometryczny 3

DOWODY GEOMETRYCZNE Z WYKORZYSTANIEM PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

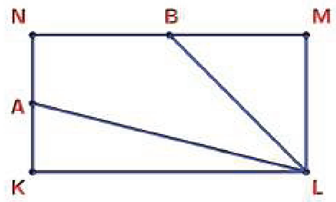
- Trójkąty podobne - zadanie 4

POZOSTAŁE DOWODY GEOMETRYCZNE

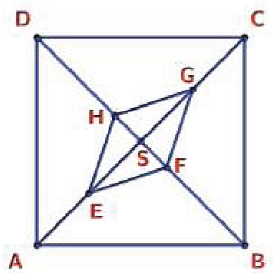
ZAD. Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg. Bok AB jest średnicą tego okręgu. Udowodnij, że $|AC|^2 + |BC|^2 = |AD|^2 + |BD|^2$.



ZAD. W prostokącie $KLMN$ punkt A jest środkiem boku KN, a punkt B środkiem boku NM (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{\triangle ABL} = P_{\triangle ABN} + P_{\triangle BLM}$.



ZAD. Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne kwadratu przecinają się w punkcie S. Punkty E i G są środkami odcinków odpowiednio AS i SC, a punkty F i H leżą na przekątnej DB i spełniają warunki: $|DH| = 2|HS|$ i $|FB| = 2|SF|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $P_{ABCD} = 6P_{EFGH}$.



Dowód geometryczny - kąty 1

Dowód geometryczny - kąty 2

TEST

Moje Testy #53 - Dowody geometryczne...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

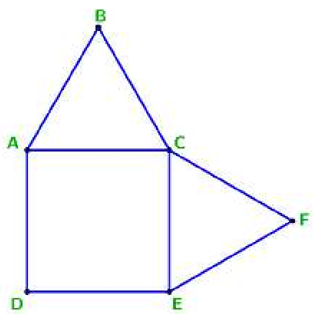
Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#53] Dowody geometryczne

Zadanie 1 (4 pkt.) Na boku trójkąta równobocznego ABC zbudowano kwadrat, a na boku kwadratu zbudowano kolejny trójkąt równoboczny (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt BDF jest równoboczny.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



2° Obliczamy miarę kąta BAD : $|\angle BAD| = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

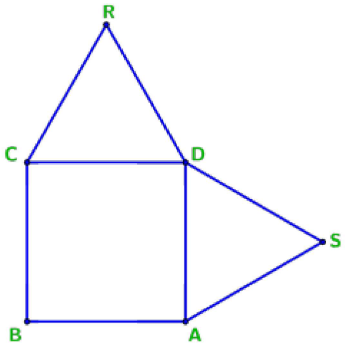
3° Obliczamy miarę kąta DEF : $|\angle DEF| = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

4° Obliczamy miarę kąta BCF : $|\angle CF| = 360^\circ - (90^\circ + 2 \cdot 60^\circ) = 150^\circ$

5° Trójkąty BAD, DEF i BCF są trójkątami równoramiennymi, a kąt między ramionami w tych trójkątach wynosi 150° . Są to więc trójkąty przystające, stąd $|DB| = |DF| = |BF|$, a więc trójkąt BDF jest równoboczny.

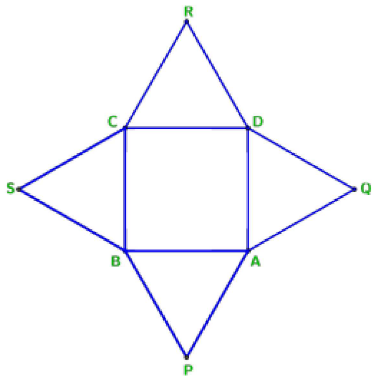
Zadanie 2 (4 pkt.) Na bokach DC i AD kwadratu $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne (zobacz rysunek). Wykaż,że trójkąt BSR jest równoboczny.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 3 (4 pkt.) Na bokach kwadratu $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne (zobacz rysunek). Wykaż,że trójkąt $PQRS$ jest kwadratem.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

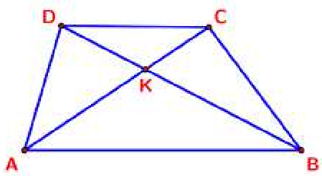


Zadanie 4 (2 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny ABC , gdzie wysokość $|CD| = h$. Wysokość CD podzieliła przeciwprostokątną AB na odcinki o długościach k i l . Wykaż, że $h = \sqrt{kl}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (5 pkt.) Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$. W trapezie poprowadzono przekątne przecinające się w punkcie K . Wiedząc, że $|AB| = 12,\ |CD| = 8$, oraz pole trójkąta CDK równe jest 16 , wykaż, że trójkąty AKD i BKC mają równe pola o wartości 24 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 6 (2 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny ABC , gdzie wysokość $|CD| = h$. Wysokość CD podzieliła przeciwprostokątną AB na dwa odcinki.

Wykaż, że $h = \dfrac{|BC| \cdot |AD|}{|AC|}$

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (2 pkt.) Dany jest trójkąt prostokątny ABC , gdzie wysokość $|CD| = h$. Wysokość CD podzieliła przeciwprostokątną AB na dwa odcinki.

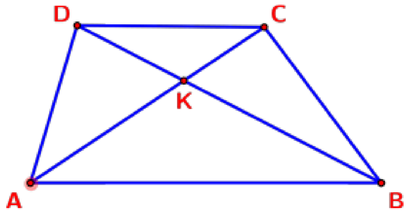
Wykaż, że $h = \dfrac{|BC| \cdot |AC|}{|AB|}$

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (5 pkt.) Dany jest trapez $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$. W trapezie poprowadzono przekątne przecinające się w punkcie K . Wiedząc, że

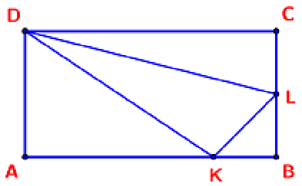
$|AB| = 24,\ |CD| = 16$, oraz pole trójkątów AKD i BKC mają równe pola o wartości 36 oblicz pole trójkąta CDK.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



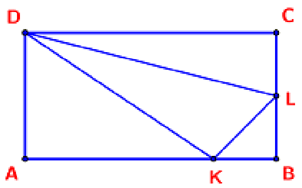
Zadanie 9 (2 pkt.) W prostokącie $ABCD$ punkt K leży na boku AB w taki sposób, że $|AK| = 2|KB|$, a punkt L jest środkiem boku BC (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = x$ i $|CD| = y$, wykaż, że $P_{DKL} = \frac{1}{3} P_{ABCD}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



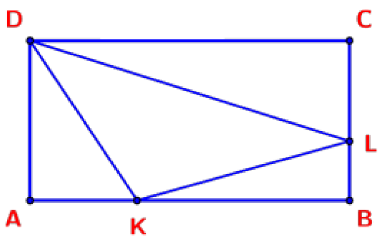
Zadanie 10 (2 pkt.) W prostokącie $ABCD$ punkt K leży na boku AB w taki sposób, że $|AK| = 3|KB|$, a punkt L jest środkiem boku BC (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = x$ i $|CD| = y$, wykaż, że $P_{DKL} = \frac{5}{16} P_{ABCD}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 11 (2 pkt.) W prostokącie $ABCD$ punkt K leży na boku AB w taki sposób, że $|KB| = 3|AK|$, a punkt L w taki sposób, że $|LB| = 2|CL|$ (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = x$ i $|CD| = y$, wykaż, że $P_{DKL} = \frac{5}{12} P_{ABCD}$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Przystawanie i podobieństwo figur

Autor: **Dariusz Kulma**

O podobieństwie i przystawaniu figur w geometrii mówimy często. Należy jednak pamiętać, że są to oddzielne pojęcia i wskazują na różne cechy figur.

FIGURY PRZYSTAJĄCE

Zaczniemy od przystawania figur. Najprościej możemy powiedzieć, że dwie figury będą przystające, jeśli są identyczne, tzn. gdybyśmy je na siebie nałożyli, to by się pokryły.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Dwie figury są przystające, gdy jedna z nich jest obrazem drugiej w symetrii, obrocie lub przesunięciu (możemy powiedzieć, że figury są przystające, gdy można je na siebie nałożyć „ruchem sztywnym" w taki sposób, by się pokrywały).	Figury przystające: ▶ dwa koła o tym samym promieniu, ▶ dwa kwadraty o tym samym boku, ▶ dwie proste, ▶ dwa punkty, ▶ dwa trójkąty równoboczne o tym samym boku, ▶ dwa pięciokąty foremne o tym samym boku.

WYJAŚNIENIE

Figury przystające mają te same wymiary i kształty. Wielokąty są przystające, jeśli ich odpowiednie boki i odpowiednie kąty są równe.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

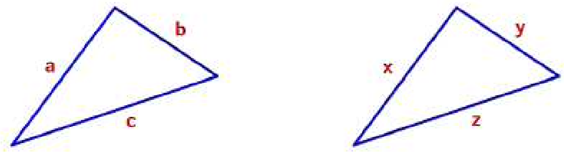
CECHY PRZYSTAWANIA TRÓJKĄTÓW

Najczęściej będziemy korzystać z przystawania trójkątów. Możemy wyróżnić trzy cechy - jeśli któraś z nich jest spełniona w dwóch dowolnych trójkątach, to trójkąty te są do siebie przystające.

TWIERDZENIA

CECHA *bbb*

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki są tej samej długości: $a = x$, $b = y$, $c = z$.



CECHA *bkb*

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa boki są tej samej długości oraz kąt pomiędzy tymi bokami ma tę samą miarę: $a = x$, $b = y$, $\alpha = \beta$.

CECHA *kbk*

Dwa trójkąty są przystające wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa kąty są tej samej miary oraz bok przyległy do obu kątów jest tej samej długości: $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$, $a = x$.

Jeśli trójkąty ABC i $A'B'C'$ są przystające, to oznaczamy je: $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Zróbmy kilka przykładów dotyczących przystawania trójkątów.

Trójkąty przystające - przykłady

FIGURY PODOBNE

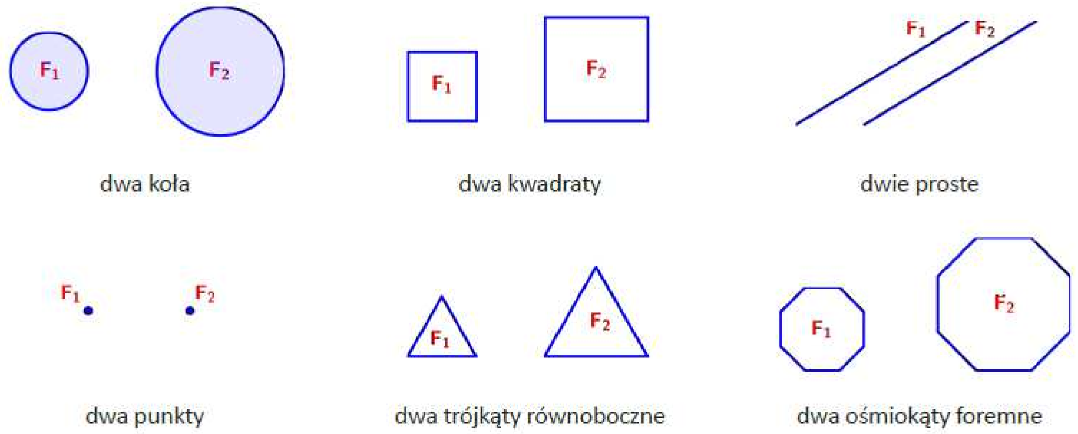
Teraz przejdziemy do figur podobnych - przy nich przede wszystkim należy pamiętać o **skali podobieństwa**.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

TWIERDZENIE

Dwie figury są podobne, gdy jedna z nich powstała z drugiej poprzez narysowanie jej w skali $k > 0$.

PRZYKŁADY FIGUR PODOBNYCH



Przypomnijmy kilka informacji odnośnie skali.

WYJAŚNIENIE

▶ Skala k nosi nazwę skali podobieństwa. Można ją obliczyć jako iloraz odpowiednich wielkości obu figur podobnych, np.

– dla kwadratów skala podobieństwa to iloraz ich boków,

– dla kół skala podobieństwa to iloraz ich promieni.

▶ Jeśli $k = 1$, to figury będą przystające.

▶ Skala k zmienia takie wymiary, jak: długość, pole, objętość, natomiast nie zmienia miar kątów.

Jeżeli figura F_1 jest podobna do figury F_2 w skali k, to figura F_2 jest podobna do figury F_1 w skali $\frac{1}{k}$.

Pamiętajmy, że jeżeli porównujemy **obwody dwóch figur**, to są one **podobne w skali k**, ale jesli porównujemy **pola powierzchni dwóch figur**, to są one **podobne w skali k^2**.

TWIERDZENIE

Jeżeli wielokąty są podobne w skali k, to:

▶ stosunek ich obwodów jest równy skali podobieństwa k ,

▶ stosunek ich pól jest równy kwadratowi skali podobieństwa, czyli k^2 .

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zróbmy kilka zadań.

- Figury podobne - przykłady
- Figury podobne - skala
- Wielokąty podobne - zadanie
- Wielokąty podobne - zadanie 2

CECHY PODOBIEŃSTWA TRÓJKĄTÓW

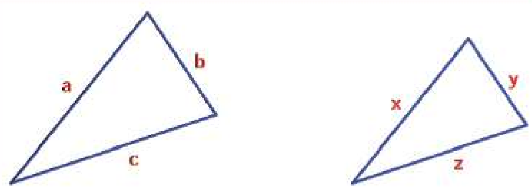
Podobnie jak przy przystawaniu, najczęściej będziemy zajmować się określaniem podobieństwa trójkątów. Możemy wyróżnić trzy cechy - jeśli któraś z nich jest spełniona w dwóch dowolnych trójkątach, to trójkąty te są do siebie podobne.

- Cechy podobieństwa trójkątów

TWIERDZENIA

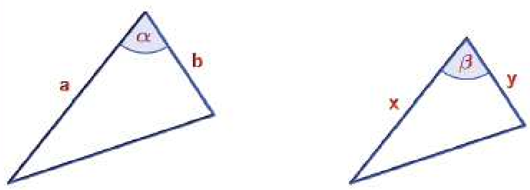
CECHA *bbb*

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie boki są proporcjonalne (lub stosunki odpowiednich boków są stałe): $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.



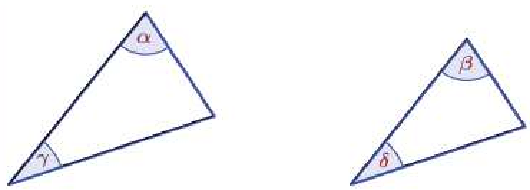
CECHA *bkb*

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie dwa boki są proporcjonalne oraz kąt pomiędzy tymi bokami ma tę samą miarę: $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ oraz $\alpha = \beta$.



CECHA *kk*

Dwa trójkąty są podobne wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiednie kąty są tej samej miary: $\alpha = \beta, \gamma = \delta$.



Zróbmy kilka zadań.

Trójkąty podobne - zadanie 1

Trójkąty podobne - zadanie 2

Trójkąty podobne - zadanie 3

TEST

Moje Testy #54 - Przystawanie i podobieństwo figur...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

TEST

[#54] Przystawanie i podobieństwo figur

Zadanie 1 (1 pkt.) Czworokąt $A'B'C'D'$ o polu powierzchni 240 jest podobny do czworokąta $ABCD$ o polu 48 . Skala podobieństwa wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 5 B. $\frac{1}{5}$ C. $\sqrt{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Zadanie 2 (1 pkt.) Pole powierzchni pięciokąta P wynosi 36 . Zwiększono czterokrotnie długość każdego boku pięciokąta i otrzymano pięciokąt S . Pole powstałego pięciokąta wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 6 B. 4 C. 2 D. 576

Zadanie 3 (1 pkt.) Odległość na mapie w skali $1 \ : \ 40\ 000$ między miastem A a miastem B wynosi 12 cm. Rzeczywista odległość między tymi miastami wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 48 km B. $4,8$ km C. 40 km D. 4 km

Zadanie 4 (1 pkt.) Dane są trójkąty podobne ABC i $A'B'C'$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta $A'B'C'$ wynosi 104 , a stosunek $\frac{|BC|}{|B'C'|} = 2$.

Pole trójkąta ABC wynosi:

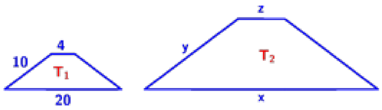
odpowiedź >>> kratka >>>

A. 26 B. 416 C. 208 D. 52

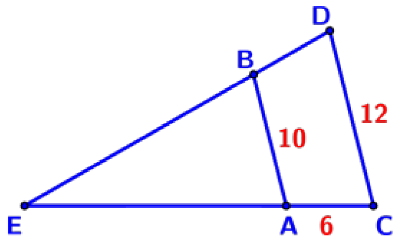
Zadanie 5 (4 pkt.) Trapezy równoramienne T_1 i T_2 są podobne (zobacz rysunek). Pole trapezu T_2 wynosi 288 . Oblicz długość $x,\ y,\ z$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



Zadanie 6 (1 pkt.) Jeżeli $AB \parallel CD$ i $|AB| = 10,\ |AC| = 6,\ |CD| = 12$, to długość odcinka AE wynosi:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $|AE| = 12$ **B.** $|AE| = 30$ **C.** $|AE| = 20$ **D.** $|AE| = 18$

Zadanie 7 (1 pkt.) W trapezie $ABCD$, gdzie $AB \parallel CD$ oraz $|AB| > |DC|$ poprowadzono przekątne, które przecięły się w punkcie S . Trójkątami podobnymi są trójkąty:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. ABS i BSC **B.** DSC i ASD **C.** CSD i ASB **D.** ASD i BSC

Zadanie 8 (1 pkt.) Obwód trójkąta KLM wynosi 105 , a obwód trójkąta PQR , podobnego do KLM , wynosi 70 . Pole trójkąta KLM jest większe od pola trójkąta PQR :

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $1,5$ raza **B.** 2 razy **C.** $2,25$ raza **D.** $2,5$ raza

Zadanie 9 (1 pkt.) Trójkąt ABC jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Jeśli $|AB| = 14,\ |BC| = 16,\ |AC| = 18$, a obwód trójkąta $A'B'C'$ wynosi 240 , to skala podobieństwa jest równa:

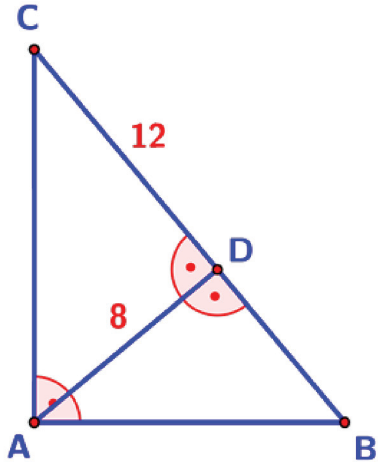
odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{5}$ **B.** 5 **C.** 25 **D.** $\frac{1}{25}$

Zadanie 10 (2 pkt.) W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość AD (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AD| = 8$ i $|DC| = 12$, oblicz pole trójkąta ABC .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

« POWRÓT

Okręgi wpisane w wielokąt i opisane na wielokącie

Autor: **Dariusz Kulma**

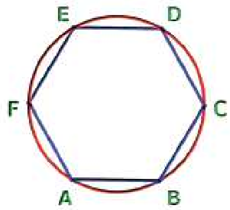
Zwróćmy uwagę, jakie warunki muszą być spełnione, aby okrąg wpisać w wielokąt lub opisać na wielokącie.

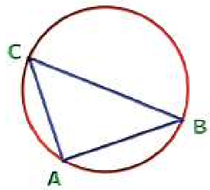
OKRĄG OPISANY NA WIELOKĄCIE

Okrąg opisany na wielokącie

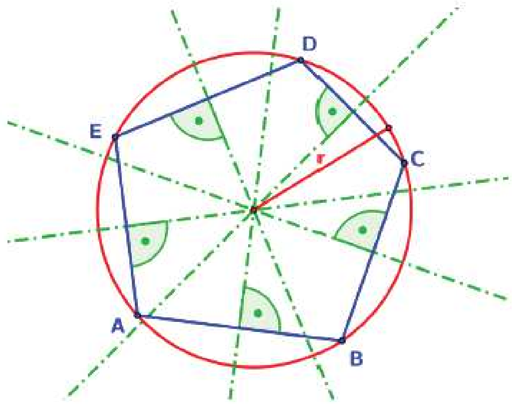
DEFINICJA

Okrąg jest opisany na wielokącie (lub wielokąt jest wpisany w okrąg), gdy każdy wierzchołek tego wielokąta jest punktem okręgu.





Na wielokącie można opisać okrąg, gdy symetralne wszystkich jego boków przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu.



OKRĄG OPISANY NA TRÓJKĄCIE

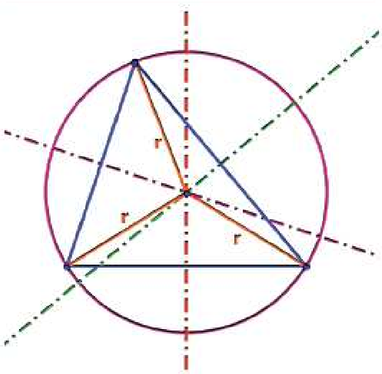
Okrąg opisany na trójkącie

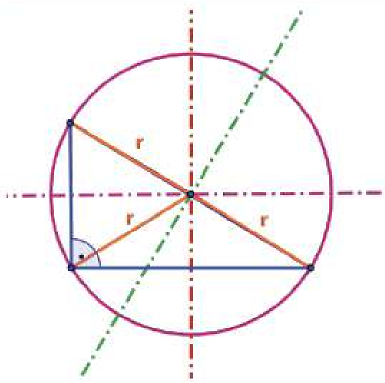
TWIERDZENIE

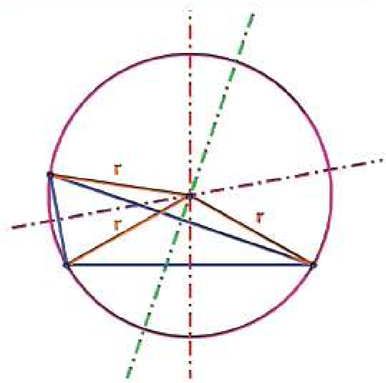
Na każdym trójkącie można opisać okrąg. Środek tego okręgu powstaje w przecięciu symetralnych boków trójkąta.

Środek okręgu opisanego na trójkącie może znajdować się:

- wewnątrz trójkąta — gdy trójkąt jest ostrokątny
- na boku trójkąta — gdy trójkąt jest prostokątny (środek znajduje się w połowie przeciwprostokątnej)
- na zewnątrz trójkąta — gdy trójkąt jest rozwartokątny







Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

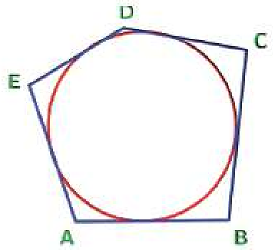
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

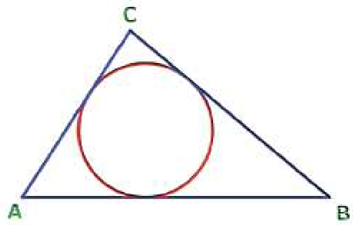
OKRĄG WPISANY W WIELOKĄT

Okrąg wpisany w wielokąt

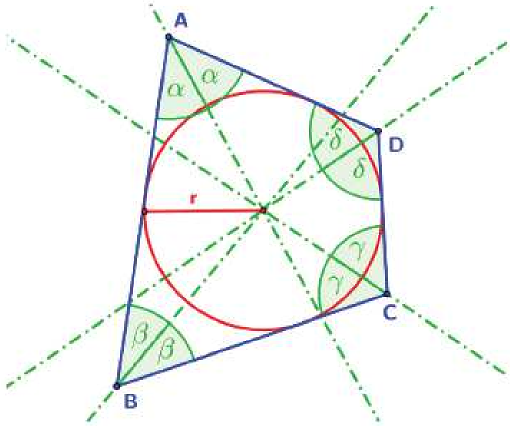
DEFINICJA

Okrąg jest wpisany w wielokąt (lub wielokąt jest opisany na okręgu), gdy każdy bok wielokąta zawiera się w stycznej do tego okręgu i ma z okręgiem dokładnie jeden punkt wspólny.





W wielokąt można wpisać okrąg, gdy dwusieczne wszystkich kątów tego wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest środkiem okręgu.



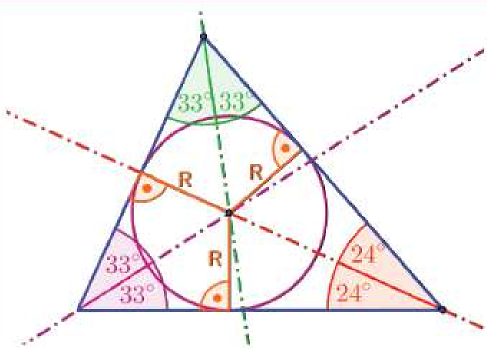
OKRĄG WPISANY W TRÓJKĄT

Okrąg wpisany w trójkąt

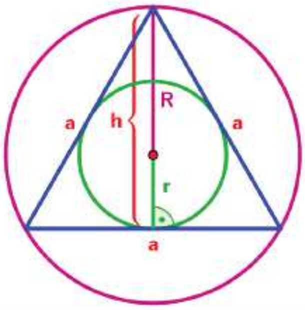
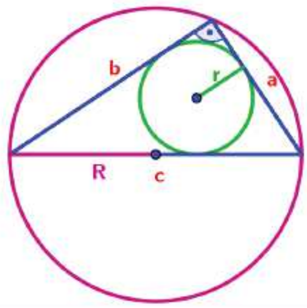
TWIERDZENIE

W każdy trójkąt można wpisać okrąg. Środek tego okręgu powstaje w przecięciu dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta.

Środek okręgu wpisanego w wielokąt zawsze znajduje się wewnątrz wielokąta.



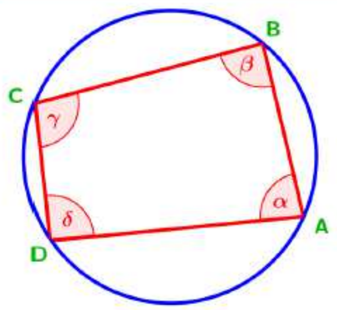
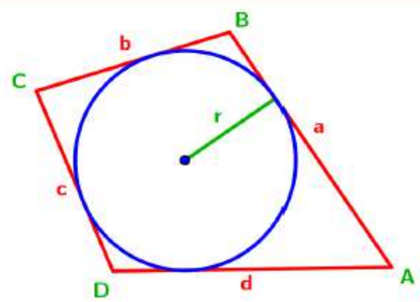
PODSUMOWANIE - TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY I RÓWNOBOCZNY

FIGURA	TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY	TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY
		
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI	$P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$P=\frac{1}{2}a\cdot b$
WZÓR NA OBWÓD	$O=3a$	$O=a+b+c$
INNE WAŻNE INFORMACJE	$h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; h — wysokość trójkąta $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$; r — promień okręgu wpisanego w trójkąt $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$; R — promień okręgu opisanego na trójkącie	$a^2+b^2=c^2$ twierdzenie Pitagorasa $r=\frac{a+b-c}{2}$; r — promień okręgu wpisanego w trójkąt $R=\frac{c}{2}$; R — promień okręgu opisanego na trójkącie 

OKRĄG WPISANY W CZWOROKĄT I OPISANY NA CZWOROKĄCIE

Twierdzenie o okręgu opisanym na czworokącie

Twierdzenie o czworokącie opisanym na okręgu

OKRĄG OPISANY NA CZWOROKĄCIE	OKRĄG WPISANY W CZWOROKĄT
	
Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe 180°: $\alpha+\gamma=\beta+\delta=180^\circ$	W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe: $a+c=b+d$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Przejdźmy do zadań.

- Kąty w trójkącie - zadanie 1
- Kwadrat wpisany w okrąg - zadanie
- Trójkąt prostokątny wpisany w okrąg - zadanie
- Trójkąt prostokątny opisany na okręgu - zadanie
- Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny - zadanie
- Sześciokąt foremny opisany na okręgu - zadanie
- Czworokąt wpisany w okrąg - zadanie

TEST

- Moje Testy #56 - Okręgi wpisane w wielokąt i opisane na wielokącie...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

TEST

[#56] Okręgi wpisane w wielokąt i opisane na wielokącie

Zadanie 1 (1 pkt.) Promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny wynosi $6\sqrt{3}$. Długość boku tego trójkąta wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 12 **B.** $18\sqrt{3}$ **C.** $36\sqrt{3}$ **D.** 36

Zadanie 2 (1 pkt.) Długość boku trójkąta równobocznego wynosi $16\sqrt{3}$. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

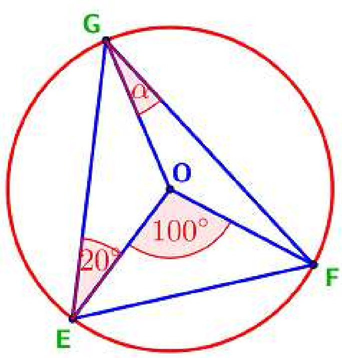
A. 8 **B.** 6 **C.** 12 **D.** 16

Zadanie 3 (1 pkt.) W sześciokąt foremny wpisano okrąg o promieniu $9\sqrt{3}$. Obwód tego sześciokąta wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 108 **B.** $54\sqrt{3}$ **C.** 27 **D.** 135

Zadanie 4 (1 pkt.) Dany jest okrąg o środku O , w który wpisano trójkąt EFG (zobacz rysunek). Miara kąta α wynosi:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 110° **B.** 70° **C.** 35° **D.** 30°

Zadanie 5 (1 pkt.) W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 5 i 12 wpisano okrąg. Obwód tego okręgu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 30π **B.** 4π **C.** 16π **D.** 8π

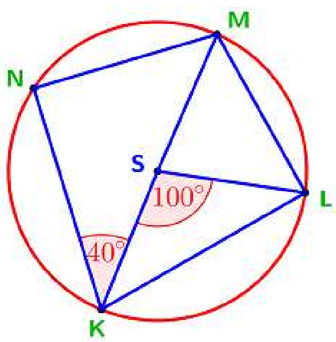
Zadanie 6 (1 pkt.) Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. śrrodkowych, **B.** dwusiecznych, **C.** wysokości, **D.** symetralnych.

Zadanie 7 (2 pkt.) Dany jest trójkąt o przyprostokątnych 7 i 24 . Oblicz średnicę okręgu wpisanego w ten trójkąt.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 8 (2 pkt.) Dany jest czworokąt $KLMN$ wpisany w okrąg o środku S (zobacz rysunek). Oblicz miary kątów tego czworokąta.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Pole koła opisanego na sześciokącie foremnym wynosi 12π . Oblicz pole koła wpisanego w ten sześciokąt

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg, który jest styczny do przeciwprostokątnej AB w punkcie K . Oblicz promień okręgu, jeśli wiadomo, że $|AK| = 21$ i $|KB| = 4$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

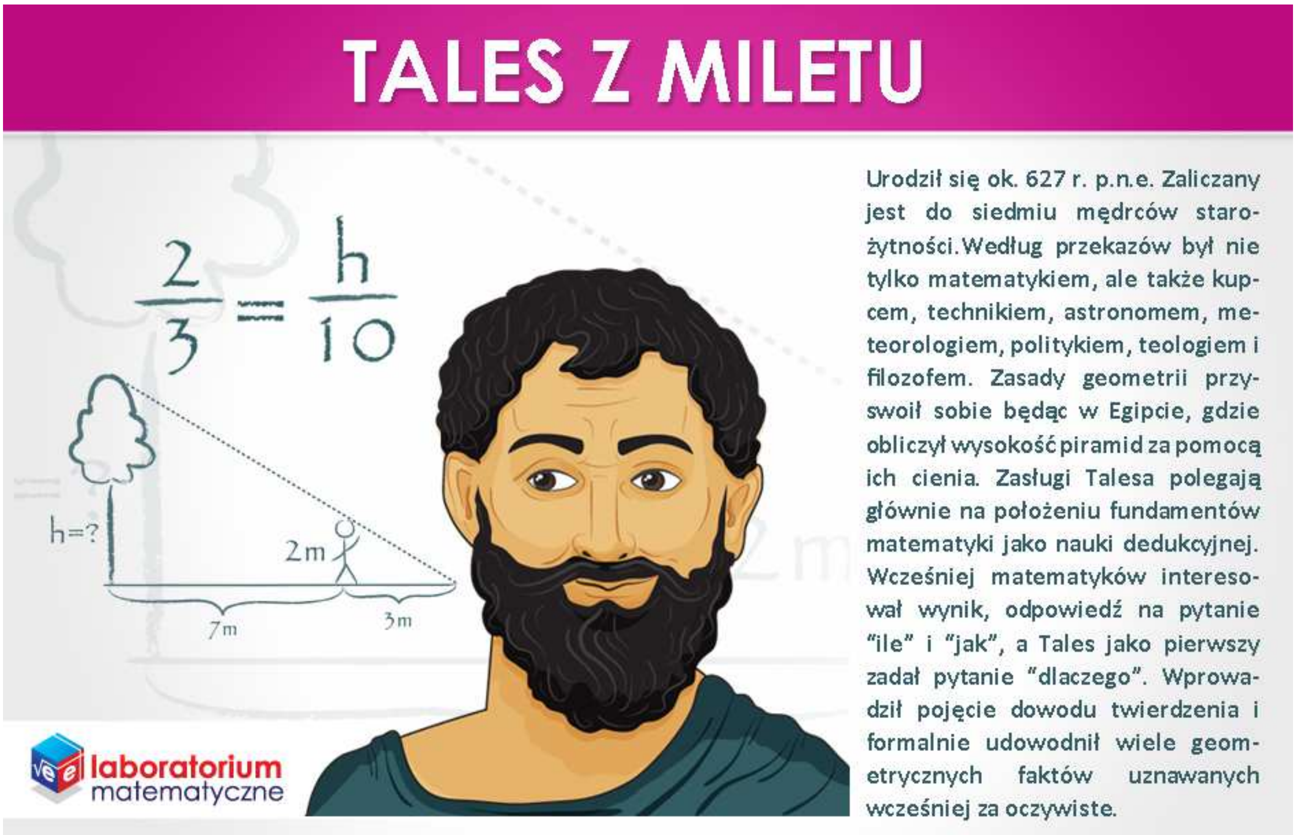
Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Twierdzenie Talesa

Autor: **Dariusz Kulma**

Na początek kilka informacji o Talesie.



TWIERDZENIE TALESA

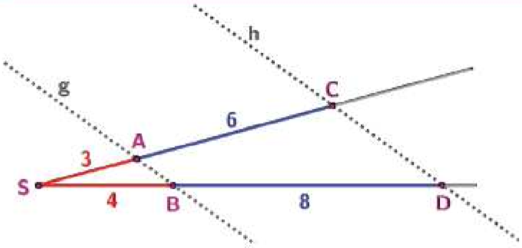
Jest to jedno z najbardziej znanych twierdzeń w geometrii. Koniecznie trzeba zwrócić uwagę na zależności wynikające bezpośrednio z tego twierdzenia (które podane są poniżej), ponieważ często będziemy z nich korzystać.

Twierdzenie Talesa

TWIERDZENIE

Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu.

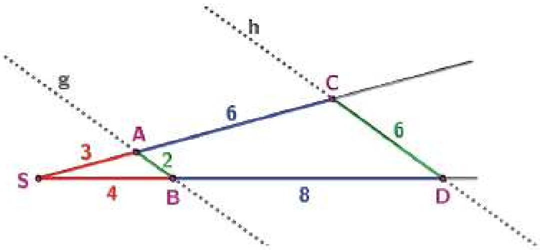
PRZYKŁAD



$$\frac{|SA|}{|SB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = 0,75$$

Z twierdzenia Talesa wynikają również następujące własności:



$$\frac{|SA|}{|SA|+|AC|} = \frac{|SB|}{|SB|+|BD|} = \frac{|AB|}{|CD|}$$

$$\frac{3}{3+6} = \frac{4}{4+8} = \frac{2}{6} = 0,33$$

TWIERDZENIE ODWROTNE DO TWIERDZENIA TALESA

TWIERDZENIE

Jeżeli ramiona kąta przetniemy kilkoma prostymi oraz odcinki wyznaczone przez te proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do odpowiednich odcinków na drugim ramieniu, to te proste są równoległe.

Wykonajmy kilka przykładów.

Twierdzenie Talesa - przykłady

Twierdzenie Talesa - zadanie

TEST

Moje Testy #55 - Twierdzenie Talesa...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna
NARZĘDZIA POMOCNICZE
Elitmat Nauczyciel
wyloguj

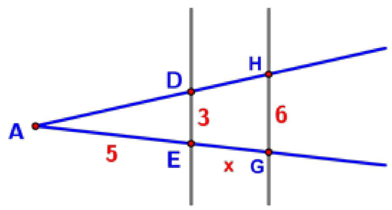
Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy   « POWRÓT

TEST

[#55] Twierdzenie Talesa

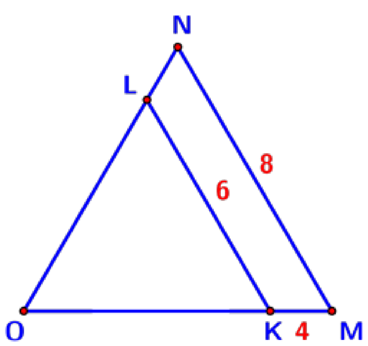
Zadanie 1 (1 pkt.) Proste DE i GH są równoległe. Odcinek x ma długość (zobacz rysunek):



odpowiedź >>>   kratka >>>

A. 5   B. 6   C. 3   D. 10

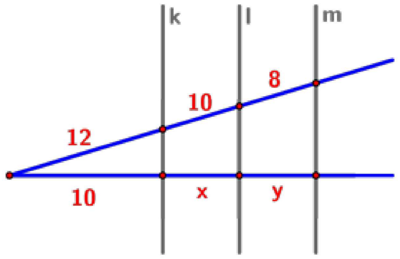
Zadanie 2 (1 pkt.) Odcinki KL i MN są równoległe. Korzystając z danych na rysunku odcinek OK będzie wynosił:



odpowiedź >>>   kratka >>>

A. 12   B. 8   C. 10   D. 6

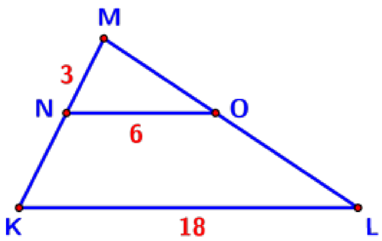
Zadanie 3 (1 pkt.) Ramiona kąta przecięto prostymi równoległymi $k,\ l,\ m$. Prawdą jest, że:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $5y=4x$ B. $4y=5x$ C. $x+2=y$ D. $y+2=x$

Zadanie 4 (1 pkt.) Odcinki KL i NO są równoległe. Długości odcinków $MN,\ NO,\ KL$ są odpowiednio równe $3,\ 6$ i 18 . Długość odcinka KN jest równa:



odpowiedź >>> kratka >>>

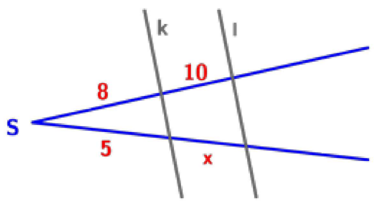
A. 9 B. 6 C. 3 D. 4

Zadanie 5 (1 pkt.) Cień wieżowca ma długość 90 metrów, a cień człowieka o wysokości 180 centymetrów ma długość 12 decymetrów. Wysokość wieżowca wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 115 m B. 135 m C. 90 m D. 100 m

Zadanie 6 (1 pkt.) Ramiona kąta przecięto dwiema równoległymi prostymi k i l (zobacz rysunek). Długość odcinka x jest więc równa:



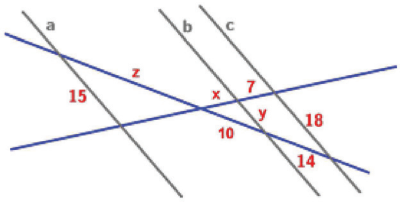
odpowiedź >>> kratka >>>

A. 6 B. $5,75$ C. $6,25$ D. $6,5$

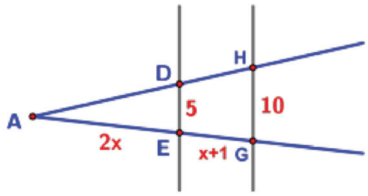
Zadanie 7 (4 pkt.) Oblicz brakujące długości $x,\ y,\ z$, wiedząc, że proste $a,\ b,\ c$ są równoległe.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



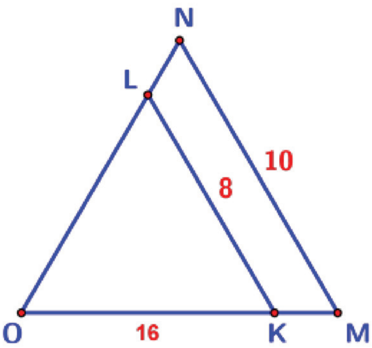
Zadanie 8 (1 pkt.) Proste DE i GH są równoległe. Wielkość x ma długość (zobacz rysunek):



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 5 B. 1 C. 2 D. 10

Zadanie 9 (1 pkt.) Odcinki KL i MN są równoległe. Korzystając z danych na rysunku odcinek KM będzie wynosił:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 10 B. 8 C. 4 D. 6

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Twierdzenie Pitagorasa

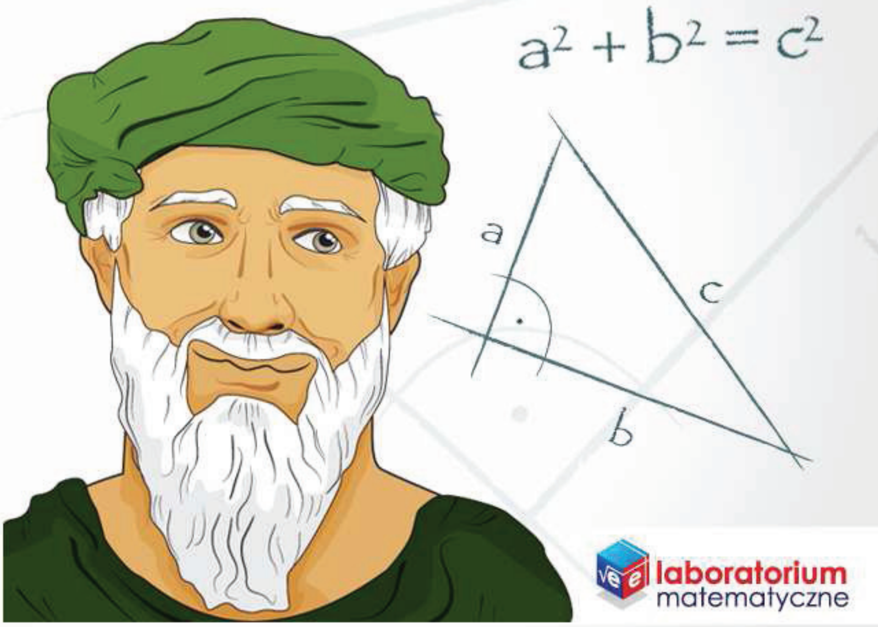
Autor: **Dariusz Kulma**

WSTĘP

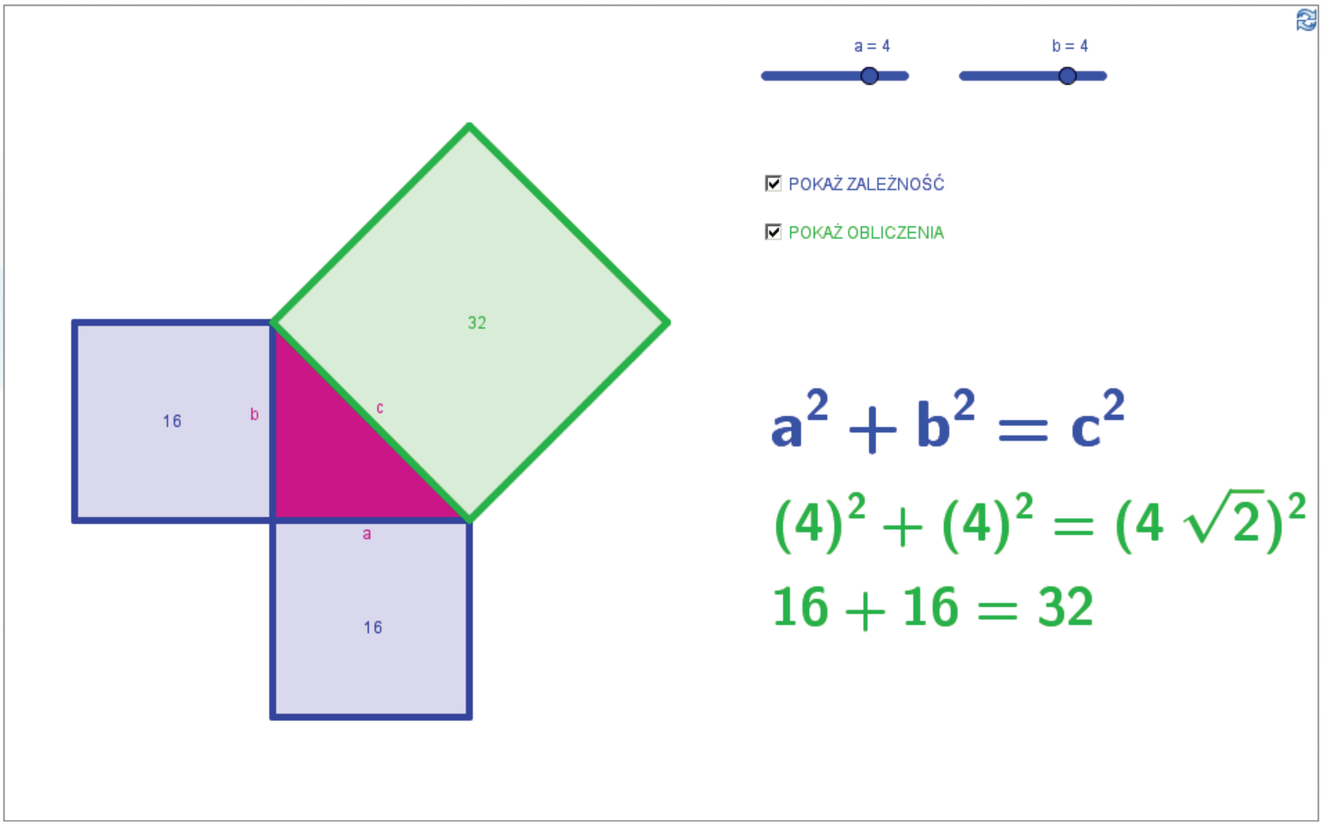
Najbardziej znane twierdzenie na świecie dotyczące geometrii czyli **twierdzenie Pitagorasa** zawdzięczamy nie tylko samemu **Pitagorasowi**. Dokumenty pozostałe po niezależnie rozwijających się cywilizacjach **Babilonu** czy **Egiptu** pokazują, że zależności boków w trójkątach prostokątnych były znane już dużo wcześniej. **Pitagoras** zaczął jednak tę wiedzę porządkować i za **Talesem** udowadniać zaobserwowane twierdzenia. Pitagoras długo podróżował, odwiedzając zarówno Babilonię jak i Egipt, ale oczywiście nie można odebrać mu chwały za uprządkowanie tych obserwacji i sformułowanie tego twierdzenia.

PITAGORAS

Urodził się na wyspie Samos w 572 r. p.n.e. Mając 40 lat zaczął podróżować. Po powrocie z Egiptu założył w greckim Krotonie Związek Pitagorejski, zrzeszający zarówno mężczyzn jak i kobiety. By się do niego dostać, należało przejść trudny pięcioletni okres próbny wstrzemięźliwości, posłuszeństwa, złożyć śluby milczenia i przyjąć regułę wspólnoty dóbr. Po śmierci Pitagorasa Związek podzielił się na dwa obozy: akuzmatyków zajmujących się religią i etyką oraz matematyków poświęcających się nauce. Szkoła Pitagorasa utrzymywała się ponad sto lat.



Twierdzenie Pitagorasa



Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 15 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

BABILOŃSKI PLIMPTON 322

Wśród odnalezionych 500 tysięcy glinianych tabliczek pochodzących z **Babilonu** sprzed niemal 3500 lat 300 dotyczy matematyki. Jedną z najsławniejszych jest tabliczka Plimpton 322 (patrz zdjęcie poniżej). Nazwa pochodzi od nazwiska amerykańskiego dziennikarza **George'a Arthura Plimptona**, który oznaczył ją numerem 322 w swojej kolekcji. Tabliczka wypełniona znakami pisma klinowego zawiera cztery kolumny, które wydają się liczbami zapisanymi w sześćdziesiątkowym układzie pozycyjnym. Okazuje się, że wśród tych liczb znajdują się **trójki pitagorejskie czyli liczby spełniające twierdzenie Pitagorasa**. Oto kilka z nich:

3,4,5, 5,12,13 8,15,17

EGIPSKI PAPIRUS RHINDA

Drugą wspaniale rozwijającą się cywilizacją był **Egipt**. Po Egipcjanach również zachowało się dużo dokumentów, ale w odróżnieniu od Babilończyków używali oni do zapisu papirusu. O dziwo sprzyjający klimat pozwolił, by zachowały się one w bardzo dobrym stanie. Najlepszym odzwierciedleniem tego, co działo się w egipskim matematycznym świecie, jest **papirus Rhinda** (patrz zdjęcie poniżej). Nazwa pochodzi od odkrywcy papirusa, szkockiego egiptologa **Henry'ego Rhinda**. Jest to zbiór 87 zadań arytmetycznych i geometrycznych, jakimi zajmowali się Egipcjanie, a powstał ok. 1650 roku p.n.e. Papirus Rhinda zawiera rozwiązania krok po kroku, nawet ze szkicami rysunków. Spisał go skryba Ahmes, ale podał on również informację, że nie jest autorem, lecz tylko kopiował starszy dokument z około 1800 roku p.n.e. Wydawać by się mogło, że budowniczy niewyobrażalnie wielkiej jak na tamte czasy **Piramidy Cheopsa** musieli znać również zasady, jakimi rządzą się trójkąty prostokątne.

TRÓJKĄT PROSTOKĄTNY W EGIPCIE

Po każdym wylewie Nilu Egipcjanie na nowo mierzyli swoje działki rolne. Na zalanych terenach rozmywały się miedze i trzeba było wyznaczać pola na nowo, a od powierzchni pola zależały też podatki. Jedną z podstawowych miar powierzchni był prostokąt o wymiarach łokieć na 100 łokci. Jednak do dokładnego wyznaczenia tego prostokąta potrzebny był kąt prosty. Okazało się, że Egipcjanie mają do tego znakomite narzędzie. **Wiązali w równych odstępach węzły i tworzyli z nich trójkąt o bokach składających się z 3, 4, 5 węzłów, zauważając tym samym, że największy kąt jest kątem prostym.**

Pitagorejczycy zauważyli, że trójkątów, w których boki są długościami naturalnymi, jest wiele. Trójkąty takie w obecnych czasach nazywamy pitagorejskimi i jest ich nieskończenie wiele.

Oto te najbardziej popularne i przydatne **trójki pitagorejskie**.

TRÓJKI PITAGOREJSKIE

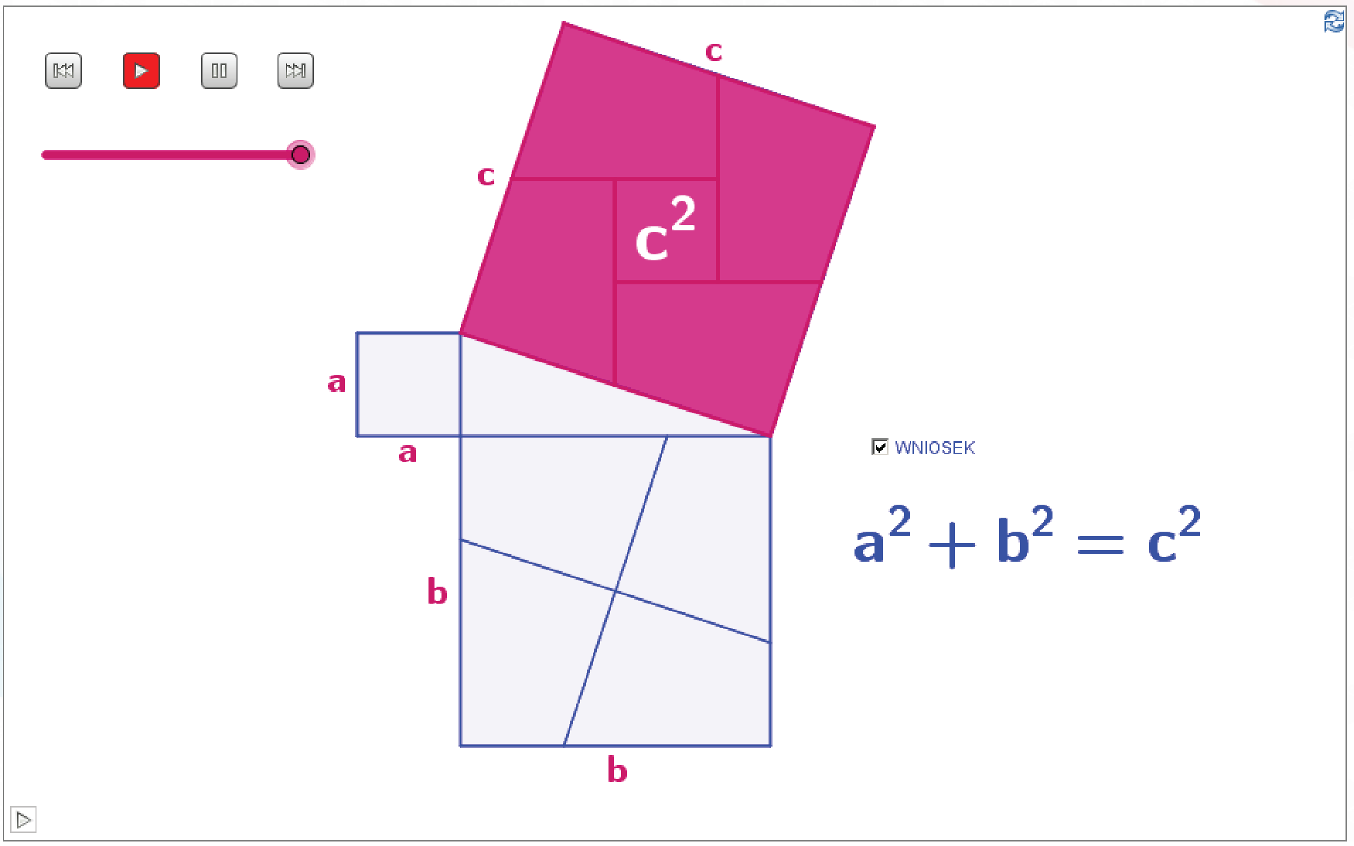
TRÓJKI PITAGOREJSKIE - TO TRÓJKA LICZB CAŁKOWITYCH DODATNICH SPEŁNIAJĄCA RÓWNANIE PITAGORASA.

TRÓJEK PITAGOREJSKICH JEST NIESKOŃCZENIE WIELE.

STOSUNEK DŁUGOŚCI BOKÓW TRÓJKĄTA	3 : 4 : 5	5 : 12 : 13	8 : 15 : 17	9 : 40 : 41
WIELOKROTNOŚĆ	6 : 8 : 10	10 : 24 : 26	16 : 30 : 34	18 : 80 : 82
WIELOKROTNOŚĆ	9 : 12 : 15	15 : 36 : 39	24 : 45 : 51	
WIELOKROTNOŚĆ	12 : 16 : 20	20 : 48 : 52		

Wielu matematyków prześcigało się w **udowadnianiu na nowe sposoby twierdzenia Pitagorasa**. Podstawowy dowód przedstawiliśmy już w pierwszej planszy, budując kwadraty na bokach trójkąta prostokątnego i licząc ich pola. Obejrzyj animację z jednym z dowodów za pomocą rozcinania na części mniejszych kwadratów i układania z nich kwadratu zbudowanego na przeciwprostokątnej.

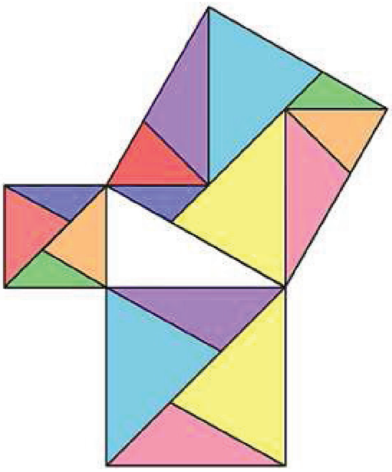
Dowód twierdzenia Pitagorasa



Oglądaj dowód poruszając się nawigacją lub suwakiem

Dariusz Kulma -E-laboratorium matematyczne, 9 Grudzień 2012, Utworzony z GeoGebra

A oto inny przykład dowodu tw. Pitagorasa.



Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Symetrie w układzie współrzędnych

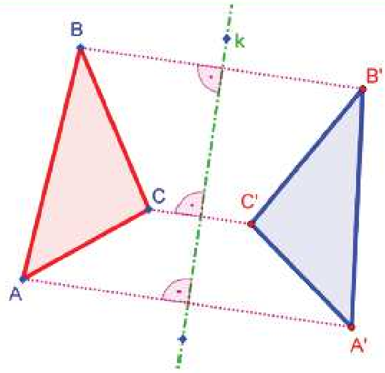
Autor: **Dariusz Kulma**

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM PROSTEJ

Zanim przejdziemy do symetrii w układzie współrzędnych, przypomnijmy ogólne pojęcie symetrii osiowej względem prostej.

Obraz trójkąta w symetrii osiowej

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Jeżeli k jest ustaloną prostą na płaszczyźnie, a A dowolnym punktem i A' obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej k, to: ▶ jeśli punkt A należy do prostej k, to $A = A'$; ▶ jeśli punkt A nie należy do prostej k, to A' jest takim punktem, że prosta k jest symetralną odcinka AA'. Oznacza to, że odcinek AA' jest prostopadły do prostej k i prosta k przechodzi przez środek odcinka AA'.	

WNIOSKI

W symetrii osiowej:

Obrazem odcinka jest odcinek o tej samej długości.	Aby znaleźć obraz odcinka, wystarczy znaleźć obrazy jego końców.
Obrazem trójkąta jest trójkąt przystający.	Aby znaleźć obraz trójkąta, wystarczy znaleźć obrazy jego wierzchołków.
Obrazem prostej jest prosta.	Aby znaleźć obraz prostej, wystarczy znaleźć obrazy dwóch dowolnych punktów prostej.
Obrazem okręgu jest okrąg o tym samym promieniu.	Aby znaleźć obraz okręgu, wystarczy znaleźć obraz środka, długość promienia pozostanie bez zmian.

SYMETRIA OSIOWA WZGLĘDEM OSI UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Zwróć uwagę, że przy symetrii osiowej w zależności od tego, względem której osi robimy przekształcenie **zmienia się pierwsza (x) lub druga (y) współrzędna punktu, który przekształcamy**.

Obraz punktu w symetrii osiowej względem osi układu współrzędnych

TWIERDZENIE

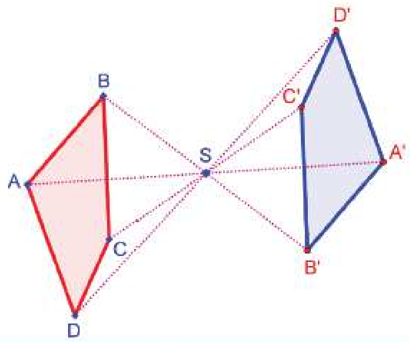
Jeśli punkt $A(x; y)$ jest dowolnym punktem w układzie współrzędnych, to :

▶ $S_{OX}A(x;y) = A'(x;-y)$ symetria względem osi OX	▶ $S_{OY}A(x;y) = A'(-x;y)$ symetria względem osi OY

SYMETRIA ŚRODKOWA WZGLĘDEM PUNKTU

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Podobnie jak rzy symetrii osiowej, zanim przejdziemy do symetrii w układzie współrzędnych, przypomnijmy ogólne pojęcie symetrii środkowej względem punktu.

DEFINICJA	PRZYKŁAD
Jeżeli S jest ustalonym punktem na płaszczyźnie, a A dowolnym punktem i A' obrazem punktu A w symetrii środkowej względem punktu S, to: ► jeśli $A = S$, to $A' = A$; ► jeśli $A \neq S$, to A' jest takim punktem, że punkt S jest środkiem odcinka AA'.	

WNIOSKI	
W symetrii środkowej:	
Obrazem odcinka jest odcinek równoległy o tej samej długości.	Aby znaleźć obraz odcinka, wystarczy znaleźć obrazy jego końców.
Obrazem trójkąta jest trójkąt przystający.	Aby znaleźć obraz trójkąta, wystarczy znaleźć obrazy jego wierzchołków.
Obrazem prostej jest prosta równoległa.	Aby znaleźć obraz prostej, wystarczy znaleźć obrazy dwóch dowolnych punktów prostej.
Obrazem okręgu jest okrąg o tym samym promieniu.	Aby znaleźć obraz okręgu, wystarczy znaleźć obraz środka, długość promienia pozostanie bez zmian.

Obraz czworokąta w symetrii środkowej

SYMETRIA ŚRODKOWA WZGLĘDEM POCZĄTKU UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

W tym przypadku naszym punktem jest początek układu współrzędnych, czyli punkt (0,0). Zwróć uwagę, że przy symetrii względem tego punktu **zmieniają się obie współrzędne (x i y) punktu, który przekształcamy.**

Obraz punktu w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych

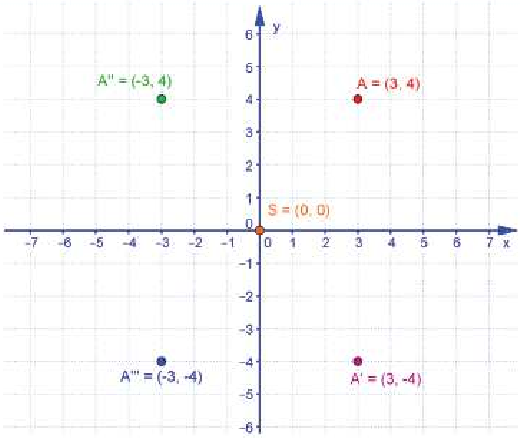
TWIERDZENIE
Jeśli punkt $A(x; y)$ jest dowolnym punktem w układzie współrzędnych, to :
► $S_{(0;\,0)}A(x; y) = A'(-x; -y)$ symetria względem punktu $(0; 0)$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

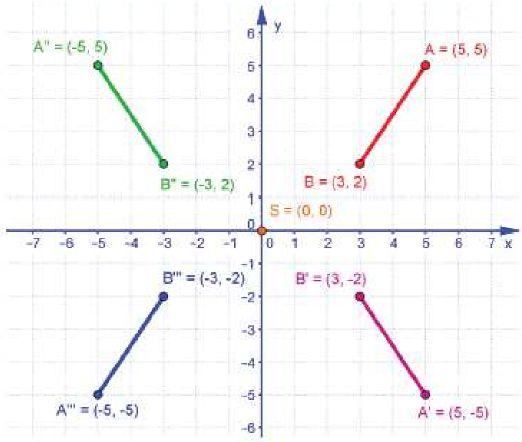
PODSUMOWANIE

Obrazy figur w symetriach osiowej lub środkowej w układzie współrzędnych - przykłady

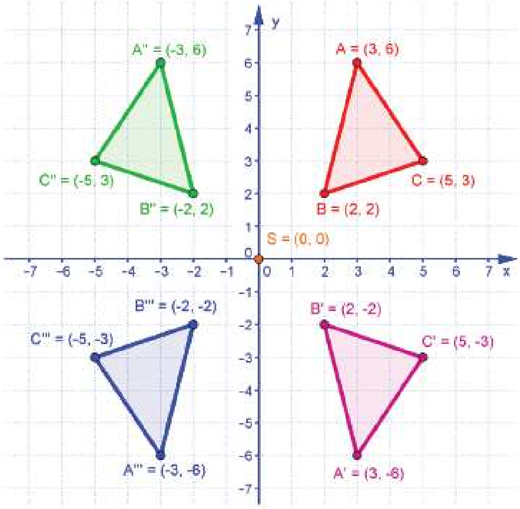
Punkt



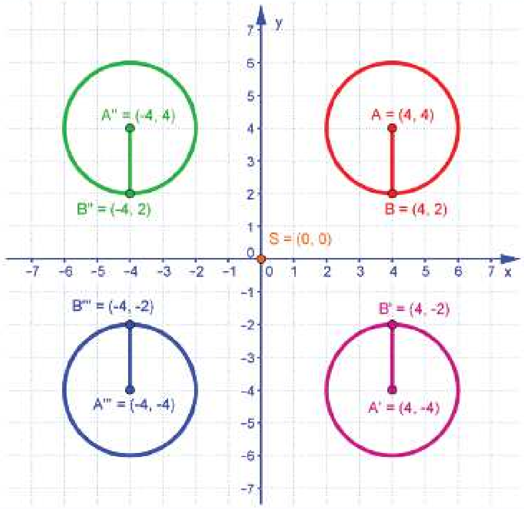
Odcinek



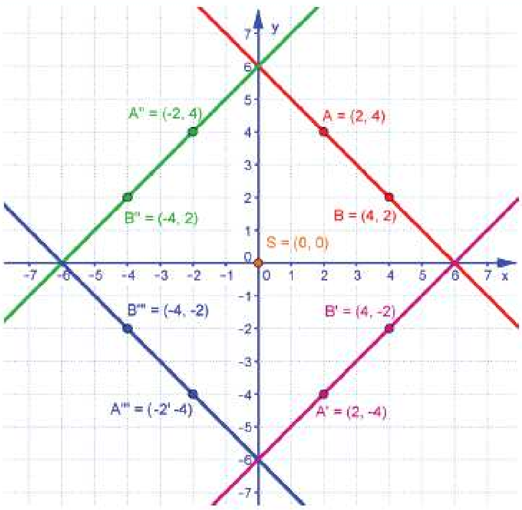
Trójkąt



Okrąg



Prosta



— *figura wyjściowa*
— *symetria osiowa względem osi OX*
— *symetria osiowa względem osi OY*
— *symetria środkowa względem początku układu współrzędnych*

Przejdźmy do zadań.

Symetrie trójkąta - zadanie

Symetrie czworokąta - zadanie

Symetrie kwadratu - zadanie

TEST

Moje Testy #57 - Symetrie w układzie współrzędnych...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#57] Symetrie w układzie współrzędnych

Zadanie 1 (1 pkt.) Punkty $A(-3;\ 12)$ i $A'(5+a;\ 15b-3)$ są symetryczne względem osi OY . Wynika z tego, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a=2,\ b=-1$ **B.** $a=0,\ b=3$ **C.** $a=-1,\ b=2$ **D.** $a=-2,\ b=1$

Zadanie 2 (1 pkt.) Okrąg o środku $A(-3;\ 4)$ i promieniu długości 6 przekształcono w symetrii osiowej względem osi OY . Otrzymano okrąg o środku A' . Odległość między środkami tych okręgów wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 8 **B.** -8 **C.** 6 **D.** 12

Zadanie 3 (1 pkt.) Punkt $A(-2;\ 3)$ przekształcono symetrycznie względem osi OX , otrzymując punkt B . Punkt B przekształcono symetrycznie względem osi OY , otrzymując punkt C . Obwód tego trójkąta ABC wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 10 **B.** 12 **C.** 24 **D.** 26

Zadanie 4 (1 pkt.) Punkt $K(-3;\ 5)$ przekształcono w symetrii względem osi OX oraz OY , a także w symetrii względem punktu $(0;\ 0)$, otrzymując odpowiednio punkty $L,\ M$ i N . Przekątna czworokąta $KLNM$ ma długość:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $4\sqrt{34}$ **B.** $2\sqrt{34}$ **C.** $34\sqrt{2}$ **D.** $12\sqrt{2}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Odcinek AB , gdzie $A(0;\ 1)$ i $B(2;\ 0)$, przekształcono jednocześnie w symetrii osiowej względem osi OX i OY , a także symetrii względem punktu $(0;\ 0)$. Czworokąt utworzony z odcinka AB oraz uzyskanych odcinków nie jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. rombem, **B.** deltoidem, **C.** trapezem, **D.** prostokątem.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 6 (1 pkt.) Okrąg o środku w punkcie $P(2;\ 3)$ i promieniu $r=3$ przekształcono w symetrii względem osi OX, otrzymując okrąg o środku w punkcie P'. Okręgi o środkach P i P':

odpowiedź >>> kratka >>>

A. przecinają się w dwóch punktach,
B. są styczne wewnętrznie,
C. są styczne zewnętrznie,
D. są rozłączne.

Zadanie 7 (1 pkt.) Kwadrat $ABCD$, gdzie $A(-1;\ 2),\ B(4;\ 2),\ C(4;\ -3),\ D(-1;\ -3)$, przekształcono w symetrii środkowej względem punktu $(0;\ 0)$. Pole figury złożonej z kwadratu $ABCD$ oraz kwadratu otrzymanego po przekształceniu wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 50
B. 42
C. 58
D. 24

Zadanie 8 (2 pkt.) Znajdź równanie prostej $k:\ y=3x+4$ w symetrii względem początku układu współrzędnych.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Znajdź równanie prostej $s: y=-\frac{1}{3}x+2$ w symetrii względem osi OX.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Dany jest trójkąt ABC, gdzie $A(-4;3)$, $B(-6;-1)$ i $C(-1;-3)$. Znajdź obraz tego trójkąta po przekształceniu w symetrii osiowej względem osi OY.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Proste prostopadłe i równoległe

Autor: **Dariusz Kulma**

Jeżeli chcemy określić, czy dwie proste są do siebie równoległe lub prostopadłe, to musimy porównać ich współczynniki kierunkowe (a).

Przypomnijmy więc, co nazywamy **współczynnikiem kierunkowym** równania prostej.

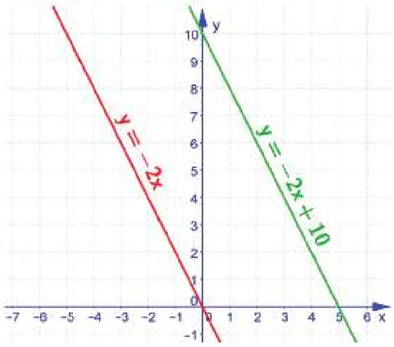
Jeśli równanie występuje w postaci ogólnej, to możemy zamienić je na postać kierunkową, wyznaczając zmienną y i zapisując równanie w postaci: y = ax + b.

Prostą na płaszczyźnie można opisać równaniami:			PRZYKŁAD
kierunkowym $y=ax+b$	a, b — współczynniki liczbowe a — współczynnik kierunkowy b — wyraz wolny	To równanie opisuje wszystkie proste, które są funkcjami, czyli za pomocą równania w postaci kierunkowej nie można opisać prostej prostopadłej do osi OX.	$y=2x-3$ $a=2, b=-3$ $y=4$ $a=0, b=4$
ogólnym $Ax+By+C=0$	A, B, C — współczynniki liczbowe $A, B, C \in R$ $A^2+B^2>0$ — współczynniki A i B nie mogą być jednocześnie zerami	To równanie opisuje wszystkie proste na płaszczyźnie.	$2x+3y-1=0$ $A=2, B=3, C=-1$ $3x-4=0$ $A=3, B=0, C=-4$ $y+2=0$ $A=0, B=1, C=2$

Skoro wiemy, na co zwracać uwagę, to zobaczmy teraz, w którym przypadku drugi współczynnik musi być taki sam jak pierwszy, a w którym musi być odwrotnością pierwszego z przeciwnym znakiem.

PROSTE RÓWNOLEGŁE

Prosta równoległa do danej przechodząca przez wybrany punkt

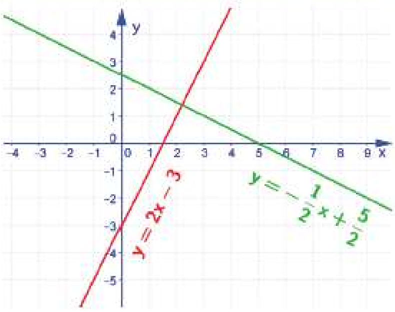
TWIERDZENIE	PRZYKŁAD
Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y = a_1x + b_1$ oraz $l: y = a_2x + b_2$, to prosta k jest równoległa do l, jeśli $a_1 = a_2$, czyli oba współczynniki kierunkowe są takie same.	Proste $y = -2x$ i $y = -2x + 10$ są równoległe, ponieważ ich współczynniki kierunkowe są sobie równe. 

Zróbmy zadanie.

Badanie równoległości funkcji - test

PROSTE PROSTOPADŁE

Prosta prostopadła do danej przechodząca przez wybrany punkt

TWIERDZENIE	PRZYKŁAD
Jeżeli mamy dwie proste k i l o wzorach odpowiednio $k: y = a_1x + b_1$ oraz $l: y = a_2x + b_2$, to prosta k jest prostopadła do l, jeśli $a_2 = -\frac{1}{a_1}$, czyli jeden współczynnik kierunkowy jest odwrotnością drugiego z przeciwnym znakiem, co oznacza, że iloczyn ich współczynników kierunkowych jest równy -1 $(a_1 \cdot a_2 = -1)$.	Proste $y = 2x - 3$ i $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ są prostopadłe, ponieważ odwrotnością liczby 2 z przeciwnym znakiem jest $-\frac{1}{2}$. 

Zróbmy zadanie.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Badanie prostopadłości funkcji - test

WYZNACZANIE RÓWNANIA PROSTEJ, KTÓRA JEST RÓWNOLEGŁA LUB PROSTOPADŁA DO DANEJ I PRZECHODZI PRZEZ WYBRANY PUNKT

Jest to bardzo ważne zagadnienie. Zróbmy dwa zadania dla utrwalenia.

Wyznaczanie prostej równoległej do danej

Wyznaczanie prostej prostopadłej do danej

TEST

Moje Testy #58 - Proste prostopadłe i równoległe...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#58] Proste prostopadłe i równoległe

Zadanie 1 (1 pkt.) Współczynnik kierunkowy prostej równoległej o równaniu $y = 5x - \frac{1}{3}$ jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $-\frac{1}{5}$ **B.** -5 **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** 5

Zadanie 2 (1 pkt.) Prosta o równaniu $y = \frac{4}{3m}x + 5$ jest prostopadła do prostej o równaniu $y = 3x - 4$. Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $m = -\frac{1}{3}$ **B.** $m = -4$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = \frac{1}{3}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Równanie prostej równoległej do prostej o równaniu $-3x + 2y + 6 = 0$ to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $y = \frac{3}{2}x$ **B.** $y = \frac{2}{3}x + 2$ **C.** $y = -\frac{3}{2}x - 3$ **D.** $y = -\frac{2}{3}x - 2$

Zadanie 4 (2 pkt.) Dana jest prosta k o równaniu $y = \left(\frac{3}{4}p - 3\right)x + 3$ oraz prosta l o równaniu $y = \left(\frac{1}{2} + p\right)x - 4$. Oblicz, dla jakiego parametru p proste te będą równoległe.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Dana jest prosta $p: \ y = \frac{4}{5}x - 2$ oraz prosta $o: \ y = (a-3)x + 4$. Oblicz, dla jakiego parametru a proste te będą prostopadłe.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 6 (1 pkt.) Prosta l o równaniu $y=(4m-4)x-3$ jest równoległa do prostej k o równaniu $y=m^2x+4$. Wynika z tego, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $m=4$ **B.** $m=2$ **C.** $m=-2$ **D.** $m=-4$

Zadanie 7 (1 pkt.) Prosta k o równaniu $y=\left(\frac{1}{2}p^2+p\right)x+p$ jest prostopadła do prostej $y=2x$. Wartość p jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** 2 **D.** -1

Zadanie 8 (1 pkt.) Dane są proste $p:\ y=(m^2+1)x+m$ oraz $q:\ y=\frac{2}{5}x-m$. Prawdą jest, że istnieje taki parametr m dla którego proste:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. są prostopadłe,
B. są równoległe i nie mają punktów wspólnych,
C. są równoległe i mają punkty wspólne,
D. przecinają się w jednym punkcie pod katem innym niż 90° .

Zadanie 9 (2 pkt.) Znajdź równanie prostej prostopadłej do $y=\frac{1}{3}x+2$ przechodzącej przez punkt $N(-6;\ 12)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) Znajdź równanie prostej równoległej do prostej $x-2y-6=0$ przechodzącej przez punkt $S(4;\ 6)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Środek odcinka w układzie współrzędnych

Autor: **Dariusz Kulma**

Współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych obliczamy, korzystając ze wzoru podanego poniżej.

Skorzystajmy z planszy i zróbmy cztery przykłady, posługując się wzorem, a następnie dwa kolejne zadania.

Środek odcinka w układzie współrzędnych

TWIERDZENIE

Środkiem odcinka o końcach $A(x_A; y_A)$ i $B(x_B; y_B)$ jest punkt S o współrzędnych:

$$S = \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Oznacza to, że obie współrzędne środka odcinka są średnimi arytmetycznymi odpowiednich współrzędnych końców tego odcinka.

Zadanie z wykorzystaniem wzoru na środek odcinka - przykład 1

Zadanie z wykorzystaniem wzoru na środek odcinka - przykład 2

ZADANIA Z WYKORZYSTANIEM SYMETRALNEJ ODCINKA

Przypomnijmy pojęcie **symetralnej odcinka.**

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Symetralna to prosta, która dzieli odcinek na połowy i jest do niego prostopadła.

Znajdowanie wzoru symetralnej odcinka 1

Znajdowanie wzoru symetralnej odcinka 2

Znajdowanie wzoru symetralnej odcinka 3

TEST

Moje Testy #59 - Środek odcinka w układzie współrzędnych...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:

-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy

« POWRÓT

TEST

[#59] Środek odcinka w układzie współrzędnych

Zadanie 1 (1 pkt.) Punkt $S\left(5;\ \frac{1}{2}\right)$ jest środkiem odcinka AB, w którym $B(9;\ 2)$. Punkt A ma współrzędne:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $A(1;\ -1)$ **B.** $A\left(14;\ 2\frac{1}{2}\right)$ **C.** $A(-1;\ 1)$ **D.** $A(5;\ -1)$

Zadanie 2 (1 pkt.) Środkiem odcinka AB, gdzie $A(-1;\ 2)$ i $B(5;\ -3)$, jest punkt P o współrzędnych:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(4;\ -1)$ **B.** $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(6;\ 2)$ **D.** $(-1;\ -2)$

Zadanie 3 (1 pkt.) Punkt $S(0,5;\ 5)$ jest środkiem odcinka AB, gdzie $A(a;\ 6)$ i $B(3;\ 6+a)$. Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a=2$ **B.** $a=4$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-1$

Zadanie 4 (1 pkt.) Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $A(-3;\ 2)$ i $C(5;\ -2)$. Punkt przecięcia przekątnych prostokąta ma współrzędne;:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(-1;\ 0)$ **B.** $(0\ \ -1)$ **C.** $(0;\ 1)$ **D.** $(1;\ 0)$

Zadanie 5 (1 pkt.) Środkiem odcinka AB, gdzie $A(\sqrt{3}+2;\ \sqrt{5}-1)$ i $B(4-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{5}+3)$, jest punkt o współrzędnych:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(3-\sqrt{3};\ 2\sqrt{5}+1)$ **B.** $(3-3\sqrt{3};\ 4\sqrt{5}+1)$

C. $(1+\sqrt{3};\ 2\sqrt{5}-1)$ **D.** $(3+3\sqrt{3};\ \sqrt{5}+1)$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 6 (2 pkt.) Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $P(1;\ 3)$ i $O(-5;\ -1)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (1 pkt.) Punkt $S(1,5;3)$ jest środkiem odcinka AB , w którym $A(-6;4)$. Punkt B ma współrzędne:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $B(3;2)$ **B.** $B(-7,5;7)$ **C.** $B(2;3)$ **D.** $B(3;1)$

Zadanie 8 (1 pkt.) Środkiem odcinka AB , gdzie $A(-8;2)$ i $B(2;0)$, jest punkt S o współrzędnych:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(10;2)$ **B.** $(-6;0)$ **C.** $(-3;1)$ **D.** $(4;2)$

Zadanie 9 (1 pkt.) Punkt $S(-8;1)$ jest środkiem odcinka AB , gdzie $A(5a;-3)$ i $B(8+a;5)$. Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a=2$ **B.** $a=5$ **C.** $a=-2$ **D.** $a=-4$

Zadanie 10 (1 pkt.) Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $A(-2;1)$ i $C(-4;5)$. Punkt przecięcia przekątnych prostokąta ma współrzędne:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(-6;6)$ **B.** $(-3;3)$ **C.** $(1;1)$ **D.** $(3;-3)$

Zadanie 11 (1 pkt.) Środkiem odcinka AB , gdzie $A(\sqrt{3}+3;2\sqrt{7}+2)$ i $B(3\sqrt{3}-3;4\sqrt{7}+4)$, jest punkt o współrzędnych:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $(2\sqrt{3}+3;3\sqrt{7}+3)$ **B.** $(2\sqrt{3};3\sqrt{7}+3)$

C. $(\sqrt{3};4\sqrt{7})$ **D.** $(4\sqrt{3};6\sqrt{7}+6)$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Długość odcinka, odległość punktu od prostej

Autor: **Dariusz Kulma**

DŁUGOŚĆ ODCINKA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Długość odcinka w układzie współrzędnych to odległość między dwoma punktami. Obliczamy ją według następującego wzoru.

TWIERDZENIE

Odległość między punktami o współrzędnych $A(x_A; y_A)$ i $B(x_B; y_B)$, czyli długość odcinka AB, obliczamy ze wzoru:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Wykonajmy kilka przykładów z prostym zastosowaniem tego wzoru, a następnie dwa zadania, w których trzeba będzie skorzystać z tej umiejętności.

- Długość odcinka w układzie współrzędnych - przykłady
- Obwód rombu - zadanie
- Obwód trójkąta równobocznego - zadanie
- Pole kwadratu - zadanie
- Trójkąt równoramienny - zadanie

ODLEGŁOŚĆ PUNKTU OD PROSTEJ

Drugi ważny wzór to wzór na odległość punktu od prostej. Na początek zróbmy kilka przykładów na proste podstawienia do tego wzoru.

TWIERDZENIE

Odległość d punktu $P(x_0; y_0)$ od prostej o równaniu $Ax + By + C = 0$, gdzie A i B nie są jednocześnie zerami, obliczamy za pomocą wzoru:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Odległość punktu od prostej - przykłady

Następnie przejdziemy do zadań bardziej złożonych, w których jednym z etapów będzie zastosowanie danego wzoru.

Pole trójkąta - zadanie

Obliczanie pola trójkąta w układzie współrzędnych bezpośrednio ze wzoru

Pole równoległoboku - zadanie

TEST

Moje Testy #60 - Długość odcinka, odległość punktu od prostej...

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▼ Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▼

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#60] Długość odcinka, odległość punktu od prostej

Zadanie 1 (1 pkt.) Dane są punkty $A(1;\ 1)$ i $B(-3;\ 4)$. Długość odcinka AB wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $5\sqrt{5}$ **B.** 5 **C.** $3\sqrt{2}$ **D.** 10

Zadanie 2 (1 pkt.) Punkty $K(3;\ 2)$ i $L(-4;\ 3)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego KLM . Obwód tego trójkąta jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 15 **B.** $20\sqrt{5}$ **C.** $12\sqrt{3}$ **D.** $15\sqrt{2}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Punkty $B(7;\ -3)$ i $D(1;\ 3)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Pole tego kwadratu jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 24 **B.** 18 **C.** 12 **D.** 36

Zadanie 4 (1 pkt.) Obwód rombu o boku AB , gdzie $A(1;\ 0)$ i $B(5;\ 2)$, wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $2\sqrt{5}$ **B.** $8\sqrt{5}$ **C.** 45 **D.** 40

Zadanie 5 (1 pkt.) Trójkąt ABC , gdzie $A(-3;\ 0),\ B(2;\ 2),\ C(-1;\ 4)$, jest trójkątem:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. rozwartokątnym, **B.** prostokątnym, **C.** równoramiennym, **D.** ostrokątnym.

Zadanie 6 (2 pkt.) Oblicz pole trójkąta IJK , wiedząc, że podstawa IJ o długości $12\sqrt{2}$ zawiera się w prostej o równaniu $x+y-3=0$, a wierzchołek ma współrzędne $K(6;\ 3)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 7 (2 pkt.) Oblicz pole rombu $ABCD$, gdzie $A(0;\ 2),\ B(3;\ 5)$ i $C(5;\ 2)$.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (5 pkt.) Oblicz pole trójkąta ABC , gdzie $A(-2;\ 3),\ B(3;\ -1)$, a punkt C leży na przecięciu prostych $y=-x+11$ i $y=5x-25$.

odpowiedź >>> kratka >>>

A. **B.** **C.** **D.**

Zadanie 9 (1 pkt.) Dane są punkty $A(3;4)$ i $B(11;2)$. Długość odcinka AB wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $4\sqrt{17}$ **B.** $\sqrt{69}$ **C.** $\sqrt{17}$ **D.** $2\sqrt{17}$

Zadanie 10 (1 pkt.) Punkty $K(4;-2)$ i $L(6;2)$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego KLM . Obwód tego trójkąta jest równy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $6\sqrt{5}$ **B.** $10\sqrt{5}$ **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $5\sqrt{6}$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Przekroje prostopadłościanu

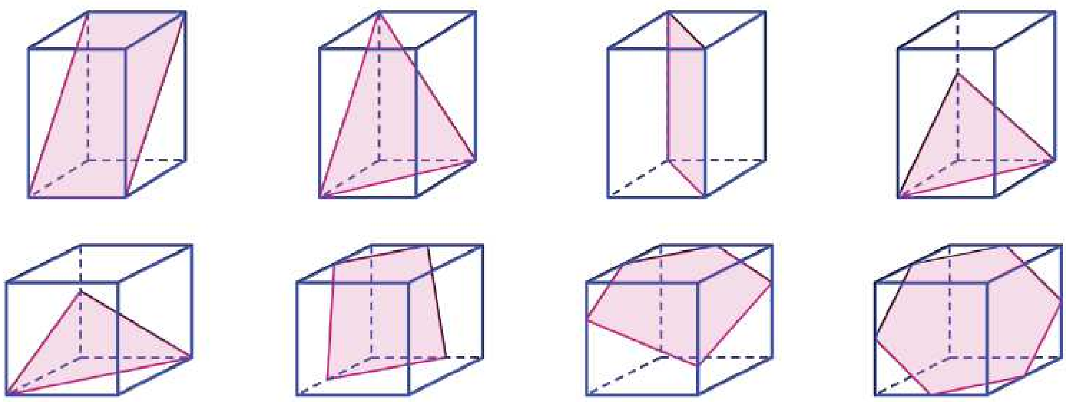
Autor: **Dariusz Kulma**

Przypomnijmy, czym jest przekrój bryły. My zajmować się będziemy przekrojami sześcianu i prostopadłościanu.

DEFINICJE

Przekrojem bryły nazywamy część wspólną bryły i płaszczyzny, która ją przecina.

W przypadku prostopadłościanu przekrojem może być punkt (wierzchołek), odcinek (krawędź) lub wielokąt zawarty w płaszczyźnie, która przecina prostopadłościan. Wierzchołki tego wielokąta należą do krawędzi prostopadłościanu.



Zobaczmy na planszach przykładowe przekroje.

Przekroje prostopadłościanu

Przekroje sześcianu

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Korzystając z poniższej planszy, określmy, jaką figurą może być przekrój prostopadłościanu czy sześcianu.

Przekroje sześcianu 2

Przejdziemy teraz do zadań, w których wykorzystamy wiadomości odnośnie przekrojów.

Przekroje sześcianu - przykłady

Przekrój prostopadłościanu - przykłady

Przekrój graniastosłupa trójkątnego - zadanie 1

Przekrój prostopadłościanu - zadanie

Przekrój graniastosłupa trójkątnego - zadanie 2

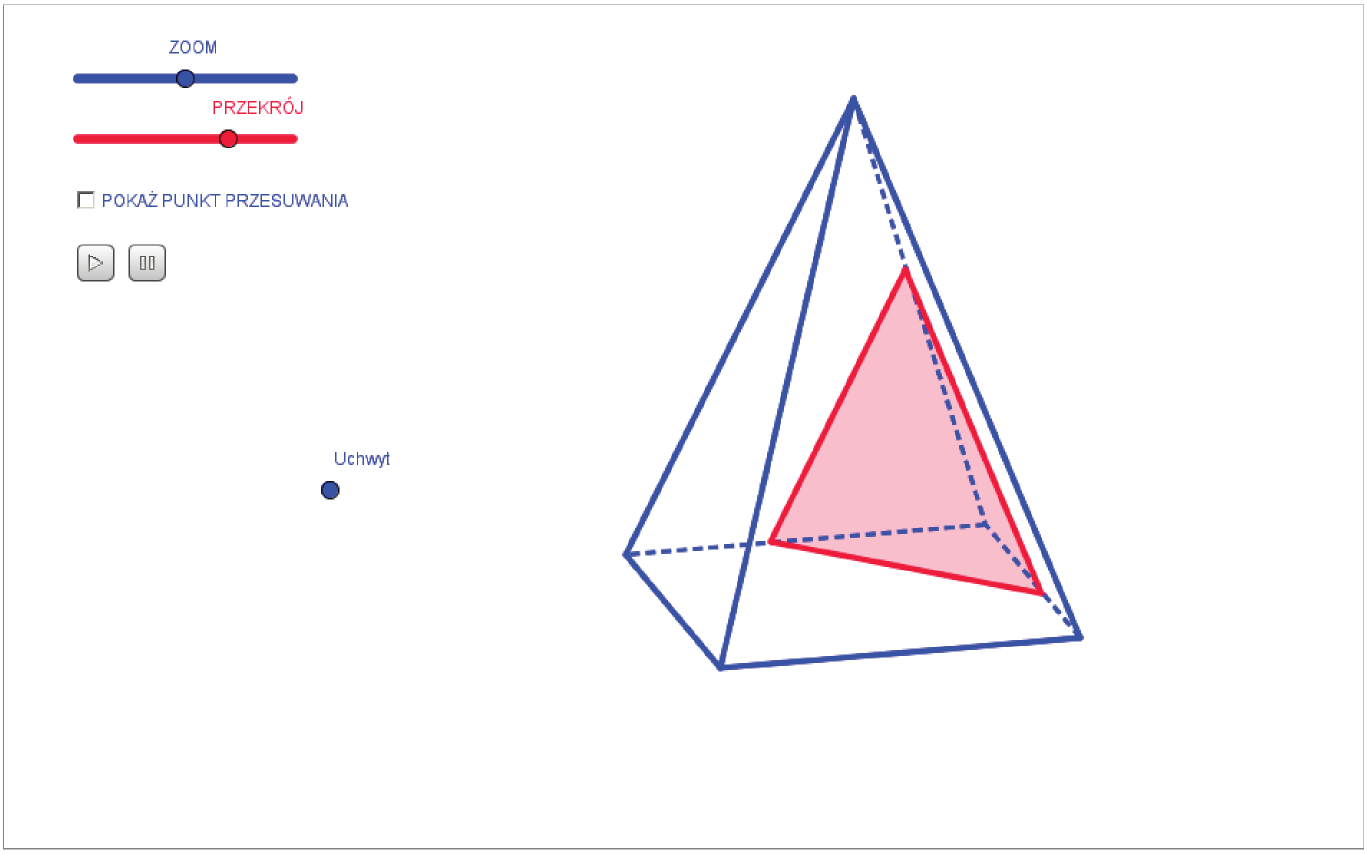
TEST

Moje Testy #61 - Przekroje prostopadłościanu...

PRZYKŁADOWE PRZEKROJE INNYCH BRYŁ

Ostrosłup prawidłowy czworokątny - przekroje 1

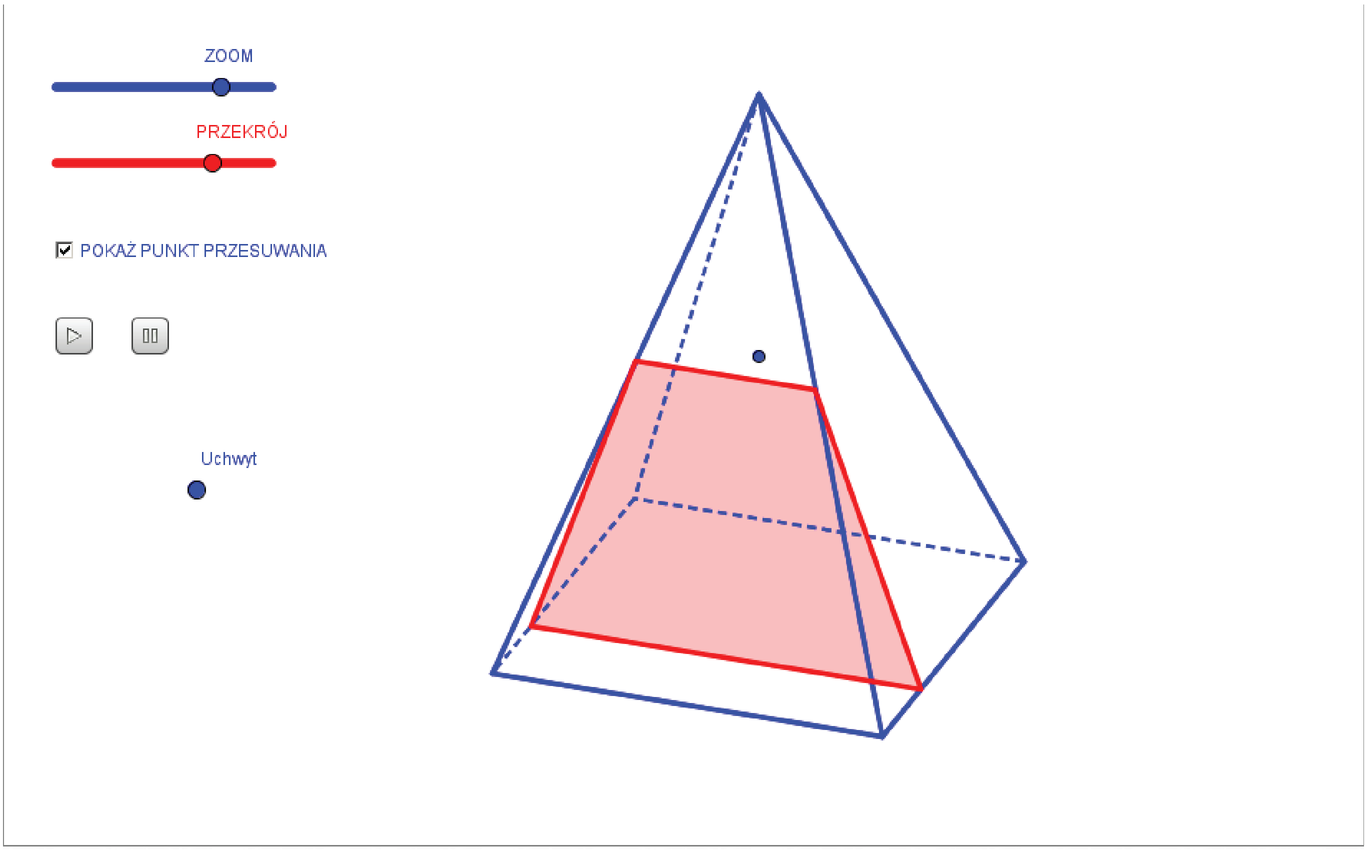
Ostrosłup prawidłowy czworokątny - przekroje



Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 9 Luty 2013, Utworzony z GeoGebra

Ostrosłup prawidłowy czworokątny - przekroje 2

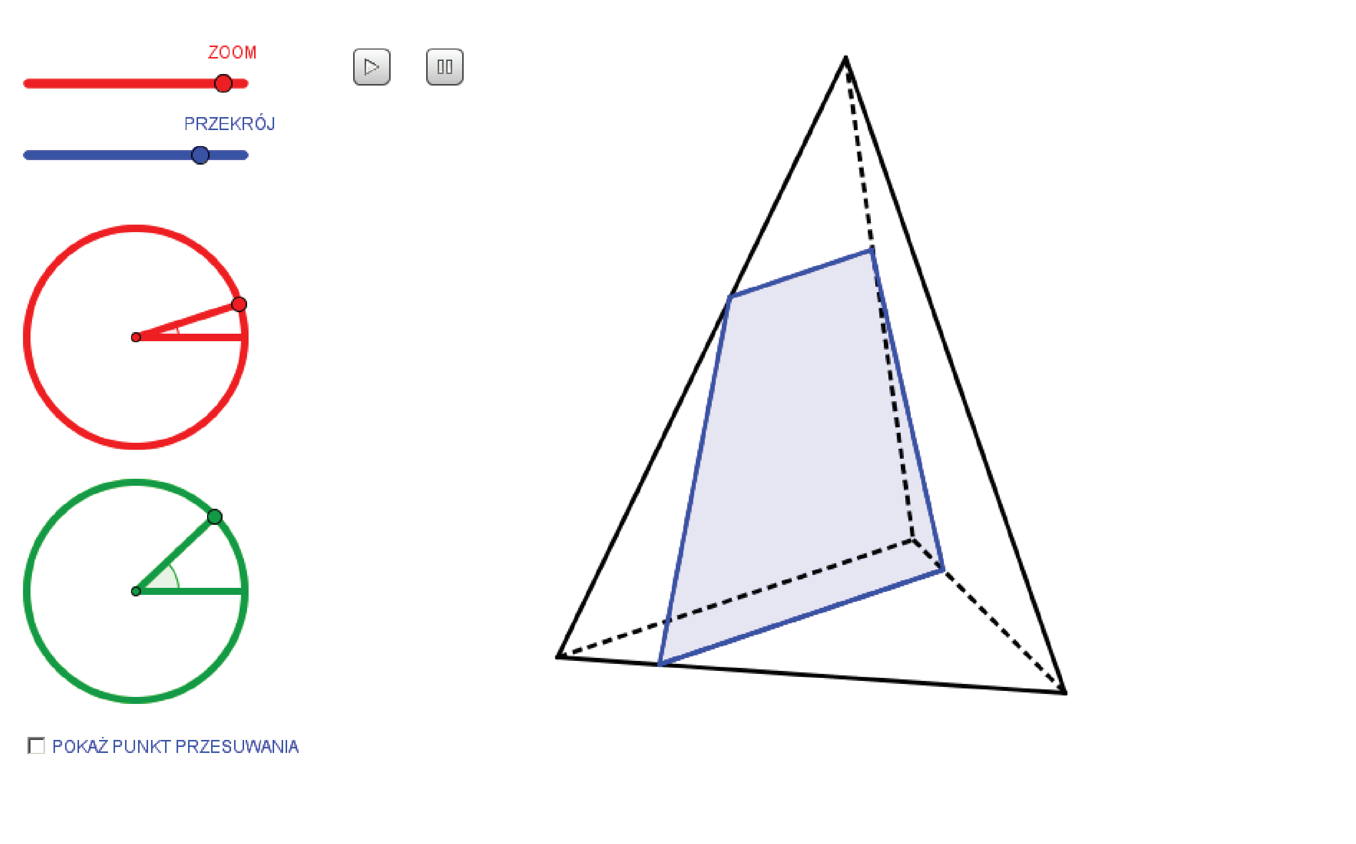
Ostrosłup prawidłowy czworokątny - przekroje 2



Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 9 Luty 2013, Utworzony z GeoGebra

Ostrosłup prawidłowy trójkątny - przekroje

Ostrosłup prawidłowy trójkątny - przekroje



Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 10 Luty 2013, Utworzony z GeoGebra

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#61] Przekroje prostopadłościanu

Zadanie 1 (1 pkt.) Przekrojem sześcianu nie może być:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. czworokąt, **B.** trójkąt, **C.** półprosta, **D.** pięciokąt.

Zadanie 2 (1 pkt.) Sześcian o krawędzi 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez równoległe przekątne naprzeciwległych ścian. Pole powierzchni tego przekroju wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 32 **B.** $32\sqrt{2}$ **C.** 64 **D.** $32\sqrt{3}$

Zadanie 3 (1 pkt.) W sześcianie poprowadzono przekrój przez przekątne sąsiednich ścian bocznych (zobacz rysunek). Jeśli obwód tego przekroju wynosi $12\sqrt{2}$, to krawędź podstawy sześcianu ma długość:

odpowiedź >>> kratka >>>

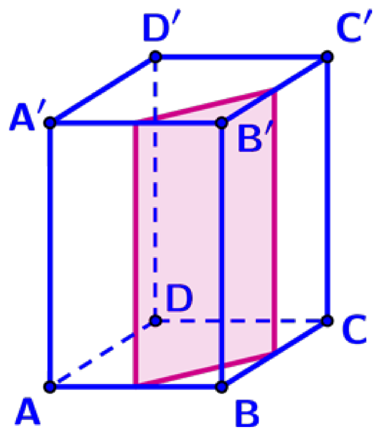
A. 4 **B.** 8 **C.** $4\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{2}$

Zadanie 4 (1 pkt.) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S poprowadzono przekrój przez przekątną podstawy i wierzchołek. Przekrój ten jest zawsze trójkątem:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. rozwartokątnym, **B.** ostrokątnym, **C.** prostokątnym, **D.** równoramiennym.

Zadanie 5 (1 pkt.) Dany jest graniastosłup $ABCDA'B'C'D'$, który przecięto płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy i przecinającą krawędzie tej podstawy w połowie (zobacz rysunek). Wiedząc, że krawędź podstawy wynosi 8 , a wysokość graniastosłupa 12 , można stwierdzić, że pole powierzchni tego przekroju wynosi:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 48 B. 24 C. $48\sqrt{2}$ D. $24\sqrt{2}$

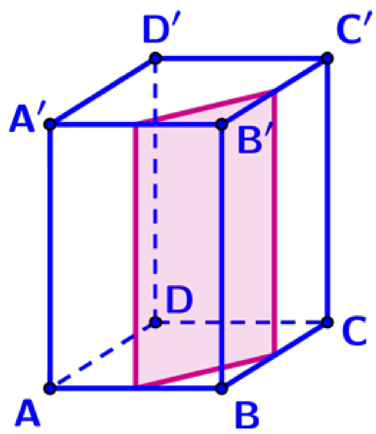
Zadanie 6 (2 pkt.) Sześcian o wysokości równej 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz pole tego przekroju.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (2 pkt.) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o boku podstawy równym 4 i wysokości równej 8 utworzono ostrosłup, którego podstawą jest jedna z podstaw graniastosłupa, a wierzchołkiem środek drugiej podstawy. Oblicz pole ściany bocznej tego ostrosłupa.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (1 pkt.) Dany jest graniastosłup $ABCDA'B'C'D'$, który przecięto płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny podstawy i przecinającą krawędzie tej podstawy w połowie (zobacz rysunek). Wiedząc, że krawędź podstawy wynosi $6\sqrt{2}$, a wysokość graniastosłupa $4\sqrt{3}$, można stwierdzić, że pole powierzchni tego przekroju wynosi:



odpowiedź >>> kratka >>>

A. $24\sqrt{6}$ B. 24 C. $24\sqrt{2}$ D. $24\sqrt{3}$

Zadanie 9 (2 pkt.) Sześcian o wysokości równej a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz pole tego przekroju.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (2 pkt.) W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o boku podstawy równym $2a$ i wysokości równej ' $3a$ utworzono ostrosłup, którego podstawą jest jedna z podstaw graniastosłupa, a wierzchołkiem środek drugiej podstawy. Oblicz pole ściany bocznej tego ostrosłupa.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Graniastosłupy i ostrosłupy

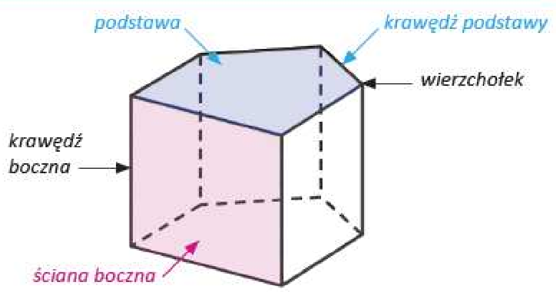
Autor: **Dariusz Kulma**

GRANIASTOSŁUPY

Zacznijmy od przypomnienia definicji graniastosłupów.

DEFINICJE

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Wysokość graniastosłupa (H) to dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły.

Powierzchnię boczną graniastosłupa tworzą jego ściany boczne.

Możemy mówić o graniastosłupach prostych i pochyłych. Zobaczmy, czym się różnią. Skorzystamy również z plansz poniżej.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

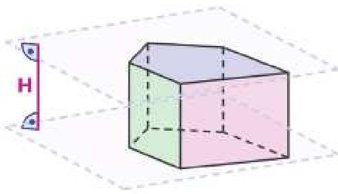
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Graniastosłupy proste - wstęp

DEFINICJE

Graniastosłup prosty to graniastosłup, którego krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy.

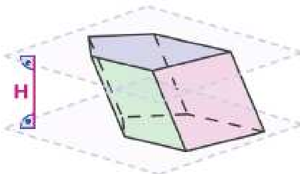
Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami.



Graniastosłupy pochyłe - wstęp

DEFINICJE

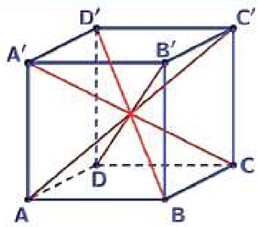
Graniastosłup pochyły to graniastosłup, którego krawędzie boczne nie są prostopadłe do podstawy.



Ważnym pojęciem jest **przekątna graniastosłupa**. Zwróć uwagę, że jest to inny odcinek niż np. przekątna ściany.

DEFINICJE

Przekątną graniastosłupa nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.



Przekątne tego graniastosłupa to odcinki: AC', CA', BD', DB'.

Zróbmy zadanie, żeby utrwalić pojęcie przekątnej graniastosłupa i przekątnej ściany bocznej.

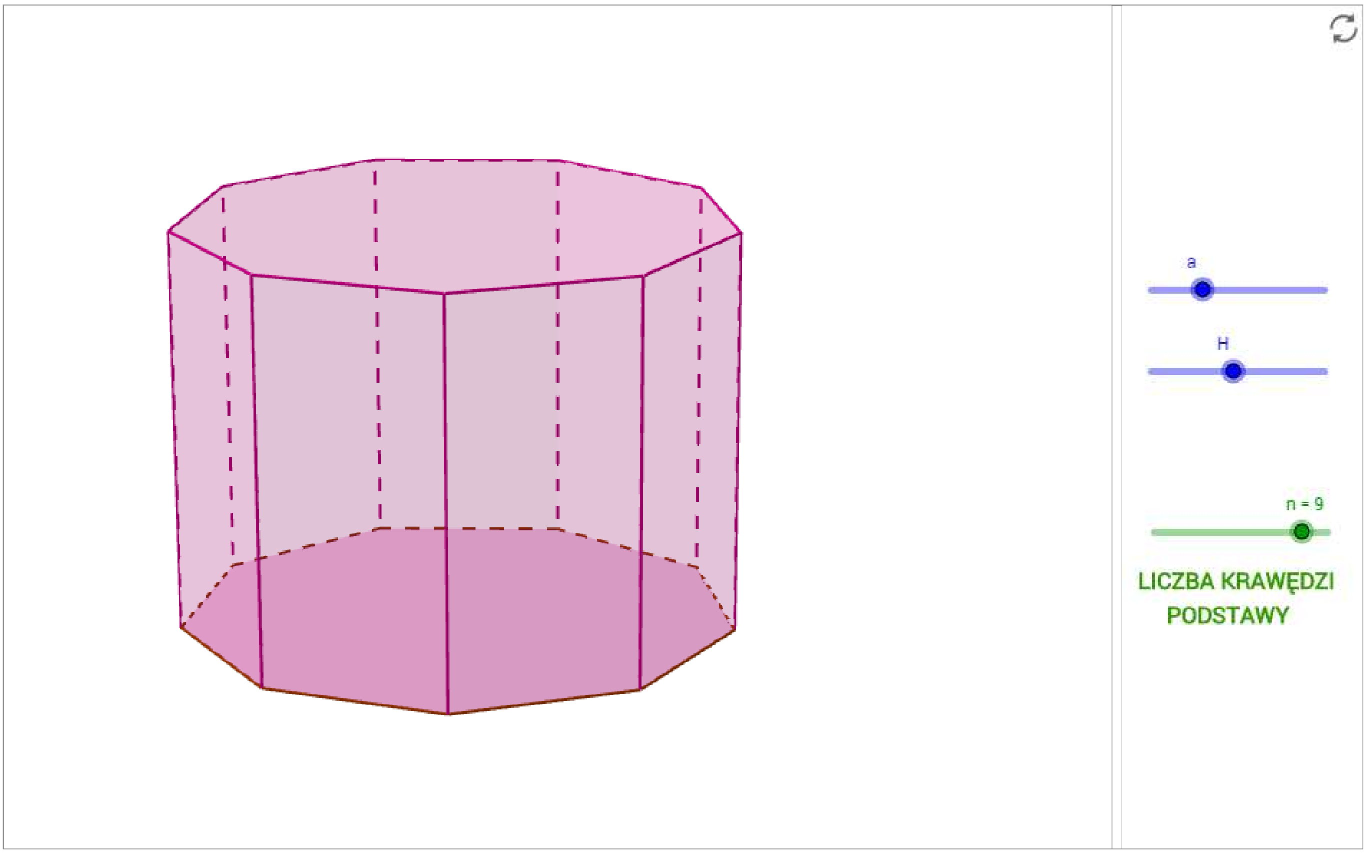
Przekątne graniastosłupa - zadanie

GRANIASTOSŁUPY PRAWIDŁOWE

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DEFINICJE
Graniastosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny, nazywamy prawidłowym.
W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, wyróżniamy graniastosłupy trójkątne, czworokątne, pięciokątne itd.

Graniastosłupy prawidłowe n-kątne

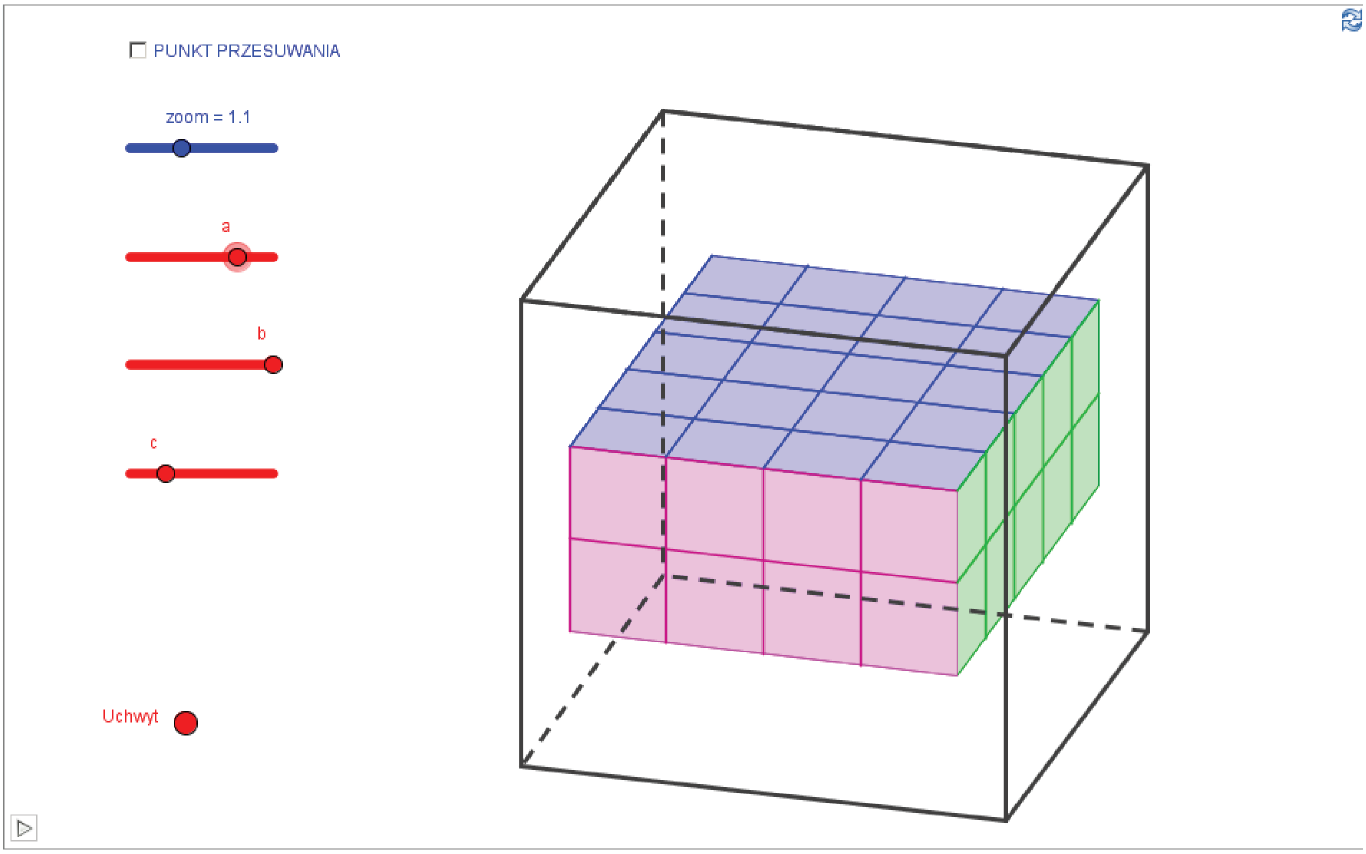


GRANIASTOSŁUPY - OBJĘTOŚĆ I POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ

W każdym graniastosłupie objętość oraz pole powierzchni całkowitej możemy policzyć z następujących wzorów:

WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = P_{podstawy} \cdot H$ gdzie H — wysokość graniastosłupa
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = 2 \cdot P_{podstawy} + P_{powierzchni\ bocznej}$

Objętość - wizualizacja



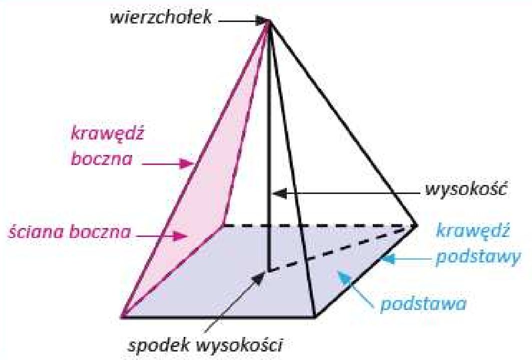
18 Wrzesień 2015, Utworzony z GeoGebra

OSTROSŁUPY

Przechodzimy teraz do ostrosłupów. Przypomnijmy najważniejsze pojęcia. Podobnie jak przy graniastosłupach, możemy mówić o ostrosłupach prawidłowych i w zależności, jaka figura znajduje się w podstawie rozróżniamy różne rodzaje ostrosłupów.

DEFINICJE

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym wierzchołkiem ostrosłupa.



Ostrosłup prosty to ostrosłup, którego wszystkie krawędzie boczne mają tę samą długość lub spodek wysokości pokrywa się ze środkiem okręgu opisanego na podstawie.

W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa ostrosłupa, wyróżniamy ostrosłupy trójkątne, czworokątne, pięciokątne itd.

Ostrosłup prosty, który w podstawie ma wielokąt foremny, nazywamy prawidłowym.

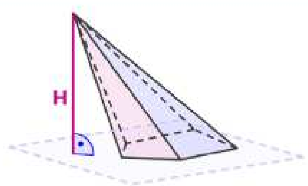
Ważnym pojęciem jest **wysokość ostrosłupa**. Zwróćmy uwagę, że wysokość może być położona w różny sposób.

Ostrosłupy - wstęp

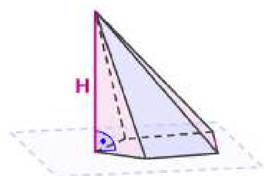
DEFINICJE

Wysokość ostrosłupa to odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy (spodek wysokości).

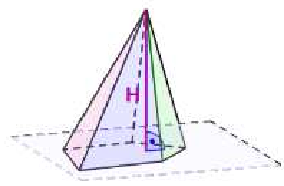
Wysokość położona poza ostrosłupem



Wysokość pokrywająca się z krawędzią boczną ostrosłupa



Wysokość położona wewnątrz ostrosłupa



Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

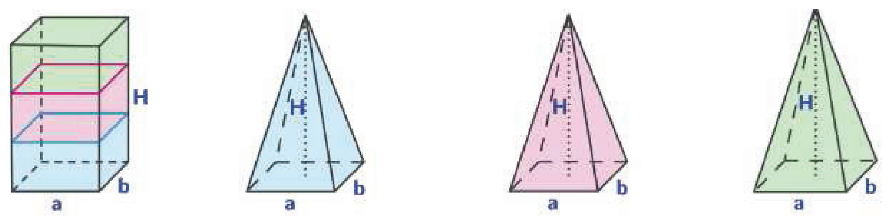
OSTROSŁUPY - OBJĘTOŚĆ I POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ

W każdym ostrosłupie objętość oraz pole powierzchni całkowitej możemy policzyć z następujących wzorów:

WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V = \frac{1}{3} P_{podstawy} \cdot H$ gdzie H — wysokość graniastosłupa
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = P_{podstawy} + P_{powierzchni\ bocznej}$

Zwróćmy uwagę, że wzór na objętość ostrosłupa wynika z zależności pomiędzy objętością graniastosłupa i ostrosłupa.

Jeżeli porównamy objętości ostrosłupów i graniastosłupów, to zauważmy, że gdy mamy ostrosłup i graniastosłup o takich samych wymiarach podstaw i wysokości, objętość graniastosłupa jest trzy razy większa od objętości ostrosłupa.



Zależność między objętością ostrosłupa i graniastosłupa - wizualizacja

TEST

Moje Testy #62 - Graniastosłupy i ostrosłupy...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#62] Graniastosłupy i ostrosłupy

Zadanie 1 (1 pkt.) Graniastosłup prawidłowy czworokątny ma:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. trzy pary ścian równoległych,
B. cztery pary ścian równoległych,
C. dziesięć par ścian prostopadłych,
D. sześć par ścian prostopadłych.

Zadanie 2 (1 pkt.) Wysokość ostrosłupa prawidłowego może być:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. pokrywająca się z krawędzią boczną,
B. równoległa do krawędzi podstawy,
C. prostopadła do krawędzi podstawy,
D. równoległa do wysokości ściany bocznej.

Zadanie 3 (1 pkt.) Graniastosłup prawidłowy trójkątny nie może mieć:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. czterech identycznych ścian,
B. dwóch identycznych ścian,
C. trzech identycznych ścian,
D. trzech identycznych ścian prostokątnych.

Zadanie 4 (1 pkt.) Jeżeli graniastosłup ma 48 krawędzi, to liczba wierzchołków tego graniastosłupa wynosi

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 16 **B.** 32 **C.** 48 **D.** 24

Zadanie 5 (1 pkt.) Ostrosłup ma 23 wierzchołki. Liczba wszystkich krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 22 **B.** 23 **C.** 44 **D.** 46

Zadanie 6 (1 pkt.) Graniastosłup ma 16 wierzchołków. Liczba krawędzi tego graniastosłupa wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 16 **B.** 32 **C.** 24 **D.** 42

Zadanie 7 (1 pkt.) Liczba wszystkich krawędzi ostrosłupa, który ma 31 wierzchołków, jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 32 **B.** 60 **C.** 64 **D.** 30

Zadanie 8 (1 pkt.) Liczba ścian graniastosłupa prawidłowego wynosi 22 . Podstawą tego graniastosłupa jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. dziesięciokąt foremny, **B.** dwunastokąt foremny, **C.** dwudziestokąt foremny, **D.** jedenastokąt foremny.

Zadanie 9 (1 pkt.) Liczba ścian bocznych ostrosłupa wynosi 14 . Liczba krawędzi tego ostrosłupa jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 14 **B.** 28 **C.** 15 **D.** 17

Zadanie 10 (1 pkt.) Ostrosłup prawidłowy ośmiokątny ma W wierzchołków i K krawędzi. Prawdziwa więc jest zależność:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $K+1=2W$ **B.** $K+2=W$ **C.** $K=2W-2$ **D.** $K=W$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

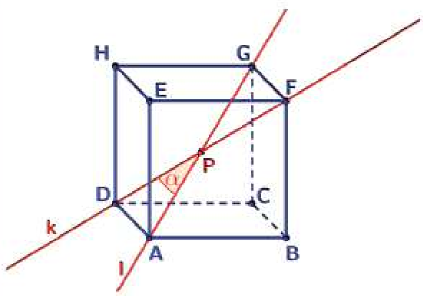
Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach

Autor: **Dariusz Kulma**

KĄTY MIĘDZY ODCINKAMI

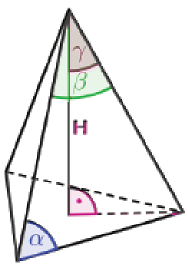
W graniastosłupach i ostrosłupach możemy poszukiwać kątów pomiędzy prostymi zawierającymi odcinki tych wielościanów (czyli krawędzie, przekątne, wysokości, itp.)

Kątem między dwiema prostymi k i l przecinającymi się w punkcie P nazywamy kąt ostry lub prosty, o wierzchołku w punkcie P i ramionach zawartych w prostych k i l.



α — kąt między prostymi DF i AG

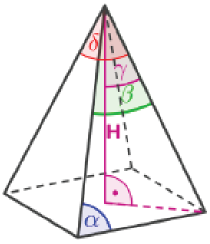
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI



Kąty w ostrosłupie prawidłowym trójkątnym:
α — kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy
β — kąt między krawędziami bocznymi
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną

Ostrosłup prawidłowy trójkątny - kąty między odcinkami

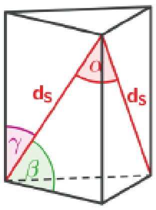
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI



Kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy
β — kąt między krawędziami bocznymi
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a krawędzią boczną
δ — kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi

Ostrosłup prawidłowy czworokątny - kąty między odcinkami

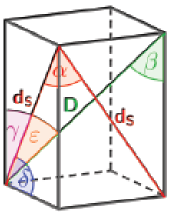
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI



Kąty w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym:
α — kąt między przekątnymi ścian bocznych
β — kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią podstawy
γ — kąt między przekątną ściany bocznej a krawędzią boczną

Graniastosłup prawidłowy trójkątny - kąty między odcinkami

PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI



Kąty w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt między przekątnymi ścian bocznych
β — kąt między przekątną graniastosłupa a krawędzią boczną
γ — kąt między przekątną ściany a krawędzią boczną
δ — kąt między przekątną ściany a krawędzią podstawy
ε — kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną ściany bocznej wychodzącą z tego samego wierzchołka

Graniastosłup prawidłowy czworokątny - kąty między odcinkami

Wykonajmy zadanie z poniższej planszy.

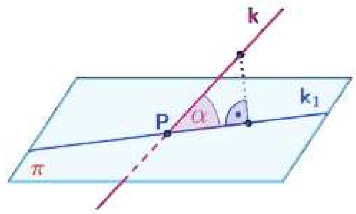
Kąty w ostrosłupie - przykłady

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

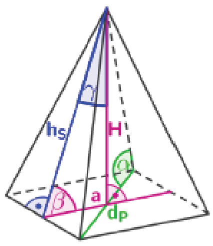
KĄTY MIĘDZY ODCINKAMI I PŁASZCZYZNAMI

W graniastosłupach i ostrosłupach możemy poszukiwać kątów pomiędzy prostymi zawierającymi odcinki tych wielościanów (np. krawędzie, wysokości, przekątne) a płaszczyznami (czyli podstawami czy ścianami bocznymi).

Kątem nachylenia prostej k do płaszczyzny π, gdzie prosta k nie jest prostopadła do płaszczyzny π, jest kąt ostry α utworzony przez tę prostą i jej rzut prostokątny na płaszczyznę π.



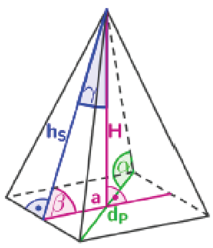
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI I PŁASZCZYZNAMI



Kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
β — kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a płaszczyzną ściany bocznej

Ostrosłup prawidłowy trójkątny - kąty miedzy odcinkami i płaszczyznami

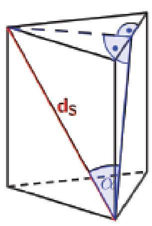
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI I PŁASZCZYZNAMI



Kąty w ostrosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy
β — kąt nachylenia wysokości ściany bocznej do płaszczyzny podstawy
γ — kąt między wysokością ostrosłupa a płaszczyzną ściany bocznej

Ostrosłup prawidłowy czworokątny - kąty między odcinkami i płaszczyznami

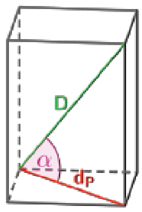
PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI I PŁASZCZYZNAMI



Kąty w graniastosłupie prawidłowym trójkątnym:
α — kąt między przekątną ściany bocznej a sąsiednią ścianą boczną

Graniastosłup prawidłowy trójkątny - kąty między odcinkami i płaszczyznami

PRZYKŁADY KĄTÓW MIĘDZY ODCINKAMI I PŁASZCZYZNAMI



Kąty w graniastosłupie prawidłowym czworokątnym:
α — kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy

Graniastosłup prawidłowy czworokątny - kąty między odcinkami i płaszczyznami

Wykonajmy zadania z poniższych plansz.

Kąty w prostopadłościanie - przykłady

Graniastosłup prawidłowy trójkątny - zadanie

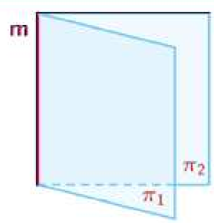
KĄTY MIĘDZY PŁASZCZYZNAMI

W graniastosłupach i ostrosłupach możemy poszukiwać kątów między ścianami czy między ścianami a płaszczyznami podstaw (**chodzi o tzw. kąty dwuścienne**).

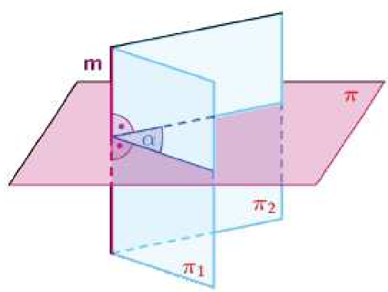
Kąt dwuścienny

DEFINICJE

Dwie różne półpłaszczyzny π_1, π_2 o wspólnej krawędzi m dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z nich wraz z tymi półpłaszczyznami nazywamy kątem dwuściennym, a półpłaszczyzny — ścianami kąta dwuściennego.



Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.



Aby zmierzyć kąt dwuścienny o krawędzi m, należy:
1° poprowadzić płaszczyznę π prostopadłą do prostej m,
2° zmierzyć kąt płaski, wypukły lub wklęsły, będący częścią wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny π.

Jeden z kątów dwuściennych ma miarę α, a drugi $360° - \alpha$.

Rozwiążmy zadanie.

Ostrosłup prawidłowy czworokątny - zadanie

TEST

Moje Testy #64 - Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą: -- wybierz klasę --

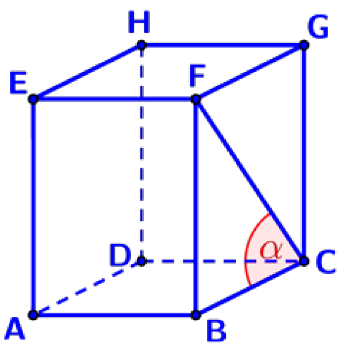
Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#64] Kąty w graniastosłupach i ostrosłupach

Zadanie 1 (2 pkt.) Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AB| = 3\sqrt{3}$ oraz $|AE| = 3$, oblicz miarę kąta α.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>



Zadanie 2 (2 pkt.) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Oblicz kąt między dwoma sąsiednimi krawędziami bocznymi, wiedząc, że krawędź boczna ma długość 2, a obwód podstawy $8\sqrt{3}$.

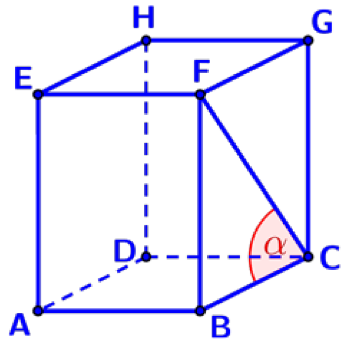
pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 3 (2 pkt.) Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek). Wiedząc, że $|AB| = 2\sqrt{6}$ oraz $|AE| = 5$, oblicz wartość tangensa kąta α.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY



Zadanie 4 (2 pkt.) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S . Oblicz kąt między dwoma sąsiednimi krawędziami bocznymi, wiedząc, że krawędź boczna ma długość $4\sqrt{6}$, a obwód podstawy $16\sqrt{6}$.

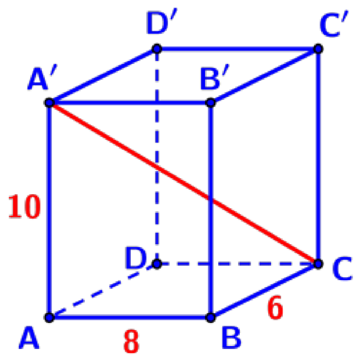
pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (1 pkt.) Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie są równej długości. Kąt, jaki tworzy krawędź boczna z podstawą, ma miarę:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 30° **B.** 60° **C.** 45° **D.** 90°

Zadanie 6 (1 pkt.) Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Korzystając z danych podanych na rysunku, można stwierdzić, że kąt między przekątną prostopadłościanu a podstawą ma miarę



odpowiedź >>> kratka >>>

A. 45° **B.** 30° **C.** 90° **D.** 60°

Zadanie 7 (1 pkt.) W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź boczna o długości 6 nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem α . Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{2}$, można stwierdzić, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\alpha = 30^\circ$ **B.** $\alpha = 60^\circ$ **C.** $\alpha = 45^\circ$ **D.** $\alpha = 75^\circ$

Zadanie 8 (2 pkt.) Dany jest graniastosłup, w którym krawędź boczna jest dwa razy krótsza od przekątnej ściany. Oblicz miarę kąta zawartego między przekątną ściany a krawędzią podstawy.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o długości 6 nachylona jest do płaszczyzny podstawy pod kątem 45° . Oblicz wysokość ostrosłupa.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 10 (1 pkt.) Dany jest ostrosłup czworokątny o podstawie prostokąta (zobacz rysunek). Korzystając z danych na rysunku, można stwierdzić, że kąt α ma miarę:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°

Zadanie 11 (1 pkt.) W graniastosłupie prawidłowym ośmiokątnym kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 120° **B.** 145° **C.** 150° **D.** 135°

Zadanie 12 (1 pkt.) Wszystkie kąty dwuścienne równej miary ma:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. graniastosłup trójkątny,

B. sześcian,

C. ostrosłup czworokątny,

D. ostrosłup prawidłowy czworokątny.

Zadanie 13 (1 pkt.) W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym można znaleźć:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. dwa różne kąty dwuścienne,

B. trzy różne kąty dwuścienne,

C. cztery różne kąty dwuścienne,

D. sześć różnych kątów dwuściennych.

Zadanie 14 (4 pkt.) W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 12 , a krawędź boczna 18 . Oblicz cosinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

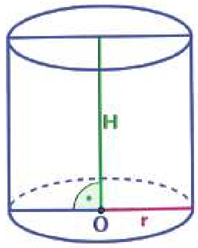
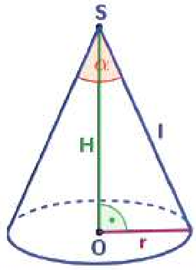
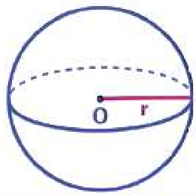
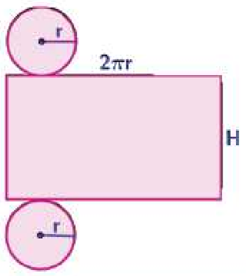
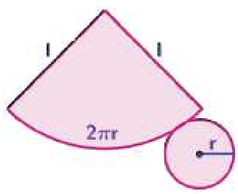
« POWRÓT

Bryły obrotowe

Autor: **Dariusz Kulma**

Na początek przypomnienie najważniejszych informacji o bryłach obrotowych, czyli walcu, stożku i kuli. Wykorzystamy plansze poniżej.

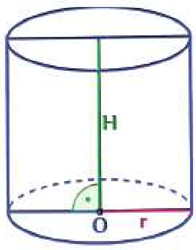
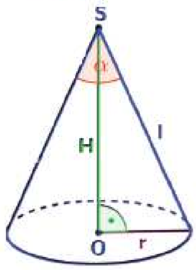
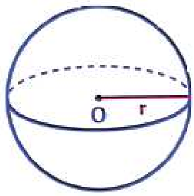
Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

BRYŁA	WALEC	STOŻEK	KULA
			
DEFINICJA	Walec to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu prostokąta wokół jego osi symetrii lub wokół prostej zawierającej jego bok.	Stożek to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu trójkąta równoramiennego wokół jego osi symetrii lub trójkąta prostokątnego wokół prostej zawierającej przyprostokątną trójkąta.	Kula to bryła obrotowa powstała w wyniku obrotu koła wokół prostej zawierającej jego średnicę.
OZNACZENIA	r — promień H — wysokość O — spodek wysokości, czyli środek podstawy walca	S — wierzchołek O — spodek wysokości r — promień H — wysokość l — tworząca α — kąt rozwarcia stożka	r — promień O — środek kuli
SIATKA BRYŁY			Kula nie ma siatki.
INNE WAŻNE INFORMACJE	Przekrojem osiowym walca nazywamy przekrój walca płaszczyzną zawierającą jego oś — jest to prostokąt o bokach H i $2r$. Podstawy walca to dwa koła otrzymane w wyniku obrotu prostokąta.	Przekrojem osiowym stożka nazywamy przekrój stożka płaszczyzną zawierającą jego oś — jest to trójkąt równoramienny o bokach l, l i $2r$. Kąt między ramionami trójkąta, będącego przekrojem osiowym stożka, nazywamy kątem rozwarcia stożka. Podstawa stożka to koło otrzymane w wyniku obrotu trójkąta.	Każdy przekrój kuli płaszczyzną, która ma więcej niż jeden punkt wspólny z tą kulą, jest kołem. Jeśli płaszczyzna ta przechodzi przez środek kuli, to przekrój ten nazywamy kołem wielkim. Kula o środku w punkcie O i promieniu r to zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r. Sfera o środku w punkcie O i promieniu r to zbiór punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa r.

Walec

- Jak powstaje walec
- Walec- siatka
- Jak narysować walec
- Stożek
- Jak powstaje stożek
- Stożek - siatka
- Jak narysować stożek
- Jak powstaje kula

OBJĘTOŚCI I POLA POWIERZCHNI BRYŁ OBROTOWYCH

BRYŁA	WALEC	STOŻEK	KULA
			
WZÓR NA OBJĘTOŚĆ	$V=\pi r^2 \cdot H$	$V=\frac{1}{3}\cdot \pi r^2 \cdot H$	$V=\frac{4}{3}\pi r^3$
WZÓR NA POLE POWIERZCHNI CAŁKOWITEJ	$P_c = 2\pi r^2 + 2\pi rH$	$P_c = \pi r^2 + \pi rl$	$P=4\pi r^2$
INNE WAŻNE INFORMACJE	r — promień H — wysokość	r — promień H — wysokość	r — promień

Zwróćmy uwagę, że wzór na objętość stożka wynika z zależności pomiędzy objętością stożka i walca.

Jeżeli porównamy objętości stożka i walca o równych promieniach i wysokościach, to zauważmy, że objętość walca jest trzy razy większa od objętości stożka.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zależność między objętością stożka i walca - wizualizacja

Przechodzimy do zadań.

Walec - przykłady

Stożek - przykłady

Kula - przykłady

Kula - zadanie z przekrojem

Stożek - zadanie

Walec - zadanie

Kula - zadanie

TEST

Moje Testy #65 - Bryły obrotowe...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna | NARZĘDZIA POMOCNICZE | Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#65] Bryły obrotowe

Zadanie 1 (1 pkt.) Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60° . Jeżeli średnica stożka ma długość 12 , to długość tworzącej jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 4π **B.** 12 **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** 12π

Zadanie 2 (1 pkt.) Dany jest stożek, w którym tworząca i średnica podstawy mają długość równą $4\sqrt{3}$. Wysokość tego stożka wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $2\sqrt{3}$ **B.** 6 **C.** $4\sqrt{3}$ **D.** 4

Zadanie 3 (1 pkt.) Tworząca stożka jest o 8 dłuższa od jego wysokości, a obwód podstawy stożka wynosi 40π . Długość wysokości tego stożka jest więc równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 23 **B.** 22 **C.** 21 **D.** 20

Zadanie 4 (1 pkt.) Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i $2a$ obraca się wokół krótszego boku. Długość tworzącej tego stożka wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $a\sqrt{3}$ **B.** $5a^2$ **C.** $a\sqrt{5}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Zadanie 5 (2 pkt.) Przekątna przekroju osiowego walca o długości $6\sqrt{6}$ tworzy z wysokością kąt 60° . Oblicz długość promienia i wysokości walca.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (2 pkt.) Kąt rozwarcia stożka wynosi 90° , a długość tworzącej jest równa $8\sqrt{5}$. Oblicz długość promienia i wysokości stożka.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (1 pkt.) Pole powierzchni całkowitej walca, którego przekrojem osiowym jest kwadrat o boku długości 8 , jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 48π **B.** 96π **C.** 32π **D.** 96

Zadanie 8 (1 pkt.) Kwadrat o przekątnej $6\sqrt{2}$ obracamy wokół jednego z boków. Objętość powstałego walca jest równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $36\sqrt{2}\pi$ **B.** 36π **C.** 216π **D.** $216\sqrt{2}\pi$

Zadanie 9 (1 pkt.) Objętość walca o promieniu podstawy 6 jest równa 144π . Pole powierzchni bocznej tego walca jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 96π **B.** 48π **C.** 24π **D.** 116π

Zadanie 10 (1 pkt.) Tworząca stożka ma długość 4 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30° . Pole powierzchni bocznej stożka jest równe:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 16π **B.** 8π **C.** $16\sqrt{2}\pi$ **D.** $8\sqrt{3}\pi$

Zadanie 11 (1 pkt.) Przekrój osiowy stożka jest trójkątem równobocznym o boku $2d$. Pole powierzchni całkowitej stożka ma postać:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. πd^2 **B.** $3\pi d^2$ **C.** $2\pi d^2$ **D.** $3\pi d$

Zadanie 12 (1 pkt.) Kula ma objętość $V = \frac{256}{3}\pi$. Średnica tej kuli wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 4 **B.** 8 **C.** 16 **D.** 12

Zadanie 13 (2 pkt.) Objętość walca o wysokości 7 jest równa 63π . Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 14 (5 pkt.) Tworząca stożka ma długość 10 , a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 4 . Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Autor: **Dariusz Kulma**

PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

Płaszczyznę wyznaczają:
- trzy niewspółliniowe punkty,
- dwie różne proste równoległe lub przecinające się,
- prosta i punkt poza nią.

Płaszczyzna ABC to płaszczyzna, która została wyznaczona przez punkty A, B i C.

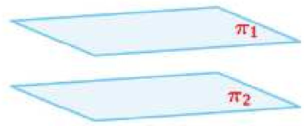
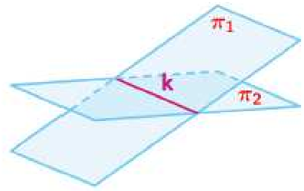
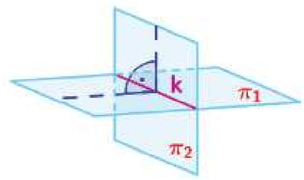
Płaszczyzny będziemy oznaczać jako: $\pi_1, \pi_2 \ldots$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

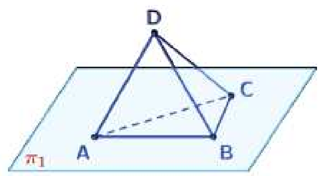
WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

Płaszczyzny równoległe $\pi_1 \parallel \pi_2$	Płaszczyzny nie mające punktów wspólnych $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$	
	Płaszczyzny pokrywające się $\pi_1 = \pi_2$	
Płaszczyzny przecinające się Częścią wspólną płaszczyzn przecinających się jest prosta, którą nazywamy krawędzią przecięcia.	Płaszczyzny przecinające się nieprostopadle $\pi_1 \cap \pi_2 = k$	
	Płaszczyzny przecinające się prostopadle $\pi_1 \cap \pi_2 = k$	

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn - 1

DEFINICJA

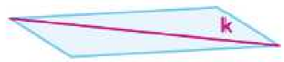
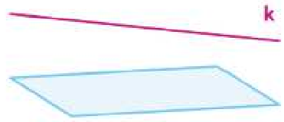
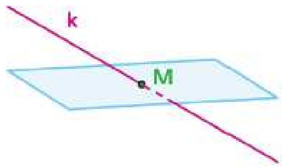
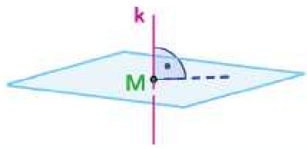
Wielościan to figura przestrzenna ograniczona wielokątami, które są wnętrzami rozłączne oraz bok każdego wielokąta jest jeszcze bokiem dokładnie jednego wielokąta.

WŁASNOŚCI	PRZYKŁAD	
Ścianami wielościanu są wielokąty, a wierzchołki każdej ściany wielościanu wyznaczają płaszczyznę.	Każde trzy wierzchołki czworościanu foremnego *ABCD* wyznaczają w sumie cztery płaszczyzny: *ABD*, *BCD*, *CAD*, *ABC*	

Ściany w wielościanie, które zawarte są w płaszczyznach równoległych, nazywamy ścianami przeciwległymi.

PROSTE I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTEJ I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI

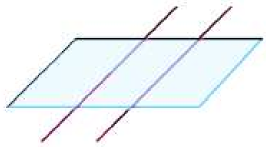
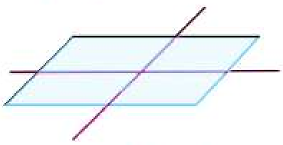
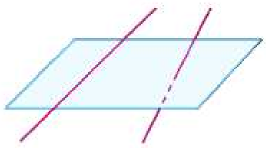
Prosta jest równoległa do płaszczyzny	Prosta jest zawarta w płaszczyźnie — ma wszystkie punkty wspólne z płaszczyzną	
	Brak punktów wspólnych prostej z płaszczyzną	
Prosta przecina płaszczyznę — ma jeden punkt wspólny z płaszczyzną	Prosta nie jest prostopadła do płaszczyzny	
	Prosta jest prostopadła do płaszczyzny	

Prosta *k* jest prostopadła do płaszczyzny, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie.

Jeśli prosta *k* jest prostopadła do dwóch przecinających się prostych, to jest prostopadła do płaszczyzny wyznaczonej przez te proste.

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

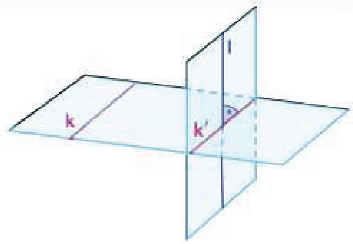
WZAJEMNE POŁOŻENIE DWÓCH PROSTYCH W PRZESTRZENI

Proste współpłaszczyznowe	Proste równoległe	leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub pokrywają się	
	Proste przecinające się	leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny	
	Proste skośne	nie leżą w jednej płaszczyźnie, więc nie mają punktów wspólnych	

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DEFINICJA

Prosta k jest prostopadła do prostej l w przestrzeni $(k \perp l)$, jeśli istnieje prosta k' równoległa do prostej k i przecinająca prostą l pod kątem prostym.



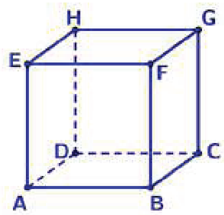
Żeby utrwalić informacje, zróbmy przykład z poniższej planszy oraz dwa zadania.

Rozpoznawanie krawędzi prostopadłych i równoległych - przykłady

ZAD. Dany jest prostopadłościan $ABCDEFGH$ (zobacz rysunek).

a. Wypisz pary płaszczyzn zawierających ściany prostopadłościanu, które są równoległe.

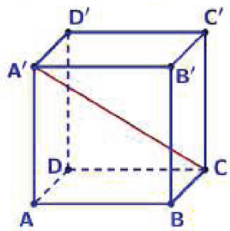
b. Wypisz pary płaszczyzn zawierających ściany prostopadłościanu, które są prostopadłe.



ZAD. Dany jest sześcian $ABCDA'B'C'D'$ (zobacz rysunek). Wskaż proste zawierające krawędzie sześcianu, które:

a. są skośne z prostą zawierającą odcinek $A'C$,

b. przecinają prostą zawierającą odcinek $A'C$.



Strona główna

NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje

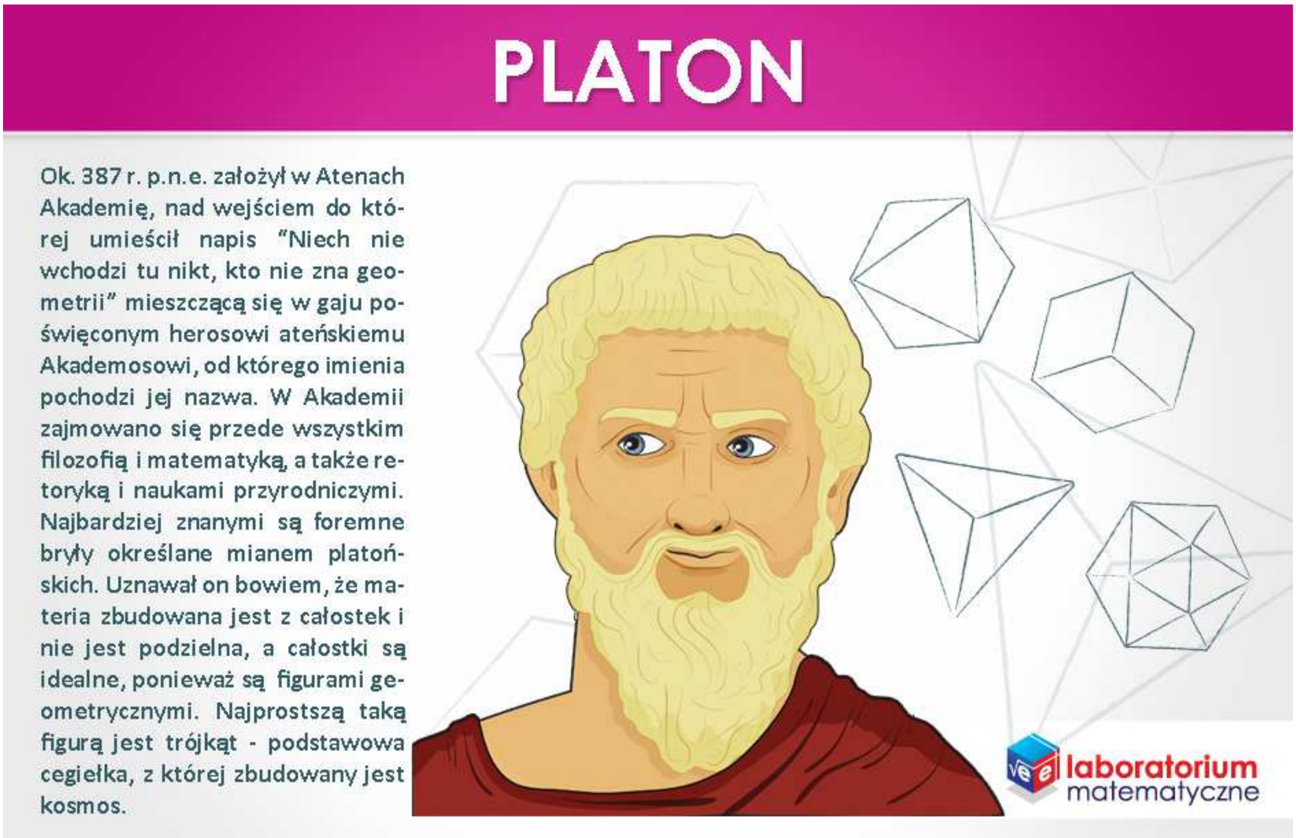
« POWRÓT

Bryły platońskie

Autor: **Dariusz Kulma**

Wstęp

Niewiele osób wie, że **Platon** znany głównie jako grecki filozof, był też znakomitym matematykiem. Prawdopodobnie urodził się w 427 r. p.n.e. w Atenach, a zmarł w dniu swoich urodzin w 347 r. p.n.e. Jego prawdziwe imię brzmiało **Arystokles**. Przydomek Platon nadać mu miał nauczyciel gimnastyki Ariston z Agros ze względu na atletycznie szerokie ramiona utalentowanego sportowca. Platon bowiem nie tylko startował, ale i odnosił zwycięstwa w igrzyskach olimpijskich. Wcześnie rozpoczął naukę, jak i częste podróże. Jako dwudziestolatek poznał Sokratesa. Był jego uczniem przez 8 lat, aż do śmierci filozofa. Później opuścił Ateny, by po 12 latach podróżowania wraz z innymi uczniami Sokratesa powrócić i założyć **Akademię Ateńską** w gaju Akademosa. Na bramie szkoły widniał napis: **"Kto nie zna geometrii, niech tu nie wchodzi".** Akademią kierował przez 42 lata.



Platon uważał, że materię tworzą idealne całostki, które są figurami geometrycznymi. Najprostszą figurą jest trójkąt i to on tworzy materię. Trójkąty są także elementami ścian brył wielościanów. Z trójkątów równobocznych można utworzyć trzy bryły idealne – czworościan, ośmiościan, dwudziestościan, a dwa trójkąty złożone w kwadrat utworzą ścianę sześcianu. **Według Platona bryły te odpowiadają czterem żywiołom: ogień, powietrze, woda, ziemia. Piątym wielościan foremny to dwunastościan, którego ścianami są pięciokąty foremne. Symbolizuje on zespolenie wszystkich elementów.**

Wszystkie ściany brył platońskich są przystającymi wielokątami foremnymi, a z każdego wierzchołka wychodzi tyle samo krawędzi. Wyróżnamy tylko pięć wielościanów foremnych.

WŁASNOŚCI BRYŁ PLATOŃSKICH

1. Wszystkie ściany są wielokątami foremnymi przystającymi

2. W każdym wierzchołku zbiega się taka sama liczba ścian

3. Bryły platońskie są bryłami wypukłymi

RODZAJE BRYŁ PLATOŃSKICH

Wyróżniamy **5 brył platońskich - sześcian, czworościan foremny, ośmiościan foremny, dwunastościan foremny i dwudziestościan**

foremny.

W kolejnych planszach przedstawione są poszczególne bryły oraz ich siatki.

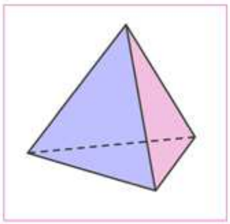
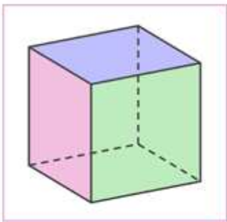
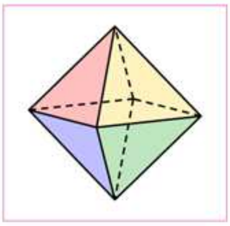
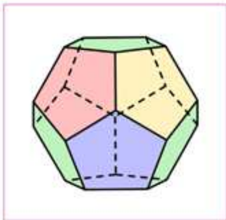
- Czworościan foremny
- Czworościan foremny - siatka
- Sześcian
- Sześcian - siatka
- Ośmiościan foremny
- Ośmiościan foremny - siatka
- Dwunastościan foremny
- Dwunastościan foremny - siatka
- Dwudziestościan foremny
- Dwudziestościan foremny - siatka

KARTA OBSERWACJI

Posługując sie planszami interaktywnymi, uzupełnijmy własności brył w tabelce poniżej.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

RYSUNEK	NAZWA	LICZBA ŚCIAN	LICZBA WIERZCHOŁKÓW	LICZBA KRAWĘDZI
	CZWOROŚCIAN *TETRAEDR*			
	SZEŚCIAN *HEKSAEDR*			
	OŚMIOŚCIAN *OKTAEDR*			
	DWUNASTOŚCIAN *DODEKAEDR*			
	DWUDZIESTOŚCIAN *IKOSAEDR*			

WNIOSKI

Okazuje się, że istnieje ścisła zależność między liczbą ścian, krawędzi i wierzchołków - jest to twierdzenie Eulera o wielościanach, które jest twierdzeniem uniwersalnym dla wszystkich wielościanów wypukłych.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA laboratorium matematyczne UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

TWIERDZENIE EULERA O WIELOŚCIANACH

$$W + S - K = 2$$

W – LICZBA WIERZCHOŁKÓW
S – LICZBA ŚCIAN
K – LICZBA KRAWĘDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE ▾ Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę -- ▾

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Parametry statystyczne - podsumowanie

Autor: **Dariusz Kulma**

Dzisiejszy świat nie mógłby istnieć bez statystyki czyli nauki, która mierzy i analizuje określone dane. Z języka niemieckiego słowo STATISTIK oznacza badanie faktów i osób publicznych. W obecnych czasach badaniu i mierzeniu podlega właściwie wszystko. Analizujemy, ponieważ chcemy wyciągnąć pewne wnioski, by zmieniać rzeczywistość. Średnia płaca, średnia ocen w szkole, średni wynik na egzaminie... - z tym wszystkim spotykamy się codziennie.

RODZAJE PARAMETRÓW STATYSTYCZNYCH

Wyróżniamy bardzo wiele rodzajów parametrów statystycznych. My zajmiemy się tylko najważniejszymi.

Najważniejsze parametry to:

Średnia arytmetyczna - suma elementów podzielona przez ich ilość

Mediana - wartość środkowa uporządkowanej listy elementów (jeśli ilość elmentów jest nieparzysta, to medianą jest wartość środkowa listy, jeśli ilość elementów jest parzysta, to medianą jest średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów).

Wariancja - wykorzystywana głównie do obliczania odchylenia standardowego.

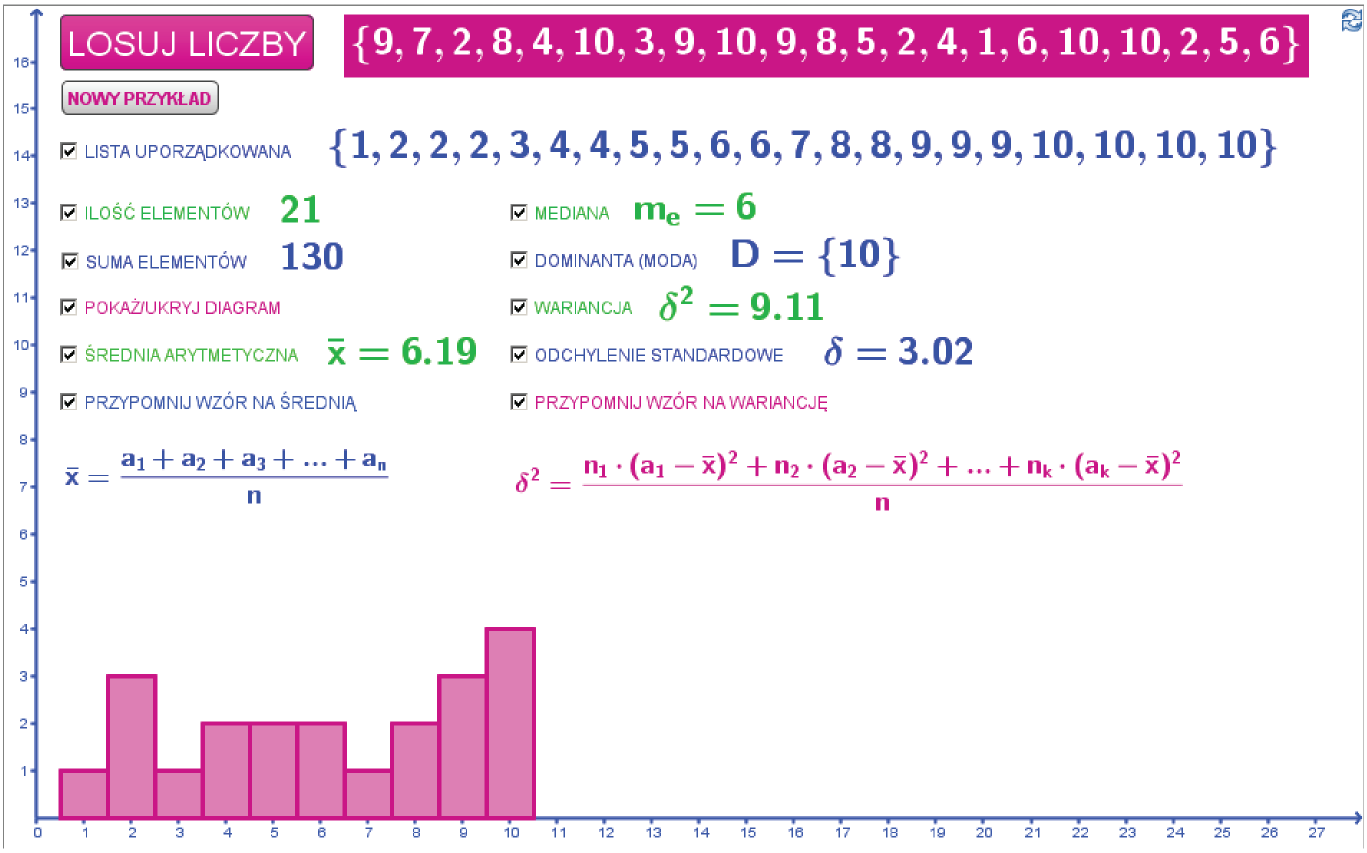
Odchylenie standardowe - pierwiastek kwadratowy z wariancji**.** Parametr, który opisuje, jak szeroko wokół średniej rozrzucone są wartości.

Dominanta (moda) - najczęściej występujący element.

Otwórzmy poniższą planszę interaktywną z parametrami statystycznymi, wylosujmy liczby i zaobserwujmy, jak zmieniają się określone wartości. Plansza przypomina również najważniejsze wzory.

Planszę wykorzystamy także do samodzielnego tworzenia nowych przykładów i obliczania poszczególnych parametrów.

Podstawowe parametry statystyczne



Losuj liczby przyciskami LOSUJ LICZBY lub NOWY PRZYKŁAD. Przy użyciu przycisku NOWY PRZYKŁAD pola wyboru pozostają bez zmian.

Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 9 Grudzień 2012, Utworzony z GeoGebra

PODSUMOWANIE

Czasami statystyka potrafi zafałszować rzeczywisty obraz. Średnie wynagrodzenie w czwartym kwartale 2010 r. wyniosło **3438,21 zł.** Mediana wynagrodzeń w Polsce wynosiła w 2010 roku **2639,51 złotych brutto** (około 1905 złotych netto), a najczęściej pobieraną pensją (dominantą) była kwota **2091,35 złotych brutto** (około 1523 złote netto).

Podawany komunikat przez bardzo wielu jest kwestionowany. Nie ma się czemu dziwić. 65% Polaków zarabia mniej od średniej!

Czy możesz odpowiedzieć i wytłumaczyć jak to możliwe? Dlaczego średnia nie oddaje rzeczywistej sytuacji dotyczącej wysokości zarobków?

ODCHYLENIE STANDARDOWE

Skupimy się jeszcze na samym odchyleniu standardowym. Przypomnijmy dokładnie definicję i o czym nas informuje ten parametr.

DEFINICJA

Danych jest n dowolnych liczb $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Niech $\overline{x}$ oznacza średnią arytmetyczną tych liczb. Wówczas odchylenie standardowe obliczamy według wzoru:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n}}$$

WYJAŚNIENIE

Odchylenie standardowe jest parametrem statystycznym informującym o rozproszeniu danych względem średniej arytmetycznej. Im większe odchylenie standardowe, tym bardziej dane są odległe od siebie i od średniej arytmetycznej.

Zobaczmy, jak odliczamy odchylenie standardowe na przykladzie poniżej.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

PRZYKŁAD

Czterech uczniów otrzymało następujące oceny:

- Uczeń 1: bdb, db, dst, cel, dop
- Uczeń 2: db, db, db, db, db
- Uczeń 3: bdb, bdb, db, dst, dst
- Uczeń 4: cel, cel, db, dop, dop

Oblicz średnie arytmetyczne i odchylenia standardowe dla poszczególnych uczniów.

Dla ucznia 1:

$$\overline{x_1} = \frac{5+4+3+6+2}{5} = 4$$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(6-4)^2+(2-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+1+4+4}{5}} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

Dla ucznia 2:

$$\overline{x_2} = \frac{4+4+4+4+4}{5} = 4$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{(4-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{0}{5}} = 0$$

Dla ucznia 3:

$$\overline{x_3} = \frac{5+5+4+3+3}{5} = 4$$

$$\sigma_3 = \sqrt{\frac{(5-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2+(3-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{1+1+1+1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0,89$$

Dla ucznia 4:

$$\overline{x_4} = \frac{6+6+4+2+2}{5} = 4$$

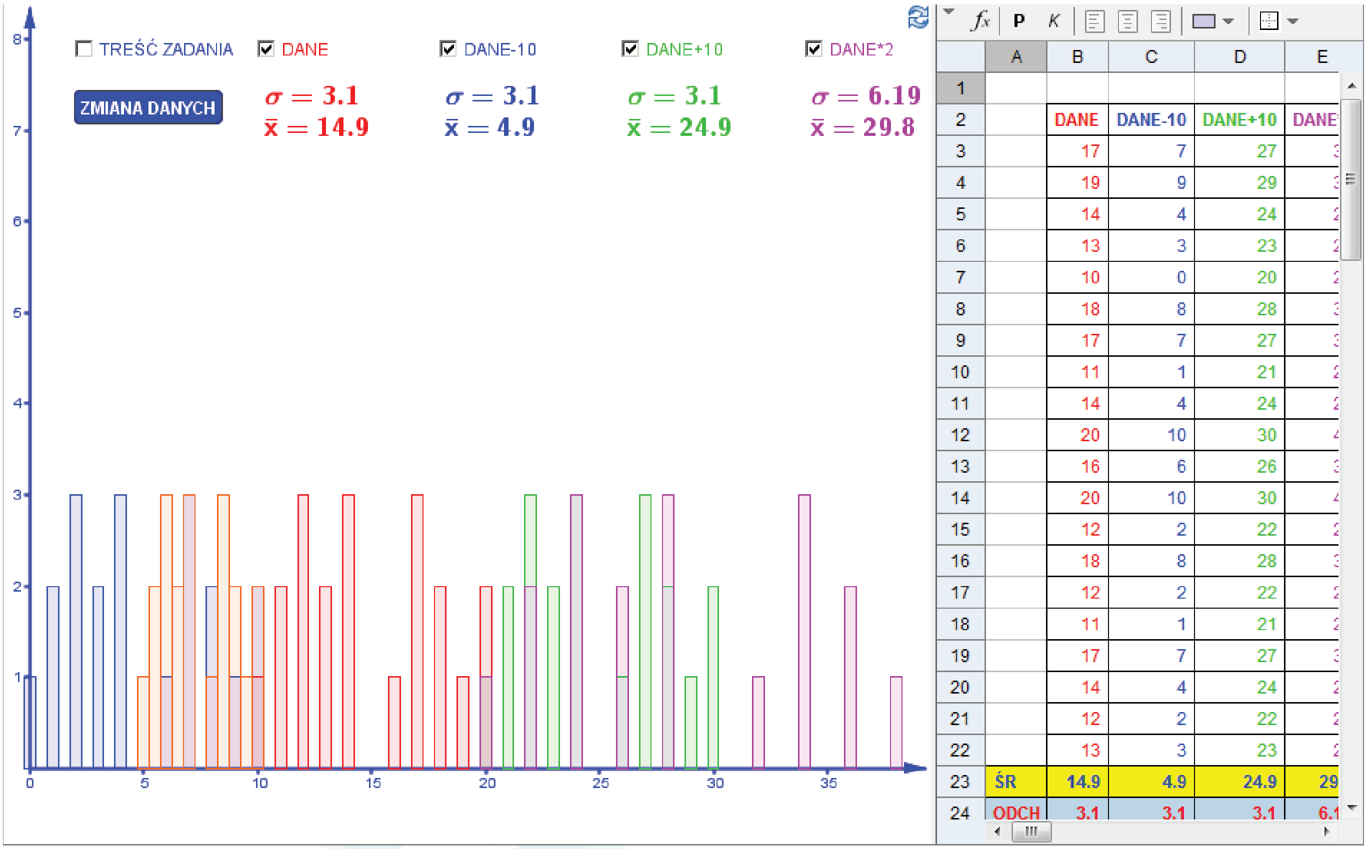
$$\sigma_4 = \sqrt{\frac{(6-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2+(2-4)^2}{5}} = \sqrt{\frac{4+4+4+4}{5}} = \sqrt{\frac{16}{5}} \approx 1,79$$

Otrzymane wyniki wskazują, że wszyscy uczniowie mają te same średnie arytmetyczne, jednak rozproszenia ich ocen od średniej arytmetycznej (oraz samych ocen) są zróżnicowane: od zera (czyli identyczne oceny) do 1,79 — można powiedzieć, że uczeń 4 okazał się uczniem bardzo „nierównym".

A teraz, korzystając z poniższej planszy, zaobserwujmy, jak zmienia się średnia arytmetyczna i odchylenie standardowe w zależności od zmiany danych.

Wpływ zmiany danych na średnią arytmetyczną i odchylenie standardowe

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego



	A	B	C	D	E
1					
2		DANE	DANE-10	DANE+10	DANE
3		17	7	27	
4		19	9	29	
5		14	4	24	
6		13	3	23	
7		10	0	20	
8		18	8	28	
9		17	7	27	
10		11	1	21	
11		14	4	24	
12		20	10	30	
13		16	6	26	
14		20	10	30	
15		12	2	22	
16		18	8	28	
17		12	2	22	
18		11	1	21	
19		17	7	27	
20		14	4	24	
21		12	2	22	
22		13	3	23	
23	ŚR	14.9	4.9	24.9	29
24	ODCH	3.1	3.1	3.1	6.1

Dariusz Kulma - E-laboratorium matematyczne, 6 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

Średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, dominanta (moda)

Autor: **Dariusz Kulma**

ŚREDNIA ARYTMETYCZNA

Przypomnijmy pierwszy z podstawowych parametrów statystycznych.

DEFINICJA

Średnią arytmetyczną n liczb nazywamy iloraz sumy tych liczb przez ich liczbę.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

n — ilość wszystkich liczb

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ — kolejne liczby

Wykonajmy kilka przykładów z wykorzystaniem wzorów.

- Średnia arytmetyczna - przykłady
- Średnia arytmetyczna z danymi z diagramu - przykłady
- Średnia arytmetyczna - obliczanie brakującego elementu - przykłady

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

ŚREDNIA WAŻONA

Zwróć uwagę, że oprócz średniej arytmetycznej możemy mówić również o średniej ważonej, w której bierzemy pod uwagę wagi.

DEFINICJA

Danych jest n dowolnych liczb $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, którym przypisano odpowiednio n dodatnich (najczęściej naturalnych) wag $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$. Średnią ważoną tak ustalonych danych obliczamy ze wzoru:

$$\overline{x_w} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n}$$

Jeśli wszystkie wagi są równe, to średnia ważona równa jest średniej arytmetycznej.

Zobaczmy poniższy przykład. Wynika z niego różnica pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią ważoną.

PRZYKŁAD

Podczas egzaminu ustnego z języka angielskiego wypowiedź ucznia miała być oceniana w trzech kategoriach. Każdej z nich egzaminator przypisał inną wagę (zobacz tabelę obok).

Kategoria	Słownictwo	Umiejętność komunikacji	Poprawność gramatyczna
Waga	2	3	1

Oto oceny zdobyte przez Bartka i Michała w poszczególnych kategoriach:

Kategoria	Słownictwo	Umiejętność komunikacji	Poprawność gramatyczna
Bartek	5	4	3
Michał	4	2	6

Oblicz, jaką końcową ocenę uzyskał każdy z nich i jaką ocenę każdy z nich by uzyskał, gdyby egzaminator nie uwzględniał wag.

1° Korzystamy ze wzoru:

$$\overline{x_w} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \ldots + w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n},$$

aby obliczyć ocenę uzyskaną przez każdego z chłopców.

Ocena Bartka:

$$\overline{x_w} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3}{2+3+1} = \frac{10+12+3}{6} = \frac{25}{6} \approx 4{,}17$$

Ocena Michała:

$$\overline{x_w} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6}{2+3+1} = \frac{8+6+6}{6} = \frac{20}{6} \approx 3{,}33$$

2° Gdyby oceny zostały policzone ze średniej arytmetycznej $\left(\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)$, to byłyby takie, jak przedstawiono obok.

Ocena Bartka:

$$\overline{x} = \frac{5+4+3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

Ocena Michała:

$$\overline{x} = \frac{4+2+6}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

MEDIANA

Przypomnijmy pojęcie mediany. Zwróćmy uwagę, że w zależności od liczby elementów liczymy ją w różny sposób.

DEFINICJA

Dany jest zbiór n liczb uporządkowany w kolejności niemalejącej. Medianą nazywamy:

- wyraz środkowy w przypadku, gdy liczba elementów jest nieparzysta;
- średnią arytmetyczną dwóch środkowych wyrazów, gdy liczba elementów jest parzysta.

Mediana może zatem należeć do zbioru danych, ale może także do niego nie należeć.

Wykonajmy kilka przykładów.

Mediana - przykłady

DOMINANTA (MODA)

Ostatnim parametrem jest dominanta (inaczej: moda), czyli wartość która występuje najczęściej.

DEFINICJA

Dominanta (moda) zbioru danych to taka wartość, która w tym zbiorze występuje najczęściej.

Jeśli w zbiorze kilka wartości występuje z tą samą (najwyższą) częstością, to każda z tych wartości jest dominantą. Jeśli wszystkie wartości w zbiorze występują z tą samą częstością, to przyjmuje się, że zbiór danych nie ma dominanty.

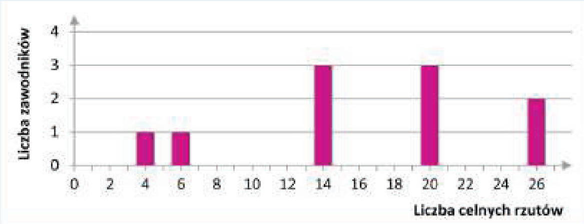
Zobaczmy przykład.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

PRZYKŁAD

W czasie meczu koszykówki odnotowano liczbę celnych rzutów do kosza oddanych przez poszczególnych zawodników. Wyniki przedstawiono na diagramie. Jaka jest dominanta celnych rzutów do kosza?



TEST

Moje Testy #66 - Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta (moda)...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#66] Średnia arytmetyczna, mediana, dominanta (moda)

Zadanie 1 (1 pkt.) Średnia arytmetyczna liczb $6,\ x,\ 8,\ 9,\ 12,\ 15$ wynosi 11 . Medianą tych liczb jest więc liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 10 **B.** 11 **C.** $8,5$ **D.** $10,5$

Zadanie 2 (1 pkt.) Mediana uporządkowanego niemalejącego zestawu sześciu liczb: $2,\ 3,\ 4,\ x,\ 7,\ 8$ jest równa 4 . Wtedy:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x=6$ **B.** $x=5$ **C.** $x=4$ **D.** $x=3$

Zadanie 3 (2 pkt.) Średnia wieku w pewnej grupie studentów równa jest 22 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna równa jest 25 lat. Opiekun ma 49 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 4 (2 pkt.) Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów pewnej klasy:

Ocena	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	4	7	6	5	2

Oblicz medianę i średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.

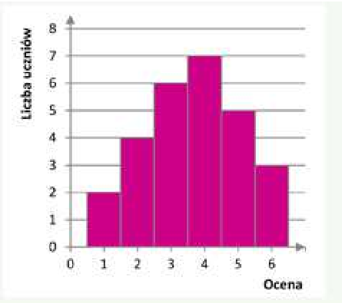
pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 5 (2 pkt.) Tabela przedstawia oceny z matematyki uczniów jednej klasy na koniec semestru.

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	2	3	3	7	x	5

Średnia arytmetyczna tych ocen jest równa $4,0$.
Oblicz liczbę ocen bardzo dobrych wystawionych na koniec semestru.
pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 6 (3 pkt.) Wyniki sprawdzianu z matematyki przedstawiono na diagramie (zobacz rysunek). Podaj wartość:



a. średniej arytmetycznej,
b. mediany,
c. dominanty,

ocen uzyskanych przez uczniów z tego sprawdzianu.
pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 7 (1 pkt.) Pewne zawody sportowe składają się z 2 etapów. Wynik końcowy ustalany jest jako średnia ważona liczby punktów zdobytych przez drużynę w każdym etapie, przy czym suma wag wynosi 1 . W tabeli przedstawione są liczby punktów zdobytych przez dwie drużyny w poszczególnych etapach. Drużyna I uzyskała wynik końcowy równy $35,5$ punktu. Drużyna II uzyskała więc wynik końcowy równy:

Drużyna	Etap 1	Etap 2
I	60	25
II	45	35

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 38 punktów, **B.** 40 punktów, **C.** 36 punktów, **D.** 37 punktów,

Zadanie 8 (1 pkt.) Ogrodnik sprzedał jabłka różnych gatunków w stosunku $1\ :\ 3\ 5$. Cena 1 kg pierwszego gatunku jabłek wynosiła $1,50$ zł, drugiego $2,20$ zł, a trzeciego $2,50$ zł. Średni przychód ze sprzedaży 1 kg jabłek można obliczyć następująco:
odpowiedź >>> kratka >>>

A. $1\cdot 1,50+2\cdot 2,20+3\cdot 2,50$

B. $\dfrac{1,50+2,20+2,50}{3}$

C. $0,1\cdot 1,50+0,3\cdot 2,20+0,5\cdot 2,50$

D. $\dfrac{1,50+3\cdot 2,20+5\cdot 2,50}{9}$

Zadanie 9 (1 pkt.) Średnia ważona liczby 7 z wagą 3 i liczby 19 z wagą jest równa 17 . Wtedy:
odpowiedź >>> kratka >>>

A. $x=13$ **B.** $x=15$ **C.** $x=7$ **D.** $x=12$

Zadanie 10 (1 pkt.) Jeśli średnia ważona danych w tabeli wynosi $4,2$, to:

x	2	3	4	8
Waga	5	6	*a*	5

odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

A. $a = 0,4$ **B.** $a = 2$ **C.** $a = 4$ **D.** $a = 8$

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

Autor: **Dariusz Kulma**

Chcąc uzyskać odpowiedzi na różne pytania dotyczące życia codziennego, można posłużyć się metodami statystycznymi. Polegają one na zbieraniu danych (informacji), a następnie na analizie zebranego materiału: **ilościowej i jakościowej.**

Dokonanie analizy ilościowej oznacza m.in. pogrupowanie odpowiedzi, przedstawienie uzyskanych danych na wykresach.
Dokonanie analizy jakościowej oznacza sformułowanie wniosków i odpowiedzenie na postawione pytania badawcze.

Na podstawie poniższego przykładu przedstawimy różne sposoby prezentowania zebranych danych w analizie ilościowej.

PRZYKŁAD

Załóżmy, że badanie dotyczące ulubionego koloru wśród młodzieży przeprowadzono na grupie 1000 osób. Każda osoba wskazywała tylko jeden kolor. Uzyskano następujące wyniki:

- kolor niebieski wybrało 300 osób;
- kolor czerwony wybrało 250 osób;
- kolor pomarańczowy wybrało 75 osób;
- kolor zielony wybrało 125 osób;
- kolor czarny wybrało 200 osób;
- kolor żółty wybrało 50 osób.

TABELA LICZEBNOŚCI

Suma liczb w prawej kolumnie jest równa 1000. Przy przedstawianiu danych w tabeli mówimy, że tabela zawiera wyniki mierzonej cechy (koloru) i jej liczebności (liczby uczniów, którzy wskazali dany kolor).

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Kolor	Liczba osób
niebieski	300
czerwony	250
pomarańczowy	75
zielony	125
czarny	200
żółty	50

DIAGRAM KOLUMNOWY

Każda z kolumn przedstawionych na diagramie odpowiada jednemu kolorowi. Wysokość kolumny odpowiada liczbie osób, które wskazywały dany kolor.

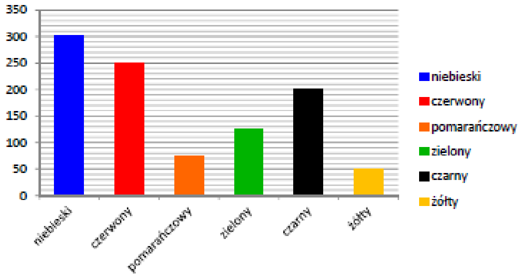


DIAGRAM SŁUPKOWY

Oś pozioma informuje o liczbie osób, a poszczególne słupki odpowiadają wybranym kolorom.

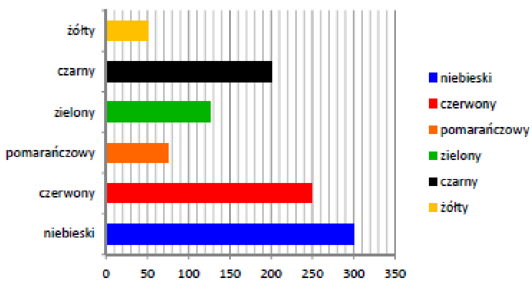


DIAGRAM KOŁOWY

Aby sporządzić diagram kołowy, **należy wykonać odpowiednie obliczenia.** Interesuje nas zależność między liczbą osób, które wybrały dany kolor, a częścią koła, która odpowiada tej liczbie osób. W tym celu wykonujemy następujące obliczenia.

Kolor niebieski wybrało 300 osób, co stanowi 300/1000 wszystkich głosów, czyli 0,3. Zatem tej liczbie osób odpowiada kąt środkowy o mierze $0,3 \times 360^o = 108^o$.

Kolor czerwony wybrało 250 osób, co stanowi 250/1000 wszystkich głosów, czyli 0,25. Zatem tej liczbie osób odpowiada kąt środkowy o mierze $0,25 \times 360^o = 90^o$.

Podobnie wykonujemy pozostałe obliczenia.

Kolor pomarańczowy: 75/1000 = 0,075, czyli kąt środkowy o mierze $0,075 \times 360^o = 27^o$.

Kolor zielony: 125/1000 = 0,125, czyli kąt środkowy o mierze $0,125 \times 360^o = 45^o$.

Kolor czarny: 200/1000 = 0,2, czyli kąt środkowy o mierze $0,2 \times 360^o = 72^o$.

Kolor żółty: 50/1000 = 0,05, czyli kąt środkowy o mierze $0,05 \times 360^o = 18^o$.

Diagram kołowy wygląda więc następująco:

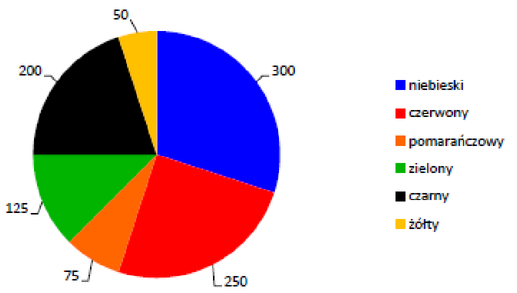
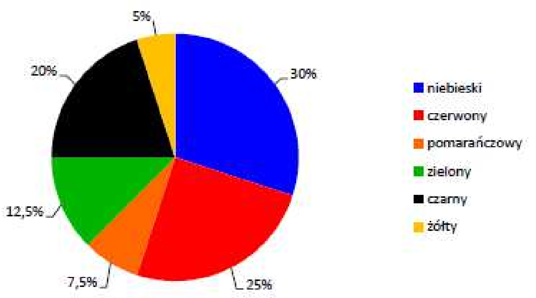


DIAGRAM KOŁOWY PROCENTOWY

Diagram kołowy często występuje również w postaci diagramu procentowego, w którym zebrane dane wyrażone są w procentach. Informacje otrzymane w badaniu wskazują, że kolor niebieski wybrało 30% wszystkich osób, kolor czerwony — 25%, kolor pomarańczowy — 7,5%, kolor zielony — 12,5%, kolor czarny — 20%, a kolor żółty — 5%.



Korzystając z powyższych informacji, wykonajmy kolejne zadania.

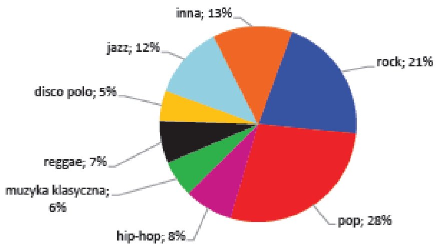
ZAD. Pewna organizacja pozarządowa przeprowadziła w pewnym mieście sondę uliczną, chcąc zbadać, jak często mieszkańcy uczestniczą w wydarzeniach kulturalnych. Badanie zostało przeprowadzone na grupie 200 osób. Jedno z pytań brzmiało: „Ile razy w ostatnim miesiącu był(a) pan(i) w koncercie muzycznym?”. Uzyskano następujące wyniki: 0 razy — odpowiedziało **55%** osób, 1 raz — **30%** osób, 2 razy — **10%** osób, 3 razy — **5%** osób. Przedstaw wyniki badania w postaci tabeli liczebności, diagramu kolumnowego oraz diagramu kołowego.

ZAD. Na podstawie danych przedstawionych w tabeli poniżej wykonaj diagram kołowy prezentujący procentowy podział Polski na obszary o określonej wysokości n.p.m.

Udział w powierzchni Polski obszarów położonych powyżej poziomu morza			
poniżej 0 m	0,2%	300 – 500 m	5,6%
0 – 100 m	25,2%	500 – 1000 m	2,9%
100 – 200 m	49,7%	powyżej 1000 m	0,2%
200 – 300 m	16,2%		

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

ZAD. Na grupie 200 osób przeprowadzono badanie ankietowe, którego wyniki przedstawiono na diagramie kołowym (zobacz diagram obok). Badanie dotyczyło ulubionego gatunku muzycznego. Przedstaw wyniki badania na diagramie słupkowym, prezentującym liczby osób, które wybrały dany gatunek muzyczny.



TEST

Moje Testy #68 - Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystyczn...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:

-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

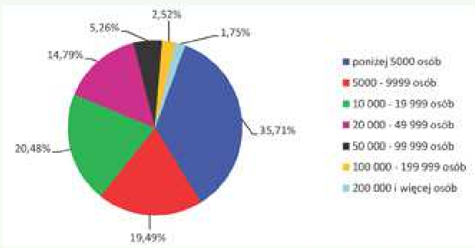
TEST

[#68] Sposoby prezentowania danych zebranych w wyniku obserwacji statystycznej

Zadanie 1 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.9 – 10.B.12

Miasta w Polsce w podziale ze względu na liczbę mieszkańców (stan na dzień 31.12.2014 r.)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015

Miasta poniżej $10\ 000$ mieszkańców stanowią w przybliżeniu:

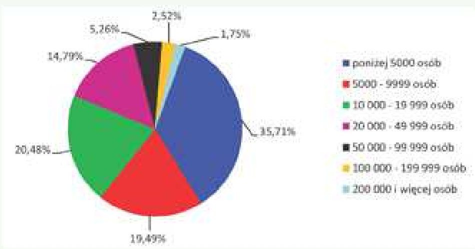
odpowiedź >>> kratka >>>

A. 52% **B.** 55% **C.** 76% **D.** 36%

Zadanie 2 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.9 – 10.B.12

Miasta w Polsce w podziale ze względu na liczbę mieszkańców (stan na dzień 31.12.2014 r.)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015

Miast powyżej $200\ 000$ mieszkańców jest około trzech razy mniej niż miast z liczbą mieszkańców z przedziału:

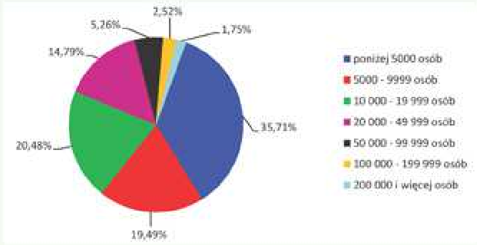
odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

A. $100\ 000 - 199\ 999$ **B.** $20\ 000 - 49\ 999$ **C.** $50\ 000 - 99\ 999$ **D.** $100\ 000 - 19\ 999$

Zadanie 3 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.9 – 10.B.12
Miasta w Polsce w podziale ze względu na liczbę mieszkańców (stan na dzień 31.12.2014 r.)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015

Prawdą jest, że:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. prawie połowa mieszkańców miast mieszka w miastach z liczbą ludności do $10\ 000$ osób,

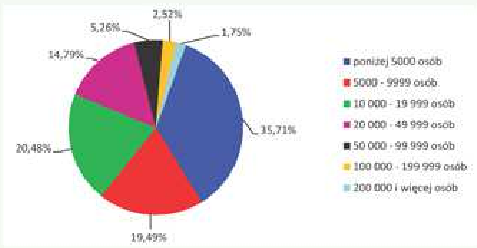
B. ponad 30% mieszkańców miast mieszka w miastach z liczbą ludności większą niż $20\ 000$,

C. niecałe miast w Polsce to miasta z co najmniej $50\ 000$ ludności,

D. miast z ludnością poniżej 5000 osób jest 21 razy więcej niż miast z liczbą ludności liczącą co najmniej $20\ 000$ osób

Zadanie 4 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.9 – 10.B.12
Miasta w Polsce w podziale ze względu na liczbę mieszkańców (stan na dzień 31.12.2014 r.)



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015

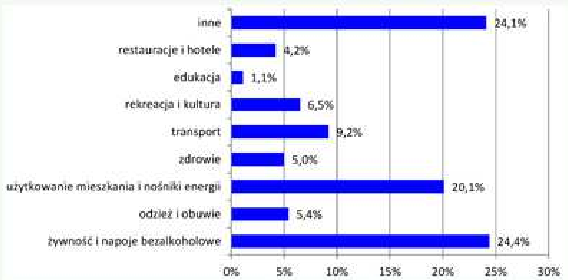
Wiedząc, że wszystkich miast w Polsce jest 913 , można stwierdzić, że miast z liczbą ludności poniżej $10\ 000$ jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 504 **B.** 502 **C.** 177 **D.** 178

Zadanie 5 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.13 – 10.B.16
Przeciętne miesięczne wydatki na 1 osobę w gospodarstwach domowych w Polsce w 2014 roku wyniosły 1079 zł.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015

Przeciętne miesięczne wydatki na edukację poniesione przez 1 osobę wynoszą:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $11,87$ zł **B.** 12 zł **C.** $1,1$ zł **D.** $118,69$ zł

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

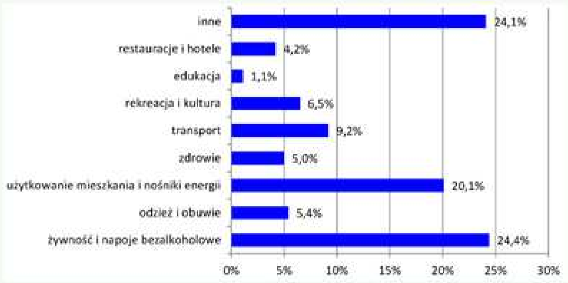
KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zadanie 6 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.13 – 10.B.16

Przeciętne miesięczne wydatki na 1 osobę w gospodarstwach domowych w Polsce w 2014 roku wyniosły 1079 zł.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



Wydatki na żywność oraz odzież stanowią:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. jedną trzecią wszystkich wydatków,

B. połowę wszystkich wydatków,

C. mniej niż czwartą część wszystkich wydatków,

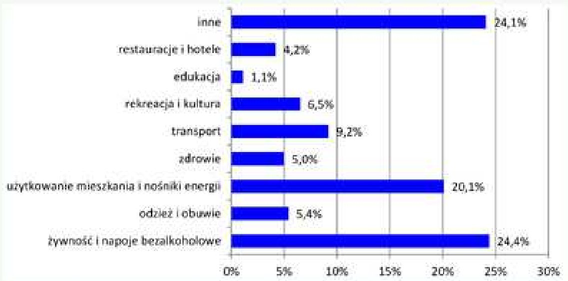
D. blisko 30% wszystkich wydatków.

Zadanie 7 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.13 – 10.B.16

Przeciętne miesięczne wydatki na 1 osobę w gospodarstwach domowych w Polsce w 2014 roku wyniosły 1079 zł.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



Wydatki dotyczące transportu są większe od wydatków poniesionych na zdrowie o około:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 45 zł

B. 112 zł

C. 42 zł

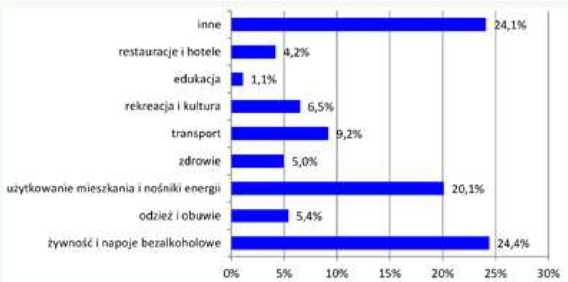
D. 84 zł

Zadanie 8 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.13 – 10.B.16

Przeciętne miesięczne wydatki na 1 osobę w gospodarstwach domowych w Polsce w 2014 roku wyniosły 1079 zł.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



Łączne wydatki na edukację, rekreację i kulturę stanowią:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $7,6\%$

B. $6,7\%$

C. $6,5\%$

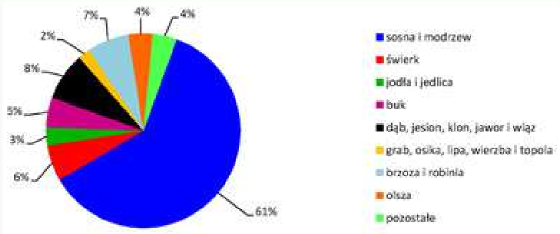
D. więcej niż 8%

Zadanie 9 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.17 – 10.B.20

Struktura powierzchni lasów państwowych według składu gatunkowego.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



Jaką cześć powierzchni lasów państwowych stanowi Olsza?

odpowiedź >>> kratka >>>

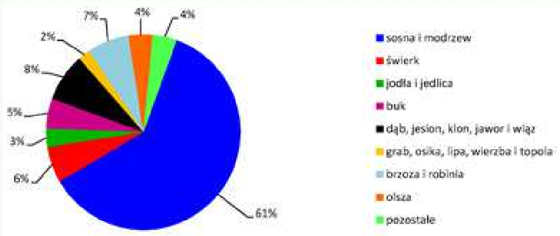
A. $\frac{1}{20}$ **B.** $\frac{1}{5}$ **C.** $\frac{1}{25}$ **D.** $\frac{1}{15}$

Zadanie 10 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.17 – 10.B.20

Struktura powierzchni lasów państwowych według składu gatunkowego.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



O ile procent większą powierzchnię mają sosna i modrzew od powierzchni, na jakiej rosną wszystkie pozostałe gatunki drzew?

odpowiedź >>> kratka >>>

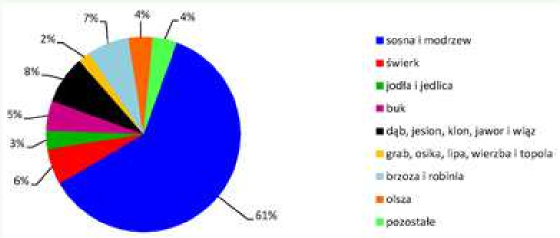
A. ponad 50% większą, **B.** ponad 40% większą, **C.** ponad 20% większą, **D.** ponad dwa razy większą.

Zadanie 11 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.17 – 10.B.20

Struktura powierzchni lasów państwowych według składu gatunkowego.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



6% całej powierzchni lasów porasta:

odpowiedź >>> kratka >>>

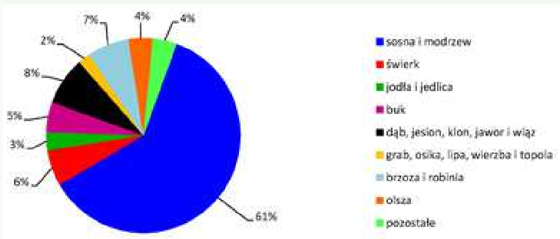
A. buk, **B.** dąb, **C.** świerk, **D.** brzoza.

Zadanie 12 (1 pkt.)

Informacja do zadań 10.B.17 – 10.B.20

Struktura powierzchni lasów państwowych według składu gatunkowego.

Źródło: Opracowanie własne na podstawie danych z Małego Rocznika Statystycznego 2015



Ile procent stanowi powierzchnia porośnięta przez jodłę i jedlicę powierzchni, na jakiej rośnie świerk?

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 50% **B.** 30% **C.** 3% **D.** 6%

Zadanie 13 (1 pkt.)

Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale	Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale
1924, Paryż	66	2	1976, Montreal	223	26
1928, Amsterdam	64	5	1980, Moskwa	306	32
1932, Los Angeles	20	7	1984, Los Angeles	-	-
1936, Berlin	112	6	1988, Seul	143	16
1948, Londyn	24	1	1992, Barcelona	207	19
1952, Helsinki	28	4	1996, Atlanta	167	17
1956, Melbourne	64	9	2000, Sydney	187	14
1960, Rzym	186	21	2004, Ateny	194	10
1964, Tokio	140	23	2008, Pekin	263	10
1968, Meksyk	177	18	2012, Londyn	221	10
1972, Monachium	290	21			

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

Na pierwszych pięciu igrzyskach Polacy zdobyli tyle samo medali co w:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. Los Angeles, **B.** Sydney, **C.** Moskwie, **D.** Monachium.

Zadanie 14 (1 pkt.)

Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale	Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale
1924, Paryż	66	2	1976, Montreal	223	26
1928, Amsterdam	64	5	1980, Moskwa	306	32
1932, Los Angeles	20	7	1984, Los Angeles	-	-
1936, Berlin	112	6	1988, Seul	143	16
1948, Londyn	24	1	1992, Barcelona	207	19
1952, Helsinki	28	4	1996, Atlanta	167	17
1956, Melbourne	64	9	2000, Sydney	187	14
1960, Rzym	186	21	2004, Ateny	194	10
1964, Tokio	140	23	2008, Pekin	263	10
1968, Meksyk	177	18	2012, Londyn	221	10
1972, Monachium	290	21			

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

Średnia medali zdobytych przez polskich sportowców w latach 2000 – 2012 wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 10 **B.** $10,2$ **C.** 11 **D.** $10,5$

Zadanie 15 (1 pkt.)

Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale	Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale
1924, Paryż	66	2	1976, Montreal	223	26
1928, Amsterdam	64	5	1980, Moskwa	306	32
1932, Los Angeles	20	7	1984, Los Angeles	-	-
1936, Berlin	112	6	1988, Seul	143	16
1948, Londyn	24	1	1992, Barcelona	207	19
1952, Helsinki	28	4	1996, Atlanta	167	17
1956, Melbourne	64	9	2000, Sydney	187	14
1960, Rzym	186	21	2004, Ateny	194	10
1964, Tokio	140	23	2008, Pekin	263	10
1968, Meksyk	177	18	2012, Londyn	221	10
1972, Monachium	290	21			

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

Największa reprezentacja w historii igrzysk zdobyła:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 21 medali, **B.** 32 medale, **C.** 10 medali, **D.** 26 medali.

Zadanie 16 (1 pkt.)

Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale	Miejscowość	Liczba zawodników reprezentujących Polskę	Zdobyte medale
1924, Paryż	66	2	1976, Montreal	223	26
1928, Amsterdam	64	5	1980, Moskwa	306	32
1932, Los Angeles	20	7	1984, Los Angeles	-	-
1936, Berlin	112	6	1988, Seul	143	16
1948, Londyn	24	1	1992, Barcelona	207	19
1952, Helsinki	28	4	1996, Atlanta	167	17
1956, Melbourne	64	9	2000, Sydney	187	14
1960, Rzym	186	21	2004, Ateny	194	10
1964, Tokio	140	23	2008, Pekin	263	10
1968, Meksyk	177	18	2012, Londyn	221	10
1972, Monachium	290	21			

Źródło: Mały Rocznik Statystyczny 2015

Dominantą liczby medali zdobytych przez polskich sportowców w historii wszystkich igrzysk jest liczba:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 21 , **B.** 10 , **C.** większa niż 10 , **D.** większa niż 15 .

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Lekcje « POWRÓT

Reguła mnożenia, reguła dodawania

Autor: **Dariusz Kulma**

Do rozwiązywania zadań kombinatorycznych jest potrzebna umiejętność zliczania elementów zbiorów opisujących przestrzeń zdarzeń elementarnych. Jeśli zdarzeń nie jest zbyt dużo, to można je wypisac i policzyć. Innym sposobem jest jednak zastosowanie reguły mnożenia lub reguły dodawania.

REGUŁA MNOŻENIA

TWIERDZENIE

Jeśli doświadczenie można wykonać w m kolejnych etapach, takich, że w pierwszym etapie jest k_1 wyników, w drugim — k_2 wyników, w trzecim — k_3 wyników, ..., a w m-tym — k_m wyników, to moc zbioru wyników doświadczenia jest równa iloczynowi $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_m$.

Zobaczmy tę metodę na przykładach.

Kombinatoryka - przykłady

Kombinatoryka - zadanie

Kombinatoryka - przykłady 2

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

W analogiczny sposób zrobimy kolejne zadania.

REGUŁA DODAWANIA

TWIERDZENIE

Jeśli zbiór wszystkich wyników możemy podzielić na m podzbiorów takich, że w pierwszym podzbiorze jest n_1 wyników, w drugim podzbiorze — n_2 wyników, w trzecim podzbiorze — n_3 wyników, ..., a w ostatnim podzbiorze n_m wyników i wyniki te są różne, to wszystkich wyników jest $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_m$.

Inaczej możemy zapisać:
Jeśli zbiory A i B są rozłączne, to $\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}$.

Zobaczmy, jak zasadę tę stosujemy w praktyce.

Kombinatoryka - przykłady 3

Kombinatoryka - przykłady 4

TEST

Moje Testy #69 - Reguła mnożenia, reguła dodawania...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE

Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#69] Reguła mnożenia, reguła dodawania

Zadanie 1 (1 pkt.) Każdy uczestnik spotkania dziesięcioosobowej grupy przyjaciół uścisnął dłoń każdemu z pozostałych członków tej grupy. Liczba wszystkich uścisków dłoni była równa:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 45 **B.** 100 **C.** 180 **D.** 90

Zadanie 2 (1 pkt.) Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, których iloczyn cyfr wynosi 4 , jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 18

Zadanie 3 (1 pkt.) Wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, których suma cyfr wynosi 3 , jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 6 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 8

Zadanie 4 (1 pkt.) Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych podzielnych przez 9 i niepodzielnych przez 18 jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 6 **B.** 10 , **C.** 11 **D.** 5

Zadanie 5 (1 pkt.) 4 osób w kolejce można ustawić na:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. 10 sposobów, **B.** 5 sposobów, **C.** 24 sposoby **D.** 120 sposobów.

Zadanie 6 (1 pkt.) Tworzymy liczbę czterocyfrową większą od 3000 , która utworzona jest wyłącznie z cyfr $1, 2, 3$. Wiedząc, że cyfry mogą się powtarzać, ale nie wszystkie cyfry muszą być wykorzystane, można stwierdzić, że liczb tych jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

A. 6 **B.** 4 **C.** 18 **D.** 27

Zadanie 7 (2 pkt.) Trójka dziewcząt i czterech chłopców wysiada z autobusu. Na ile sposobów mogą wysiąść, jeżeli najpierw będą wysiadać dziewczęta?

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 8 (2 pkt.) Ile jest liczb czterocyfrowych, w których cyfry:

a. mogą się powtarzać,
b. nie mogą się powtarzać?

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (4 pkt.) Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 5 oraz dokładnie jedna cyfra parzysta.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) Z klasy I, II i III dyrektor szkoły musi wybrać dwuosobową delegację na konferencję edukacyjną. Delegacja musi składać się z jednej dziewczyny i jednego chłopca. W klasie I jest 12 dziewcząt i 18 chłopców, w klasie II jest 16 dziewcząt i 11 chłopców, a w klasie III jest 17 dziewcząt i 15 chłopców. Oblicz, na ile sposobów można wybrać delegację złożoną z uczniów z tej samej klasy.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

laboratorium matematyczne

Strona główna NARZĘDZIA POMOCNICZE Elitmat Nauczyciel wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Prawdopodobieństwo klasyczne

Autor: **Dariusz Kulma**

DOŚWIADCZENIA LOSOWE

Zanim przejdziemy do obliczania prawdopodobieństwa, musimy omówic pojęcie doświadczenia losowego.

Zwróć uwagę na definicję przestrzeni zdarzeń elementarnych i mocy tego zbioru.

DEFINICJE	PRZYKŁAD
Doświadczenie losowe to zjawisko lub eksperyment, o wyniku którego decyduje przypadek.	Rzut monetą jest doświadczeniem losowym, ponieważ mogą pojawić się dwa wyniki (orzeł lub reszka), ale przed wykonaniem doświadczenia nie wiemy, co wypadnie.
Przestrzeń zdarzeń elementarnych to zbiór wszystkich możliwych do otrzymania wyników. Oznaczamy ją literą Ω (wielką grecką literą omega).	Rzut symetryczną kostką do gry jest doświadczeniem losowym, ponieważ wiemy, co może się pojawić: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ale przed dokonaniem rzutu nie wiemy, co wypadnie.
Liczbę elementów zbioru Ω nazywamy mocą zbioru Ω i oznaczamy jako $\overline{\overline{\Omega}}$ (lub $\lvert\Omega\rvert$).	
Każdy możliwy wynik doświadczenia nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy literą ω (małą grecką literą omega).	
Przyjmujemy, że doświadczenie przebiega w warunkach, w których otrzymanie każdego wyniku jest jednakowo możliwe.	

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Bardzo ważnym pojęciem jest **zdarzenie niemożliwe** i **zdarzenie pewne**. Czym jest?

Podobnie jak przy zbiorze wszystkich zdarzeń elementarnych, tak samo przy zdarzeniach losowych mówimy o mocy zbioru.

Zobaczmy poniższe definicje.

DEFINICJA

Zdarzeniem losowym nazywamy każdy podzbiór przestrzeni zdarzeń elementarnych (czyli Ω).

Zdarzenia losowe oznaczamy wielkimi literami: A, B, C, D itd.

Podzbiorami zbioru Ω są m.in. zbiór pusty $\varnothing$ (który nazywamy zdarzeniem niemożliwym) i zbiór Ω (który nazywamy zdarzeniem pewnym).

Jeśli zdarzenie elementarne ω należy do zbioru A, to mówimy, że zdarzenie elementarne ω sprzyja zdarzeniu A.

DEFINICJA

Liczbę elementów zbioru A nazywamy mocą zbioru i oznaczamy jako $\overline{\overline{A}}$ (lub $|A|$).

Poznane pojęcia zastosujmy w praktyce na przykładzie.

PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie kostką.

a. Wyznacz zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia.
b. Wypisz wyniki sprzyjające następującym zdarzeniom:
A — za pierwszym razem wypadła nieparzysta liczba oczek,
B — w obu rzutach wypadła taka sama liczba oczek,
C — za drugim razem wypadła większa liczba oczek niż za pierwszym razem,
D — suma wyrzuconych oczek w obu rzutach jest nie mniejsza niż 13,
E — suma wyrzuconych oczek w obu rzutach jest nie większa niż 5.

Odp. a. Wypisujemy kolejne uporządkowane pary.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

Odp. b.

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{A}} = 18$.

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{B}} = 6$.

$$C = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{C}} = 15$.

$D = \varnothing$ — zdarzenie D jest zdarzeniem niemożliwym.

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

Moc tego zbioru, czyli liczba zdarzeń sprzyjających, wynosi $\overline{\overline{E}} = 10$.

PRAWDOPODOBIEŃSTWO KLASYCZNE ZDARZENIA A

Mówimy, że wyniki doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne, gdy przy odpowiednio dużej liczbie prób częstości wyników są do siebie zbliżone.

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów” współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
laboratorium matematyczne
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

DEFINICJA

Dane jest doświadczenie losowe, w którym wyniki są jednakowo prawdopodobne. Wówczas prawdopodobieństwo określonego zdarzenia jest ilorazem wyników sprzyjających temu zdarzeniu i liczebności całego zbioru możliwych wyników.

$$P(A) = \frac{\text{liczba elementów zbioru } A}{\text{liczba elementów zbioru wszystkich wyników}} = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$$

$\overline{\overline{A}}$ — liczba wyników (zdarzeń elementarnych) sprzyjających zdarzeniu A

$\overline{\overline{\Omega}}$ — liczba wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)

Zwróć uwagę, że wartość prawdopobieństwa będzie zawsze liczbą z przedziału <0,1>.

TWIERDZENIE

Jeżeli A jest zdarzeniem w doświadczeniu losowym, to $0 \leq P(A) \leq 1$.

WYJAŚNIENIE

Liczby $\overline{\overline{\Omega}}$ i $\overline{\overline{A}}$ są liczbami naturalnymi i zawsze prawdziwa jest nierówność $0 \leq \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\Omega}}$. Jeżeli obie strony tej nierówności podzielimy przez $\overline{\overline{\Omega}}$, to otrzymamy $0 \leq \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} \leq 1$, czyli $0 \leq P(A) \leq 1$.

Przechodzimy do zadań, w których w praktyce wykorzystamy wzór na obliczanie prawdopodobieństwa.

Wstęp do prawdopodobieństwa - przykłady

Wstęp do prawdopodobieństwa - przykłady 2

W poniższych zadaniach dotyczących np. podwójnego rzutu kostką wykorzystamy **tabelkę** - jest to tabelka wszystkich możliwych wyników. Górny wiersz poziomy oznacza liczbę oczek w pierwszym rzucie, a pionowy liczbę oczek w drugim rzucie. Następnie w tabeli zaznaczamy zdarzenia sprzyjające, czyli wybieramy takie pary liczb, które spełniają dany warunek. Aby obliczyć moc zbioru, czyli liczbę zdarzeń sprzyjających, zliczamy, ile jest zaznaczonych pól w tabeli.

Zobaczmy kilka przykładów w pierwszej planszy, a następnie wykonamy kolejna zadania.

Podwójny rzut kostką - przykłady

Prawdopodobieństwo - zadanie 1

Prawdopodobieństwo - zadanie 3

Podwójny rzut kostką - zadanie 1

Podwójny rzut kostką - zadanie 2

Prawdopodobieństwo - zadanie 2

Prawdopodobieństwo - zadanie 4

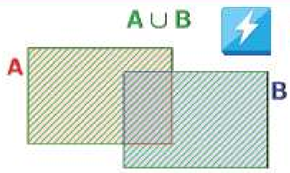
DZIAŁANIA NA ZDARZENIACH LOSOWYCH

Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω oraz zdarzenia A, B takie, że $A, B \subset \Omega$, są zbiorami, więc możemy na nich wykonywać takie same działania jak na zbiorach.

DEFINICJA

Sumą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cup B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A lub B.

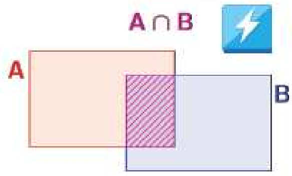
$\omega \in A \cup B \Leftrightarrow \omega \in A$ lub $\omega \in B$



P.1.A.1

Iloczynem (częścią wspólną) zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \cap B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające jednocześnie A i B.

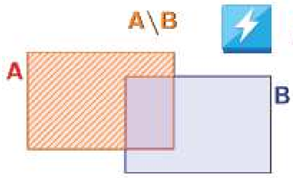
$\omega \in A \cap B \Leftrightarrow \omega \in A$ i $\omega \in B$



P.1.A.1

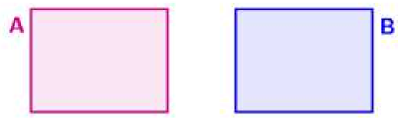
Różnicą zdarzeń A i B nazywamy zdarzenie $A \setminus B$, któremu sprzyjają wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające A i niesprzyjające B.

$\omega \in A \setminus B \Leftrightarrow \omega \in A$ i $\omega \notin B$

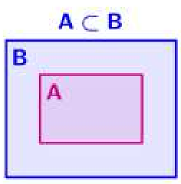


P.1.A.1

Zdarzenia A i B są rozłączne lub wykluczają się, jeśli część wspólna $A \cap B$ tych zdarzeń jest zdarzeniem niemożliwym.



Jeżeli wszystkie elementy zdarzenia A należą do zdarzenia B, to mówimy, że zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B, co oznaczamy $A \subset B$.



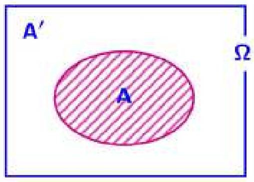
Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

DEFINICJA

Zbiór wszystkich wyników w przestrzeni Ω, które nie sprzyjają zdarzeniu A, nazywamy zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A i oznaczamy jako A':

$$A' = \Omega \setminus A$$

Zauważmy, że $A \cap A' = \varnothing$ oraz $A \cup A' = \Omega$.



Prześledźmy przykład.

PRZYKŁAD

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie monetą. Wypisz wyniki sprzyjające następującym zdarzeniom:

A — reszka wypadła co najwyżej raz,
B — orzeł wypadł co najmniej raz,
C — wypadły same reszki,
D — orzeł wypadł dokładnie dwa razy,
E — wypadło mniej orłów niż reszek.

a. Wskaż pary zdarzeń wykluczających się.
b. Wskaż pary zdarzeń przeciwnych.
c. Wyznacz różnicę zdarzeń $B \setminus E$.
d. Wyznacz iloczyn zdarzeń $A \cap B$.

1° Wyznaczamy zbiór wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia (Ω). Możemy to zrobić za pomocą drzewka.

Wyniki doświadczenia:
$(O,O,O), (O,O,R), (O,R,O), (O,R,R), (R,O,O), (R,O,R), (R,R,O), (R,R,R)$

2° Wypisujemy wyniki sprzyjające poszczególnym zdarzeniom.

$A = \{(R,O,O), (O,R,O), (O,O,R), (O,O,O)\}$

$B = \{(O,R,R), (R,O,R), (R,R,O), (O,O,R), (O,R,O), (R,O,O), (O,O,O)\}$

$C = \{(R,R,R)\}$

$D = \{(O,O,R), (O,R,O), (R,O,O)\}$

$E = \{(O,R,R), (R,O,R), (R,R,O), (R,R,R)\}$

Odp. a. Pary zdarzeń wykluczających się to: A i C, B i C, D i C, E i A, E i D.

Odp. b. Para zdarzeń przeciwnych to: B i C, ponieważ $B \cup C = \Omega$.

Odp. c. $B \setminus E = \{(O,O,R), (O,R,O), (R,O,O), (O,O,O)\}$

Odp. d. $A \cap B = \{(R,O,O), (O,R,O), (O,O,R), (O,O,O)\}$

WŁASNOŚCI PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

KAPITAŁ LUDZKI CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA! UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Zdarzenie przeciwne

A' — oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, więc: $P(A) = 1 - P(A')$ lub $P(A') = 1 - P(A)$.

Własności prawdopodobieństwa

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \leq P(B)$.

$P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(A) \in \langle 0,1 \rangle$

PRZYKŁAD

A jest zdarzeniem losowym oraz A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A. Wiadomo, że $P(A) = 3P(A') - \frac{1}{3}$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

1° Skorzystamy z zależności: $P(A') = 1 - P(A)$.

2° Z treści zadania wiemy, że $P(A) = 3P(A') - \frac{1}{3}$, więc podstawiamy za $P(A') = 1 - P(A)$ i obliczamy $P(A)$.

$$P(A) = 3(1 - P(A)) - \frac{1}{3}$$
$$P(A) = 3 - 3P(A) - \frac{1}{3}$$
$$P(A) + 3P(A) = 2\frac{2}{3}$$
$$4P(A) = 2\frac{2}{3} \quad \Big| : 4$$
$$P(A) = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{3} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$
$$P(A) = \frac{2}{3}$$

3° Prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi $\frac{2}{3}$.

TEST

Moje Testy #70 - Prawdopodobieństwo klasyczne...

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

laboratorium matematyczne

Strona główna | NARZĘDZIA POMOCNICZE | Elitmat Nauczyciel
wyloguj

Aktualnie pracujesz z klasą:
-- wybierz klasę --

Materiały » BelferBOX » Moje Testy « POWRÓT

TEST

[#70] Prawdopodobieństwo klasyczne

Zadanie 1 (1 pkt.) Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Prawdopodobieństwo otrzymania sumy oczek równej 5 wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{6}$ **B.** $\frac{1}{9}$ **C.** $\frac{1}{12}$ **D.** $\frac{1}{18}$

Zadanie 2 (1 pkt.) Prawdopodobieństwo wyrzucenia w dwukrotnym rzucie sześcienną symetryczną kostką do gry obu liczb parzystych wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{1}{6}$

Zadanie 3 (1 pkt.) Ze zbioru $4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16$ wybieramy losowo jedną liczbę. Jeżeli p oznacza prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 4 , to:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $p < \frac{1}{4}$ **B.** $p = \frac{1}{3}$ **C.** $p = \frac{1}{4}$ **D.** $p > \frac{1}{3}$

Zadanie 4 (1 pkt.) W pojemniku znajdują się 3 kule czerwone, 4 kule niebieskie i 5 kul zielonych. Losujemy jedną kulę. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli niebieskiej równe jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{12}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{5}{12}$

Zadanie 5 (1 pkt.) Ze zbioru dwucyfrowych liczb naturalnych wybieramy losowo jedną liczbę. Prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 20 wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{1}{30}$ **B.** $\frac{9}{41}$ **C.** $\frac{4}{89}$ **D.** $\frac{2}{45}$

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zadanie 6 (1 pkt.) Ze zbioru $\{1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ 20\}$ losujemy jedną liczbę. Prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej wynosi:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $\frac{2}{5}$ **B.** $\frac{7}{20}$ **C.** $\frac{9}{20}$ **D.** $\frac{3}{10}$

Zadanie 7 (1 pkt.) Zdarzenie A' jest zdarzeniem przeciwnym do zdarzenia A . Jeśli $P(A) = 4 \cdot P(A')$, to $P(A)$ równe jest:

odpowiedź >>> kratka >>>

A. $0,8$ **B.** $0,6$ **C.** $0,2$ **D.** $0,4$

Zadanie 8 (2 pkt.) Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że liczba oczek w pierwszym rzucie jest o 2 większa od liczby oczek w drugim rzucie.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 9 (2 pkt.) W pudełku P_1 znajduje się 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8 , a w pudełku P_2 znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 2 do 7 . Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka, aby otrzymać liczbę dwucyfrową. Liczba wylosowana z pudełka P_1 jest cyfrą dziesiątek, a z pudełka P_2 cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania liczby podzielnej przez 9 .

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

Zadanie 10 (4 pkt.) Rzucamy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo, że iloczyn wyników, które wypadły na obu kostkach, jest dwucyfrową liczbą parzystą.

pokaż odpowiedź >>> kratka >>>

SPRAWDZANIE ODPOWIEDZI

Projekt „E-laboratorium matematyczne - małymi krokami do wielkich sukcesów" współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego