PROJEKT PIKTOGRAFIA

O umiejętnościach matematycznych uczniów

Cz.I Diagnoza

O umiejętnościach matematycznych uczniów

Cz.I Diagnoza

Autorzy:
Mirosław Dąbrowski
Elżbieta Jabłońska
Anna Pregler
Małgorzata Żytko

Redakcja naukowa Cz. I
dr Mirosław Dąbrowski

Redakcja graficzna
Anna Pregler

Korekta
Bożena Zwolińska

Projekt graficzny okładki:
Bartłomiej Dudek
Katarzyna Honij

Layout i skład
Positive Studio

ISBN 978-83-88967-66-5

Wydawnictwo Bohdan Orłowski; ul. Stefana Batorego 16 lok. 1 i 2; 05-510 Konstancin-Jeziorna
Wydział Pedagogiczny Uniwersytetu Warszawskiego; ul. Mokotowska 16/20; 00-561 Warszawa

www.projekt-piktografia.pl

Publikacja *O umiejętnościach matematycznych uczniów Cz.I Diagnoza* powstała w ramach projektu *Piktografia – Rozwijanie umiejętności posługiwania się językiem symbolicznym w edukacji z zakresu nauk matematycznych z zastosowaniem piktogramów Asylco*, współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
Priorytet: III. Wysoka jakość systemu edukacji
Działanie 3.5 Projekty innowacyjne

Honorowy patronat:

ORE Ośrodek Rozwoju Edukacji

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

wydawnictwo BOHDAN ORŁOWSKI KONSTANCIN

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Spis treści

Rozdział 1.
Oczekiwania:
Społeczeństwo wiedzy

1. Oczekiwania: Społeczeństwo wiedzy
Anna Pregler

1 maja 2004 r. Polska stała się pełnoprawnym członkiem Unii Europejskiej – związku państw zakładającego współpracę między krajami członkowskimi i między mieszkańcami dla osiągania wspólnych celów gospodarczych, politycznych i społecznych. Celami UE jest zapewnienie bezpieczeństwa, postępu gospodarczego i społecznego oraz ochrona praw i interesów obywateli [1].

Od tej chwili nasze państwo m.in. włączyło się w realizację przyjmowanych przez Unię Europejską planów działań. Jednym z nich był plan rozwoju Unii Europejskiej zwany Strategią Lizbońską (przyjęty w marcu 2000 r.), którego celem było przekształcenie do 2010 r. gospodarki UE w najbardziej konkurencyjną gospodarkę na świecie. Podstawową rolę w osiągnięciu tego celu miały odgrywać systemy edukacyjne państw członkowskich, dlatego został opracowany dokument *Edukacja w Europie: różne systemy kształcenia i szkolenia – wspólne cele do roku 2010. Program prac dotyczący przyszłych celów systemów edukacji* [2].

Czytamy w nim m.in.:

„Rada Europejska (skupiająca szefów państw lub rządów krajów UE), podczas posiedzenia w Lizbonie w marcu 2000 r., potwierdziła, że Unia Europejska stanęła w obliczu fundamentalnych zmian, będących wynikiem globalizacji i rozwoju gospodarki opartej na wiedzy, oraz uzgodniła, iż do roku 2010 powinien być osiągnięty następujący cel strategiczny:

Gospodarka europejska powinna stać się najbardziej konkurencyjną i dynamiczną gospodarką w świecie – gospodarką opartą na wiedzy, zdolną do trwałego wzrostu, tworzącą coraz większą liczbę lepszych miejsc pracy i zapewniającą większą spójność społeczną”.

Dla osiągnięcia tego strategicznego celu systemy edukacji i kształcenia w państwach członkowskich UE powinny przyczyniać się do budowania społeczeństwa wiedzy: „społeczeństwa, w którym wytwarzanie i przetwarzanie przedmiotów materialnych typowe dla produkcji fabrycznej zostanie zepchnięte na margines przez wytwarzanie i przetwarzanie wiedzy, która stanie się centralnym towarem gospodarki. Społeczeństwo wiedzy jest nowym typem społeczeństwa, które wydaje się powstawać w okresie gwałtownego rozwoju technologii informacyjnych i komunikacyjnych oraz gospodarki opartej na wiedzy. Do najważniejszych cech tworzącego się modelu społecznego można zaliczyć permanentną edukację, nową rolę nauki, rolę kapitału społecznego, zastosowanie wiedzy w praktyce, wzrost znaczenia kapitału społecznego, który jest podłożem rozwoju kapitału intelektualnego”.[3]

---

1 Na podstawie: *Encyklopedia Unii Europejskiej*, Praca zbiorowa pod redakcją prof. Konstantego Adama Wojtaszczyka. WSiP, Warszawa 2004.

2 http://www.men.gov.pl/index.php?option=com_content&view=article&id=413%3Astrategia-lizboska&catid=104%3Amodzie-i-zagranica-wspopraca-midzynarodowa-unia-europejska&Itemid=140

3 http://mfiles.pl/pl/index.php/Spo%C5%82ecze%C5%84stwo_wiedzy

We wspomnianym dokumencie z 2000 r. wyszczególniono kolejne cele strategiczne, wśród których jako pierwszy został postawiony:

Cel strategiczny 1: Poprawa jakości i efektywności systemów edukacji w UE wobec nowych zadań społeczeństwa wiedzy oraz zmieniających się metod i treści nauczania i uczenia się:

Cel 1.1.: Podniesienie jakości kształcenia i doskonalenia zawodowego nauczycieli i osób prowadzących szkolenia

Cel 1.2.: Rozwijanie kompetencji i umiejętności potrzebnych dla społeczeństwa wiedzy

Cel 1.3.: Zapewnienie powszechnego dostępu do technologii informacyjno-komunikacyjnych

Cel 1.4.: Zwiększenie rekrutacji w dziedzinach nauk ścisłych i technicznych

Cel 1.5.: Optymalne wykorzystywanie zasobów.

W kolejnych latach trwały prace nad uzgodnieniem wspólnego zestawu kompetencji i umiejętności dających młodym ludziom odpowiednie przygotowanie do dorosłego życia oraz stanowiących podstawę dla dalszej nauki i życia zawodowego. W efekcie tych prac 18 grudnia 2006 r. wydano *Zalecenie Parlamentu Europejskiego w sprawie kompetencji kluczowych w procesie uczenia się przez całe życie*[4], w którym zdefiniowano wskazane w celu 1.2 kompetencje i umiejętności potrzebne dla społeczeństwa wiedzy. Podkreślono, że kompetencje kluczowe są niezbędne każdemu obywatelowi dla łatwego przystosowywania się do szybko zmieniającego się świata, ale także do samorealizacji i rozwoju osobistego, bycia aktywnym obywatelem, integracji społecznej i zatrudnienia.

Ustanowiono osiem kompetencji kluczowych:

1) porozumiewanie się w języku ojczystym;
2) porozumiewanie się w językach obcych;
3) kompetencje matematyczne i podstawowe kompetencje naukowo-techniczne;
4) kompetencje informatyczne;
5) umiejętność uczenia się;
6) kompetencje społeczne i obywatelskie;
7) inicjatywność i przedsiębiorczość;
8) świadomość i ekspresja kulturalna,

które zostały zdefiniowane jako połączenie wiadomości, umiejętności i postaw odpowiednich do sytuacji. Na przykład opis kompetencji matematycznych wygląda w tym dokumencie następująco:

Definicja:

„Kompetencje matematyczne obejmują umiejętność rozwijania i wykorzystywania myślenia matematycznego w celu rozwiązywania problemów wynikających z codziennych sytuacji. Istotne są zarówno proces i czynność, jak i wiedza, przy czym podstawę stanowi należyte opanowanie umiejętności liczenia. Kompetencje matematyczne obejmują – w różnym stopniu – zdolność i chęć wykorzystywania matematycznych sposobów myślenia (myślenie logiczne i przestrzenne) oraz prezentacji (wzory, modele, konstrukty, wykresy, tabele)”.

[4] L 394/10 PL *Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej* z dnia 30 grudnia 2006 r.

Niezbędna wiedza, umiejętności i postawy powiązane z tą kompetencją.

Konieczna wiedza w dziedzinie matematyki obejmuje solidną umiejętność liczenia, znajomość miar i struktur, głównych operacji i sposobów prezentacji matematycznej, rozumienie terminów i pojęć matematycznych, a także świadomość pytań, na które matematyka może dać odpowiedź.

Osoba powinna posiadać umiejętności stosowania głównych zasad i procesów matematycznych w codziennych sytuacjach prywatnych i zawodowych, a także śledzenia i oceniania ciągów argumentów. Powinna ona być w stanie rozumować w matematyczny sposób, rozumieć dowód matematyczny i komunikować się językiem matematycznym oraz korzystać z odpowiednich pomocy.

Pozytywna postawa w matematyce opiera się na szacunku dla prawdy i chęci szukania przyczyn i oceniania ich zasadności.[5]

Budowanie społeczeństwa wiedzy i gospodarki opartej na wiedzy jest bardzo ważne także dla Polski, nie tylko ze względu na naszą przynależności do Unii Europejskiej – polski system edukacji musi stać się filarem tych zmian. Jednym z działań zmierzających w tym kierunku było wpisanie do nowej podstawy programowej kształcenia ogólnego[6], zarówno dla szkół podstawowych, jak i gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych, ośmiu najważniejszych umiejętności zdobywanych przez ucznia w trakcie kształcenia ogólnego w szkole podstawowej oraz na III i IV etapie edukacyjnym, które są spójne z europejskimi kompetencjami kluczowymi. Na przykład, jako drugą umiejętność wymieniono myślenie matematyczne określone dla poziomu szkoły podstawowej jako umiejętność korzystania z podstawowych narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz prowadzenia elementarnych rozumowań matematycznych, a dla III i IV etapu edukacyjnego jako umiejętność wykorzystywania narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym.

Niedługo po podpisaniu przez Ministra Edukacji Narodowej rozporządzenia w sprawie podstawy programowej odbyła się w dniach 9-10 stycznia 2009 r. ogólnopolska konferencja *Społeczeństwo wiedzy – mit czy szansa dla Polski?*, której celem było przedyskutowanie problemów związanych z tworzeniem się w Polsce „innowacyjnego społeczeństwa wiedzy", w tym tych działań, jakie należy podjąć, by społeczeństwo polskie nadrobiło tzw. lukę innowacyjną wobec liderów z Unii Europejskiej[7].

Podczas tej konferencji uczestnicy sesji *Społeczeństwo edukacyjne i uczące się* starali się odpowiedzieć na pytania dotyczące przyszłości polskiej szkoły:

- Jaka powinna być szkoła za 7-10 lat, aby była środowiskiem budowania innowacyjnego społeczeństwa wiedzy, a nie hamulcem rozwoju?
- Jaki mechanizm teraz uruchomiony może doprowadzić do urzeczywistnienia tej wizji?
- Jakie działania należy podjąć już, teraz, natychmiast?

---

5 *Op. cit.*, s. 8.

6 *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych i gimnazjów z 23 grudnia 2008 r.* Dz. U. Nr 4, poz. 17 z dnia 15 stycznia 2009 r.

7 http://www.fundacjaedukacji.pl/index.php/wydarzenia-fundacji/89-spoeczestwo-wiedzy-mit-czy-szansa-dla-polski?showall=1

We wnioskach z tej dyskusji[8] możemy przeczytać m.in.:

„Szkoła wymaga ciągłej zmiany:

- ma przygotowywać ucznia do życia we współczesnym świecie, a ten zmienia się bardzo szybko;
- we współczesnym świecie szkoła nie ma monopolu na edukację – musi znaleźć swoje miejsce w systemie edukacji;
- ważne są też inne formy: uczenie się przez całe życie, doskonalenie nauczycieli, rodziców. Internet jest osobnym miejscem zdobywania wiedzy.

Szkoła (jaka powinna być):

- dająca każdemu szansę – nastawiona na indywidualizację;
- ze znawstwem stosująca nowoczesne technologie w nauczaniu;
- ucząca umiejętności;
- wykorzystująca szeroką gamę metod aktywizujących;
- dostosowująca ofertę edukacyjną do potrzeb każdego ucznia;
- rozbudzająca zainteresowania naukowe;
- rozbudzająca pasję, radość nauki;
- zmieniająca się wraz z potrzebami, oczekiwaniami i możliwościami uczniów;
- współpracująca: z rodzicami, instytucjami, organizacjami ngo, w działaniach interdyscyplinarnych;
- wyprzedzająca zmiany, inspirująca rozwój;
- (…).

Szkoła powinna uczyć umiejętności:

- zarządzania wiedzą;
- uczenia się przez całe życie;
- samokształcenia;
- komunikacji;
- pracy zespołowej;
- umiejętności życiowych: radzenia sobie ze stresem, brania odpowiedzialności za swoje wybory, uczenia się na błędach itd.

Szkoła jest miejscem:

- uczenia wartości podstawowych, tj. budowania poczucia własnej wartości, uczciwości intelektualnej;
- wyzwalania potencjału uczniów;
- rozbudzania wyobraźni, kreatywności, innowacyjnego myślenia;
- (…).

Istnienie takiej szkoły zależy od:

- nauczycieli – ich fachowości, umiejętności interpersonalnych, postaw i osobowości, pasji, powołania;
- stosowanych metod uczenia i uczenia się;
- współpracy z innymi.

---

[8] *Op. cit.* s. 9.

Propozycje działań:

- nagłaśnianie sukcesów;
- upowszechnianie przykładów dobrej praktyki;
- praca z uczniami szczególnie zdolnymi;
- praca metodą projektów;
- dużo zajęć praktycznych, badawczych, laboratoryjnych;
- różnorodne formy organizacji pracy w szkole: praca w grupach, dodatkowe godziny zajęć z uczniami;
- uczenie z wykorzystaniem zasad konstruktywizmu;
- (…)".

Także w *Raporcie o Kapitale Intelektualnym Polski*[9] zwrócono uwagę na najważniejsze edukacyjne wyzwania stojące przez naszym krajem – wymieniono wśród nich m.in.:

- słabą jakość i różnorodność wczesnej edukacji;
- brak skutecznych działań szkół w zakresie wyrównywania szans;
- zbyt mało spersonalizowany system nauczania w szkołach;
- mało nowoczesne metody dydaktyczne na uczelniach.

Zmiana szkoły – w wyznaczonym przez Unię Europejską kierunku budowania społeczeństwa wiedzy, zgodnie z zapisami krajowych dokumentów, toczącą się dyskusją oraz w poczuciu odpowiedzialności za przyszłość kolejnych pokoleń – w wielu wymiarach może i powinna być wdrażana na każdym poziomie edukacji, w każdym momencie. Wiele działań modyfikujących szkołę jej dyrektorzy i nauczyciele mogą i powinni już podejmować w swojej codziennej pracy.

---

9 *Raport o Kapitale Intelektualnym Polski*. Warszawa 10 lipca 2008 r. http://www.slideshare.net/Polska2030/raport-o-kapitale-intelektualnym-polski

Rozdział 2.
W drodze do celu:
Gdzie jesteśmy?

2. W drodze do celu: Gdzie jesteśmy?

Jaki poziom matematycznych umiejętności i zaradności matematycznej prezentują polscy uczniowie? W którym miejscu „drogi do społeczeństwa wiedzy" znajdujemy się?

Gdy padają takie pytania, najczęściej odwołujemy się do obiegowej wiedzy, budowanej, np. na podstawie krótkich notek prasowych dotyczących edukacji albo do własnych szkolnych doświadczeń. Tymczasem są znacznie bardziej obiektywne źródła dostarczające tego typu informacji: reprezentatywne badania krajowe i międzynarodowe czy masowe egzaminy zewnętrzne. Zobaczmy, co z nich wynika, zwłaszcza w odniesieniu do operowania językiem symbolicznym matematyki przez polskich uczniów.

2.1. Wybrane umiejętności matematyczne uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej na podstawie badań prowadzonych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną

Mirosław Dąbrowski

O badaniach umiejętności trzecioklasistów prowadzonych przez CKE

W roku 2005 Centralna Komisja Egzaminacyjna uruchomiła projekt, współfinansowany przez Europejski Fundusz Społeczny, pod tytułem: *Badanie podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej*. Jego celem było m.in. zbadanie wybranych umiejętności językowych i matematycznych uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej. Badania zrealizowano na reprezentatywnej losowej próbie prawie 2500 uczniów z 137 szkół podstawowych z terenu całej Polski[10].

W roku 2007 uruchomiono dalszy ciąg tego projektu, a jednym z jego podstawowych zadań było systematyczne badanie umiejętności uczniów kończących I etap kształcenia. Kolejne badania trzecioklasistów zrealizowano w latach: 2008 (ponad 4700 uczniów z 262 szkół podstawowych), 2010 (prawie 5000 uczniów z 288 szkół) oraz 2011 (ponad 3000 uczniów z 170 szkół). Bez wątpienia są to największe regularnie powtarzane badania tego typu prowadzone w Polsce. I, co bardzo ważne, za każdym razem realizowane na reprezentatywnej próbie, czyli **dostarczające informacji o całej populacji trzecioklasistów i o I etapie kształcenia jako takim**, a nie tylko o uczniach i klasach biorących udział w badaniach.

Wyniki badań prowadzonych w projekcie są sukcesywnie upowszechniane w raportach[11] i opracowaniach metodycznych kierowanych do nauczycieli[12]. Szczegółowe informacje o projekcie oraz jego liczne publikacje można znaleźć na stronie: www.trzecioklasista.edu.pl.

---

10 Dąbrowski M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych*. CKE, Warszawa 2007, *cz. II: Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów*. CKE, Warszawa 2008

11 Dagiel M., Żytko M. (red.), *Nauczyciel kształcenia zintegrowanego 2008 – wiele różnych światów?* CKE, Warszawa 2009; Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. CKE, Warszawa 2009; Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista pół roku później. Raport z badań dystansowych w klasie czwartej 2008/2009*. CKE, Warszawa 2009; www.trzecioklasista.edu.pl; Kalinowska A., Murawska B. (red.), *Diagnoza umiejętności językowych i matematycznych uczniów klas trzecich szkół podstawowych województwa kujawsko-pomorskiego*. Bydgoszcz 2009; Dąbrowski M. (red.), Trzecioklasista 2010. *Raport z badań ilościowych 2010*. CKE, Warszawa 2011; Dagiel M., Żytko M. (red.), *Szkolne rzeczywistości uczniów klas trzecich w środowisku wiejskim*. CKE, Warszawa 2011; Wiatrak E. (red.), *Trzecioklasista po pierwszym miesiącu nauki w klasie czwartej*. CKE, Warszawa 2011; www.trzecioklasista.edu.pl

12 Dagiel M., *Pozwólmy dzieciom bawić się słowami. O doświadczeniach językowych trzecioklasistów*. CKE, Warszawa 2011; Dąbrowski M., *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*. wyd. II zmienione, CKE, Warszawa 2008; Kalinowska A., *Pozwólmy dzieciom działać – mity i fakty o rozwijaniu myślenia matematycznego*. CKE, Warszawa 2010; Murawska B., *Pozwólmy dzieciom czytać*. CKE, Warszawa 2011; Żytko M., *Pozwólmy dzieciom mówić i pisać – w kontekście badań umiejętności językowych trzecioklasistów*. CKE, Warszawa 2010

Prezentowane dalej wyniki i prace uczniów zaczerpnięte są m.in. z tych właśnie publikacji.

Ograniczymy się do przeanalizowania jedynie kilku z bardzo wielu badanych obszarów kompetencji matematycznych dzieci – tych najściślej związanych z rozumieniem języka symbolicznego:

- porównywania liczb naturalnych i rozumienia systemu dziesiętnego,
- kolejności wykonywania działań,
- rozwiązywania zadań tekstowych,

sięgając do badań i danych z różnych lat.

Porównywanie liczb naturalnych i rozumienie systemu dziesiętnego

W badaniach realizowanych w roku 2006 umiejętność porównywania liczb naturalnych badana była za pomocą dwóch zadań[13]:

A

W każde okienko wpisz pasującą cyfrę.
a) **1□6 > 178**   b) **8□ < □0**   c) **1□5 > □42 > 14□**

B

W tych liczbach dwucyfrowych zamazano niektóre cyfry. Tam, gdzie to nadal możliwe, wstaw w okienko znak > albo <. W pozostałe okienka wstaw znak zapytania.
a) **●7 □ 48**   b) **●2 □ ●5**   c) **●3 □ 11**

Zadanie **A** to typowe zadanie, często pojawiające się w materiałach edukacyjnych[14] na poziomie klasy trzeciej. W punkcie a) w okienko należy wpisać jedną z dwóch cyfr: 8 albo 9. W przykładzie b) znaczenie ma drugie okienko do wypełnienia – musi się w nim znaleźć cyfra 9, natomiast do pierwszego może być wpisana dowolna cyfra. Ostatni przykład jest nieco bardziej skomplikowany, gdyż trzeba uwzględnić równocześnie dwa warunki – w efekcie w środkowym okienku musi się znaleźć 1, w pierwszym 0, 1, 2 albo 3, a w ostatnim 0 albo 1. Jak widać, każdy przykład można uzupełnić na wiele możliwych sposobów.

Zadanie **B** jest natomiast zadaniem nietypowym – należy sądzić, że uczniowie nie mieli z takim zadaniem kontaktu podczas szkolnych zajęć. Oznacza to, że dziecko rozwiązujące to zadanie znajduje się w sytuacji problemowej: *nie zna metody rozwiązania zadania, ale ma całą niezbędną wiedzę potrzebną do samodzielnego zbudowania tej metody*. Nie mogąc odwołać się do pamięci w poszukiwaniu skutecznego sposobu pokonania trudności, musiało ujawnić, **na ile rozumie strukturę systemu dziesiętnego i potrafi posługiwać się swoją wiedzą z tego zakresu**. W przykładzie a) zamazana jest cyfra dziesiątek w pierwszej liczbie – nie wiadomo więc, czy jest ona mniejsza czy większa od 4, zatem liczb nie można porównać – w okienko należy wstawić „?”. Podoba sytuacja jest w punkcie b). Natomiast w ostatnim przykładzie po prawej stronie mamy liczbę 11, zatem ta po lewej musi być większa, niezależnie od tego, jaką ma cyfrę dziesiątek – w okienko należy wpisać „>”.

---

13 Na podstawie: Dąbrowski M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej*, cz. I: *Raport z badań ilościowych*. CKE, Warszawa 2007, s. 68-70; Dąbrowski M., Pozwólmy dzieciom myśleć. *O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów, wyd. II zmienione*. CKE, Warszawa 2008, s. 7-10.

14 W chwili realizacji badania: 2006 r.

Wyniki dla obu zadań przedstawia diagram 1.

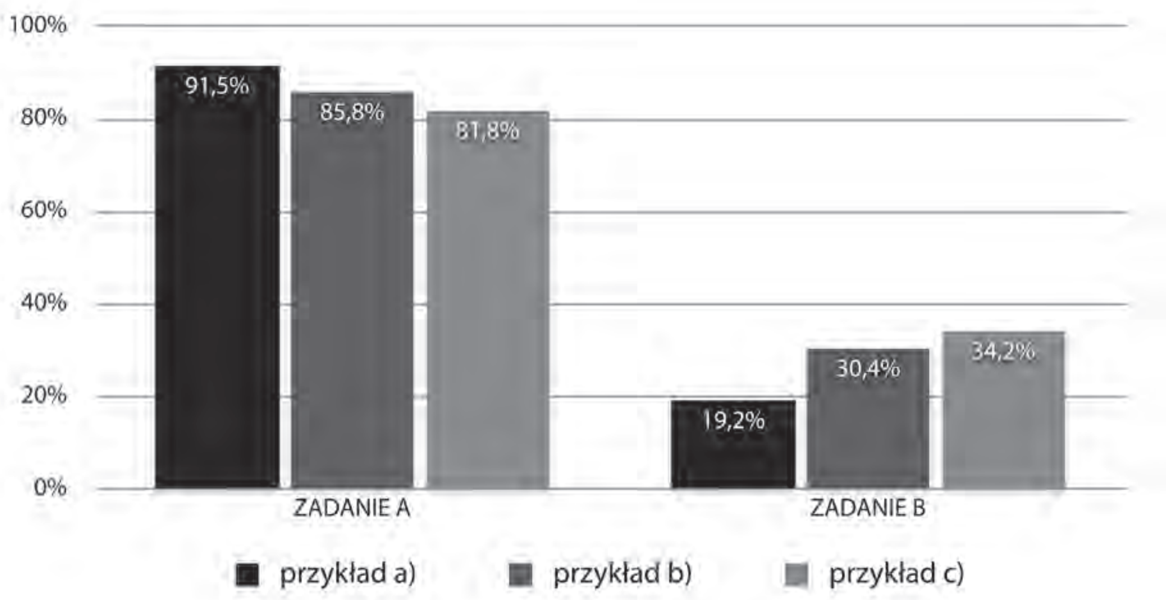


Diagram 1. Porównywanie liczb naturalnych – procent poprawnych rozwiązań w roku 2006.

Jak widać, zadanie **A** okazało się dla trzecioklasistów łatwe, czy nawet bardzo łatwe. Kolejne przykłady uzupełniło dobrze odpowiednio: 91,5%, 85,8% oraz 81,8% uczniów – ani liczba cyfr do wstawienia, ani znaków nierówności pojawiających się w przykładzie nie wpłynęła znacząco na skuteczność uczniów.

Znacznie gorzej wypadło zadanie **B**. Z pierwszym przykładem poradziło sobie zaledwie 19,2% trzecioklasistów, czyli mniej więcej co piąty uczeń. Drugi okazał się nieco łatwiejszy: 30,4% sukcesów, czyli prawie co trzecie dziecko wstawiło w okienko znak zapytania. Najbardziej zaskakujący jest jednak wynik dla ostatniego przykładu: 34,2% poprawnych uzupełnień dla sytuacji, która wydawała się absolutnie oczywista – po lewej stronie jest 13 albo 23 albo… – każda z tych liczb jest przecież większa od 11! Skąd ten wynik?

Na diagramie 2. przedstawiono liczbę przykładów poprawnie uzupełnionych przez poszczególnych uczniów w obu analizowanych zadaniach.

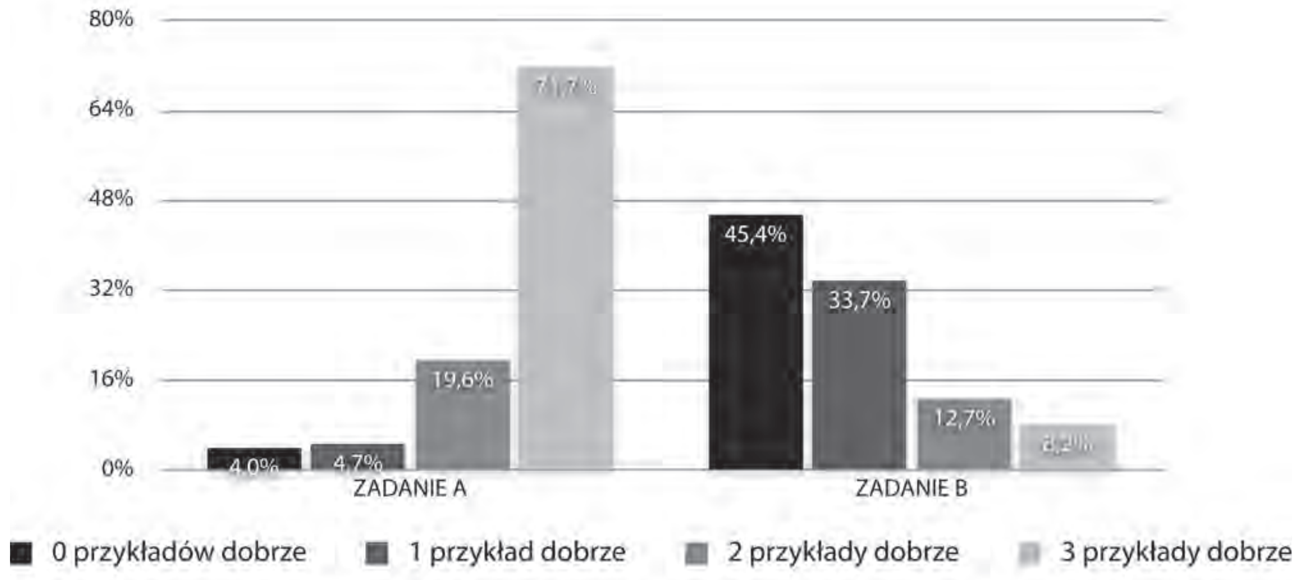
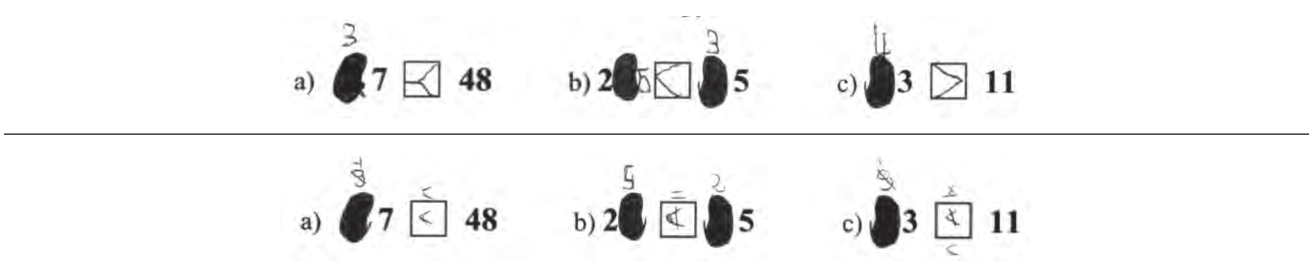


Diagram 2. Porównywanie liczb naturalnych – liczba poprawnie uzupełnionych przykładów przez uczniów w badaniach 2006.

Ponownie widać istotną różnicę w danych dla obu zadań. W zadaniu **A** aż 71,7% dzieci dobrze uzupełniło wszystkie sześć okienek, a 19,6% zrobiło błąd w jednym przykładzie. W zadaniu **B** sytuacja jest zupełnie „symetryczna” – tym razem słupki od lewej do prawej wyraźnie maleją, a nie rosną, jak było w **A**. Aż 45,4% trzecioklasistów nie poradziło sobie z żadnym z trzech przykładów, a 33,7% tylko z jednym. Zaledwie 8,2% poprawnie wstawiło trzy znaki, a 12,7% raz się pomyliło.

Popatrzmy na przykładowe uczniowskie rozwiązania zadania **B**.



Część uczniów podstawiała w miejsce kleksa jakąś cyfrę, po czym zapisywała w okienku odpowiedni znak – nawet znak równości, jeśli akurat los tak sprawił. Ta metoda dla przykładów a) i b) gwarantowała wstawienie złego znaku w okienko. Tym bardziej jednak zastanawia globalny wynik dla c) – przecież w tym przykładzie każde podstawienie daje właściwy kierunek nierówności! Dlaczego więc tylko 34,2%? Będziemy wracać do tego pytania.

Badanie umiejętności trzecioklasistów, którego wyniki zaprezentowaliśmy, odbyło się w maju 2006 r. Część z jego uczestników wzięła ponownie udział w powtórnych badaniach umiejętności matematycznych w październiku 2006 r., czyli w drugim miesiącu swojej nauki w klasie czwartej. Uczniowie po raz drugi, po pięciomiesięcznej przerwie, rozwiązywali te same zadania, wśród nich także zadanie **B**. Zobaczmy, jak zmienił się poziom rozwiązań dla tego zadania[15] w przypadku tych uczniów, którzy dwukrotnie je rozwiązywali[16]:

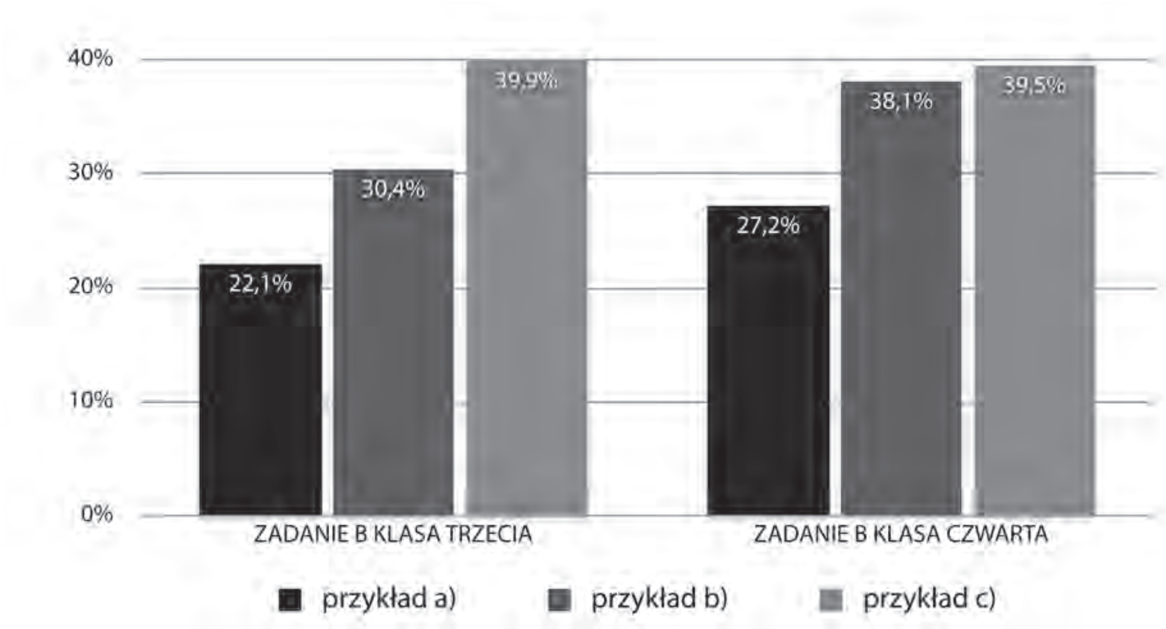


Diagram 3. Porównywanie liczb naturalnych – porównanie wyników tych samych uczniów w badaniach w klasie trzeciej i klasie czwartej.

Jak widać, w przykładach a) i b) wyniki nieco się poprawiły – odpowiednio o 5,1% oraz 7,7%. I znowu zaskakuje przykład c) – wyniki pozostały na tym samym poziomie.

We wszystkich chyba materiałach edukacyjnych używanych w roku 2006 w klasie czwartej początkowe strony poświęcone były przypomnieniu i pogłębieniu tematyki systemu dziesiętnego: zapisywanie i odczytywanie liczb wielocyfrowych, porównywanie ich, znaczenie cyfr w liczbie wielocyfrowej, itp. Powyższe wyniki pokazują, że pomimo tego poziom zrozumienia systemu dziesiętnego u uczniów nie uległ istotnej poprawie.

15 Dąbrowski M., *Raport z badania wybranych umiejętności uczniów klas czwartych, materiał niepublikowany*. CKE 2007; materiały własne

16 W badaniach w klasie czwartej w październiku 2006 r. wzięło udział 423 uczniów z 30 klas. Nie jest to reprezentatywna próba, dlatego też ich wyniki w klasie trzeciej różnią się nieznacznie od wyników globalnych (por. diagram 1.). Wyniki w klasie czwartej mają charakter przede wszystkim informacyjny.

W badaniach zrealizowanych w roku 2008[17] wrócono do „zadania z kleksami” w nieco rozbudowanej wersji:

B1

W tych liczbach dwucyfrowych zamazano niektóre cyfry.
Tam, gdzie to nadal możliwe, wstaw w okienko znak > albo <.
W pozostałe okienka wstaw znak zapytania.

a) 7● □ 48	**b) ●3 □ 11**	**c) 2● □ ●5**
d) 33 □ ●6	**e) ●2 □ 5●**	**f) ●8 □ 99**

Podpunkty b) i c) są powtórką odpowiednio przykładów c) i b) z badań 2006, natomiast d) jest podobny do „starego” a). Doszły trzy nowe podpunkty. Przykład e) jest symetryczny i w pełni analogiczny do c). W a) znane są obie cyfry dziesiątek, więc sytuacja jest bardzo czytelna – na pewno pierwsza liczba jest większa od drugiej. W f) po prawej stronie występuje 99, największa liczba dwucyfrowa, należy więc wstawić znak „<” – ten przykład jest „dualny” do b).

Zobaczmy, jaki był poziom poprawnych rozwiązań kolejnych podpunktów tego zadania:

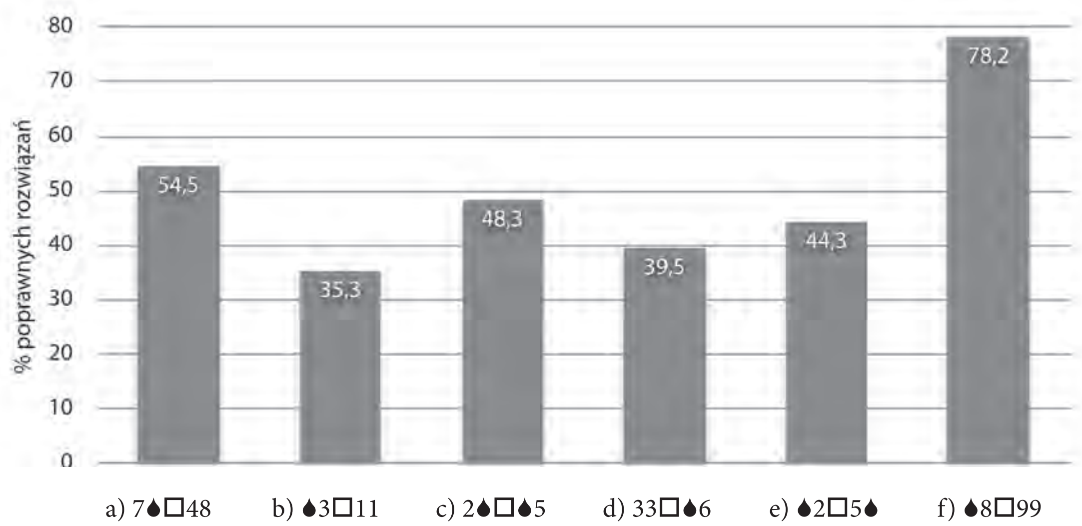


Diagram 4. Porównywanie liczb naturalnych – procent poprawnych rozwiązań w roku 2008.

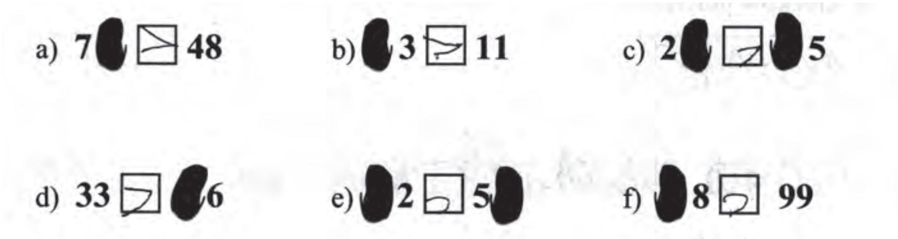
Uderza ogromna rozpiętość wyników: od 35,3% dla przykładu b) (34,2% w roku 2006) do 78,2% dla przykładu f). Ten drugi rezultat jest ponad dwa razy wyższy od pierwszego, a oba przykłady wydają się być bardzo do siebie podobne. Skąd ta różnica?

Drugim co do trudności okazał się podpunkt d) – 39,5% poprawnych rozwiązań (podobny, choć nie identyczny przykład w 2006 r.: 19,2%, zatem wzrost). Bliźniacze przykłady c) i e) mają odpowiednio 48,3% oraz 44,3% poprawnych uzupełnień (30,4% dwa lata wcześniej, zatem tu też wzrost). W podpunkcie a) trzecioklasiści odnotowali nieco więcej niż połowę sukcesów: 54,5%. Jak widać, wyniki – poza przykładem f) – nie są zbyt optymistyczne.

[17] Na podstawie: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. CKE, Warszawa 2009, s. 104-107.

Zobaczmy, jakie typy **uczniowskich strategii** radzenia sobie z tym zadaniem można wyróżnić analizując ich prace z badań 2008[18].

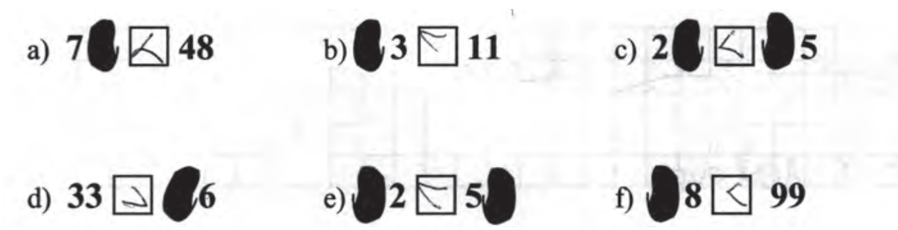
Strategia 1: Zawsze w jedną stronę!



Ten trzecioklasista „postawił” na znak większości i był konsekwentny. W efekcie przykłady a) i b) uzupełnione dobrze, natomiast cztery pozostałe – źle.

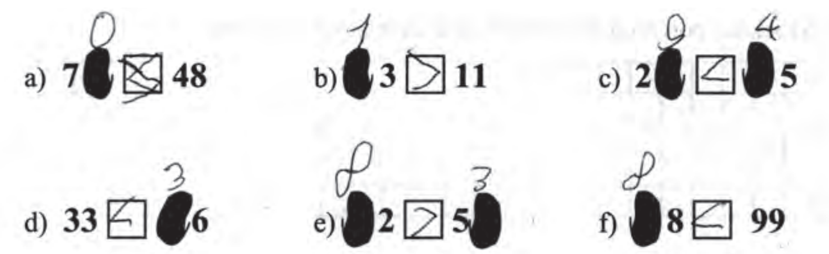
Zastosowanie wszędzie znaku mniejszości daje tylko jedno trafienie – podpunkt f), natomiast wstawienie wszędzie znaków zapytania – aż trzy: c), d) i e).

Strategia 2: Liczy się to co widać!



Najprawdopodobniej ten uczeń pominął zupełnie kleksy i to, co pod nimi może się znajdować i zabrał się za porównywanie tylko tego, co widać: 7 jest mniejsze od 48, 3 od 11, 2 od 5, 8 od 99, a 33 jest większe od 6. W efekcie jedno trafienie – przykład f) dobrze uzupełniony.

Strategia 3: Warto coś podstawić!

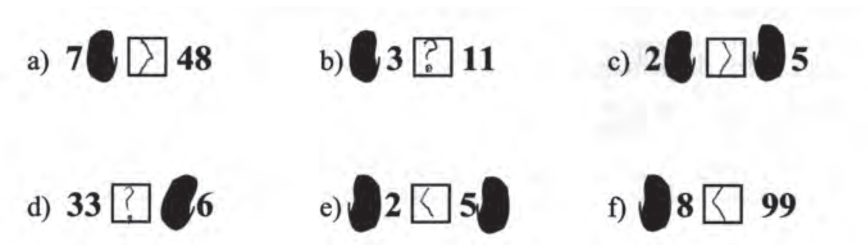


Tę metodę postępowania sygnalizowaliśmy już wcześniej, przy okazji badań 2006. Dziecko podstawia jakąś cyfrę w miejsce kleksa, po czym wstawia odpowiednie znaki. Ostateczny skutek: ani jednego znaku zapytania, ale aż 3 trafienia – w podpunktach a), b) i f), i to niezależnie od tego, co się podstawi!

---

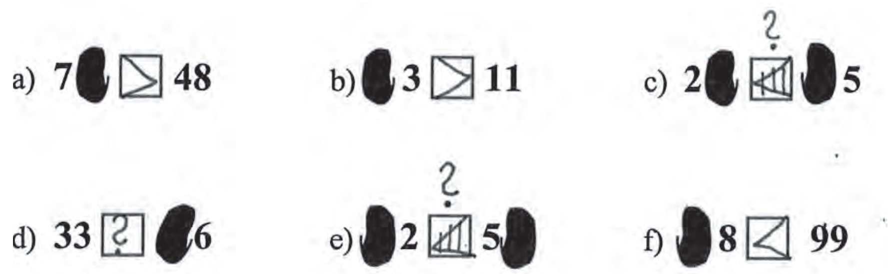
18 Por. Dąbrowski M., *Kleks prawdę Ci powie?*, http://trzecioklasista.edu.pl/artykuly/kleks-prawde-ci-powie

Strategia 4: Trzeba zaufać losowi!



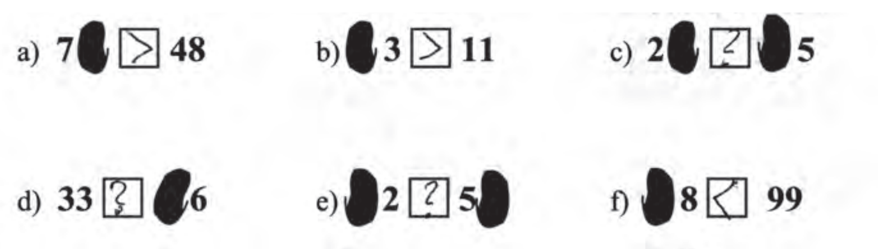
Autor tego rozwiązania postanowił chyba użyć każdego znaku dwukrotnie – mamy więc dwa razy „<”, dwa „?” oraz dwa razy „>”. Wydaje się, że lokalizacja znaków była losowa – jak inaczej wyjaśnić przeciwstawne znaki w przykładach c) i e). Los jednak sprzyjał: trzy podpunkty: a), d) i f) uzupełnione poprawnie.

Strategia 5: Podstawmy kilka razy!



Wiemy już, że jednokrotne podstawienie cyfry w miejsce kleksa może być zawodne. A gdyby zrobić kilka takich podstawień? Być może autor tego rozwiązania tak właśnie postępował – mogą to sugerować skreślenia. Końcowy rezultat wart tych zabiegów – wszystkie przykłady dobrze.

Strategia 6: Zrozumieć system dziesiętny!



Żadnych cyfr, żadnych prób, żadnych skreśleń. I wszystkie przykłady dobrze uzupełnione. Wystarczy rozumieć, jak zapisujemy i porównujemy liczby dwucyfrowe.

Pamiętając o przytoczonych strategiach i ich skuteczności sprawdźmy, jak wygląda rozkład liczby poprawnie uzupełnionych przykładów przez uczniów:

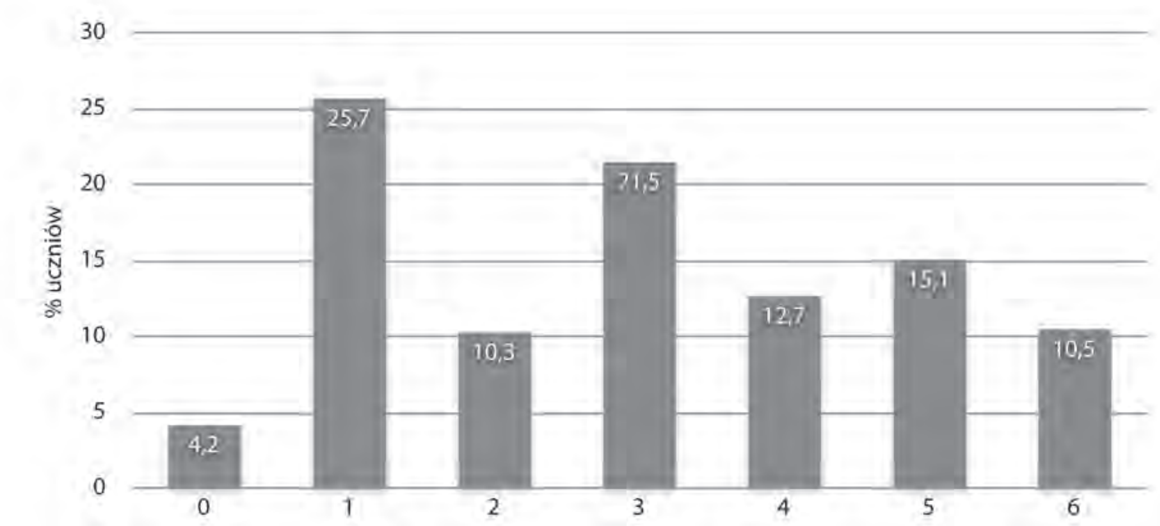


Diagram 5. Porównywanie liczb naturalnych – liczba poprawnie uzupełnionych przykładów przez uczniów w badaniach 2008.

Najczęściej uczniowie dobrze uzupełniali jeden przykład (na sześć!) – stało się to udziałem 25,7% trzecioklasistów, czyli ponad ¼. Jak rozumowali ci uczniowie rozwiązując to zadanie? Przecież wystarczy np. powtórzyć sześć razy prostą procedurę jednokrotnego podstawienia jakiejkolwiek cyfry w miejsce kleksa, aby mieć trzy podpunkty prawidłowo wypełnione. Ten właśnie wynik: trzy „trafienia" był drugim najczęściej występującym – uzyskało go 21,5% uczniów.

Jedynie 10,5% dzieci wstawiło dobrze wszystkie znaki, czyli mniej więcej co dziesiąty uczeń w pełni poradził sobie z tym zadaniem. Jeden błąd zrobiło 15,1% uczniów, a dwa 12,7%. Jeśli zsumujemy te trzy wyniki, to okaże się, że 38,2% dzieci zrobiło dobrze więcej niż połowę przykładów. Dużo to, czy mało?

Wróćmy do postawionego wcześniej pytania dotyczącego ogromnej rozpiętości wyników dwóch – na pozór – podobnych przykładów: b) **♦3☐11** (35,3%) oraz f) **♦8☐99** (78,2%).

W przykładzie b) po prawej stronie mamy 11, czyli liczbę drugą od dołu w uporządkowanym szeregu liczb dwucyfrowych, natomiast w przykładzie f) mamy po prawej stronie 99, zatem największą dwucyfrową. Sytuacja więc bardzo podobna, a wyniki diametralnie różne!

Szukając odpowiedzi na to pytanie popatrzmy, jakie znaki i jak często wpisywali uczniowie w okienka w poszczególnych przykładach:

wpisany znak	a) 7🌢□48	b) 🌢3□11	c) 2🌢□🌢5	d) 33□🌢6	e) 🌢2□5🌢	f) 🌢8□99
brak	5,2	5,4	6,8	5,5	7,2	4,7
<	32,0	37,1	37,9	16,6	42,5	78,2
?	8,4	22,2	48,3	39,5	44,3	14,2
>	54,5	35,3	7,0	38,4	5,9	2,9

Tabela 1. Porównywanie liczb naturalnych – procentowy rozkład odpowiedzi uczniów w badaniach w roku 2008. Kolorem zaznaczono poprawne odpowiedzi.

W przykładzie a) 32,0% trzecioklasistów wpisało znak „<”. W przykładzie b) ten sam znak wstawiło 37,1% uczniów (czyli więcej niż poprawny znak „>”), a w przykładzie c) 37,9%.

Co łączy te trzy przykłady? W szczególności to, że gdybyśmy ograniczyli się do porównania **tylko widocznych fragmentów liczb**, to w każdym z nich w okienko byśmy wpisali znak „<”.

W podpunkcie d) 38,4% trzecioklasistów wpisało znak „>” – znowu trzydzieści kilka procent. Przyjrzyjmy się kolejnemu przykładowi: w e) 42,5% dzieci wstawiło znak „<”. Być może część z nich podstawiła jakieś cyfry w miejsce kleksów i stąd taki a nie inny znak, ale inne wytłumaczenie wydaje się znacznie bardziej prawdopodobne – jeśli spojrzy się na te części liczb, które „widać” i zapomni o cyfrach pod kleksami, to jedynym pasującym znakiem jest właśnie znak mniejszości: 2 < 5. Uczeń stosujący taką strategię wypełniania kwadratów w pięciu początkowych przykładach wpisałby kolejno:

w a) „<” (32,0%); w b) „<” (37,1%); w c) „<” (37,9%); w d) „>” (39,5%); w e) „<” (42,5%), a w szóstym przykładzie, czyli e: „<” (78,2%).

Przykład f) to jedyny przypadek, w którym porównanie obu liczb oraz porównanie ich widocznych części daje ten sam efekt: lewa strona w obu wypadkach jest mniejsza od prawej. I należy sądzić, że to jest podstawowy, a może i jedyny powód, dla którego jego wynik „szybuje” tak wysoko.

Na koniec dokonajmy prostej „matematyzacji”: przykład f) zrobiło poprawnie 78,2% uczniów, a przykład b): 35,3%, czyli o 42,9% mniej. 42,9% to jest prawie dokładnie tylu trzecioklasistów, ilu w przykładzie e) wstawiło znak „<”, czyli najprawdopodobniej porównało widoczne kawałki liczb. Pasuje?

Spójrzmy jeszcze raz na rozkład liczby poprawnie zrobionych przez uczniów przykładów, eliminując niepasujący do reszty przykład f), czyli ograniczając się do podpunktów a)-e):

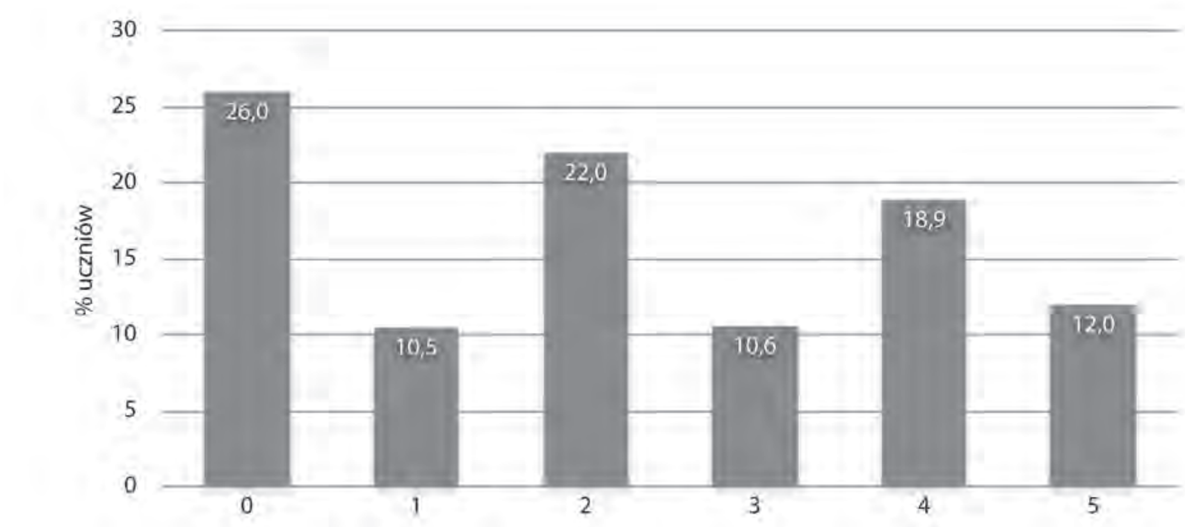


Diagram 6. Porównywanie liczb naturalnych – liczba poprawnie wykonanych przykładów przez ucznia w badaniach 2008 przy pominięciu przykładu f).

Aż 26,0% trzecioklasistów, czyli ponad ¼ nie poradziła sobie z żadnym z tych pięciu podpunktów. Jeden przykład zrobiło poprawnie 10,5% uczniów, a dwa: 22,0%. Jedynie 30,9% dzieci zrobiło dobrze cztery albo pięć przykładów. Dużo to, czy mało?

Zdecydowanie największe trudności z tym zadaniem, zwłaszcza z jego podpunktami a)-d), mieli uczniowie szkół z miast liczących do 10 tysięcy mieszkańców:

szkoły	a) 7♦□48	b) ♦3□11	c) 2♦□♦5	d) 33□♦6	e) ♦2□5♦	f) ♦8□99
wiejskie	55,2	36,5	46,7	35,7	41,5	79,5
miasto do 10 tys.	40,2	22,8	37,0	28,3	42,4	79,4
miasto 10-100 tys.	56,0	34,8	52,6	45,2	48,3	75,1
miasto ponad 100 tys.	56,2	38,1	49,8	43,4	45,3	79,3
ogółem 2008	54,5	35,3	48,3	39,5	44,3	78,2

Tabela 2. Porównywanie liczb naturalnych – procent poprawnych odpowiedzi w badaniach 2008 w zależności od miejsca lokalizacji szkoły.

Jak widać, na ogół najlepsze wyniki uzyskiwali uczniowie szkół z dużych i średnich miast. Jedynie dla f) sytuacja się zmieniła. Po raz kolejny widać, jak „inny” jest to przykład.

Na rozumieniu zapisu dziesiętnego liczb opiera się cała szkolna arytmetyka: obliczenia wykonywane w pamięci, algorytmy działań pisemnych, posługiwanie się wyrażeniami dwumianowanymi i liczbami dziesiętnymi, operacje na nich… Nie ma chyba w nauczaniu początkowym ważniejszego – dla dalszego matematycznego rozwoju uczniów – zagadnienia.

Prezentowane wyniki wskazują na to, że powinniśmy bardzo poważnie przemyśleć sposób, w jaki z tą strukturą zapoznajemy dzieci w klasach 1-3.

Kolejność wykonywania działań

Obliczenia złożone oraz kolejność wykonywania działań do niedawna[19] były ważnymi obszarami matematycznej wiedzy dzieci rozwijanymi na I etapie kształcenia. W badaniach w roku 2006 umiejętności trzecioklasistów w tym obszarze były sprawdzane za pomocą serii typowych przykładów obliczeniowych[20]:

C

Oblicz:

a) $40 - 20 : 4 =$ ……………………………	b) $36 - (16 - 9) =$ ……………………………
c) $18 : 9 \cdot 2 =$ ……………………………	d) $37 - 11 + 6 =$ ……………………………
e) $16 + 4 \cdot 5 =$ ……………………………	f) $60 : 6 + 4 \cdot 7 =$ ……………………………

Wykonując te obliczenia uczeń miał okazję do zademonstrowania znajomości wszystkich podstawowych reguł rządzących kolejnością działań, czyli że:

- najpierw wykonuje się obliczenie w nawiasie (b),
- mnożenie czy dzielenie wykonuje się przed dodawaniem oraz odejmowaniem (a, e i f),
- działania o tym samym priorytecie, czyli mnożenie i dzielenie oraz dodawanie i odejmowanie, robi się w kolejności ich zapisu, czyli od lewej do prawej (c i d).

O uznaniu obliczenia za poprawne decydowała właściwa kolejność wykonywanych działań, a nie ich arytmetyczna poprawność. Innymi słowy – jeśli dziecko zapisało swój tok obliczenia i był on dobry, tzn. działania były wykonywane w kolejności zgodnej z obowiązującymi regułami, a w obliczeniu pojawił się błąd rachunkowy, np. przy wykonywanym mnożeniu, to przykład i tak był „zaliczany”. Przyjęcie takiego klucza obiektywizuje wyniki sprawdzania – uzyskane rezultaty faktycznie dostarczają informacji o znajomości przez dzieci kolejności wykonywania obliczeń, a nie np. opanowaniu tabliczki mnożenia.

[19] Treści te został przeniesione na II etap kształcenia w wyniku zmiany podstawy programowej z dnia 23 sierpnia 2007 r..

[20] Na podstawie: Dąbrowski M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej, cz. I: Raport z badań ilościowych*. CKE, Warszawa 2007, s. 79-81; Dąbrowski M., *Pozwólmy dzieciom myśleć. O umiejętnościach matematycznych polskich trzecioklasistów*, wyd. II zmienione. CKE, Warszawa 2008, s. 20-28.

Diagram 7. pokazuje procent poprawnych wyników dla każdego z sześciu przykładów tego zadania:

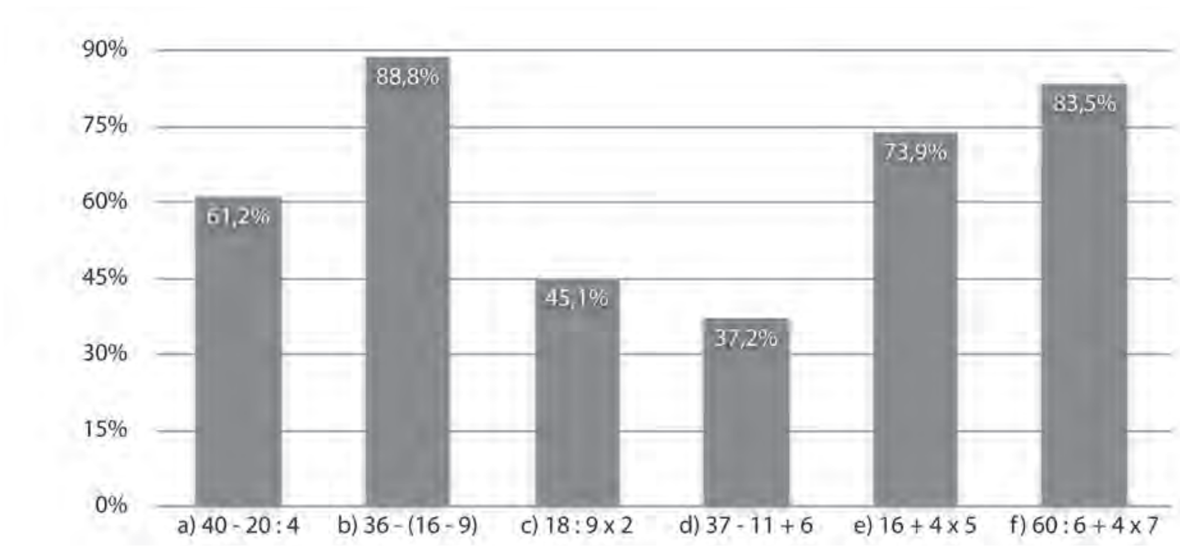


Diagram 7. Kolejność wykonywania działań – procent poprawnych obliczeń w roku 2006.

Aż 88,8% trzecioklasistów poprawnie zrobiło przykład b) dotyczący nawiasów. Tylko trochę mniej uczniów, bo 83,5%, poradziło sobie z podpunktem f) – na pozór bardziej złożonym od czterech pozostałych.

Warto porównać wyniki przykładów a): 61,2% oraz e): 73,9% – obliczenia te są podobne strukturalnie i dotyczą tych samych reguł, należy więc sądzić, że ponad dwunastoprocentowa różnica wyników jest pochodną wykorzystanych w nich działań. Znaczna część dzieci wykonała je stosując zasadę od lewej do prawej – było ich 36,8% dla a) oraz 23,7% dla e).

Tu mamy podobną, bo ponad trzynastoprocentową różnicę nasilenia tego błędu. Być może dzieci częściej miały kontakt w procesie kształcenia z obliczeniami, w których występuje dodawanie i mnożenie, a rzadziej z tymi „na dzielenie i odejmowanie".

Najsłabiej wypadły oba przykłady dotyczące działań o tym samym priorytecie. Tylko 45,1% trzecioklasistów, zatem sporo mniej niż połowa, jako pierwsze wykonało dzielenie, jako drugie mnożenie, czyli postąpiło zgodnie z obowiązującymi regułami. Większość pozostałych uczniów uznała, że najpierw się mnoży, dopiero potem dzieli. Zjawisko to wystąpiło jeszcze silniej dla przykładu d) – tylko 37,2% dzieci wykonało to obliczenie od lewej do prawej, czyli poprawnie.

Jedynie 12,8% trzecioklasistów poradziło sobie ze wszystkimi sześcioma przykładami:

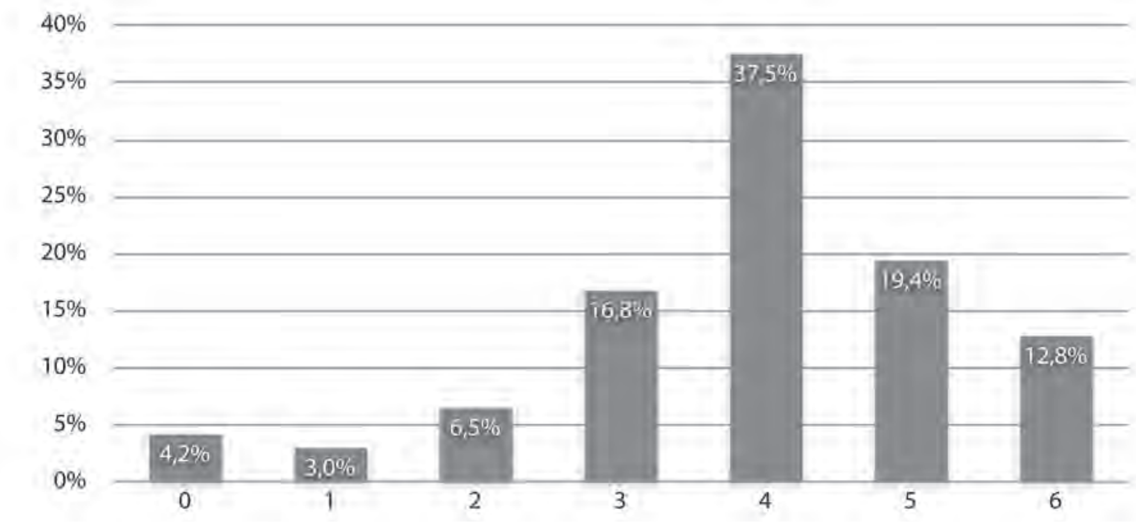


Diagram 8. Kolejność wykonywania działań – liczba poprawnie zrobionych przykładów przez uczniów w badaniach 2006.

Najwięcej uczniów, bo aż 37,5%, odnotowało po 4 sukcesy. To dość naturalne w sytuacji, gdy dwa przykłady okazują się wyraźnie trudniejsze od pozostałych, niezbyt trudnych.

W badaniach w roku 2008[21] trzecioklasiści ponownie wykonywali obliczenia złożone. Tym razem jednak było więcej przykładów, bo dziesięć, a każdy uczeń rozwiązywał zestaw pięciu z nich[22]:

C1	Oblicz: a) 40 – 10 · 4 = …………………………… b) 24 : 8 · 3 = ……………………………… c) 36 – (16 – 9) = ………………………… d) 12 + 28 : 4 = …………………………… e) 34 – 11 + 3 = ……………………………	Oblicz: a) 40 – 20 : 4 = …………………………… b) 18 : 9 · 2 = ……………………………… c) 16 + 4 · 5 = …………………………… d) 37 – 11 + 6 = ………………………… e) 60 : 6 + 4 · 7 = …………………………

[21] Czyli niespełna rok po wspomnianej wcześniej zmianie podstawy programowej.

[22] Na podstawie: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. CKE, Warszawa 2009, s. 101-103.

Jak widać, w badaniu z roku 2008 powtórzono wszystkie przykłady wykorzystane dwa lata wcześniej. Porównajmy ich wyniki w obu tych badaniach:

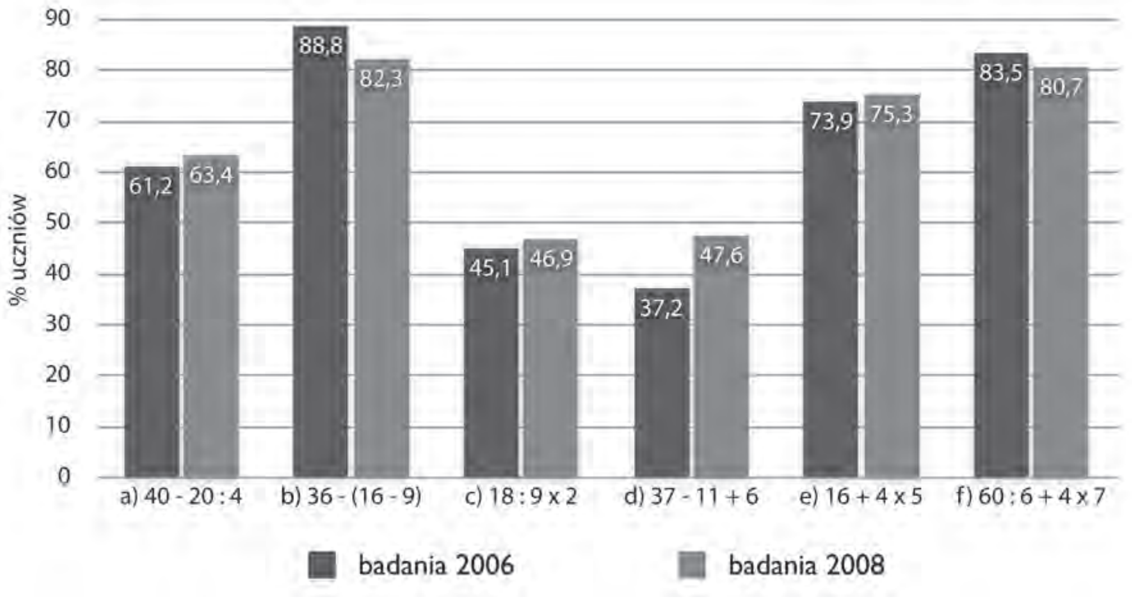
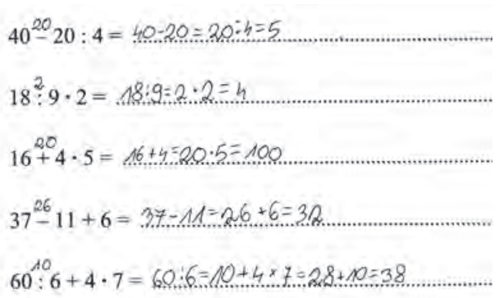


Diagram 9. Kolejność wykonywania działań – porównanie wyników z badań 2006 i 2008.

W dwóch przykładach: b) i f) nastąpiło niewielkie obniżenie wyników, w trzech innych: a), c) i e) niewielkie podwyższenie. Większy wzrost: o 10,4% daje się zauważyć dla przykładu d). Ale równocześnie w pełni analogiczny przykład: 34 – 11 + 3 zrobiło poprawnie w 2008 r. 35,2% dzieci, zatem wzrost ten raczej nie wynika wprost ze zmiany poziomu umiejętności dzieci. Reasumując: wyniki w obu badaniach są bardzo zbliżone.

Bardzo ciekawych obserwacji o rozumieniu przez dzieci obliczeń złożonych dostarcza analiza robionych przez nich błędów. Zacznijmy od rzutu oka na te najbardziej typowe z punktu widzenia kolejności działań (na bazie badań 2008).



Ten uczeń w czterech początkowych przykładach konsekwentnie wykonał obliczenia od lewej do prawej, dopiero w ostatnim zmienił swoją taktykę. Równie konsekwentnie zapisywał wynik pierwszego wykonywanego obliczenia nad odpowiednim działaniem, co ułatwia odtworzenie jego metody postępowania.

$40 - 20 \overset{5}{:} 4 =$	$40 - 5 = 35$
$18 \overset{18}{:} 9 \cdot 2 =$	$18 : 18 = 1$
$16 + 4 \overset{20}{\cdot} 5 =$	$16 + 20 = 36$
$37 - 11 + 6 =$	$37 - 17 = 20$
$60 \overset{10}{:} 6 + 4 \overset{28}{\cdot} 7 =$	$10 + 28 = 38$

Natomiast ten trzecioklasista, podobnie jak wielu innych, był przekonany, że najpierw się mnoży, a dopiero potem dzieli oraz najpierw dodaje, a w drugiej kolejności odejmuje i ładnie zilustrował swoje przekonania, zapisując cząstkowe wyniki nad odpowiednimi działaniami.

Wróćmy do badań 2006 i popatrzmy na te trudności dzieci, które nie wiążą się z samymi regułami kolejności. Okazuje się bowiem, że umieszczenie kilku obliczeń w jednym zapisie jest dla uczniów znacznie mniej naturalnym zabiegiem, niż nam się to wydaje. W efekcie zdecydowanie komplikuje im wykonywane obliczenia. Oto kilka przykładów, wybranych spośród wielu innych podobnych.

Ten uczeń „ratował się", rozbijając kolejne obliczenia złożone na serie prostych – z różnym zresztą skutkiem:

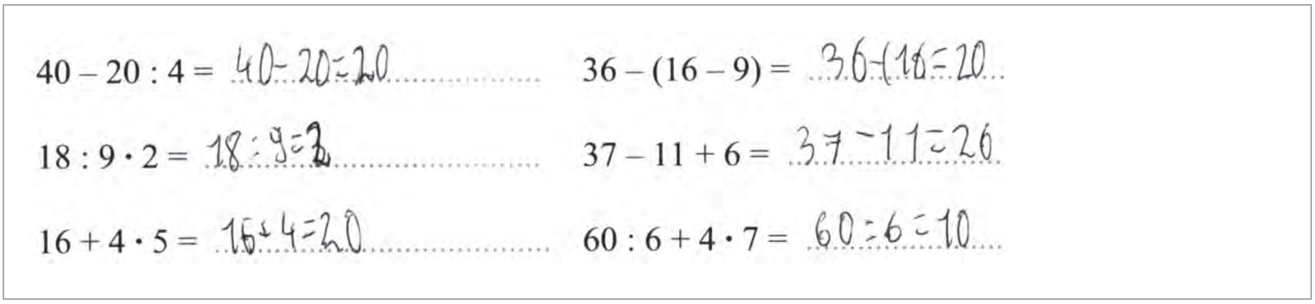
$40 - 20 : 4 =$ 40 - 20 = 20 20 : 4 = 5	$36 - (16 - 9) =$ 16 - 9 = 7 36 - 7 = 29
$18 : 9 \cdot 2 =$ 18 : 9 = 2 2 · 2 = 4	$37 - 11 + 6 =$ 11 + 6 = 17 36 - 17 = 19
$16 + 4 \cdot 5 =$ 16 + 4 = 20 20 · 5 = 100	$60 : 6 + 4 \cdot 7 =$ 60 : 6 = 10 4 · 7 = 28 28 + 10 = 38

Dwaj kolejni próbowali w dość podobny sposób „eksperymentować" ze znakiem równości, co prowadziło do absurdalnych zapisów, ale czasami także do dobrych wyników:

$40 - (20 : 4) =$ 5 = 40 - 5 = 35	$36 - (16 - 9) =$ 7 = 36 - 7 = 29
$18 : (9 \cdot 2) =$ 18 = 18 : 18 = 1	$37 - (11 + 6) =$ 17 = 37 - 17 = 20
$16 + (4 \cdot 5) =$ 20 = 16 + 20 = 36	$60 : 6 + (4 \cdot 7) =$ 28 = 60 : 6 = 10 + 28 = 38

$40 - 20 : 4 =$ 5 40 - 5 = 35	$36 - (16 \overset{7}{-} 9) =$ 7 36 - 7 = 29
$18 : 9 \cdot 2 =$ 18 : 18 = 1	$37 - 11 + 6 =$ 17 37 - 17 = 20

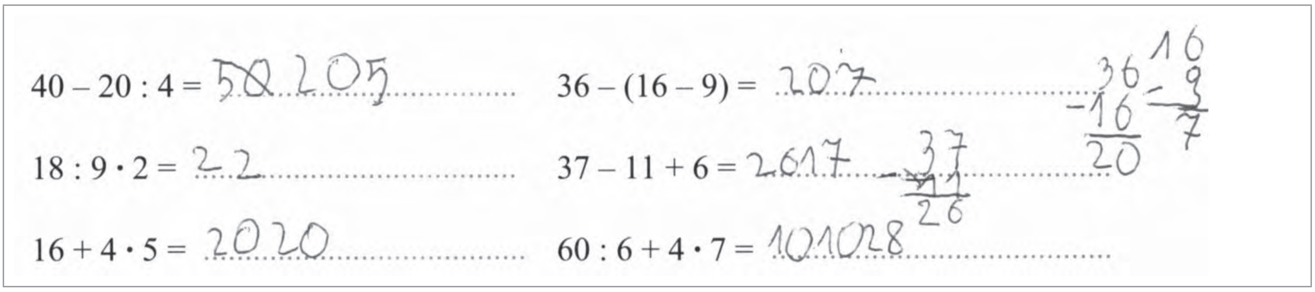
Następny, konsekwentnie skupił się na pierwszych działaniach, w dosłownym znaczeniu tego określenia, pomijając resztę:

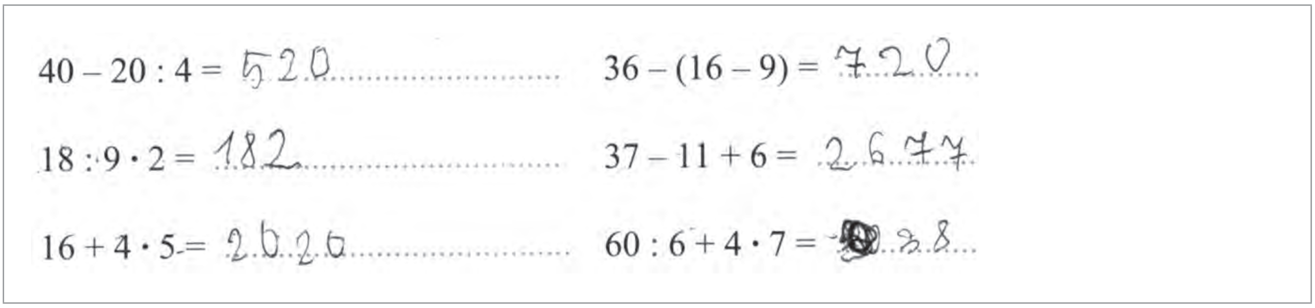

40 – 20 : 4 = 40-20=20
36 – (16 – 9) = 36-16=20
18 : 9 · 2 = 18:9=2
37 – 11 + 6 = 37-11=26
16 + 4 · 5 = 16+4=20
60 : 6 + 4 · 7 = 60:6=10

Skąd się biorą tego typu trudności?

Żeby z tą nową formą zapisu, czyli obliczeniem złożonym, sobie poradzić, uczeń musi nie tylko pamiętać o kolejności wykonywania działań, ale przede wszystkim **musi rozumieć sens stosowanego znaku równa się**. Wcześniej, znak ten „wołał" do dziecka: *podaj wynik*. Tu zaczyna pełnić swoją właściwą rolę – staje się symbolem informującym, że po jego lewej i prawej stronie znajduje się to samo, co najwyżej inaczej zapisane.

Spójrzmy na kolejne przykłady uczniowskich obliczeń:


40 – 20 : 4 = 205
36 – (16 – 9) = 207
18 : 9 · 2 = 22
37 – 11 + 6 = 2617
16 + 4 · 5 = 2020
60 : 6 + 4 · 7 = 101028


40 – 20 : 4 = 520
36 – (16 – 9) = 720
18 : 9 · 2 = 182
37 – 11 + 6 = 2677
16 + 4 · 5 = 2020
60 : 6 + 4 · 7 = 28

Jak rozumowali ich autorzy? Ich wyniki są na ogół różne, ale widać sporo podobieństw: 205 oraz 520, 207 i 720. Skąd się to bierze?

Odpowiedź jest zaskakująco prosta: uczniowie wykonują działania, które mają przed oczyma, ale nie wiedzą, co zrobić z ich wynikami, więc je zapisują obok siebie w dowolnej kolejności:

40 – 20 = 20, 20 : 4 = 5, stąd 205 albo 520

36 – 16 = 20, 16 – 9 = 7, zatem 207 albo 720

16 + 4 = 20, 4 · 5 = 20, czyli 2020

60 : 6 = 10, 6 + 4 = 10, 4 · 7 = 28, czyli 101028

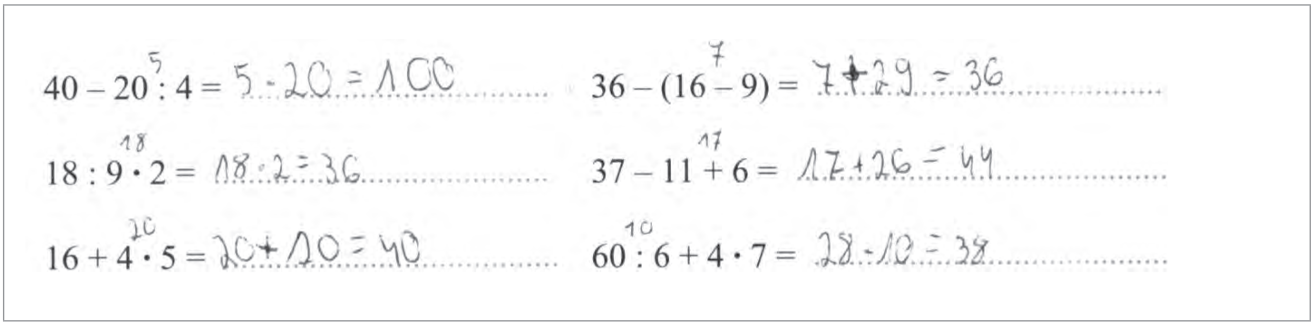
czasami przy tym się myląc:

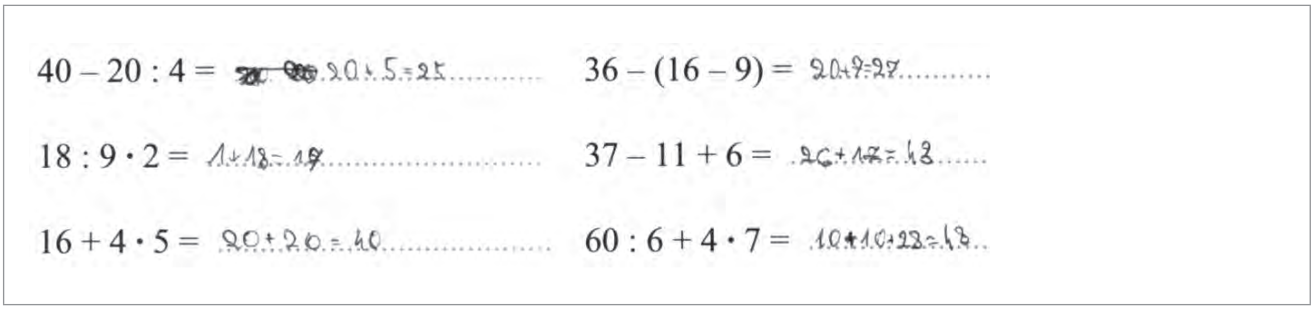
37 – 11 = 26, 11 + 6 = 77, więc 2677,

albo zamiast wyniku przepisując jedną z podanych liczb:

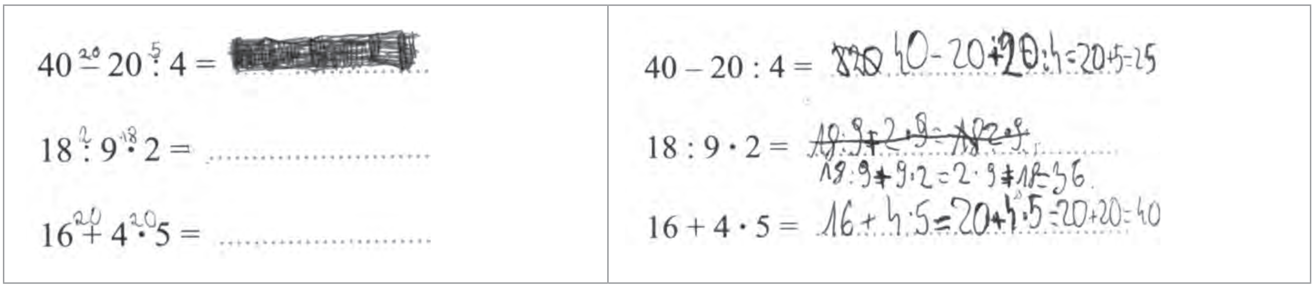
18 : 9 = 2, i jeszcze 2, czyli 22.

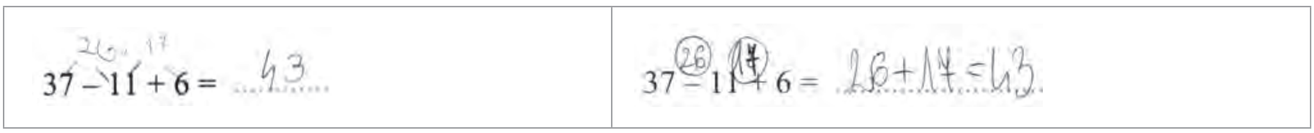
I dwa kolejne, bardziej rozbudowane, przykłady z tej samej serii:





Ich autorzy doszli do wniosku, że jak już są dwie liczby, to najlepiej je dodać albo pomnożyć. Popatrzmy na kolejne podobne przykłady:





Skąd wzięła się ta strategia, pojawiająca się u znacznej części uczniów, z różnych szkół i obszarów Polski?

Możliwą i prawdopodobną odpowiedź podsuwają dwa ostatnie obliczenia powyżej – ich autorzy wyraźnie budują „drzewko". Język „drzewek", często w przeszłości wykorzystywany do utrwalania kolejności wykonywania działań, jest trudnym językiem symbolicznym. Jego zestawienie z obliczeniami złożonymi jest obiektywnie na tyle abstrakcyjne, że – w ramach samoobrony – mogło skłonić dzieci do tworzenia własnej „strategii drzewka" dla obliczeń złożonych, wizualnie podobnej do tej z lekcji, brzmiącej np. tak:

robimy każde działanie z osobna, a potem łączymy otrzymane wyniki.

Jak łączymy? Analiza prac trzecioklasistów podsuwa krótką odpowiedź – różnie:

$18 \overset{2}{:} 9 \cdot 2 =$ 2+18=20	$18 : 9 \cdot 2 =$ 18−2=16
$18 : 9 \overset{18}{\cdot} 2 =$ 18·2=36	$18 \overset{2}{:} 9 \overset{18}{\cdot} 2 =$ 18 : 2=9

Na koniec popatrzmy na wyniki (z badań 2008) sześciu analizowanych przykładów obliczeń złożonych z rozbiciem na cztery typy lokalizacji szkół:

szkoły	36 – (16 – 9)	40 – 20 : 4	16 + 4 · 5	18 : 9 · 2	37 – 11 + 6	60 : 6 + 4 · 7
wiejskie	79,2	59,1	74,2	45,4	44,8	77,3
miasto do 10 tys.	81,8	62,9	74,2	47,4	46,4	84,5
miasto 10-100 tys.	82,6	68,2	76,9	50,9	45,7	85,2
miasto ponad 100 tys.	87,8	66,3	76,0	44,8	47,7	80,3
ogółem 2008	82,3	63,4	75,3	46,9	47,6	80,7
ogółem 2006	88,8	61,2	73,9	45,1	37,2	83,5

Tabela 3. Kolejność wykonywania działań – procent poprawnych obliczeń w badaniach 2008 w zależności od miejsca lokalizacji szkoły.

Także i tym razem widać, że najlepiej z obliczeniami złożonymi poradzili sobie uczniowie szkół z dużych i średnich miast. Na ogół wyraźnie gorzej poszły one uczniom szkół wiejskich oraz nieco gorzej uczniom szkół z miast małych. Podobne prawidłowości wystąpiły w roku 2006.

Musimy powtórzyć jeszcze raz: **zapis kilku działań w jednym obliczeniu jest dla dzieci dużo trudniejszy niż sądzimy.**

Tego stanu rzeczy nie zmieni przeniesienie tej tematyki na II etap kształcenia, tym bardziej, że w ślad za obliczeniami złożonymi trafią do klasy czwartej także dzieci o rok młodsze, czyli dokładnie w wieku tych, których prace tu przytaczamy.

Rozwiązywanie zadań tekstowych

Ważnym obszarem każdej edycji omawianych badań było rozwiązywanie zadań tekstowych. Z bogatych danych na ten temat wybierzemy tylko niektóre, skupiając się na badaniach z lat 2008 i 2010.

Wśród zadaniach tekstowych, które trzecioklasiści rozwiązywali w badaniach w roku 2008 znalazły się m.in. te cztery[23]:

D	W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?
E	W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej jest o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?
F	Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?
G	Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

Zadania **D** i **E** to bardzo typowe dla naszej szkoły zadania złożone dotyczące porównywania różnicowego. Różnią się jedynie „kierunkiem" porównywania – w pierwszym z nich w sali drugiej jest mniej miejsc niż w pierwszej, a w drugim: więcej. Metoda rozwiązania dla obu jest identyczna: najpierw ustalamy liczbę miejsc w drugiej sali, a następnie w kinie.

Zadania **F** i **G** są zdecydowanie mniej typowe dla polskiego nauczania początkowego matematyki, choć równie arytmetycznie proste jak poprzednie, a może nawet prostsze. W zadaniu **F** odpowiedź jest oczywista bez wykonywania jakichkolwiek obliczeń, natomiast w **G** wystarczy np. wykonać dwa odejmowania w zakresie 20.

Zadanie tekstowe było uznawane za poprawnie rozwiązane, jeśli metoda zastosowana przez dziecko była dobra, nawet jeśli w samym rozwiązaniu pojawiły się błędy rachunkowe czy notacyjne.

[23] Na podstawie: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. CKE, Warszawa 2009, s. 114-132.

Spójrzmy na poziom rozwiązań tych zadań:

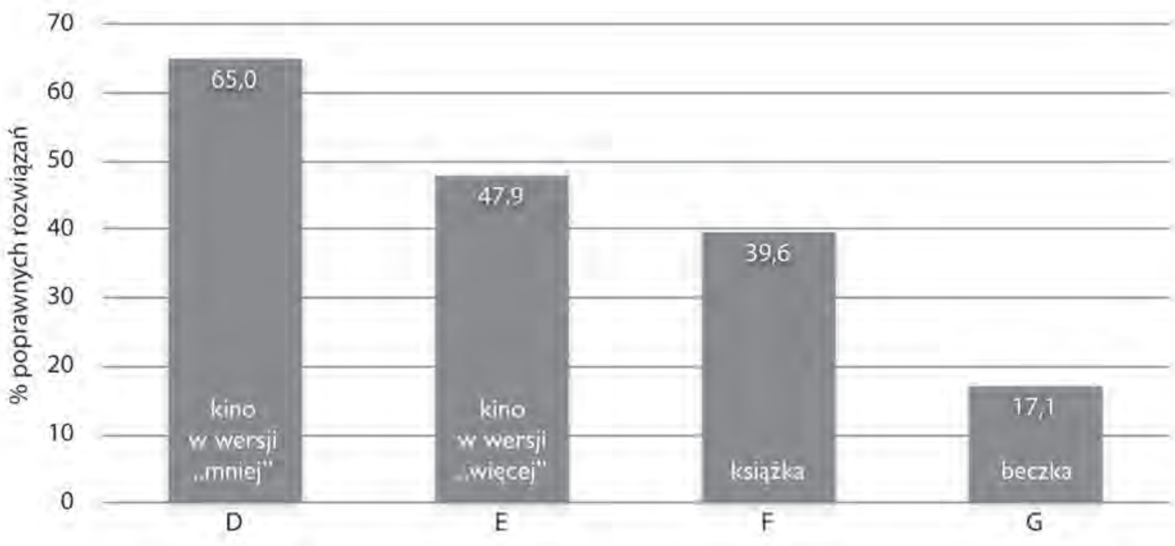
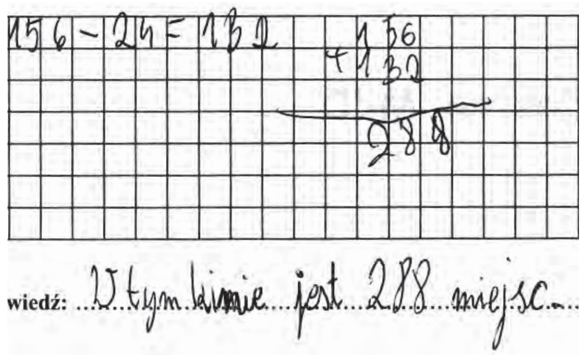


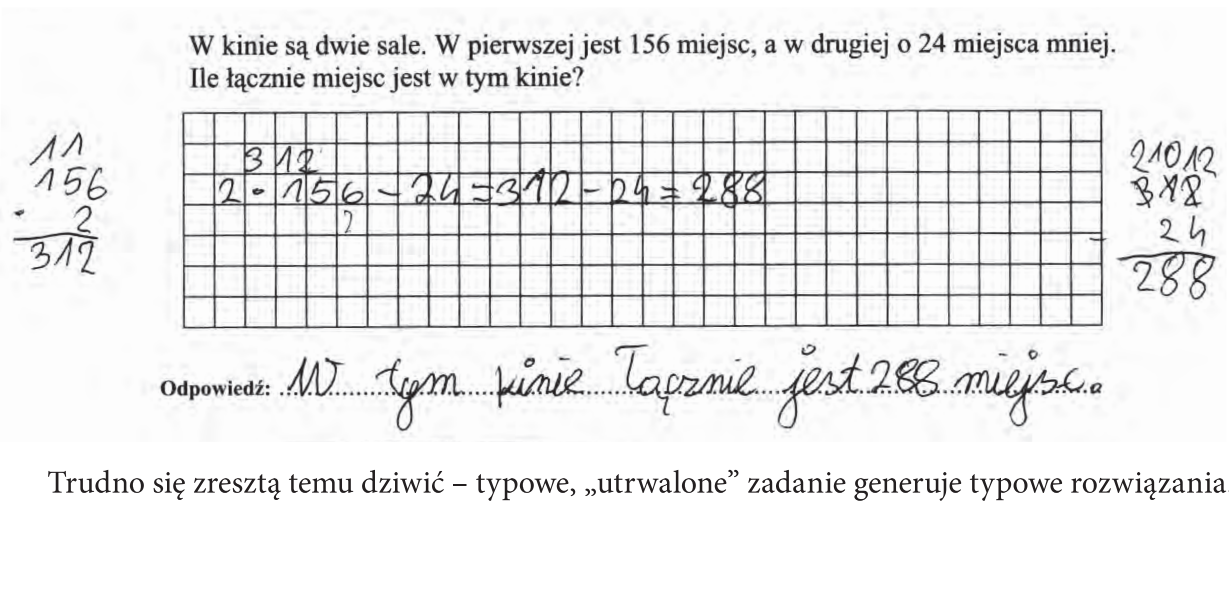
Diagram 10. Wybrane zadania tekstowe – procent poprawnych rozwiązań w badaniach w roku 2008.

Pierwsze zadanie na porównywanie różnicowe (**D**) rozwiązało poprawnie 65,0% trzecioklasistów.

Ogromna większość z nich zrobiła to kolejno odejmując i dodając, czyli w klasyczny sposób: Rozwiązania wykorzystujące dwa zapisy (jak obok) oraz te, w których wystąpił jeden zapis, czyli uczeń zapisał poprawne obliczenie złożone, były mniej więcej jednakowo popularne.

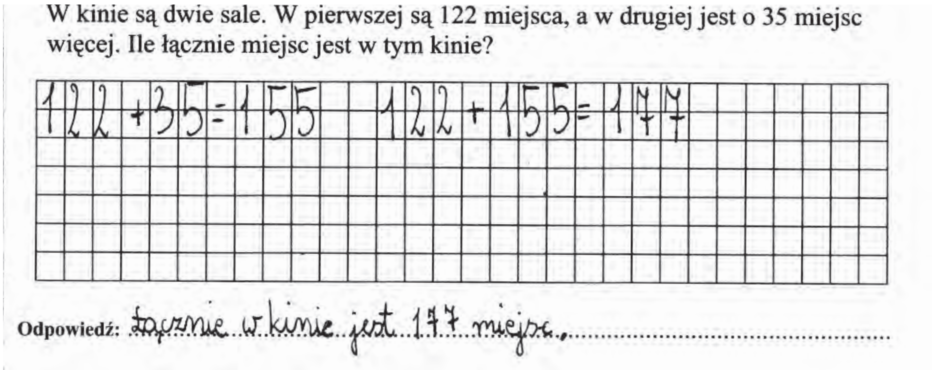


Tylko sporadycznie pojawiały się bardziej oryginalne rozwiązania:



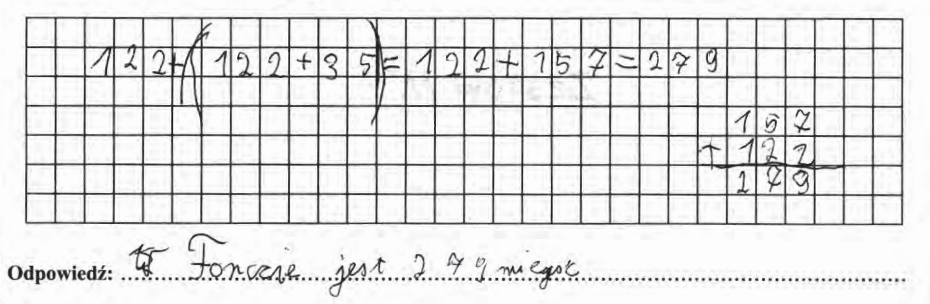
Trudno się zresztą temu dziwić – typowe, „utrwalone" zadanie generuje typowe rozwiązania.

W przypadku drugiego zadania na porównywanie różnicowe (**E**) kategorie poprawnych rozwiązań były w pełni analogiczne:


W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej jest o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

122 + 35 = 155   122 + 155 = 177

Odpowiedź: łącznie w kinie jest 177 miejsc.


122 + (122 + 35) = 122 + 157 = 279

157
+ 122
279

Odpowiedź: Łącznie jest 279 miejsc

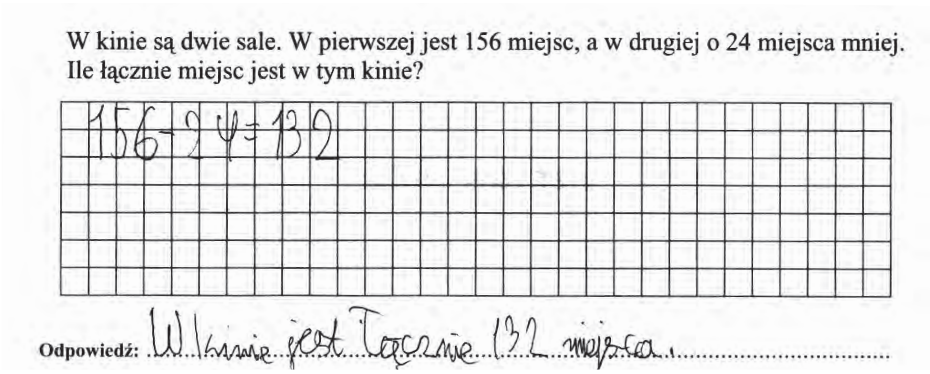
Poziom wykonania zadania był natomiast zaskakująco niski – jedynie 47,9%. Przypomnijmy – takie rozwiązania, jak pierwsze powyżej, w których uczeń – poprawnie rozumując – robił błąd rachunkowy (czy nawet kilka błędów) były uznawane za dobrze zrobione.

Skąd taka rozpiętość wyników dla dwóch bliźniaczo podobnych zadań?

(65,9% i 47,9%, czyli aż 17,1%)

Szukając możliwej odpowiedzi na to pytanie, popatrzmy na najbardziej typowe błędy robione przez trzecioklasistów.

W pierwszym zadaniu (**D**) najczęściej występujący błąd polegał na ograniczeniu się przez ucznia do odjęcia liczb podanych w treści zadania:

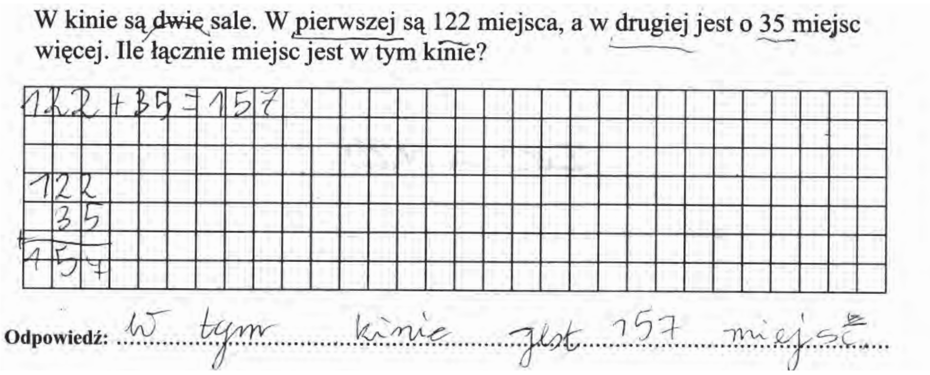

W kinie są dwie sale. W pierwszej jest 156 miejsc, a w drugiej o 24 miejsca mniej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

156 - 24 = 132

Odpowiedź: W kinie jest łącznie 132 miejsca.

W ten sposób postąpiło 26,2% trzecioklasistów.

W przypadku drugiego zadania (**E**) także dominował błąd tego samego typu:


W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej jest o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?

122 + 35 = 157

122
35
+ 157

Odpowiedź: W tym kinie jest 157 miejsc.

W ten sposób postąpiło aż 43,4% trzecioklasistów, czyli o 17,2% więcej niż dla zadania **D**. Jeśli połączy się te wyniki z poziomem poprawnych rozwiązań obu tych zadań,

D: 65,0% + 26,2% = **91,2**%

E: 47,9% + 43,4% = **91,3**%

to widać, że w obu przypadkach ogromna większość uczniów, bo rzędu 91%, zaczęła rozwiązywać zadanie w sposób, który powinien doprowadzić ich do końcowego sukcesu.

Jednak w trakcie rozwiązywania, po wykonaniu pierwszej operacji arytmetycznej, coś zaczęło się psuć w rozumowaniu znacznej części z nich. Przy czym dla zadania **E** zjawisko to było zdecydowanie częstsze!

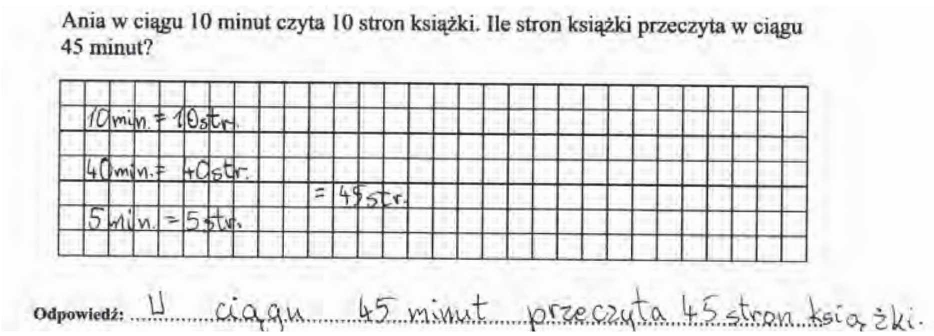
W takiej sytuacji na ogół przyjmuje się, że uczeń zamiast zadania złożonego rozwiązał zadanie proste (jednodziałaniowe) i ograniczył się do obliczenia liczby miejsc w drugiej sali. Często, zgodnie z kluczem oceniania, dostawał za to nawet część możliwych do zdobycia punktów. Tylko skąd odpowiedzi odnoszące się albo do kina, albo do łącznej liczby miejsc?

Wydaje się, że inne wyjaśnienie tego zjawiska jest bardziej prawdopodobne. **Być może „doszła do głosu" strategia uruchamiana przez słowo-klucz łącznie występujące w obu pytaniach: łącznie, zatem trzeba dodać.** W zadaniu **D** najpierw się odejmuje, ale jest przecież łącznie, zatem jeszcze trzeba dodać – w efekcie są dwa działania. Natomiast dla **E** pierwsze wykonywane działanie to właśnie dodawanie, część uczniów mogła więc uznać, że to kończy proces rozwiązania. Do tworzenia przez uczniów tego typu strategii będziemy jeszcze wielokrotnie wracać.

Pozostałe dwa zadania wypadły gorzej – pierwsze z nich, dotyczące czytania książki (**F**) rozwiązało poprawnie 39,6% trzecioklasistów, a drugie: o wadze beczki (**G**) jedynie 17,1%.

Zobaczmy, jak uczniowie próbowali je rozwiązywać.

W przypadku poprawnych rozwiązań zadania **F** uczniowie odwoływali się do proporcji opisanej w treści, czasami dodatkowo rozbijając ją na bardziej elementarne fragmenty:


Ania w ciągu 10 minut czyta 10 stron książki. Ile stron książki przeczyta w ciągu 45 minut?

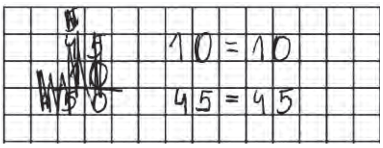
10min. = 10str.

40min. = 40str.

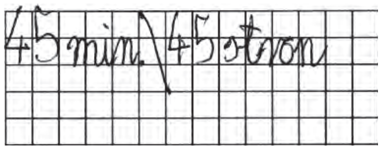
= 45str.

5min. = 5str.

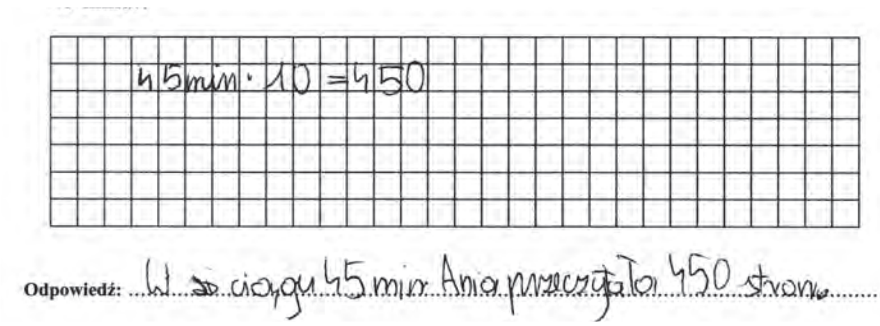
Odpowiedź: W ciągu 45 minut przeczyta 45 stron książki.


10 = 10

45 = 45

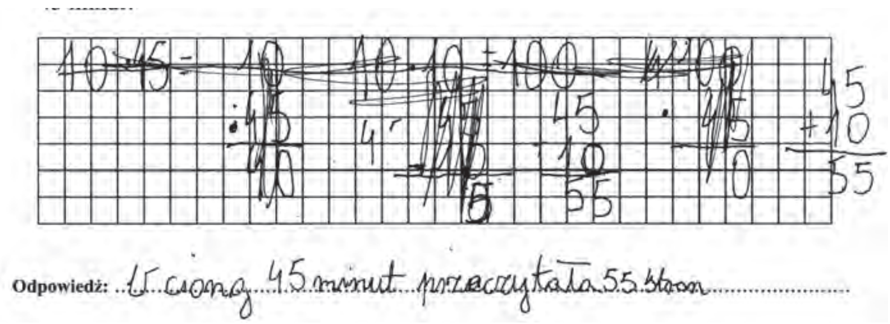

45min \ 45stron

Wśród błędnych rozwiązań dominowały próby bardzo podobne do tych omówionych przy okazji poprzedniej pary zadań. Aż 21,4% trzecioklasistów pomnożyło 45 minut przez 10:


45min · 10 = 450

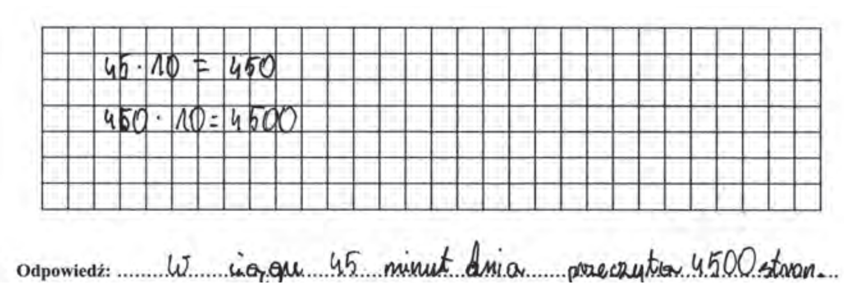
Odpowiedź: W ciągu 45 min Ania przeczytała 450 stron

12,2% uczniów dodało te liczby:


45 + 10 = 55

Odpowiedź: W ciąng 45 minut przeczytała 55 stron

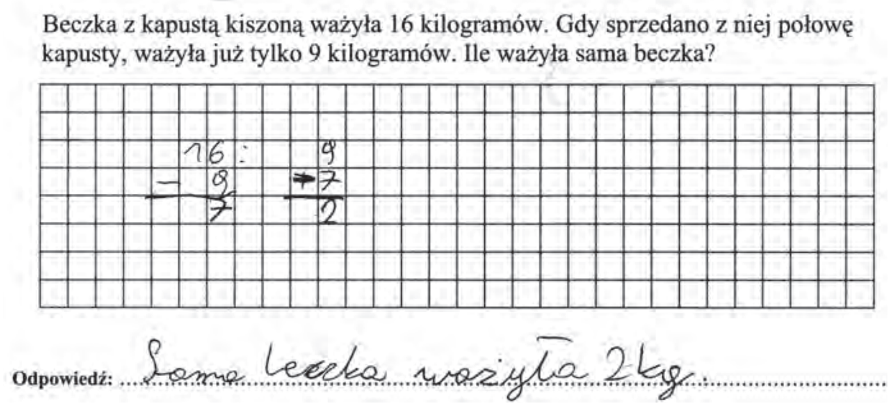
a 12,0% dzieci pomnożył wszystkie liczby z treści zadania:


45 · 10 = 450

450 · 10 = 4500

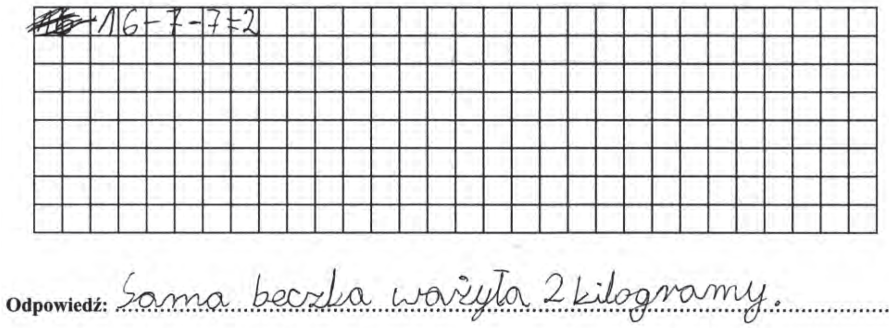
Odpowiedź: W ciągu 45 minut Ania przeczyta 4500 stron

Zadanie **G** można było rozwiązać na kilka sposobów – wymagało to wykonania dwóch, trzech prostych operacji arytmetycznych:

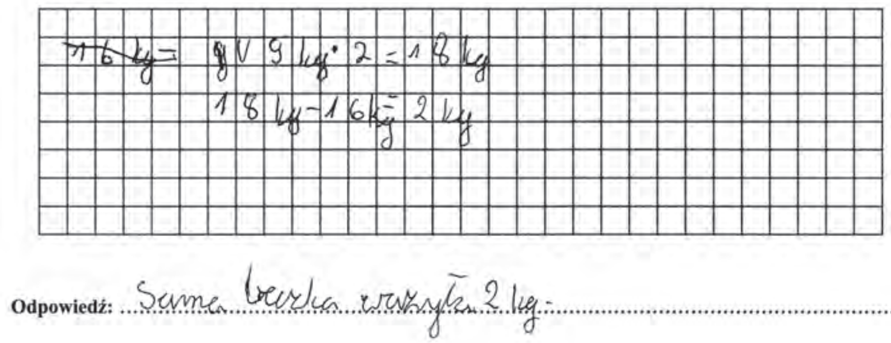

Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

16 : 9
− 9 − 7
7 2

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2kg.


~~16~~ 16−7−7=2

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2 kilogramy.


~~16 kg =~~ 9 V 9 kg · 2 = 18 kg
18 kg − 16 kg = 2 kg

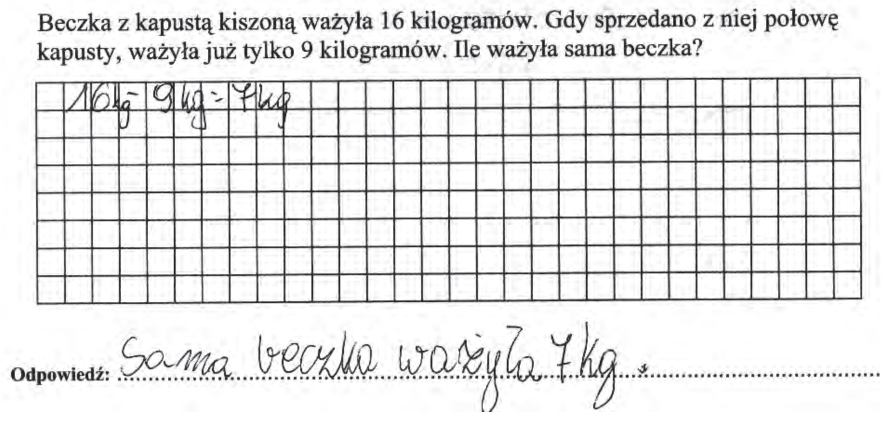
Odpowiedź: Sama beczka ważyła 2 kg.

Zwłaszcza ciekawy jest ten ostatni typ rozwiązania: beczka z połową kapusty razy dwa to dwie beczki – jedna pełna, druga pusta, jeśli odejmiemy wagę tej pełnej, to jesteśmy u celu.

Przypomnijmy – łącznie poradziło sobie z tym zadaniem 17,1% trzecioklasistów.

A pozostali uczniowie?

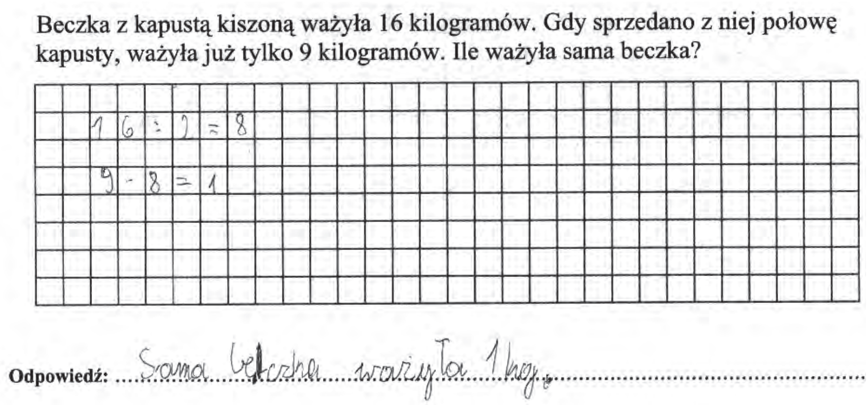
Najliczniejsza ich grupa: 50,1% odjęła obie liczby podane w treści zadania:


Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

16 kg − 9 kg = 7 kg

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 7 kg.

Natomiast 15,0% uczniów wykonało następujący ciąg operacji:


Beczka z kapustą kiszoną ważyła 16 kilogramów. Gdy sprzedano z niej połowę kapusty, ważyła już tylko 9 kilogramów. Ile ważyła sama beczka?

16 : 2 = 8

9 - 8 = 1

Odpowiedź: Sama beczka ważyła 1 kg.

Pochodzenie poprzedniego rozwiązania jest proste: **16, sprzedano, 9, czyli 16 – 9**.

A skąd dzielenie przez 2 w powyższym rozwiązaniu? Być może jest to efekt pojawienia się w treści słowa połowa.

Spójrzmy na wyniki czterech omówionych zadań z uwzględnieniem lokalizacji szkoły:

szkoły	D por. różnicowe w wersji „mniej”	E por. różnicowe w wersji „więcej”	F „książka”	G „beczka”
wiejskie	57,4	41,9	35,2	15,5
miasto do 10 tys.	64,7	31,5	35,1	11,3
miasto 10-100 tys.	73,3	56,6	41,7	21,0
miasto ponad 100 tys.	67,8	54,0	47,0	17,6
ogółem 2008	65,0	47,9	39,6	17,1

Tabela 4. Wybrane zadania tekstowe – procent poprawnych rozwiązań w badaniach w roku 2008 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Jak widać, z analizowanymi zadaniami najlepiej poradzili sobie uczniowie ze średnich i dużych miast, a wyraźnie słabiej uczniowie z małych miast oraz ze szkół wiejskich.

W tych samych badaniach[24] pojawiła się także następująca seria zadań tekstowych złożonych, dotyczących porównywania różnicowego:

H	Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 24 modele. Piotr ma o 8 więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?
I	Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Janek ma już 40 modeli. Piotr ma o osiem więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał?
J	Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o 8 modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma 16 modeli?
K	Janek, Piotr i Michał zbierają modele samochodów. Piotr ma o osiem modeli więcej niż Janek, a Michał o 2 mniej niż Piotr. Ile modeli ma Michał, jeśli Janek ma już 32 modele?

Pierwsze z tych zadań to typowe, często w szkole rozwiązywane[25], zadanie tekstowe złożone. Szukając odpowiedzi na postawione pytanie, dziecko dokonuje dwukrotnego porównywania różnicowego. Dane w zadaniu są podawane w takiej kolejności, w jakiej należy ich użyć w procesie rozwiązywania zadania. W wykorzystywanych w naszych szkołach materiałach edukacyjnych, a – w efekcie – także w procesie kształcenia dominują zadania o takim właśnie szyku danych, „oddającym" kolejność sięgania po nie.

Kolejne trzy zadania są modyfikacjami pierwszego:

- W zadaniu **I** został zachowany identyczny układ danych, ale jedna z podawanych informacji została zapisana za pomocą słowa.
- W zadaniu **J** zmieniono – w stosunku do oryginału – kolejność podawania informacji. Liczba, od której powinny zacząć się obliczenia pojawia się w tekście jako ostatnia – znajduje się ona na końcu pytania.
- Zadanie **K** łączy obie opisane powyżej modyfikacje – szyk danych jest w nim zmieniony, a ponadto jedna z nich podana w postaci słownej.

Zadania pojawiły się w badaniach w równoległych testach, co oznacza, że każde z nich było rozwiązywane przez inną grupę trzecioklasistów. Wszystkie te grupy były reprezentatywne dla populacji polskich trzecioklasistów, zatem – w szczególności – w pełni z sobą wzajemnie porównywalne.

---

24 Por. Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. CKE, Warszawa 2009, s. 117-118.

25 W momencie realizacji badań. Trudno ocenić w tej chwili, jak zmiana podstawy programowej wpłynęła na pojawianie się tego typu zadań w procesie kształcenia w klasach I-III.

Zobaczmy, jak te modyfikacje struktury zadania wpłynęły na poziom dobrych rozwiązań:

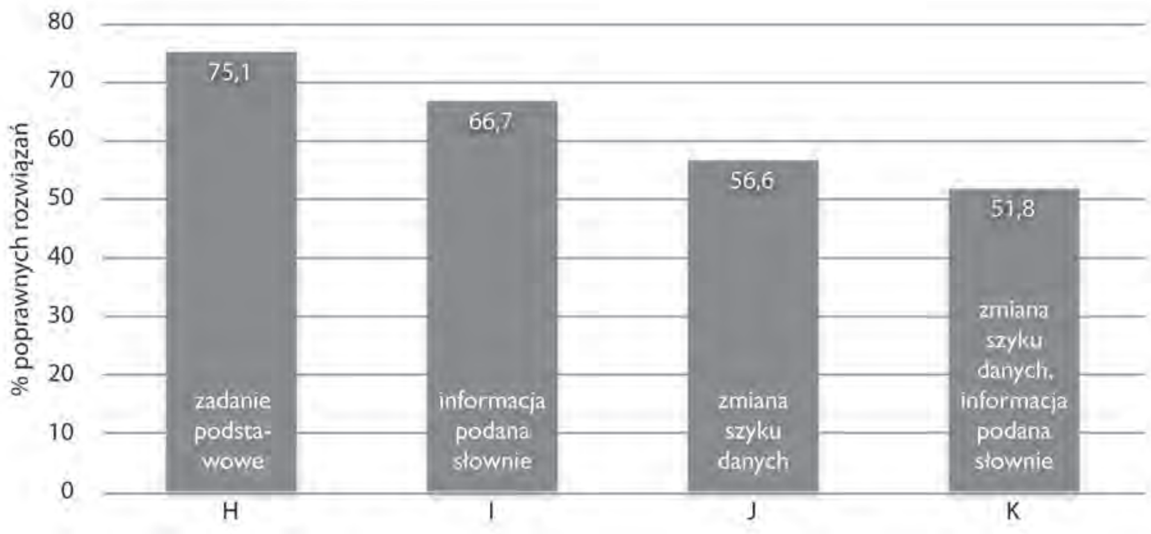


Diagram 11. Zadania tekstowe złożone o różnym szyku i sposobie podanych danych – procent poprawnych rozwiązań w badaniach w roku 2008.

Z zadaniem w wersji podstawowej poradziło sobie 75,1% trzecioklasistów, czyli ponad ¾ uczniów. To wysoki wynik, zwłaszcza jeśli odniesiemy go do poziomów rozwiązań zadań omawianych wcześniej. Dlaczego to zadanie wypadło aż tak dobrze? Jego treść jest przecież stosunkowo długa i bogata w informacje. Jedno z możliwych wyjaśnień jest następujące: *uczniowie często rozwiązywali tego typu zadania, mają więc utrwaloną metodę postępowania w takiej sytuacji*.

Przyjrzyjmy się wynikom dla pozostałych zadań:

- Zadanie **I**, w którym jedna liczba została zapisana słowem rozwiązało dobrze 66,7% czyli o 8,4% mniej.
- Z zadaniem **J** – o zmienionym szyku danych – poradziło sobie 56,6% trzecioklasistów, zatem o 18,5% mniej niż z zadaniem w wersji podstawowej.
- Natomiast w zadaniu **K** sukces odniosło 51,8% dzieci, czyli o 23,3% mniej niż w **H**.

Jak widać, zmiana szyku danych sprawiła znacznie większą trudność dzieciom niż podanie informacji słowem, choć i ta – niewielka w końcu modyfikacja – istotnie zmieniła poziom poprawnych rozwiązań.

Wydaje się, że wytłumaczenie wysokiego wyniku zadania w wersji podstawowej (**H**) należy uzupełnić: *w dużym stopniu na poziom rozwiązań mógł wpłynąć sposób podawania danych*.

Zastosujmy do tego zadania strategię sygnalizowaną już wcześniej – zobaczmy, co się wydarzy, jeśli skupimy uwagę na liczbach i słowach-kluczach występujących w treści tego zadania:

24, o 8 więcej, czyli 24 + 8 = 32; o 2 mniej, zatem 32 – 2 = 30.

Żeby poprawnie rozwiązać to zadanie, wcale nie trzeba wnikać w jego treść – wystarczy skupić się na liczbach i słowach-kluczach. Ta metoda zawodzi dla trzech pozostałych wersji tego zadania i stąd, najprawdopodobniej, ta rosnąca różnica wyników. Bo, przecież, jeśli dziecko potrafi rozwiązywać zadania tekstowe, to wszystkie te cztery zadania powinny mieć dla niego bardzo zbliżony poziom trudności.

Ponownie sprawdźmy, jak z tymi zadaniami radzili sobie uczniowie różnych typów szkół:

szkoły	H zadanie podstawowe	I informacja podana słownie	J zmiana szyku danych	K zmiana szyku, informacja słownie
wiejskie	73,6	65,9	53,1	43,8
miasto do 10 tys.	68,2	55,0	48,5	46,0
miasto 10-100 tys.	79,3	68,1	59,9	61,0
miasto ponad 100 tys.	75,1	70,4	62,4	56,8
ogółem 2008	75,1	66,7	56,6	51,8

Tabela 5. Zadania tekstowe złożone o różnym szyku i sposobie podanych danych – procent poprawnych rozwiązań w roku 2008 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Podobnie jak poprzednio, najlepiej wypadli uczniowie szkół ze średnich i dużych miast, znacznie gorzej z małych miast i szkół wiejskich. Warto zwrócić uwagę na rozpiętość tych wyników. Dla zadania **H** poziom wykonania dla uczniów szkół z małych miast był o 11,1% niższy od rezultatu uczniów szkół z miast średnich. Dla kolejnych zadań różnica ta rośnie, pomimo tego, że same wyniki znacznie spadają – dla **I** wynosi ona 14,6%, dla **J** 13,9%, a dla **K** aż 17,2%. Im zadanie bardziej różniło się od oryginału, tym uczniowie szkół wiejskich i z małych miast mieli z nim większe kłopoty – znacznie większe niż ich koledzy z miast średnich i dużych. Warto o tym pamiętać.

W badaniach realizowanych w roku 2010[26] wykorzystano serię czterech zadań tekstowych dotyczących proporcjonalności:

L	Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg. Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?
M	Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś. Ile zapłacono by za 5 lalek?
N	Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?
O	Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?

Zadania tego typu sporadycznie występują w procesie kształcenia w szkole podstawowej – można więc uznać, że tworzą one dobre warunki do zaprezentowania przez trzecioklasistów swojej wiedzy w nowej, nietypowej sytuacji, że dają szansę na ujawnienie ich rzeczywistych strategii pokonywania trudności w obszarze rozwiązywania zadań tekstowych.

Każde z tych zadań daje się rozwiązać za pomocą elementarnych narzędzi arytmetycznych. Dodatkowym ułatwieniem może być zauważenie wzajemnych relacji między informacjami podanymi w treści – ich wykorzystanie pozwala na natychmiastowe podanie odpowiedzi, np. w następującej postaci:

- półtora raza więcej, czyli 15 kg;
- połowę, czyli 55 zł;
- ponownie połowę, czyli 60 zł;
- trzy razy więcej, czyli 108 zł.

Możliwych dróg prowadzących do znalezienia poprawnych rozwiązań każdego z tych zadań jest, oczywiście, znacznie więcej.

Także i w tym wypadku zadania znajdowały się w równoległych testach, zatem każdy uczeń rozwiązywał tylko jedno z nich.

[26] Na podstawie: Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista 2010. Raport z badań ilościowych 2010*. CKE, Warszawa 2011, s. 132-137.

Spójrzmy na wyniki:

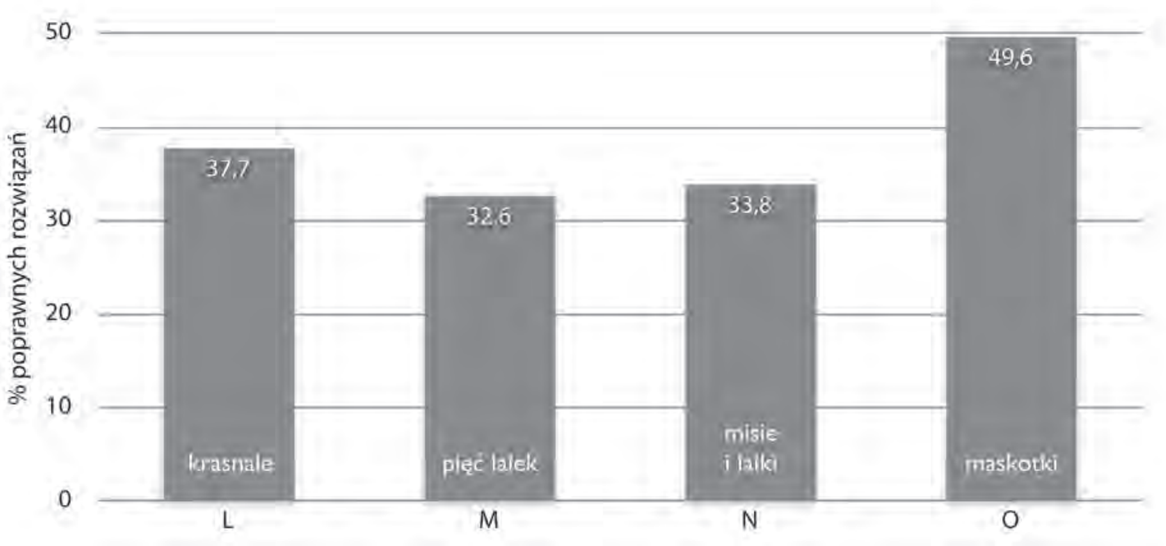


Diagram 12. Zadania tekstowe dotyczące proporcjonalności – procent poprawnych rozwiązań w badaniach w roku 2010.

Jak widać, wszystkie zadania sprawiły kłopoty. Stosunkowo najłatwiejsze okazało się zadanie **O** – rozwiązało je poprawnie 49,6% trzecioklasistów, czyli mniej więcej co drugi uczeń. Z zadaniem **L** poradziło sobie 37,7% dzieci, zatem nieco więcej niż $^1/_3$.

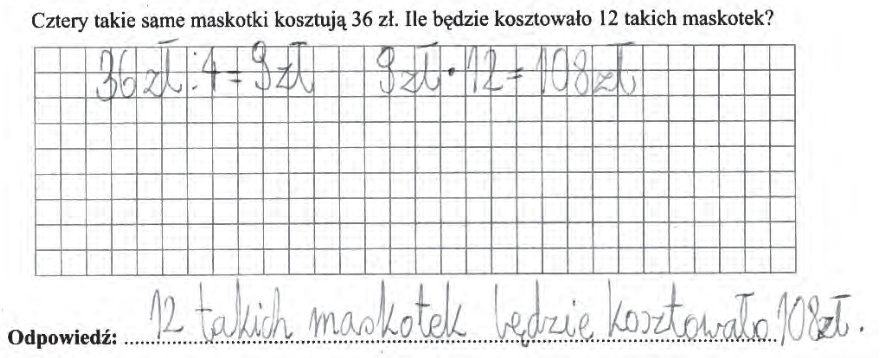
Warto zwrócić uwagę na „wizualne" podobieństwo treści tych zadań: w każdym dwie liczby podane są cyframi oraz trzecia słowem.

Oba pozostałe zadania: **M** i **N** okazały się jeszcze trudniejsze – odniosło w nich sukces odpowiednio 32,6% oraz 33,8% uczniów, czyli mniej więcej co trzeci trzecioklasista.

Także i one są „wizualnie" podobne: w każdym występuje kilka liczb zapisanych cyframi.

Przyjrzyjmy się, jak uczniowie rozwiązywali te zadania – zarówno poprawnie, jak i błędnie. Zróbmy to w kolejności od najłatwiejszego zadania do najtrudniejszego.

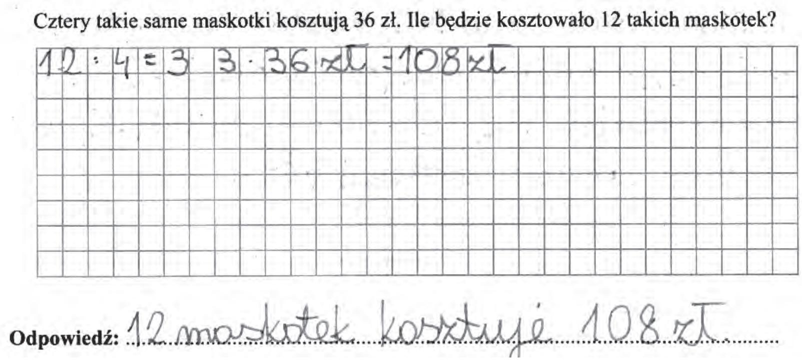
W zadaniu **O** uczniowie, którzy sobie z nim poradzili najczęściej zaczynali od obliczenia ceny jednej maskotki, a następnie mnożyli ją przez 12 – zrobiło tak 34,3% trzecioklasistów:


Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?

36 zł : 4 = 9 zł   9 zł · 12 = 108 zł

Odpowiedź: 12 takich maskotek będzie kosztowało 108 zł.

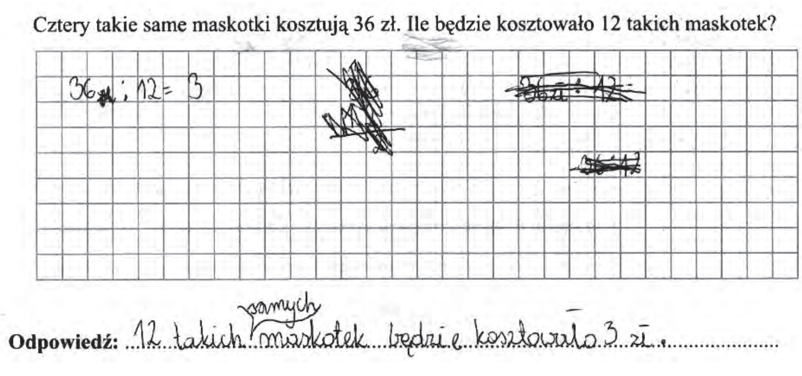
Znacznie mniej dzieci, bo 13,7%, odwołało się do odpowiedniej proporcji:


Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?

12 : 4 = 3   3 · 36 zł = 108 zł

Odpowiedź: 12 maskotek kosztuje 108 zł

Wśród błędnych rozwiązań dominowało wykonywanie obliczeń na obu liczbach podanych w treści cyframi:


Cztery takie same maskotki kosztują 36 zł. Ile będzie kosztowało 12 takich maskotek?

36 zł : 12 = 3

Odpowiedź: 12 takich samych maskotek będzie kosztowało 3 zł.

Postąpiło tak aż 32,8% trzecioklasistów, czyli mniej więcej co trzeci uczeń.

Bardzo podobna sytuacja wystąpiła w zadaniu **L**, gdzie uczniowie najczęściej zaczynali swoje poprawne rozwiązanie od obliczenia wagi jednego krasnala – postąpiło tak 32,7% trzecioklasistów:

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

10 kg : 4 = 8 r 2
8 kg : 4 = 2 kg
2 : 4 = 0,5 kg
2 kg + 0,5 kg = 2,5 kg
6 · 2,5 kg = 12 kg
~~6~~ 0,5 kg · 6 = 3 kg
12 kg + 3 kg = 15 kg

Odpowiedź: Łącznie 6 takich krasnali ważyłoby 15 kg.

~~2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag = 10 kg~~
2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag +
2 kg 50 dag + 2 kg 50 dag = 15 kg

Odpowiedź: 6 takich krasnali ważą 15 kg.

Tylko 2,5% uczniów odniosło sukces, wykorzystując wagę dwóch krasnali:

Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

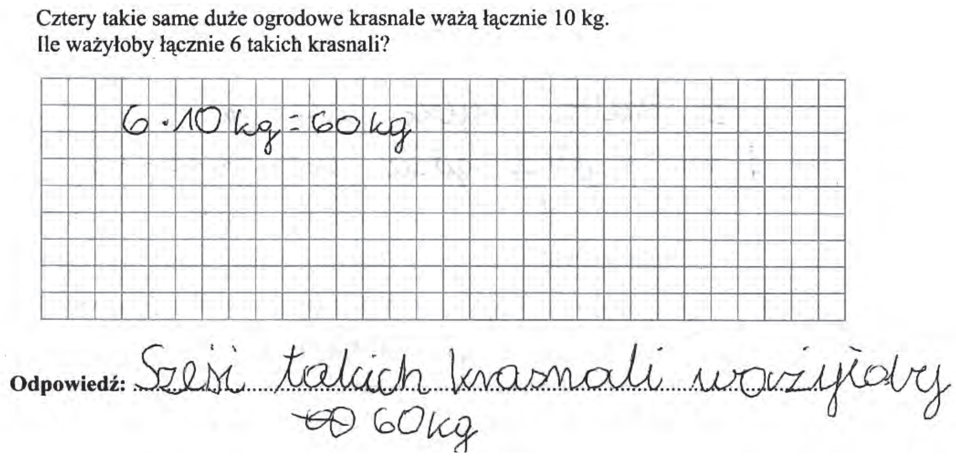
10 kg : 2 = 5 kg
10 kg + 5 kg = 15 kg

Odpowiedź: 6 takich krasnali ważyłoby 15 kg

10 + 5 kg = 15 kg

Odpowiedź: Ważyłoby 15 kg bo jak 4 ważą 10 kg to 2

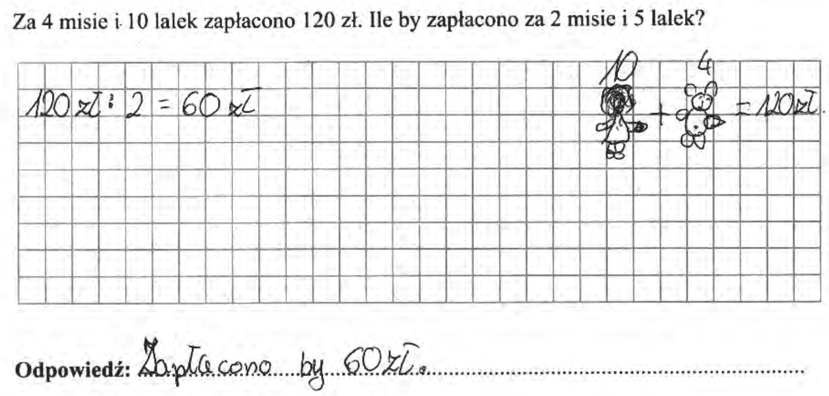
Także najbardziej typowy błąd, powtórzony przez 27,7% trzecioklasistów, był tego samego typu, co poprzednio:


Cztery takie same duże ogrodowe krasnale ważą łącznie 10 kg.
Ile ważyłoby łącznie 6 takich krasnali?

$6 \cdot 10\,kg = 60\,kg$

Odpowiedź: Szejść takich krasnali ważyłoby ~~60~~ 60kg

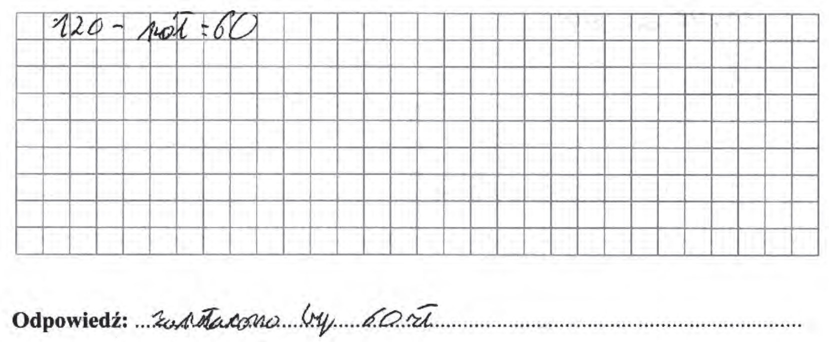
W zadaniu **N** zdecydowanie mniej naturalne było obliczanie ceny jednej zabawki, uczniowie skupili się więc na szukaniu związków pomiędzy podanymi w treści informacjami:


Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

120 zł : 2 = 60 zł

10 + 4 = 120 zł

Odpowiedź: Zapłacono by 60 zł.


120 - poł = 60

Odpowiedź: zapłacono by 60 zł

Zrobiło tak 22,8% uczniów.

5,9% trzecioklasistów tak dobrało ceny poszczególnych zabawek, aby pasowały do warunków sformułowanych w zadaniu, co także doprowadziło ich do sukcesu:

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

120 : 14 = 8   8 · 7 = 56

4 · 15 = 60   120 − 60 = 60   60 : 10 = 6

15 · 2 = 30   5 · 6 = 30   30 + 30 = 60

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 60 zł.

~~120 : 10 =~~ 100 : 10 = 10 zł 20 : 4 = 5 zł

2 · 5 = 10   5 · 10 = 50   10 + 50 = 60

Odpowiedź: Za 2 ~~dwa~~ misie i ~~1~~10 lalek zapłacono by 60 zł

Początkowe operacje pierwszego z tych rozwiązań to, najprawdopodobniej, próba wstępnego oszacowania ceny jednej zabawki.

W zadaniu tym uczniowie szukający odpowiedniego działania na „chybił-trafił" mieli więcej możliwości do wyboru niż w dwóch poprzednich, bo i liczb w treści więcej. Liczby te dodawano i odejmowano (7,5%):

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

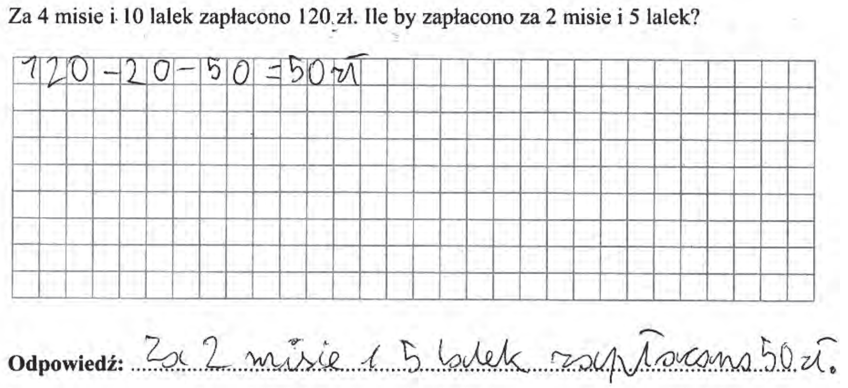
4 zł + 5 zł = 9 zł

Odpowiedź: Za dwa misie i pięć lalek zapłacono 9 zł.

120 zł − 2 − 5 = 113 zł

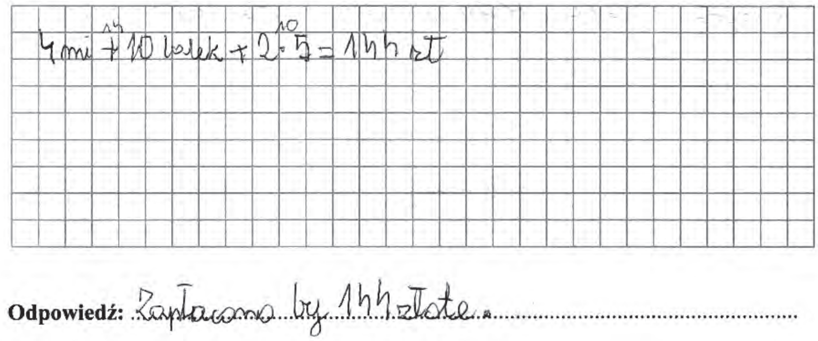
Odpowiedź: Zapłacono by 113 zł.

Łączono też w znacznie bardziej skomplikowany sposób (ok. 30%):

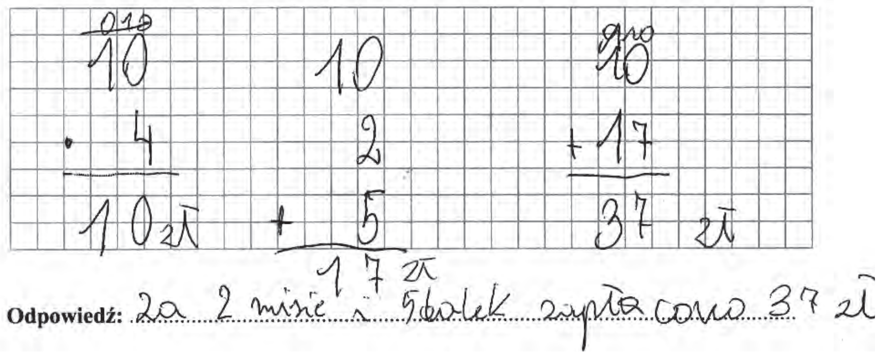

Za 4 misie i 10 lalek zapłacono 120 zł. Ile by zapłacono za 2 misie i 5 lalek?

120 − 20 − 50 = 50 zł

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 50 zł.


4 mi + 10 lalek + 2 · 5 = 144 zł

Odpowiedź: Zapłacono by 144 złote.

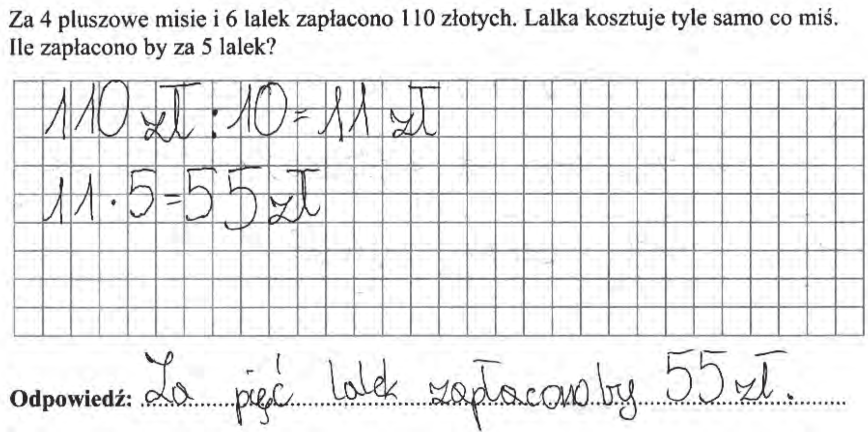

10 · 4 = 10 zł

10 2 + 5 = 17 zł

10 + 17 = 37 zł

Odpowiedź: Za 2 misie i 5 lalek zapłacono 37 zł

Pora na ostatnie, najtrudniejsze, zadanie. W zadaniu **M** ponownie „w cenie" było obliczenie ceny jednej zabawki, co 28,4% trzecioklasistów doprowadziło do sukcesu:


Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś.
Ile zapłacono by za 5 lalek?

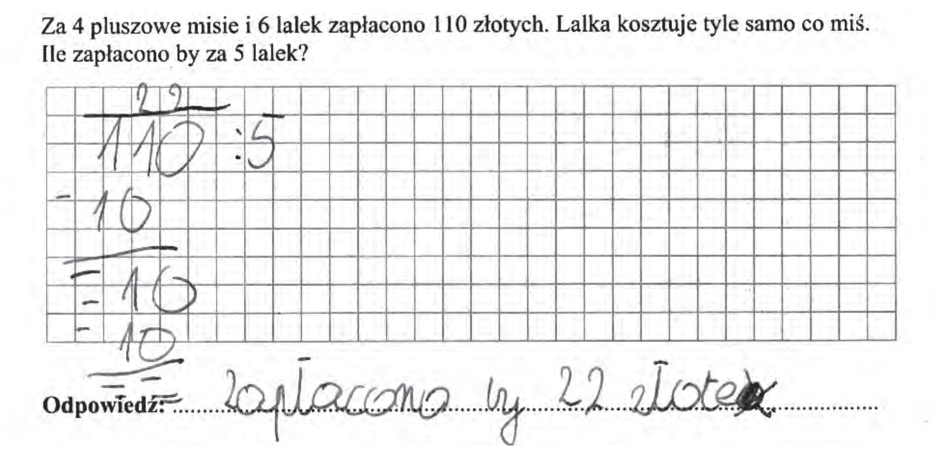
110 zł : 10 = 11 zł

11 · 5 = 55 zł

Odpowiedź: Za pięć lalek zapłacono by 55 zł.

Inne kategorie poprawnych rozwiązań występowały jednostkowo.

Wśród typowych błędów było, podobnie jak dla poprzedniego zadania, operowanie dwiema liczbami spośród podanych w treści zadania (13,1%):


Za 4 pluszowe misie i 6 lalek zapłacono 110 złotych. Lalka kosztuje tyle samo co miś.
Ile zapłacono by za 5 lalek?

22
110 :5
-10
=10
-10
=

Odpowiedź: zapłacono by 22 złote

albo ich większą ilością (ok. 38%).

W tabeli niżej zebrano dane o poziomie wykonania tych czterech zadań w szkołach o różnej lokalizacji – ponownie najlepsze wyniki mają uczniowie szkół z dużych miast, a rozpiętość wyników jest szczególnie duża w zadaniach **M** i **O**.

szkoły	L krasnale	M pięć lalek	N misie i lalki	O maskotki
wiejskie	35,7	32,9	34,1	50,9
miasto do 10 tys.	36,4	24,6	35,7	34,9
miasto 10-100 tys.	35,9	29,3	32,4	50,9
miasto ponad 100 tys.	43,6	39,4	34,4	51,0
ogółem 2010	37,7	32,6	33,8	49,6

Tabela 6. Zadania dotyczące proporcjonalności – procent poprawnych rozwiązań w roku 2010 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

I dwa, ostatnie już, zadania tekstowe z badań z roku 2010:

P	Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112. Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek. Ile kajzerek dowieziono?
R	Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała. Ile wróbli zostało na drzewie?

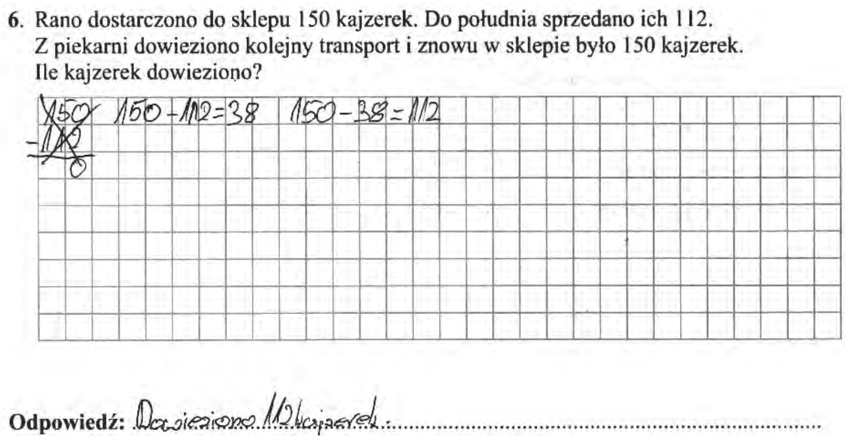
Oba te zadania są strukturalnie podobne – w każdym podana jest odpowiedź na postawione w nim pytanie:

- dowieziono tyle kajzerek, ile sprzedano, czyli 112;
- odleciała większość, oprócz 8, zatem 8 zostało.

Ich celem było sprawdzenie, na ile trzecioklasiści rozumieją, na czym polega proces rozwiązywania zadania tekstowego, na ile potrafią analizować i wykorzystywać związki pomiędzy danymi zawartymi w jego treści. Tę właśnie umiejętność: ***stałego badania zależności pomiędzy informacjami podanymi w treści zadania*** G. Polya, wybitny matematyk, twórca współczesnej heurystyki, czyli nauki o rozwiązywaniu zadań i problemów, przedstawiał jako zasadniczy element sztuki rozwiązywania zadań tekstowych[27].

Wyniki obu zadań są bardzo wymowne – zadanie **P** rozwiązało 34,8% trzecioklasistów, a zadanie **R** jeszcze mniej, bo zaledwie 30,9%. Zatem poradził sobie z nimi mniej więcej co trzeci uczeń. Ponownie popatrzmy na typowe rozumowania.

W zadaniu „o kajzerkach" (**P**) 34,3% uczniów wykonało takie oto obliczenia:


6. Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

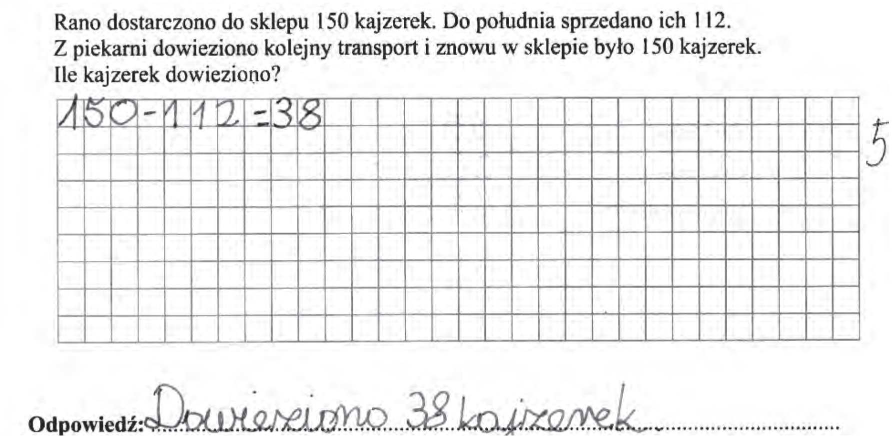
150 − 112 = 38 150 − 38 = 112

Odpowiedź: Dowieziono 112 kajzerek.

[27] Por. np. G. Polya, *Jak to rozwiązać?* PWN, Warszawa 1993.

Tylko trzech uczniów (0,3%) ograniczyło się do podania poprawnej odpowiedzi, bez żadnych dodatkowych operacji arytmetycznych.

Aż 27,3% trzecioklasistów, czyli ponad ¼, w swoim rozwiązaniu wykonało tylko jedno odejmowanie:

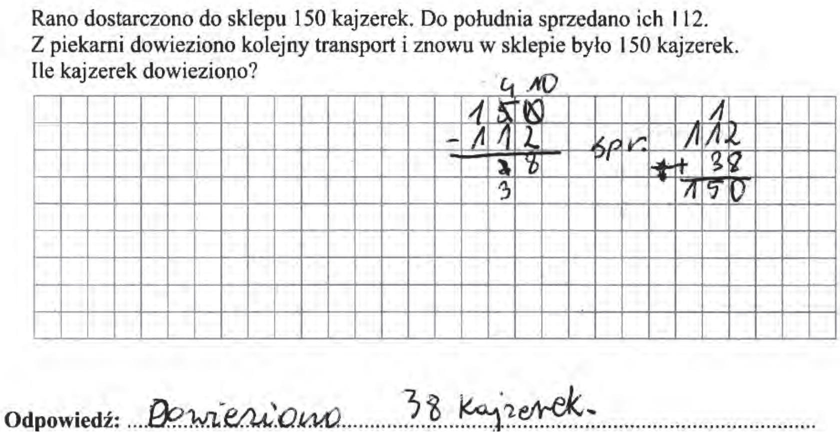

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

150-112=38

5

Odpowiedź: Dowieziono 38 kajzerek

Czasami dodatkowo sprawdzając je:


Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

$$\begin{array}{r} 150 \\ -\,112 \\ \hline 38 \end{array} \qquad \text{spr.} \quad \begin{array}{r} 112 \\ +\,38 \\ \hline 150 \end{array}$$

Odpowiedź: Dowieziono 38 kajzerek.

To sprawdzenie, najprawdopodobniej, miało upewnić ucznia, że dobrze rozwiązał zadanie. Tego typu metodę postępowania daje się zauważyć przy rozwiązywaniu zadań tekstowych bardzo często. Powyższy przykład wyraźnie pokazuje, że przekonanie to jest fałszywe. Jedynym skutecznym sposobem weryfikacji poprawności rozwiązania jest sprawdzenie, czy uzyskana odpowiedź spełnia warunki podane w treści zadania.

Nieco mniej uczniów, bo 20,2%, postanowiło w swoich obliczeniach wykorzystać wszystkie liczby podane w treści zadania:

Rano dostarczono do sklepu 150 kajzerek. Do południa sprzedano ich 112.
Z piekarni dowieziono kolejny transport i znowu w sklepie było 150 kajzerek.
Ile kajzerek dowieziono?

Obliczenie: 150 - 112 = 38   38 + 150 = 188

Odpowiedź: Dawieziono 188 kajzerek.

Skąd takie rozwiązania?

Żeby to zrozumieć, popatrzmy na liczby podane w zadaniu i słowa-klucze im towarzyszące:

- **150, sprzedano 112, zatem: 150 – 112 = 38;**
- **dowieziono, 150, czyli: 38 + 150 = 188.**

A przecież liczby te jeszcze można dodać:

150 + 150 = 300

Odpowiedź: Dowieziono 300 kajzerek.

~~150 + 112 = 42~~

150 + 112 = 262

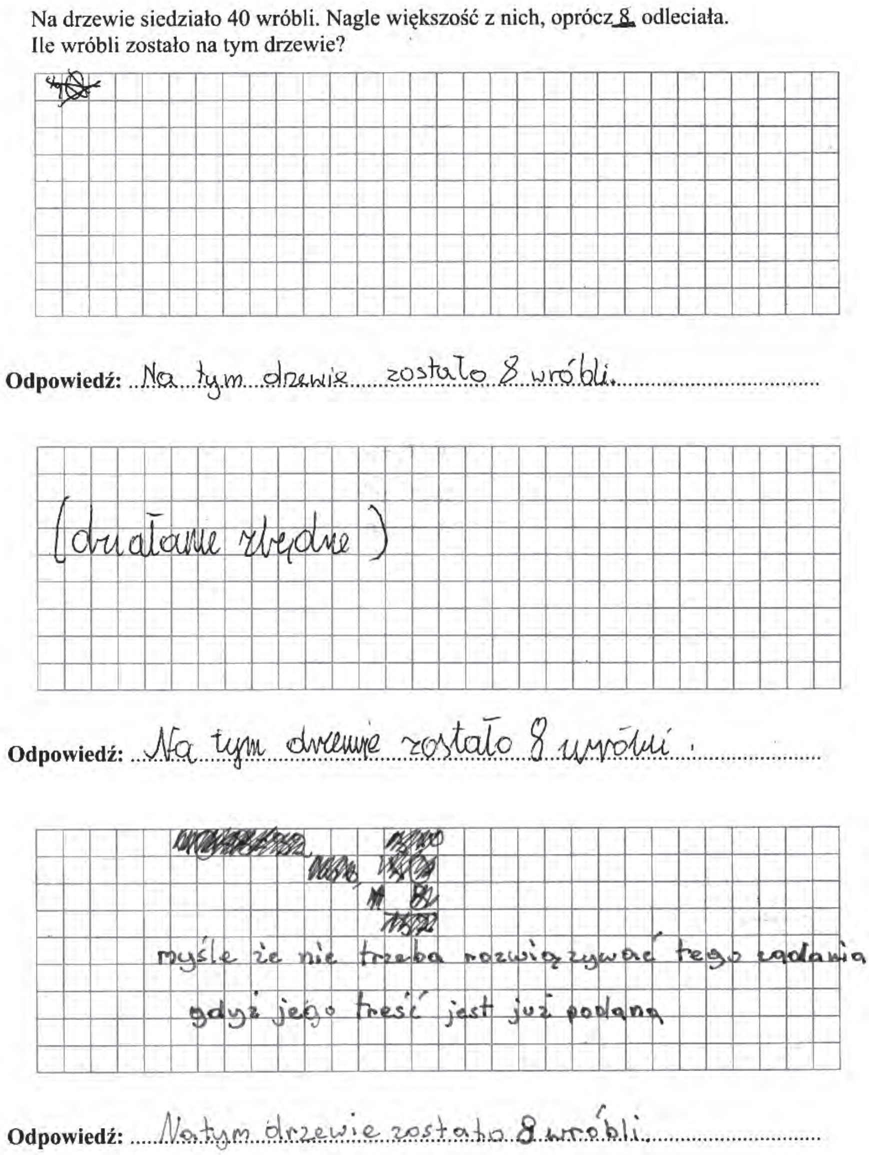
262 - 112 = 150.

Odpowiedź: Dawieziomo 262 kajzerki.

150 + 112 + 150 = 412

Odpowiedź: Kajzerki ów dowieziono 412.

Bardzo podobne uczniowskie strategie ujawnia także zadanie „o wróblach” (**R**), choć w tym wypadku potrzeba wykonywania obliczeń była słabsza – 11,3% trzecioklasistów podało tylko poprawną odpowiedź, czasami jakoś to dodatkowo „tłumacząc”:


Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8 odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

(działanie zbędne)

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

myśle że nie trzeba rozwiązywać tego zadania gdyż jego treść jest już podana

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Ta ostatnia wypowiedź ujawnia, co to znaczy dla ucznia *rozwiązać zadanie*. Rozwiązać zadanie, czyli: *wykonać pewne obliczenie*, a nie: *odpowiedzieć na pytanie sformułowane w treści zadania*. Jeśli uczniowie tak właśnie rozumieją proces rozwiązywania zadania tekstowego, to ich strategie postępowania stają się znacznie bardziej zrozumiałe.

Nieco więcej trzecioklasistów, bo 18,0%, swoją poprawną odpowiedź uzupełniło jakimś obliczeniem, najczęściej jednym z dwóch odejmowań: 40 – 8 = 32 albo 40 – 32 = 8, ewentualnie „pasującym” równaniem:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

40-8=32

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

~~40-8=32~~ 40-32=8

Odpowiedź: Na drzewie zostało 8 wróbli

40- x=8

x= ~~408~~ 40-8

x= 32

Odpowiedź: Na tym drzewie zostało 8 wróbli.

Znacznie częściej, jednak, działanie 40 – 8 = 32 prowadziło do błędnych konkluzji:

Na drzewie siedziało 40 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 8, odleciała.
Ile wróbli zostało na tym drzewie?

$$\begin{array}{r} 40 \\ -\;\;8 \\ \hline 32 \end{array}$$

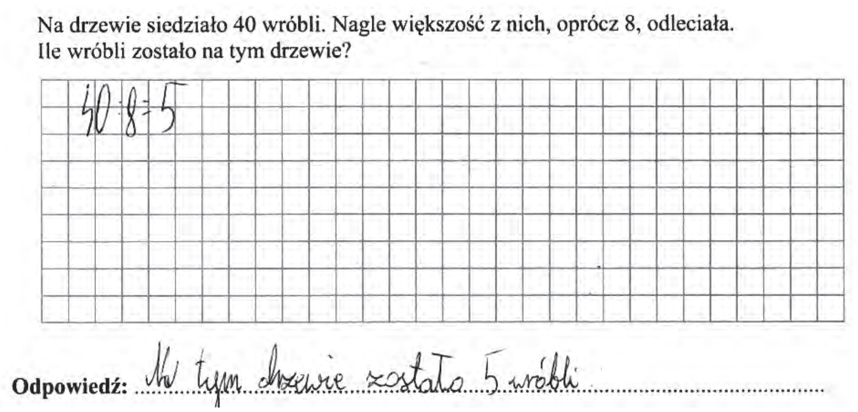
Odpowiedź: Na drzewie zostało 32

„Rozwiązało" w ten sposób to zadanie aż 49,1% trzecioklasistów, czyli prawie co drugi!

I znów można postawić pytanie: skąd takie rozwiązania?

Odpowiedź jest już prosta: **40, 8, odleciało, zatem 40 – 8 = 32**.

Nie wyczerpuje to jednak listy możliwych błędnych rozwiązań, bo liczby podane w treści tego zadania można jeszcze podzielić, dodać albo pomnożyć – zrobiło tak 8,6% uczniów:



Spójrzmy po raz kolejny na wyniki tych dwóch zadań z uwzględnieniem lokalizacji szkół:

szkoły	P kajzerki	R wróble
wiejskie	36,2	28,1
miastodo 10 tys.	32,5	25,1
miasto 10-100 tys.	30,9	33,3
miasto ponad 100 tys.	38,0	34,7
ogółem 2010	34,8	30,9

Tabela 7. Zadania tekstowe z podaną w treści odpowiedzią – procent poprawnych rozwiązań w roku 2010 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Jak zawsze, najlepsze wyniki uzyskali uczniowie szkół z dużych miast. Tym razem tylko oni we wszystkich zadaniach lokują się powyżej średniej.

Na ogół najsłabiej wypadają uczniowie szkół wiejskich oraz z małych miast. Wśród prezentowanych zadań jedynym wyjątkiem od tej prawidłowości jest właśnie zadanie o kajzerkach (**P**). Powtarza się to tak często i tak regularnie, że musi nasuwać przypuszczenie, że dla **matematycznej wiedzy trzecioklasistów jedną z kluczowych kwestii, a może nawet najważniejszą, jest ich środowisko lokalne, czy raczej: domowe**. Działania szkoły schodzą tu na plan dalszy.

Te dwa ostatnie zadania tekstowe są dobrą okazją do sformułowania ogólniejszego wniosku wynikającego z omawianych badań:

znaczna część trzecioklasistów tworzy „własne" strategie rozwiązywania zadań tekstowych, które znacznie odbiegają od naszych oczekiwań.

Strategie te mają kolejne poziomy i wersje. Najprostsze z nich polegają na wybraniu z treści zadania dwóch podanych w niej liczb i dopasowaniu do nich odpowiedniego działania. Jeśli w treści jest więcej liczb, to należy poszukać kilku „pasujących" działań. Mogą w tym pomóc słowa-klucze łącznie: *odleciały*, *dowieźli*… Odwołanie się do nich zwiększa, zdaniem dzieci, szanse na dopasowanie właściwego obliczenia. Przy podręcznikach, w których występują serie podobnych, schematycznych zadań strategie te okazują się na tyle skuteczne, że tylko bardzo nieliczni nauczyciele zdają sobie sprawę z ich powszechności.

Strategie te, być może, dobrze świadczą o dziecięcej spostrzegawczości i pomysłowości, ale z rozwiązywaniem zadań tekstowych i – ogólniej – rozwojem umiejętności matematycznych uczniów, niestety, nie mają nic wspólnego.

Należy sądzić, że rozwiązywanie zadania tekstowego za pomocą obliczenia jest dla dzieci tak skomplikowaną czynnością, że zaczynają szukać metod ukrycia tego, że nie rozumieją, co i w jaki sposób mają zrobić. Powtórzmy raz jeszcze: **prowadzone badania dobitnie pokazują, że dla znacznej części dzieci posługiwanie się językiem symbolicznym jest znacznie trudniejsze niż nam, dorosłym się wydaje.**

2.2. Wybrane umiejętności matematyczne trzecioklasistów na podstawie badań OBUT 2011
Mirosław Dąbrowski

O badaniach OBUT 2011 zrealizowanych przez CKE

W dniu 17 maja 2011 r. została zrealizowana pierwsza edycja Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów (OBUT 2011). Badanie to, zaplanowane na trzy kolejne lata, zostało uruchomione w ramach projektu *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzeciej klasy szkoły podstawowej* współfinansowanego przez Unię Europejską z Europejskiego Funduszu Społecznego – Program Operacyjny Kapitał Ludzki, Priorytet III „Wysoka jakość systemu oświaty", Działanie 3.2 „Rozwój systemu egzaminów zewnętrznych".

Celem badania jest dostarczanie szkołom podstawowym: ich dyrektorom oraz nauczycielom klas 1-3 i 4-6, informacji o poziomie wybranych umiejętności językowych i matematycznych uczniów kończących I etap nauczania, wraz z szeregiem pogłębionych analiz porównawczych i praktycznych rekomendacji dotyczących przebiegu procesu kształcenia. Badanie OBUT ma być narzędziem polityki edukacyjnej, które umożliwi, m.in. dzięki połączeniu z badaniami Edukacyjnej Wartości Dodanej, stopniowe doskonalenie pracy szkoły zarówno na I, jak i na II etapie kształcenia[28].

Wykorzystywane w OBUT narzędzia są tak konstruowane, aby sprawdzały nie tylko opanowanie treści wymienionych w podstawie programowej dla I etapu kształcenia, ale także dostarczały informacji o tym, jak uczniowie potrafią posiadaną wiedzę wykorzystywać w różnych, także nowych dla siebie, sytuacjach. Dzięki temu badanie to, prawdopodobnie jako jedyne badanie realizowane w Polsce, dostarcza szkołom informacji także o tym, na ile skutecznie realizują zadania stawiane im przez podstawę programową w obszarze celów kształcenia ogólnego w szkole podstawowej oraz w obszarze rozwijania umiejętności kluczowych.

W roku 2011 w badaniu wzięło udział prawie 9800 szkół oraz ok. 285 000 trzecioklasistów. Należy więc uznać, że jego wyniki dają bardzo dobre przybliżenie faktycznego stanu edukacji na I etapie kształcenia.

W obrębie edukacji matematycznej badaniami objęto trzy obszary umiejętności: wykonywanie obliczeń, rozwiązywanie zadań tekstowych oraz czytanie tekstu matematycznego. Przyjrzymy się bliżej kilku wykorzystanym zadaniom.

[28] Por. www.obut.edu.pl; www.trzecioklasiści.edu.pl

Dzielenie liczb[29]

Jednym z przykładów sprawdzających umiejętności rachunkowe trzecioklasistów w badaniu OBUT 2011, czy raczej ich *zaradność arytmetyczną*, czyli umiejętność sprytnego znalezienia wyniku, było dzielenie liczby dwucyfrowej przez dwucyfrową:

88 : 22 **84 : 14**

Ponieważ przygotowano dwie wersje testu matematycznego, więc każdy uczeń wykonywał jedno z tych obliczeń.

Zadanie to spotkało się z bardzo żywą reakcją nauczycieli i rodziców – znaczna ich część była zdania, że jednoznacznie wykracza ono poza zapisy podstawy programowej. Na ogół było to uzasadniane tym, że algorytm pisemnego dzielenia przez liczby dwucyfrowe znajduje się w podstawie dla II etapu kształcenia. Zamiast na faktycznej umiejętności dzielenia skupili oni swoją uwagę na jednym z narzędzi, które temu celowi, czyli znalezieniu ilorazu, służą.

Jest to dobra ilustracja tego, jak postrzegana jest podstawa przez część osób zainteresowanych edukacją – skupiają się oni na liście treści, pomijając zupełnie nadrzędne cele, których osiągnięcie, treści te mają umożliwić. Warto pamiętać, że cele te, np.:

- *dochodzenie do rozumienia, a nie tylko do pamięciowego opanowania przekazywanych treści*
- *rozwijanie zdolności myślenia analitycznego i syntetycznego*
- *rozwiązywanie problemów w sposób twórczy*

w jawny sposób są także wymienione w tym dokumencie[30].

Zadaniem przytoczonych przykładów było sprawdzenie, na ile uczniowie potrafią zastosować w takiej, prawdopodobnie nowej dla siebie sytuacji swoją wiedzę o dzieleniu, czyli: ***czy i na ile rozumieją, na czym to działanie w ogóle polega***.

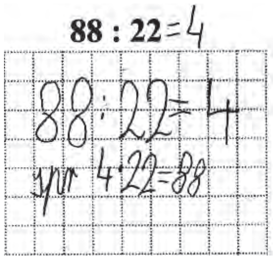
Zobaczmy, w jaki sposób trzecioklasiści mogli znaleźć te dwa ilorazy, nie posługując się – przywołanym przez oponentów – algorytmem pisemnego dzielenia:

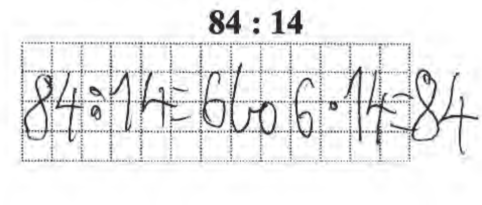
- mogli wykorzystać związki dzielenia z mnożeniem, czyli poszukać „pasującego" iloczynu – jest to najbardziej typowa strategia, np. dla dzielenia wykonywanego w pamięci:

---

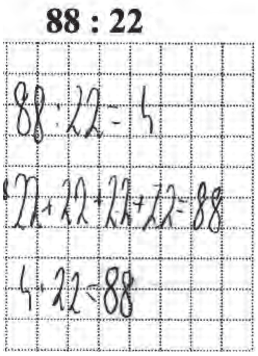
[29] Na podstawie: Pregler A., Wiatrak E. (red.), *Raport z badań OBUT 2011*. CKE, Warszawa 2011, s. 32-45; Dąbrowski M., *Trudne słowo DZIELENIE*, www.trzecioklasista.edu.pl

[30] Por. *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych i gimnazjów z 23 sierpnia 2007 r.*, Dz. U. Nr 157, poz. 1102 z dnia 31 sierpnia 2007 r. oraz *Podstawa programowa kształcenia ogólnego dla szkół podstawowych i gimnazjów z 23 grudnia 2008 r.*, Dz. U. Nr 4, poz. 17 z dnia 15 stycznia 2009 r.

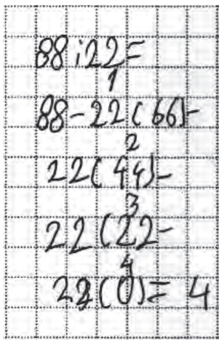


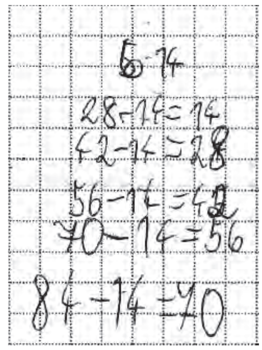


• mogli wykorzystać dodawanie:

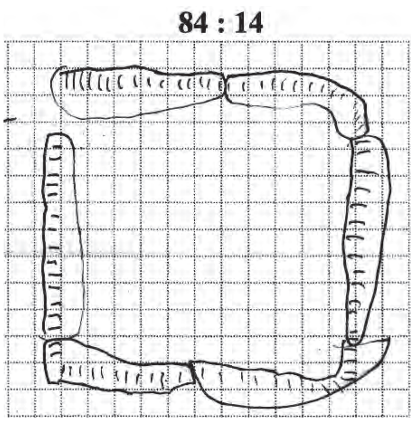


• mogli posłużyć się także odejmowaniem – tak jak o mnożeniu mówi się, że jest wielokrotnym dodawaniem, tak dzielenie jest wielokrotnym odejmowaniem tej samej liczby, czyli dzielnika:





• mogli, wreszcie, sięgnąć po rysunek i np. strategię dzielenia przez mieszczenie:



A jak nasi trzecioklasiści poradzili sobie z tymi przykładami?

Ich wyniki, z uwzględnieniem lokalizacji szkół, zebrano w tabeli:

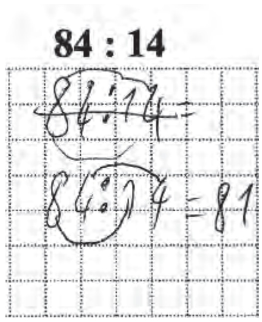
	Procent poprawnych obliczeń				
szkoły	razem	wieś	miasto do 10 tys.	miasto 10-100 tys.	miasto od 100 tys.
88 : 22	43,1	41,5	41,5	43,9	45,3
84 : 14	39,4	38,0	37,5	40,0	41,9
łącznie	41,3	39,8	39,5	42,0	43,6

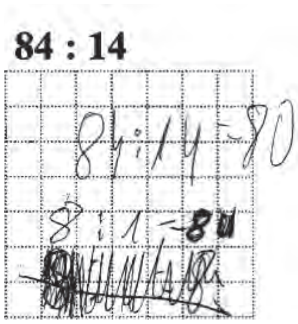
Tabela 8. Dzielenie liczb dwucyfrowych – procent poprawnych obliczeń w badaniach OBUT 2011 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Mniej więcej 40% uczniów kończących I etap kształcenia potrafiło podać poprawny wynik swojego dzielenia – nieco poniżej 40% w szkołach wiejskich oraz w szkołach z małych miast, trochę powyżej w szkołach z miast średnich i dużych. Jest to bardzo wyraźny sygnał, że **nasi trzecioklasiści, dzielenia – w jego zapisie symbolicznym – w większości nie rozumieją**. Zwraca także uwagę wysoki odsetek dzieci, które w ogóle nie podjęły próby wykonania tych działań – 7,8% dla 88 : 22 oraz 13,4% dla 84 : 14.

Przyjrzyjmy się, jakiego typu błędy pojawiają się przy okazji takiego dzielenia, z jakich metod postępowania korzystają uczniowie.

Metoda 1:



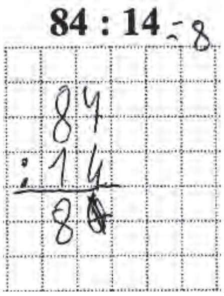


Osiem przez jeden to osiem, cztery przez cztery – jeden, czyli 81 (albo 80, jeśli uczeń przy okazji zrobi popularny błąd rachunkowy). I to niezależnie od wybranej notacji – w słupku czy inaczej.

Podobnie dla drugiego działania:

Jak mogła się narodzić taka strategia postępowania?

Może być ona efektem mniej lub bardziej przypadkowego „żonglowania" symbolami:



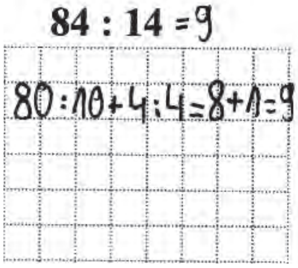
Ale może mieć także bardziej „świadome" pochodzenie.

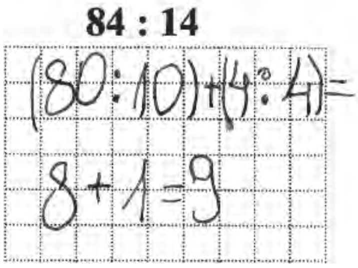
Autorzy niektórych pakietów edukacyjnych wykorzystują, np. przy wprowadzaniu dzielenia pisemnego – które w wersji „przez jednocyfrową" jest wciąż obecne w klasie trzeciej – przykłady typu 88 : 4, czy 646 : 2, w których każda cyfra dzielnej dzieli się przez jednocyfrowy dzielnik. Może uczniowie starali się otrzymać wynik swojego dzielenia, dopasowując znaną procedurę postępowania do nowej sytuacji: *tam dzieliliśmy każdą cyfrę dzielnej przez dzielnik, to może teraz trzeba podzielić kolejne cyfry dzielnej przez odpowiednie kawałki dzielnika.* To wyjaśniałoby obecność i postać niektórych z przytoczonych wyżej „słupków".

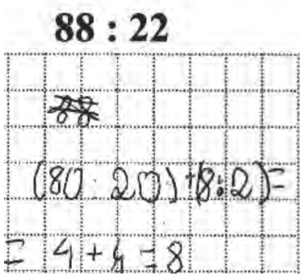
A może ich rozumowanie przebiegało w prostszy sposób, bez szukania analogii z poznanym algorytmem: *jak dzielimy liczbę 84 przez same jedności, np. przez 2, to dzielimy 8 przez 2 i 4 przez 2, to może teraz trzeba dziesiątki podzielić przez dziesiątki, a jedności przez jedności i będzie dobrze.*

W badaniu OBUT 2011 ze strategii tej skorzystało 9,8% trzecioklasistów wykonujących dzielenie 84 : 14 oraz aż 36,1% spośród tych, którzy szukali wyniku działania 88 : 44.

Metoda 2:



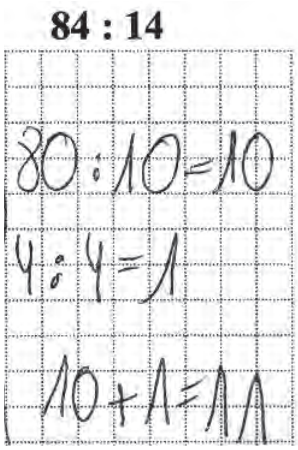


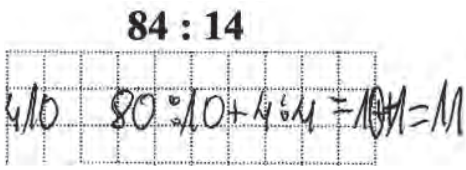


Zaczyna się podobnie jak poprzednio: dziesiątki przez dziesiątki, jedności przez jedności, ale na tym uczniowie nie poprzestają – pojawia się kolejna operacja: uzyskane wyniki są dodawane.

Warto przyjrzeć się uważniej tym trzem zapisom powyżej. Wizualnie są one podobne do zapisów dotyczących, np. rozdzielności mnożenia względem dodawania – może taki właśnie jest rodowód tej metody. Może jest ona efektem „powzorowania się" właśnie na zapisie rozdzielności, ale bez odwołania się do sensu tej własności działań.

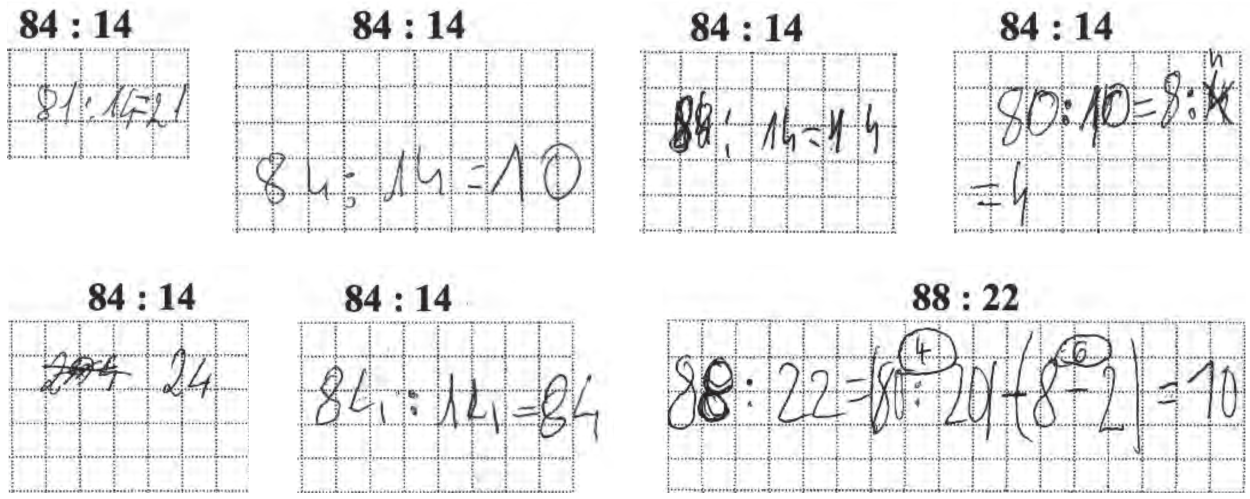
Niekiedy, w trakcie wykonywanych obliczeń pojawiają się błędy rachunkowe, które rozszerzają skalę możliwych do uzyskania w ten sposób wyników:





Ta metoda była mniej popularna – zastosowało ją 7,5% trzecioklasistów wykonujących obliczenie 84 : 14 oraz 2,0% uczniów dzielących 88 przez 22.

Zwłaszcza dla dzielenia 84 : 14 różnorodność dziecięcych pomysłów i rozpiętość wyników była duża:



Uderza to, że ci uczniowie, którzy nie potrafili „od ręki” znaleźć poprawnego wyniku swojego dzielenia w ogromnej większości sięgali po różnorodne manipulacje symbolami, skazując się w ten sposób, jak pokazują przykłady, na porażkę.

Wydaje się, że w świadomości wielu trzecioklasistów, dzielenie, to właśnie nie do końca zrozumiała żonglerka symbolami. Biorąc pod uwagę powszechność tego zjawiska[31], należy uznać, że jest ono przede wszystkim efektem tego, w jaki sposób uczymy dzieci zarówno samego dzielenia, jak i posługiwania się językiem symbolicznym.

Warto jeszcze odnotować, że żadna z osób wypowiadających się na temat wykorzystywanych w badaniu OBUT 2011 przykładów dzielenia nie zwróciła uwagi na to, że 84 : 14 to tyle samo, co 42 : 7 – zatem mamy do czynienia, w praktyce, z ilorazem „z zakresu tabliczki mnożenia”.

[31] Por. także: Dąbrowski M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej*, cz. I: *Raport z badań ilościowych*. CKE, Warszawa 2007, s. 74-77; Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008*. CKE, Warszawa 2009, s. 94-100.

Rozwiązywanie zadań tekstowych[32]

W badaniu OBUT 2011 wiele miejsca poświęcono umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych. W testach zamieszczono zadania w wersji zamkniętej, z czterema odpowiedziami do wyboru. Dystraktory[33] do nich zostały zbudowane na podstawie rozwiązań uczniów zebranych dzięki wcześniejszemu wykorzystaniu tych samych zadań w wersji otwartej podczas badań prowadzonych w projekcie *Badanie podstawowych umiejętności uczniów trzecich klas szkoły podstawowej.* Dzięki temu, można z dużym prawdopodobieństwem określić, w jaki sposób rozumowali ci uczniowie, którzy zaznaczali poszczególne odpowiedzi.

Przyjrzymy się bliżej pięciu z wykorzystanych w badaniu OBUT zadań.

Pierwsze z nich to typowe zadanie złożone na porównywanie różnicowe, które bliżej opisywaliśmy, w wersji otwartej, w poprzednim rozdziale raportu[34]:

> W kinie są dwie sale. W pierwszej są 122 miejsca, a w drugiej o 35 miejsc więcej. Ile łącznie miejsc jest w tym kinie?
>
> A. 157
>
> B. 314
>
> C. 279
>
> D. 87

Zobaczmy, jakie odpowiedzi wybierali uczniowie w tym zadaniu:

Odpowiedź	Procent wyborów				
	razem	wieś	miasto do 10 tys.	miasto 10-100 tys.	miasto od 100 tys.
A. 157	56,1	58,3	58,7	55,5	52,1
B. 314	1,5	1,6	1,6	1,4	1,4
C. 279	37,5	35,0	34,3	38,3	42,0
D. 87	4,3	4,6	4,7	4,2	3,9
brak rozwiązania	0,6	0,5	0,6	0,6	0,6

Tabela 9. Zadanie tekstowe dotyczące porównywania różnicowego – procentowy rozkład odpowiedzi w badaniach OBUT 2011 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

---

32 Na podstawie: Pregler A., Wiatrak E. (red.), *Raport z badań OBUT 2011*. CKE, Warszawa 2011, s. 6-31.

33 Czyli błędne odpowiedzi.

34 Zadanie E, por. s. 34.

Zadanie rozwiązało poprawnie jedynie 37,5% badanych uczniów.

Uderza bardzo wysoki poziom wyboru odpowiedzi 157, która powstaje w wyniku dodania obu liczb podanych cyframi w treści zadania i odpowiada najbardziej popularnemu błędowi pojawiającemu się przy rozwiązywaniu otwartej wersji tego zadania. Zaznaczyło ją 56,1% trzecioklasistów, czyli zdecydowanie więcej niż połowa. Na dodatek, odpowiedź 87, która jest różnicą liczb z treści wybrało 4,3%.

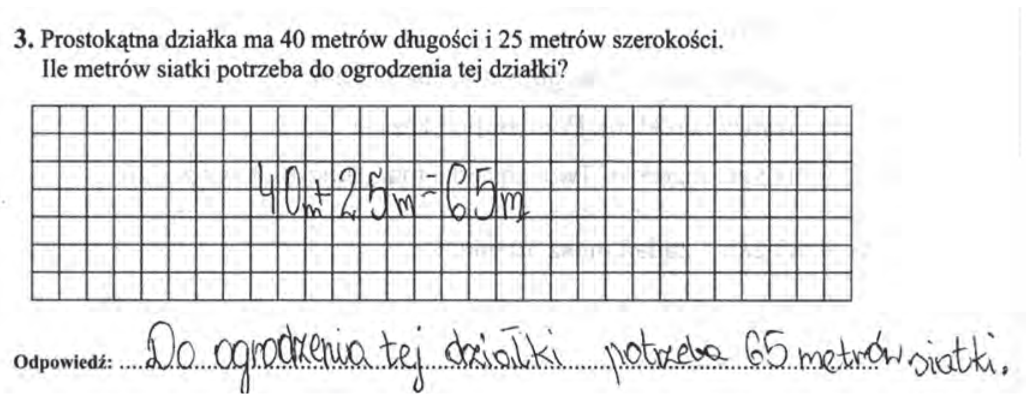
Zatem, ponad 60% dzieci, rozwiązując to zadanie, prawdopodobnie ograniczyło się do wyszukania w treści zadania liczb i dodania ich albo odjęcia – tylko te dwa działania były do wyboru ze względu na postać obu liczb.

Kolejne z prezentowanych zadań miało na celu zbadanie, na ile trzecioklasiści rozumieją pojęcie obwodu:

Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów.
Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?

A. 105
B. 65
C. 15
D. 130

Najczęstszy błąd występujący podczas rozwiązywania tego zadania jako zadania otwartego polega na dodaniu liczb podanych w treści (odpowiedź B):


3. **Prostokątna działka ma 40 metrów długości i 25 metrów szerokości.**
Ile metrów siatki potrzeba do ogrodzenia tej działki?

40m + 25m = 65m

Odpowiedź: Do ogrodzenia tej działki potrzeba 65 metrów siatki.

Warto zwrócić uwagę na odpowiedź sformułowaną przez ucznia w podanym przykładzie – mowa w niej o ogrodzeniu działki, a nie np. sumie długości sąsiednich jej boków, co sugeruje, że autor tego rozwiązania był przekonany, że wykonał dokładnie to, czego od niego oczekiwano.

W przypadku zadania zamkniętego dominował ten sam błąd – odpowiedź B wybrało aż 44,6% badanych trzecioklasistów:

Odpowiedź	Procent wyborów				
	razem	wieś	miasto do 10 tys.	miasto 10-100 tys.	miasto od 100 tys.
A. 105	1,9	2,0	1,9	1,7	1,7
B. 65	44,6	45,7	46,7	44,3	42,4
C. 15	2,5	2,8	2,7	2,5	2,1
D. 130	50,5	49,0	48,2	51,1	53,3
brak rozwiązania	0,5	0,4	0,4	0,4	0,5

Tabela 10. Zadanie tekstowe dotyczące obwodu prostokąta – procentowy rozkład odpowiedzi w badaniach OBUT 2011 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Tym razem więc, około 47% dzieci dodało albo odjęło liczby z zadania, zaznaczając otrzymany wynik jako odpowiedź na postawione w zadaniu pytanie. Niewiele więcej, bo jedynie 50,5% rozwiązało to zadanie poprawnie.

Uzupełnieniem zadania o działce było typowe algorytmiczne zadanie sprawdzające znajomość procedury obliczania obwodu prostokąta:

Jaki jest obwód prostokąta o bokach 4 cm i 7 cm?

A. 11 cm

B. 22 cm

C. 15 cm

D. 28 cm

Odpowiedzi w tym zadaniu zostały dobrane podobnie, jak w poprzednim. Odpowiedź A to suma podanych długości boków, D – ich iloczyn, C – suma dłuższego boku i podwojenia krótszego.

Zadanie to wypadło zdecydowanie lepiej od tego o działce – poradziło sobie z nim 71,5% trzecioklasistów. Warto jednak zwrócić uwagę na to, że pomimo jego bardzo typowego charakteru, aż 21,7% dzieci dodało liczby podane w treści, a 4,8% je pomnożyło.

Tym razem więc, 26,5% uczniów, czyli nieco ponad ¼, sięgnęła po ratunek w postaci omawianej strategii.

Odpowiedź	Procent wyborów				
	razem	wieś	miasto do 10 tys.	miasto 10-100 tys.	miasto od 100 tys.
A. 11 cm	21,7	22,7	22,6	21,4	20,2
B. 22 cm	71,5	70,1	70,4	72,0	73,5
C. 15 cm	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3
D. 28 cm	4,8	5,3	5,0	4,5	4,2
brak rozwiązania	0,8	0,7	0,8	0,7	0,8

Tabela 11. Zadanie algorytmiczne dotyczące obwodu prostokąta – procentowy rozkład odpowiedzi w badaniach OBUT 2011 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Kolejnym wykorzystanym zadaniem tekstowym było zadanie proste z nadmiarem danych:

Adam narysował szlaczek złożony z kółek, trójkątów i kwadratów. Kółek narysował 50. Trójkątów było o 7 więcej, a kwadratów o 14 mniej niż kółek.

A. 43
B. 71
C. 57
D. 36

Gdybyśmy usunęli z tego zadania zbędną informację o trójkątach, otrzymalibyśmy bardzo typowe zadanie proste na porównywanie różnicowe.

Wykorzystane dystraktory odpowiadają najbardziej popularnym błędom pojawiającym się dla zadania otwartego:

A. 43 = 50 + 7 – 14

B. 71 = 50 + 7 + 14

C. 57 = 50 + 7.

Zadanie to rozwiązało poprawnie 60,7% uczniów biorących udział w badaniu.

Ponad ¼ trzecioklasistów (27,3%) rozwiązując to zadanie mogła rozumować w taki sposób: **50, 7 więcej, zatem 50 + 7 = 57; 14 mniej, czyli 57 – 14 = 43** – efekt: odpowiedź A.

Odpowiedź	Procent wyborów				
	razem	wieś	miasto do 10 tys.	miasto 10-100 tys.	miasto od 100 tys.
A. 43	27,3	29,0	28,5	26,9	24,6
B. 71	3,8	4,6	4,2	3,4	3,1
C. 57	6,8	7,5	7,4	6,5	5,7
D. 36	60,7	57,6	58,6	62,0	65,3
brak rozwiązania	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3

Tabela 12. Zadanie tekstowe proste z nadmiarem danych – procentowy rozkład odpowiedzi w badaniach OBUT 2011 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

Łącznie 37,9% uczniów mogło sięgnąć w tym zadaniu po manipulowanie liczbami podanymi w jego treści.

I ostatnie z prezentowanych zadań, dokładnie już omówione wcześniej[35]:

Na drzewie siedziało 30 wróbli. Nagle większość z nich, oprócz 6, odleciała. Ile wróbli zostało na tym drzewie?

A. 5
B. 24
C. 6
D. 36

Jak już wspominaliśmy, jest to przykład zadania z podaną w treści odpowiedzią, którego rozwiązanie nie wymaga wykonania żadnej operacji arytmetycznej. Liczby zostały w nim tak dobrane, że można je dodać (D), odjąć (B) oraz podzielić (A).

Zadanie rozwiązało poprawnie 50,2% trzecioklasistów, czyli nieznacznie więcej niż połowa. Aż 41,9% dzieci wybrała odpowiedź B – ich sposób analizy zadania jest dość oczywisty: **było 30, 6 odleciało, zatem 30 – 6 = 24**. Zdecydowanie rzadziej uczniowie dzielili podane liczby: 4,0% albo je dodawali: 3,3%. Łącznie, **znowu ponad 49% dzieci wykonało jakąś operację na liczbach podanych w treści.**

[35] Por. s. 51-57.

Odpowiedź	Procent wyborów				
	razem	wieś	miasto do 10 tys.	miasto 10-100 tys.	miasto od 100 tys.
A. 5	4,0	4,3	4,0	4,0	3,6
B. 24	41,9	43,6	44,2	41,2	39,0
C. 6	50,2	47,7	47,4	51,3	54,3
D. 36	3,3	3,8	3,8	3,0	2,4
brak rozwiązania	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6

Tabela 13. Zadanie tekstowe z podaną w treści odpowiedzią – procentowy rozkład odpowiedzi w badaniach OBUT 2011 z uwzględnieniem lokalizacji szkoły.

W badaniu OBUT 2011 w przypadku pięciu, przedstawionych wyżej, zadań tekstowych mogła pojawić się strategia polegająca na wybieraniu z treści zadania liczb i dobieraniu do nich, także wykorzystując słowa-klucze, pasującego, zdaniem ucznia, działania. Dlatego też każda klasa biorąca udział w badaniu otrzymywała w swoim matematycznym raporcie zestawienie tego typu sytuacji:

Tabela 3A. Rozwiązywanie zadań tekstowych – ewentualne błędne strategie uczniowskie (por. *Ogólnopolski raport z badań* – OBUT 2011)

Numer ucznia w dzienniku	Imię i nazwisko ucznia (wpisuje nauczyciel)	działka	kino	wróble	szlaczek	prostokąt	Komentarz nauczyciela
M1	numer zadań	3	4	6	7	8	
M2	numer zadań	3	4	7	8	9	
1.		!	!	!		!	
2.		!	!	!	!	!	
3.		!	!				
4.			!				
5.		!	!	!	!		
6.		!	!	!		!	
7.							
8.		!	!	!		!	
9.		!	!	!	!	!	
10.			!				
11.			!	!	!	!	
%	Nasilenie zjawiska	64	91	64	36	55	

Warto zwrócić uwagę na to, że w pokazanym autentycznym(!) zestawieniu dwaj uczniowie (numery 2 i 9) w każdym z pięciu możliwych przypadków wybrali takie odpowiedzi, które mogą sugerować, że zastosowali tę właśnie strategię. Czterej inni zrobili to czterokrotnie. Tylko jeden uczeń (numer 7) ani razy nie wybrał dystraktora, który mógłby to sugerować, a dwaj inni zrobili to tylko przy okazji jednego z zadań.

Poniższy wykres pokazuje, z jakim nasileniem zjawisko to występowało w całej badanej populacji trzecioklasistów:

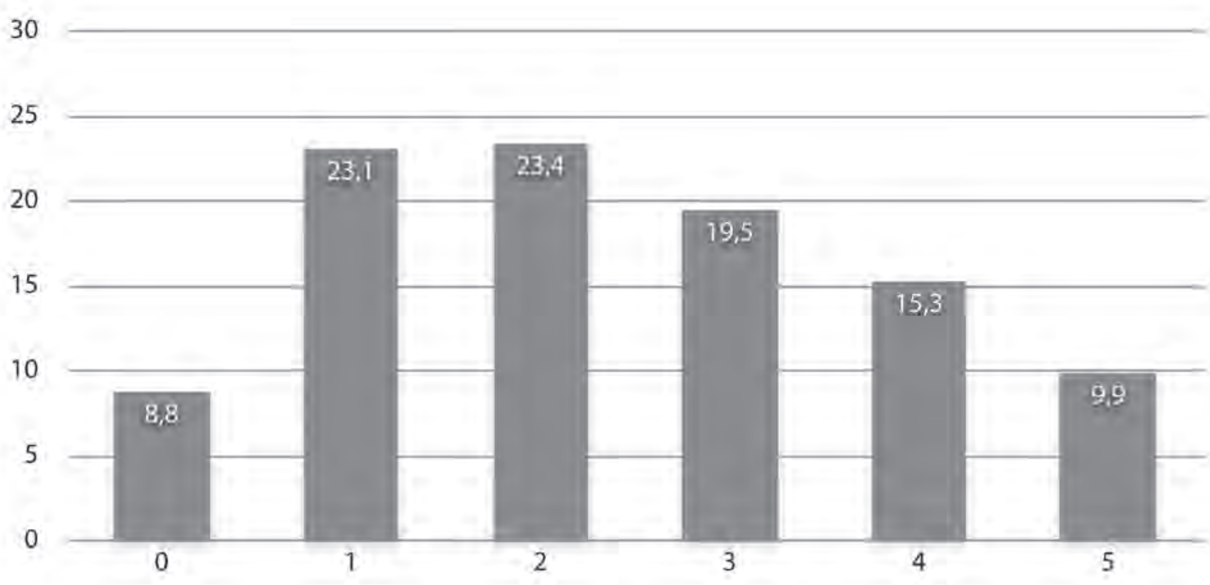


Diagram 13. Rozwiązywanie zadań tekstowych – procentowy rozkład liczby zadań, w których uczniowie biorący udział w badaniach OBUT 2011 mogli zastosować strategie polegające na dopasowywaniu działań do liczb podanych w treści.

Jak widać, trzecioklasiści najczęściej dwukrotnie sięgali po tę strategię, tzn. w przypadku dwóch zadań (spośród pięciu możliwych) prawdopodobnie skupili uwagę na liczbach oraz słowach-kluczach podanych w treści i na ich podstawie dobrali „pasujące” działanie, a jego wynik zaznaczyli jako swoją odpowiedź. Zrobiło tak 23,4% badanych trzecioklasistów.

Mniej więcej co dziesiąty badany uczeń (9,9%) postąpił tak w każdym z pięciu zadań. Nieco mniej, bo 8,8% trzecioklasistów wcale nie skorzystało z tej strategii.

Aż 44,7% trzecioklasistów prawdopodobnie sięgnęło po tę metodę rozwiązywania zadań tekstowych w więcej niż połowie możliwych przypadków. **Może to oznaczać, że dla prawie połowy absolwentów I etapu kształcenia rozwiązywanie zadań tekstowych polega na analizowaniu postaci liczb i słów-kluczy zawartych w treści zadania i dobieraniu do nich odpowiedniego obliczenia, a nie czytaniu ze zrozumieniem treści zadania i poszukiwaniu związków pomiędzy podanymi informacjami.** Jak widać z przytoczonych przykładów zjawisko to wyraźnie nasila się w przypadku zadań nietypowych, o nieznanej wcześniej uczniom strukturze. Choć, być może, jeszcze bardziej zaskakujące jest to, że pojawia się ono – i to wcale nie w marginalny sposób – w przypadku zadań bardzo typowych i dobrze uczniom znanych.

Wydaje się, że strategie stosowane przez część uczniów podczas rozwiązywania zadań tekstowych mogą znacznie odbiegać od naszych oczekiwań.

2.3. O umiejętnościach matematycznych uczniów na podstawie sprawdzianu w klasie szóstej

Anna Pregler

10 kwietnia 2002 r. po raz pierwszy we wszystkich szkołach podstawowych w Polsce przeprowadzono w szóstej klasie sprawdzian – powszechny i obowiązkowy egzamin. Wprowadzono go wraz z egzaminem gimnazjalnym, maturą i egzaminami zawodowymi tworzącymi system egzaminów zewnętrznych, których zasady i tryb przeprowadzania określa *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 21 marca 2001 r. w sprawie warunków i sposobu oceniania, klasyfikowania i promowania uczniów i słuchaczy oraz przeprowadzania egzaminów i sprawdzianów w szkołach publicznych*[36]. Sprawdzian w klasie szóstej ma dostarczyć zobiektywizowanych i porównywalnych w skali całego kraju informacji o wiedzy uczniów kończących II etap edukacji. Dla osiągnięcia tego celu dla wszystkich egzaminów, w tym dla sprawdzianu, opracowano standardy wymagań egzaminacyjnych, zastosowano wystandaryzowane narzędzia – testy, zapewniono obiektywność sytuacji egzaminacyjnej i anonimowość prac uczniów, a sprawdzanie i punktowanie prac uczniowskich według jednolitych kryteriów powierzono specjalnie przeszkolonym egzaminatorom.

Podstawą przeprowadzania sprawdzianu są standardy wymagań egzaminacyjnych ogłoszone w *Rozporządzeniu Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 10 sierpnia 2001 r. w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów*[37].

Standardy te, określające pożądane umiejętności ucznia kończącego szkołę podstawową, opracowane zostały w oparciu o obowiązującą podstawę programową kształcenia ogólnego dla pierwszego i drugiego etapu edukacyjnego. Nadano im charakter ponadprzedmiotowy i zgrupowano w pięć obszarów:

- czytanie
- pisanie
- rozumowanie
- korzystanie z informacji
- wykorzystywanie wiedzy w praktyce.

W obszarze ***czytanie*** znajdują się zarówno umiejętności rozwijane przede wszystkim na lekcjach języka polskiego, historii, plastyki i muzyki, m.in. odczytywania różnorodnych tekstów kultury, określania funkcji elementów tych tekstów, ale też umiejętności kształtowane w edukacji matematycznej, jak rozumienie symboli w instrukcjach i opisach diagramów, odczytywanie danych z tabeli, wykresu i diagramu.

Podobnie, obszar ***pisanie*** obejmuje umiejętność posługiwania się różnymi formami wypowiedzi (np. opowiadanie, opis, instrukcja) ze świadomością celu, z poprawnością kompozycyjną, językową, ortograficzną i gramatyczną oraz dbałością o układ graficzny, czytelność i estetykę; ale pojawia się

[36] Dz. U. nr 29, poz. 323, z późn. zm.

[37] Dz. U. nr 92, poz. 1020, z późn. zm.

tutaj także umiejętność przedstawiania danych, m.in. na osi liczbowej, w układzie współrzędnych czy w postaci diagramu słupkowego.

W obszarze ***rozumowanie*** zgromadzone są bardzo różnorodne umiejętności rozwijane głównie na lekcjach historii i przyrody, m.in. posługiwania się kategoriami czasu i przestrzeni w celu porządkowania wydarzeń; przedstawiania przyczyn i skutków wydarzeń i zjawisk; określania znaczenia osiągnięć człowieka dla rozwoju cywilizacji oraz kształtowane na matematyce, m.in. opisywania sytuacji przedstawionej w zadaniu za pomocą wyrażeń arytmetycznych i algebraicznych, równania, diagramu słupkowego; rozpoznawania charakterystycznych cech i własności liczb i figur; ustalania sposobu rozwiązania zadania oraz prezentacji tego rozwiązania; analizowania otrzymanych wyników i oceny ich sensowności.

Obszar ***korzystanie z informacji*** opisuje dwie umiejętności – wskazywania i posługiwania się źródłami informacji oraz analizowania oferty mediów.

Podobnie jak w rozumowaniu, w ostatnim obszarze: ***wykorzystywanie wiedzy w praktyce*** znalazły się bardzo zróżnicowane umiejętności z zakresu edukacji przyrodniczej i technicznej, m.in. wykorzystywania w sytuacjach praktycznych własności zjawisk, przemian, obiektów przyrodniczych, elementów środowiska; znajomości i rozumienia potrzeby stosowania zasad, np. higieny, bezpieczeństwa, zdrowego trybu życia; a obok nich umiejętności matematyczne, m.in. wykonywanie obliczeń dotyczących długości, powierzchni, objętości, wagi, czasu, temperatury i pieniędzy; planowanie i wykonywanie obliczeń za pomocą kalkulatora; wykorzystywanie w sytuacjach praktycznych własności liczb i figur.

Przyjęto także stały plan testu (tabela 14.), zmodyfikowany w roku 2006, który określał sumy liczby punktów (i ich wagi) możliwych do zdobycia za zadania sprawdzające umiejętności z poszczególnych obszarów, przy wynikającym z rozporządzenia założeniu możliwości uzyskania maksymalnie 40 punktów za cały sprawdzian.

Obszar umiejętność	2002 – 2005		Od 2006	
	Liczba punktów	Waga	Liczba punktów	Waga
Czytanie	10	25%	10	25%
Pisanie	12	30%	10	25%
Rozumowanie	8	20%	8	20%
Korzystanie z informacji	2	5%	4	10%
Wykorzystywanie wiedzy w praktyce	8	20%	8	20%

Tabela 14. Plan testu w klasie szóstej.

Interdyscyplinarny charakter sprawdzianu miał zachęcać nauczycieli do międzyprzedmiotowej współpracy w planowaniu i realizacji kształcenia. W tym samym czasie promowano też ideę nauczania blokowego oraz realizacji ścieżek edukacyjnych na zajęciach z różnych przedmiotów lub w trakcie odrębnych modułowych zajęć. Okazało się jednak, że w realiach polskiej szkoły nie udało się zrealizować takiego założenia, a praktyka pokazała, że ponadprzedmiotowy sprawdzian nie spełnia wystarczająco oczekiwań. Informacje o wynikach sprawdzianu, przekazywane uczniom, szkołom, organom prowadzącym i kuratoriom oświaty oraz Ministerstwu Edukacji Narodowej w celu refleksji nad jakością kształcenia nie przystają do przedmiotowego charakteru nauczania na II etapie kształcenia.

Podstawowe umiejętności kształtowane przede wszystkim na lekcjach języka polskiego – ***czytanie* i *pisanie*** – badane są zadaniami skupionymi w dwóch adekwatnych obszarach, za które łącznie można uzyskać do 50% wszystkich punktów za sprawdzian. W dziesięcioletniej praktyce tego egzaminu niewielki procent z tych punktów przypadał na umiejętności rozwijane na innych przedmiotach (matematyce, przyrodzie).

Odmiennie przedstawia się sytuacja z umiejętnościami rozwijanymi na lekcjach matematyki. Większość zadań matematycznych lokowała się w obszarach ***rozumowanie* i *wykorzystywanie wiedzy w praktyce***, co daje maksymalnie do 40% możliwych punktów do zdobycia. Na te same obszary przypadała także większość zadań badających umiejętności rozwijane na lekcjach historii i przyrody, co dodatkowo uszczuplało tę pulę punktów. W efekcie, struktura testu ograniczała możliwość rzetelnego wnioskowania o matematycznych umiejętnościach uczniów.

Dlatego też od roku 2009 sprawdzian konstruowany jest tak, że bada umiejętności: czytania, pisania, korzystania z informacji i umiejętności matematyczne. Również według planów Ministerstwa Edukacji Narodowej sprawdzian od roku 2015 (kiedy podstawą jego przeprowadzania będą zapisy podstawy programowej sformułowanej w języku wymagań dla poszczególnych przedmiotów) będzie składał się z trzech części: język polski, matematyka i język obcy.

Wnioskowanie o poziomie opanowania umiejętności matematycznych, jak wspomniano wcześniej, odbywa się przede wszystkim na podstawie informacji o rozwiązaniach zadań z dwóch obszarów – rozumowanie i wykorzystywanie wiedzy w praktyce. Porównanie wyników (tabela 15.) uzyskanych w poszczególnych obszarach umiejętności podczas dotychczas przeprowadzonych sprawdzianów pokazuje, że właśnie wyniki uzyskiwane w tych dwóch obszarach najczęściej należą do najniższych.

Obszar umiejętności	Procent punktów możliwych do uzyskania									
	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Czytanie	79,0	78,6	81,9	82,0	76,6	80,0	75,0	76,2	73,6	82,8
Pisanie	78,5	74,0	68,7	66,0	68,5	64,6	57,0	49,9	53,2	54,6
Rozumowanie	73,5	68,0	46,0	72,8	55,6	60,9	69,0	47,3	65,4	66,0
Korzystanie z informacji	85,0	87,0	74,5	74,4	60,5	66,1	61,0	61,0	59,3	57,8
Wykorzystywanie wiedzy w praktyce	57,4	58,4	49,4	73,7	49,1	57,2	57,0	47,6	53,4	49,1

Tabela 15. Wyniki sprawdzianów z lat 2002-2011 w badanych obszarach umiejętności. Szarym tłem wyróżniono dwa najniższe wyniki w każdym roku.

Bardziej wnikliwa analiza zadań, którymi sprawdzano umiejętności rozumowania i wykorzystywania wiedzy w praktyce, pokazuje, że wnioski są jeszcze bardziej pesymistyczne. Znajduje to odzwierciedlenie w omówieniach wyników kolejnych sprawdzianów przedstawianych w raportach opracowywanych przez Centralną Komisję Egzaminacyjną[38].

I tak w raporcie z 2002 r. czytamy:

Osiągnięcia w rozumowaniu należy uznać za zadowalające. W tym obszarze na poziomie niskim została opanowana matematyczna umiejętność odnoszenia wyników obliczeń do warunków zadania.

Osiągnięcia w wykorzystywaniu wiedzy w praktyce należy uznać za niskie. Na taki wynik szczególnie wpływa niski poziom osiągnięć matematycznych w zakresie umiejętności wykonywania praktycznych obliczeń i szacowania.

Trzy zadania z tego sprawdzianu miały poziom wykonania poniżej 50% i wszystkie sprawdzały umiejętności matematyczne zapisane w obszarze wykorzystywania wiedzy w praktyce: wykonywanie obliczeń dotyczących czasu (zad. 13.), szacowanie upływu czasu (zad. 14.) oraz wykonywanie obliczeń dotyczących masy (zad. 15.)[39].

13. Zaczęło padać za piętnaście dziewiąta wieczorem i padało do wpół do ósmej rano następnego dnia. Ile czasu padał deszcz?

A. 11 godz. 45 min

B. 10 godz. 15 min

<u>C. 10 godz. 45 min</u>

D. 11 godz. 15 min

[38] Ten i kolejne cytowane raporty CKE na stronie http://www.cke.edu.pl/index.php?option=content&task=view&id=136&Itemid=107

[39] Podkreślono poprawne odpowiedzi

14. Bociany odleciały w:
A. pierwszej połowie września,
B. pierwszej połowie sierpnia,
C. drugiej połowie września,
<u>D. drugiej połowie sierpnia.</u>

16. Jesienią świstak gromadzi pod skórą zapas tłuszczu na zimę, powiększając aż o 2/3 masę swego ciała. Na początku lata świstak ważył 3 kg. Ile kilogramów będzie ważył tuż przed zapadnięciem w sen zimowy?
A. 2
<u>B. 5</u>
C. $4\frac{1}{2}$
D. $3\frac{2}{3}$

Raport w kolejnym, 2003 r., wyszczególniał grupy zadań w obrębie obszarów. W rozumowaniu, w którym ogólny poziom rozwiązania zadań wyniósł 68%, część matematyczna obejmująca umiejętności: *rozpoznawanie własności figur, ustalanie sposobu rozwiązywania zadania, analizowanie wyników obliczeń, argumentowanie* wypadła na poziomie 65,3%. Jedno z zadań (zad. 8.), w którym należało wykorzystać w sytuacji praktycznej własności figur geometrycznych zostało rozwiązane jedynie przez 49% piszących sprawdzian.

8. Pudło po telewizorze ma wysokość 64 cm i podstawę o wymiarach 60 cm i 70 cm. Marek chce je wykorzystać, by zrobić z kartonu okrągłą tarczę do gry „w strzałki". Ze ściany bocznej o największej powierzchni wyciął możliwie największe koło. Jaki jest promień tego koła?
A. 60 cm
<u>B. 32 cm</u>
C. 64 cm
D. 35 cm

W 2004 r. sprawozdanie tak komentowało wyniki sprawdzianu:

Osiągnięcia w Rozumowaniu należy uznać za niskie. Niepokojący jest fakt, że ponad 181 500 (35%) populacji przyszłych gimnazjalistów uzyskało wyniki co najwyżej dwupunktowe, w tym ponad 19,5 tysiąca z nich – wyniki zerowe.

Rozwiązania dwóch zadań sprawiły problem większości uczniów – z pierwszym (zad. 11.), wymagającym zaznaczenia wyrażenia arytmetycznego prowadzącego do obliczenia wskazanej wartości, poradziło sobie tylko 29% zdających, z drugim (zad. 25.), w którym należało zapisać obliczenia świadczące o niedokładności podanych danych jedynie 23%.

Chleb żytni

Masa netto: 500 g
Liczba kromek: 10

Najlepiej spożyć przed 31.01.2004 r.
Wartość energetyczna 100 g chleba: 154 kcal

100 g chleba zawiera przeciętnie:
30,0 g węglowodanów,
5,5 g białka,
1,5 g tłuszczu,
9,0 g błonnika.

11. Które wyrażenie prowadzi do obliczenia wartości energetycznej 1 kromki kupionego chleba?

A. 154 : 100 B. 500 : 10 C. (154 . 5) : 10 D. (154 . 10) : 5

25. W piekarni były sprzedawane tylko całe bochenki chleba. Bochenek waży 0,8 kg. Piekarz powiedział, że sprzedano 250 kg chleba. Zapisz obliczenia świadczące o tym, że piekarz nie podał dokładnej wagi sprzedanego chleba.

I kolejne informacje ze sprawdzianu w roku 2004:

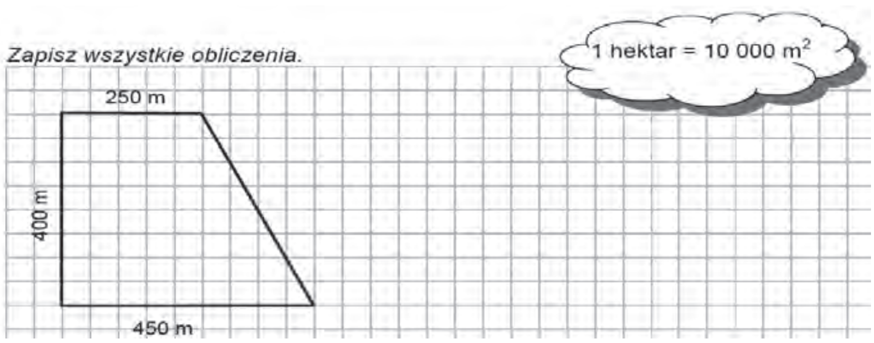
Osiągnięcia w Wykorzystywaniu wiedzy w praktyce trzeba uznać za niskie. Ponad 37% populacji szóstoklasistów (prawie 193 tysiące) umiejętność tę opanowało w stopniu zadowalającym[40] *i powyżej. Niestety, niewiele mniej przyszłych gimnazjalistów (ok. 30% populacji) uzyskało wyniki mieszczące się w przedziale 0 – 2 pkt.*

Rozwiązanie zadania (zad. 6.) dotyczącego obliczania odległości z posłużeniem się skalą przedstawiło 48% szóstoklasistów, a zadania sprawdzającego umiejętności z obu obszarów: ustalenia sposobu obliczenia pola trapezu oraz wielkości plonu i wykonania tych obliczeń, a także posłużenia się jednostkami, tylko 30%.

6. Z młyna do piekarni jest 150 m. Ile to centymetrów na planie w skali 1 : 5000?

A. 3 B. 2 C. 10 D. 7,5

24. Działka ma kształt i wymiary podane na rysunku. Rolnik posiał na tej działce pszenicę. Z każdego hektara zebrał 4,5 tony pszenicy. Ile ton pszenicy zebrał z całej działki?



[40] Ustalonym na 70%

Dlatego też we wnioskach podsumowujących osiągnięcia szóstoklasistów po raz kolejny zwrócono uwagę na umiejętności matematyczne:

Z satysfakcją trzeba stwierdzić, że w bieżącym roku uczniowie osiągnęli wyższe wyniki w czytaniu. Jednak w rozumowaniu i wykorzystywaniu wiedzy w praktyce uczniowie uzyskują wyniki niezadawalające. Taki stan rzeczy powinni wziąć pod uwagę w trakcie planowania i realizacji działań dydaktycznych dyrektorzy i nauczyciele szkół podstawowych.

Zdecydowana poprawa, którą można zauważyć w roku 2005, okazała się pozorną, co wyjaśniono w raporcie:

Odnosząc powyższe wyniki do sprawdzianu 2004, zauważamy, że nastąpił znaczny wzrost w rozumowaniu i wykorzystywaniu wiedzy w praktyce. Należy wyjaśnić go tym, że w tegorocznym teście zadania badające te umiejętności wymagały rozwiązania mniej skomplikowanych problemów i w związku z tym wykonania znacznie prostszych operacji myślowych. Były ponadto bliższe życiowym doświadczeniom uczniów.

Z podsumowania sprawdzonego w roku 2006 poziomu opanowania umiejętności z obszaru *rozumowanie* wynika, że:

Najtrudniejsze okazało się ustalenie sposobu obliczenia pola części prostokąta (45% pkt). Trudne było również określenie liczby osi symetrii figury składającej się z czterech sześciokątów (49% pkt).

Natomiast z obszaru *wykorzystywanie wiedzy w praktyce* uczniom sprawiło kłopot obliczenie różnicy temperatur (zad. 4. o poziomie wykonania 49% pkt.), obliczenie najmniejszej liczby całkowitej spełniającej podany warunek (zad. 19. – 48% pkt.), a przede wszystkim:

Najwięcej kłopotów szóstoklasiści mieli z wykonaniem obliczeń procentowych dotyczących powierzchni (36% pkt) oraz obliczeniem różnicy powierzchni (34% pkt).

4. W zimowy dzień w środku ula było plus 24°C, a na zewnątrz ula minus 17,5°C. W środku ula było wtedy cieplej niż na zewnątrz o:

A. 6,5°C B. 7,5°C C. 40,5°C <u>D. 41,5°C</u>

19. Do pomalowania jednego ula zużywa się 2/3 puszki farby. Ile puszek farby trzeba kupić, żeby pomalować 14 takich uli?

A. 21 B. 14 <u>C. 10</u> D. 9

21. Działka ma kształt prostokąta, którego szerokość wynosi 24 m, a długość jest 2 razy większa. Na kwiaty i warzywa przeznaczono 80% powierzchni działki, a pozostałą część na pasiekę. Ile metrów kwadratowych działki przeznaczono na pasiekę?

Odpowiedź: Na pasiekę przeznaczono …………… m^2 działki.

Analiza zamieszczonych w raporcie ze sprawdzianu w 2007 r. tabel z zestawieniem procentów punktów uzyskanych za poszczególne czynności w obszarach *rozumowanie* i *stosowanie wiedzy w praktyce* pokazuje, że poniżej poziomu koniecznego (50% punktów) opanowane zostały umiejętności ustalania sposobu obliczenia łącznego czasu trwania zdarzeń i wykonania tego obliczenia (zad. 21.), poprawnego posługiwania się jednostkami czasu oraz obliczenia pola prostokąta.

21. Klasa VI miała 5 lekcji, po 45 minut każda. Ile czasu upłynęło od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej, jeśli jedna przerwa była 15-minutowa, a pozostałe 10-minutowe? Obliczony czas wyraź w godzinach.
Odpowiedź: Od rozpoczęcia pierwszej lekcji do końca piątej upłynęło ....

Podobna sytuacja występuje w 2008 r.. Poniżej progu 50% punktów znalazły się: porównywanie różnicy liczb (zad. 15.), wyznaczanie reszty i określanie, ile razy jedna wielkość mieści się w drugiej (zad. 23.).

Kartki z kalendarza

LUTY 2007
1
CZWARTEK
Wschód Słońca 7.17
Zachód słońca 16.22

MARZEC 2007
1
CZWARTEK
Wschód Słońca 6.23
Zachód słońca 17.14

15. Dzień 1 marca był dłuższy niż dzień 1 lutego o:
A. mniej niż godzinę
B. więcej niż godzinę, ale mniej niż o półtorej godziny
<u>C. więcej niż półtorej godziny, ale mniej niż o dwie godziny</u>
D. więcej niż dwie godziny

Cennik do zadania 23

Napój	Cena jednostkowa
sok jabłkowy	0,98 zł / kartonik
woda mineralna	1,60 zł / butelka

23. Podczas wycieczki w upalny dzień dzieci przeznaczyły na napoje 42 zł. Kupiły 16 kartoników soku jabłkowego. Ile najwięcej butelek wody mogły kupić dzieci za resztę pieniędzy?

Od roku 2009 w raportach przedstawiane są wyniki sprawdzania umiejętności matematycznych uczniów poprzez omówienie poziomu rozwiązań poszczególnych zadań. I tu również pojawiły się zadania, z którymi nie poradziła sobie ponad połowa szóstoklasistów.

Były to zadania zamknięte, w których m.in. należało:

– wykonać obliczenia dotyczące czasu z zastosowaniem zależności między godzinami i minutami:

7. W jakim czasie gołąb pokona 120 km, jeśli w ciągu godziny lotu pokonuje 90 km?
A. 1 godz. 20 min   B. 1 godz. 15 min   C. 1 godz. 30 min   D. 1 godz. 33 min

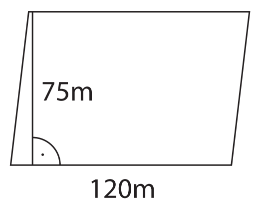
– wyznaczyć skalę planu na podstawie długości odcinka w terenie i na planie:

8. W odległości 600 m od leśniczówki znajduje się paśnik dla saren. Na planie wykonanym przez Kasię odległość ta jest równa 15 cm. W jakiej skali jest ten plan?
A. 1: 4000   B. 1: 40   C. 1: 9000   D. 1: 90

– sprawdzić, który z wyników spełnia podane w zadaniu warunki:

10. Uczestnicy konkursu o zwierzętach otrzymywali: 2 punkty za poprawną odpowiedź, 0 punktów za brak odpowiedzi i –1 punkt za błędną odpowiedź. Uczestnik, który uzyskał 62 punkty, odpowiedział poprawnie na 36 pytań. Na ile pytań odpowiedział błędnie?
A. Na 10.   B. Na 13.   C. Na 26.   D. Na 36.

oraz dwa zadania otwarte:
zadanie 23:



Działka przeznaczona na łąkę ma kształt równoległoboku o wymiarach podanych na rysunku. Paczka nasion trawy wystarcza na obsianie 2500 m^2 działki. Ile co najmniej takich paczek należy kupić, aby obsiać trawą tę działkę?

za rozwiązanie którego maksymalną liczbę punktów uzyskało jedynie 43% uczniów, pomimo że można go było rozwiązać kilkoma sposobami (w raporcie zaprezentowano 5 różnych uczniowskich strategii)

oraz zadanie 24:

Samochód Jana zużywa 6,5 litrów paliwa na 100 km. Jeden litr paliwa kosztuje 4,80 zł. Jan zamierza pojechać samochodem z domu do stadniny oddalonej o 40 km. Oblicz ile będzie kosztowało paliwo na przejazd z domu do stadniny i z powrotem.

z którym poradziło sobie jedynie 13% szóstoklasistów (stosując co najmniej sześć przedstawionych w raporcie różnych metod), natomiast aż 58% uczniów nie uzyskało za to zadanie ani jednego punktu.

Jak przypuszczają autorzy sprawozdania, taka różnica, w i tak źle wypadających zadaniach mogła być spowodowana tym, że pierwsze zadanie było zadaniem typowym, w którym można było sięgnąć po schemat postępowania ćwiczony podczas lekcji, natomiast rozwiązanie drugiego zadania wymagało samodzielnego opracowania strategii uwzględniającej trzy warunki: długość drogi, ilość paliwa i koszt jego zakupu. Stwierdzają także, że szwankuje zarówno rozumowanie matematyczne, jak i sprawność rachunkowa w wykonywaniu działań na ułamkach.

Podobnie w roku 2010 okazało się, że z najtrudniejszym zadaniem polegającym na obliczeniu długości trasy wyścigu poradziło sobie jedynie 24% uczniów, a blisko 67% szóstoklasistów wykazało się zupełną bezradnością wobec tego zadania.

Podczas ostatniego sprawdzianu w 2011 r. tylko 48% piszących go rozwiązało zadanie wymagające obliczenia długości ogrodzenia działki (najczęstszymi błędami było obliczanie pola zamiast obwodu, dwukrotne pomniejszanie długości ogrodzenia o szerokość wejścia na działkę oraz obliczanie jedynie połowy obwodu prostokąta[41]), natomiast jedynie co trzeci uczeń poradził sobie z wieloetapowym zadaniem sprawdzającym umiejętności związane z obliczeniami dotyczącymi pieniędzy.

Jak widać, uczniowie kończący szkołę podstawową mają trudności z rozwiązywaniem zadań złożonych, zwłaszcza nietypowych, czyli nie ćwiczonych podczas lekcji matematyki a wymagających wykazania się umiejętnością tworzenia strategii. Lepiej radzą sobie z rozwiązywaniem prostszych zadań, ale przyglądając się przedstawionym w raportach dokonywanym przez uczniów wyborom błędnych odpowiedzi w zadaniach zamkniętych (w których uczeń wybiera jedną z czterech podanych odpowiedzi) oraz przykładom niepoprawnych rozwiązań zadań otwartych (w których uczeń zapisuje swój sposób rozwiązania zadania), można zauważyć, że **bardzo często szóstoklasiści wykonują działania na podanych w zadaniu liczbach bez związku z treścią zadania**.

Oto kilka zadań zamkniętych ze sprawdzianu z 2008 r.:

16. We wtorek sprzedano 35 butelek wody mineralnej, a w środę 3 razy więcej. Ile łącznie butelek wody sprzedano we wtorek i środę?

A. 105 B. 73 C. 38 <u>D. 140</u>

17. Na straganie wystawiono do sprzedaży 48 plażowych czapek. Przed południem sprzedano połowę, a po południu ⅓ pozostałych. Ile czapek sprzedano po południu?

<u>A. 8</u> B. 16 C. 24 D. 32

W zadaniu 16. najczęściej wybieraną błędną odpowiedzią była odpowiedź A, czyli iloczyn liczb podanych w treści. Podobnie w zadaniu 17. – odpowiedź B, więc znowu iloczyn danych.

[41] Wydaje się, że przyczyna tych błędów może być zupełnie inna, por. komentarz na s. 65-67.

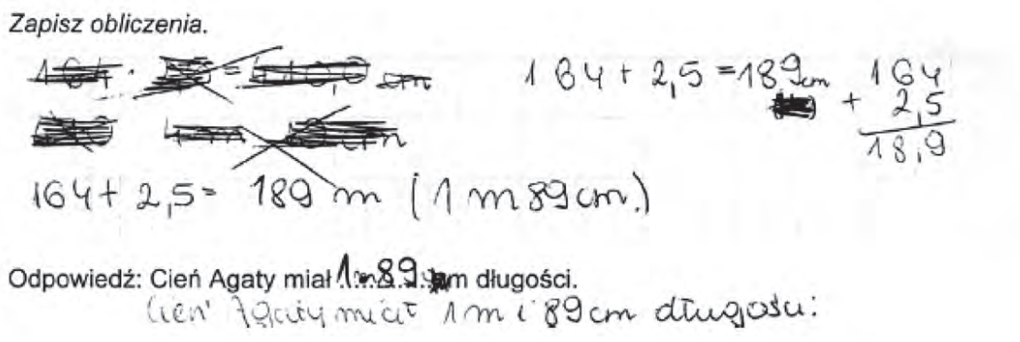
Ta sama sytuacja powtarza się w kolejnym zadaniu – uczniowie najczęściej wskazywali odpowiedź B, czyli iloczyn 2,50 zł i 3,5 godziny:

18. Wypożyczenie kajaka na pół godziny kosztuje 2,50 zł. Ile złotych trzeba zapłacić za wypożyczenie kajaka na 3,5 godziny?			
A. 7,50	B. 8,75	C. 10	<u>D. 17,50</u>

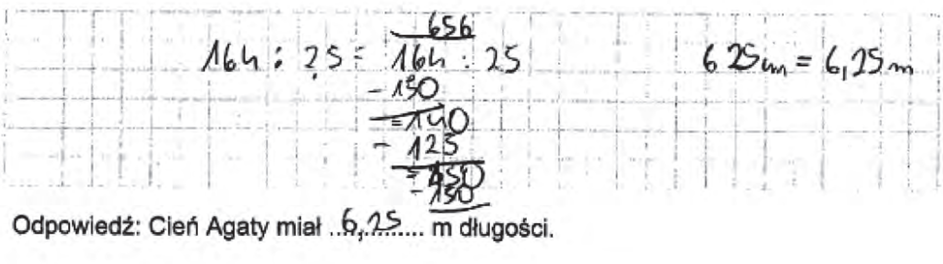
W zadaniu otwartym:

22. W pewnym momencie cień Agaty był 2,5 razy dłuższy niż jej wysokość. Jaką długość miał jej cień, jeśli Agata ma 164 cm wzrostu? Długość cienia wyraź w metrach.
Zapisz obliczenia.
Odpowiedź: Cień Agaty miał …………… m długości.

najczęściej występującym błędem w doborze metody rozwiązania zadania było wykonanie niezwiązanych z treścią zadania działań na dwóch występujących w nim liczbach, np.


Zapisz obliczenia.
164 + 2,5 = 189 cm
164 + 2,5 = 18,9
164 + 2,5 = 189 m (1 m 89 cm)
Odpowiedź: Cień Agaty miał 1 m 89 cm długości.
cień Agaty miał 1 m i 89 cm długości.

albo


164 : 2,5 = 164 : 25 = 656
625 cm = 6,25 m
Odpowiedź: Cień Agaty miał 6,25 m długości.

Trudność uczniów z rozwiązywaniem zadań zarówno prostych, jak i złożonych może mieć związek z niepokojącym zjawiskiem, którym jest niczym nieuzasadnione i bezrefleksyjnie przekazywane innym przekonanie wielu osób, że podczas sprawdzianu uczeń może zdobyć punkty za rozwiązanie zadania tylko jedną, wskazaną w schemacie punktowania metodą. Dowodzi to, że powtarzające je osoby nie zadały sobie trudu zapoznania się z kryteriami oceniania zadań matematycznych, w których zawsze znajduje się zapis mówiący, że:

- *Jeżeli uczeń rozwiązał zadanie inną metodą niż przedstawiona w schemacie punktowania, należy określić czynności równoważne do czynności wymienionych w schemacie.*
- *Za każde poprawne rozwiązanie zadania uczeń otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*

oraz sprawozdaniami ze sprawdzianów, w których przedstawiane są, wypunktowane na maksymalną liczbę punktów różne zastosowane przez uczniów strategie rozwiązania zadania.

Na przykład dla przytoczonego wcześniej zadania ze sprawdzianu w roku 2009, w którym należało obliczyć liczbę paczek nasion trawy potrzebniej do obsiania działki, w sprawozdaniu podano następujące przykłady uczniowskich rozwiązań:

Rozwiązując to zadanie, uczeń powinien obliczyć pole figury i przeanalizować otrzymany wynik pod kątem ustalenia liczby spełniającej warunki zadania. Na ogół uczniowie do obliczenia pola figury stosowali wzór na pole równoległoboku. Po obliczeniu powierzchni działki, przyjmowali różne strategie prowadzące do wyznaczenia liczby paczek nasion trawy niezbędnej do obsiania tej działki, a do wykonania obliczeń – rachunek pamięciowy lub algorytmy działań pisemnych. Oto przykładowe typowe rozwiązania:

Przykład 1.

P = a · h
P = 120 · 75 = 9000 m²
9000 : 2500 = 3 r 1500

120
x 75
600
840
9000

Odpowiedź: Należy kupić co najmniej 4 paczki nasion trawy.

Przykład 2.

120
x 75
600
840
9000

3,6
9000 : 2500 = 3,6
7500
15000
15000
0

Odpowiedź: Należy kupić co najmniej 4 paczki nasion trawy.

W niektórych rozwiązaniach uczniowie do wyznaczenia liczby paczek stosowali szacowanie lub przyjmowali strategię *prób i poprawek*. Oto przykłady takich rozwiązań:

Przykład 3.

120
x 75
600
840
9000

2500
x 3
7500 – za mało

2500
x 4
10000 – wystarczy

Odpowiedź: Należy kupić co najmniej 4 paczki nasion trawy.

Autor rozwiązania z przykładu 3. stosuje rachunek pisemny i strategię „prób i poprawek". Najpierw ustala on, że być może szukaną liczbą jest 3, oblicza powierzchnię, jaką można obsiać tą ilością trawy, ocenia, że to za mało, a następnie podobne rozumowanie przeprowadza dla 4 paczek.

Z kolei autor rozwiązania z przykładu 4. oblicza kolejno, jaką powierzchnię można obsiać 1, 2, 3 i 4 paczkami nasion trawy i wszystkie obliczenia wykonuje w pamięci.

Przykład 4.
$P = 120 \cdot 75 = 9000\ m^2$
1 paczka $2500\ m^2$
2 paczki $5000\ m^2$
3 paczki $7500\ m^2$
4 paczki $10000\ m^2$
$P_{łąki} = 9000\ m^2$
4 paczki $= 10000\ m^2$
Odpowiedź: Należy kupić co najmniej 4 paczki nasion trawy.

W przykładzie 5. widzimy tylko szacowanie. Autor tego rozwiązania ustalił w pamięci, że liczbą spełniająca warunki zadania jest 4 i sprawdził, czy na pewno powierzchnia, którą można obsiać tą ilością trawy, jest większa od powierzchni działki.

Przykład 5.
$P = a \cdot h$
$P = 120 \cdot 75 = 9000\ m^2$
$2500 \cdot 4 = 10000\ m^2$
$10000\ m^2 > 9000\ m^2$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \underline{x\ 75} \\ 600 \\ \underline{849} \\ 9000 \end{array}$$

Odpowiedź: Należy kupić co najmniej 4 paczki nasion trawy.

Zdarzały się rozwiązania, w których do obliczenia powierzchni działki uczniowie stosowali wzór na pole trapezu i zapisywali rozwiązanie następująco: $P = \frac{(120+120)}{2} \cdot 75 = 9000$.

Utrzymywanie się wśród nauczycieli, i to nie tylko II etapu edukacji, ale także edukacji wczesnoszkolnej, przekonania o uznawaniu przy ocenianiu rozwiązań zadań tylko jednej metody może mieć (a może nawet już ma) bardzo niepokojące konsekwencje dydaktyczne. Nauczyciele ci będą wdrażać uczniów do schematycznego, algorytmicznego, jedynego słusznego sposobu rozwiązywania zadań typowych, co nie pozwoli na rozwijanie u dzieci myślenia matematycznego, wyposażania ich w sprawności matematyczne potrzebne w sytuacjach życiowych i szkolnych (które bardzo często są sytuacjami nietypowymi, wymagającymi posłużenia się wiedzą i umiejętnościami w nowy sposób) oraz przy rozwiązywaniu problemów (które wymagają myślenia twórczego, nieschematycznego), modelowania matematycznego oraz rozumowania i tworzenia strategii – a przecież takie umiejętności zostały zapisane w podstawie programowej i powinny być także badane podczas sprawdzianów.

2.4. O umiejętnościach matematycznych uczniów na podstawie badań PISA *Elżbieta Jabłońska*

PISA (*The Programme for International Student Assessment*) jest międzynarodowym badaniem porównawczym umiejętności piętnastolatków. Badania prowadzone są w cyklu trzyletnim począwszy od 2000 r.. Odbyły się już ich cztery edycje: 2000, 2003, 2006, 2009. Obecnie przygotowywana jest piąta edycja w roku 2012. W 2000 r. w badaniach uczestniczyły 32 kraje, a w roku 2009 liczba krajów uczestniczących wzrosła do 65. Polska brała udział we wszystkich dotychczasowych edycjach.

Program PISA realizowany z inicjatywy OECD mierząc kompetencje uczniów, sprawdza systemy szkolne i szkoły państw w nim uczestniczących, wraz z obowiązującymi w nich programami. Analizuje, w jakie kompetencje mogą one wyposażyć ucznia, aby przygotować go do dorosłego życia.

Badanie odbywa się w trzech dziedzinach ważnych w życiu współczesnego człowieka: czytaniu i interpretacji, matematyce oraz rozumowaniu w naukach przyrodniczych (*Reading, Mathematics* i *Science*). Za każdym razem inna z tych dziedzin jest wiodąca, chociaż zawsze występują wszystkie trzy, co umożliwia porównywanie wyników. W roku 2003 została jednorazowo wprowadzona dodatkowa domena rozwiązywanie problemów *(Problem Solving)* łącząca elementy trzech podstawowych obszarów i odbiegająca od podziału na typowe przedmioty szkolne. Niezmienność założeń i powtarzalność niektórych zadań pozwalają śledzić zmiany i tendencje w opanowaniu umiejętności w badanych dziedzinach, co z kolei umożliwia państwom uczestniczącym w badaniach dokonywanie ewaluacji zmian i reform systemu edukacji. Dziedzina uznana za główną w danej edycji badania zajmuje połowę czasu przeznaczonego na rozwiązywanie zadań sprawdzających kompetencje uczniów, pozostałe dwie – po jednej czwartej. Uczeń ma łącznie dwa razy po 60 minut (z przerwą 10 minut) na rozwiązanie całego zestawu zadań, przy czym dziedziny zadań są przemieszane i uczeń nie wie, do jakiej dziedziny przypisane jest dane zadanie. Ze względu na specyfikę sprawdzanych umiejętności stosowane są przede wszystkim zadania otwarte, których rozwiązanie wymaga sformułowania odpowiedzi. Zadania sprawdzające umiejętności matematyczne różnią się od tych, które pojawiają się na polskich egzaminach gimnazjalnych i które uczniowie najczęściej rozwiązują w szkole. Ich celem jest sprawdzenie, jak uczniowie stosują umiejętności matematyczne w rozwiązaniu autentycznych problemów występujących w życiu codziennym, nie jest natomiast ważne jak uczniowie posługują się technikami i algorytmami, na których często opiera się uczenie matematyki w szkole (jak np. techniki rozwiązywania układów równań czy prawa działań na potęgach i pierwiastkach). Rozwiązania są kodowane przez odpowiednio przeszkolone osoby przy użyciu zweryfikowanych schematów punktowania. Kodowanie jest skrupulatnie sprawdzane i monitorowane.

Po zakończeniu badań i podsumowaniu wyników zostają opublikowane raporty z badań oraz opracowania opisujące umiejętności polskich gimnazjalistów. W dostępnych publikacjach zamieszczana jest tylko niewielka liczba zadań użytych do badania, bo aby zapewnić porównywalność wyników w poszczególnych latach część zadań używana jest w kolejnych testach. Autorzy raportów przedstawiają wyniki badań i ujawniające się przy tym tendencje oraz zmiany. Starają się również skomentować i wyjaśnić rezultaty analizy wyników. Biorą pod uwagę zmiany w systemie edukacji, zachodzące zmiany programowe, wpływ egzaminów zewnętrznych, a nawet motywacje uczniów i ich stosunek do nauczycieli, szkoły oraz rówieśników. Te wnioski są możliwe, bo badaniom PISA towarzyszą wypełniane przez uczniów i nauczycieli ankiety.

Skala osiągnięć wyróżnia sześć poziomów umiejętności matematycznych. Poziom 6. określa najwyższe umiejętności: uogólniania i wnioskowania na podstawie samodzielnie zbudowanego modelu matematycznego, wykonywania zaawansowanego rozumowania i precyzyjnego formułowania komunikatu uzasadniającego postępowanie. Kolejne poziomy opisują umiejętności coraz mniej zaawansowane. Umiejętności na poziomie 1. to przede wszystkim rozwiązywanie prostych, typowych zadań zawierających wyraźnie podane dane, wymagających podejmowania tylko rutynowych działań. Każdego ucznia można ustawić na skali umiejętności matematycznych stosując model teoretyczny, w którym wynik ucznia ustalany jest za pomocą odsetka rozwiązanych poprawnie przez niego zadań oraz relatywnej trudności poszczególnych z tych zadań. Każdy uczeń ma przypisany współczynnik wagowy określający jego reprezentację w skali całej populacji piszących. W ten sposób zostaje określony wynik krajowy. Skala została tak skalibrowana by średni wynik krajów członkowskich OECD wynosił 500 punktów.

Oprócz skali ogólnej stosowane są cztery podskale matematyczne:

- przestrzeń i kształt
- zmiana i związki
- ilości
- niepewność.

Matematyka była dziedziną wiodącą w roku 2003 i będzie nią po raz drugi w roku 2012. Z raportu dotyczącego tego badania dowiadujemy się, że Polska uzyskała wynik na poziomie 490 punktów. Wśród krajów, których wynik nieznacznie tylko odbiegał od Polski znalazły się Niemcy, Słowacja, Norwegia, Luksemburg (powyżej 490) oraz Węgry, Hiszpania, Łotwa i USA (poniżej 490). Możliwe było również porównanie wyników badań PISA 2000 i 2003 w obszarach *przestrzeń i kształt* oraz *zmiana i związki*, ponieważ w badaniu z roku 2000 było dostatecznie dużo zadań z tych obszarów mimo, że matematyka nie była wtedy tematem wiodącym. Z tego porównania wynika, że polscy uczniowie z „pierwszej ćwiartki" (najsłabsi) i średni poprawili swój wynik w tych dwóch obszarach.

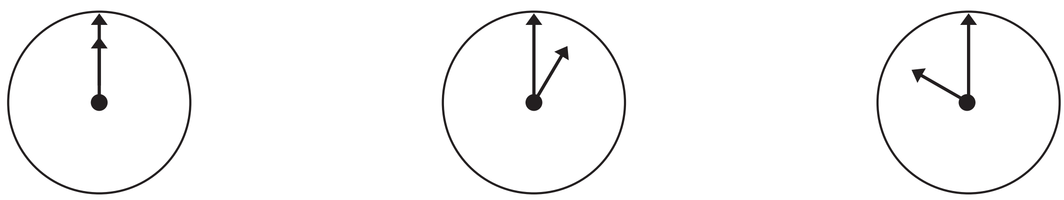
W publikacji „Umiejętności polskich gimnazjalistów"[42] można znaleźć informacje dotyczące wyników badań PISA 2003. W rozdziale poświęconym matematyce, autorzy omawiają mocne i słabe strony polskich uczniów. Przytaczane są umiejętności i opisana jest tematyka zadań, z którymi nasi uczniowie dobrze sobie poradzili. Na podstawie rozwiązań wielu zadań o różnej tematyce autorzy raportu zauważają, że polscy najlepsi uczniowie są w wielu zadaniach słabsi od najlepszych uczniów świata. To niepokojące zjawisko nazywają problemem górnej ćwiartki i twierdzą, że **skoro pojawia się w wielu różnych zadaniach i dotyczy uczniów najlepszych, to ma swoją przyczynę w niedoskonałościach sposobu nauczania**. Większość zadań ocenia się wielostopniowo, przyznając punkty za całkowicie poprawne oraz częściowo poprawne rozwiązanie. Analiza wykresów przedstawiających procent uczniów w każdej grupie (od najsłabszej do najlepszej), którzy rozwiązali zadanie całkowicie poprawnie

[42] Praca zbiorowa pod redakcją Michała Fedorowicza, Wydawnictwo IFiS PAN, Warszawa 2007

i częściowo poprawnie pozwala sformułować stwierdzenie, że w porównaniu ze średnią światową stosunkowo niewielu polskich uczniów potrafi podać kompletne rozwiązanie zadania, natomiast wielu uczniów jest w stanie rozwiązać je częściowo. Przytoczone w publikacji wykresy przedstawiające procent poprawnych odpowiedzi w poszczególnych grupach uczniów (począwszy od najsłabszych, a skończywszy na najlepszych) rozwiązujących trzy zadania: *Rozmowa przez Internet*, *Wyniki testu* i zadanie jeszcze utajnione, w którym uczeń miał przeanalizować podany wykres, a następnie sformułować i przedstawić swoją opinię na zadany temat oraz poprzeć ją argumentami, dowodzą, że istotną trudność sprawia naszym uczniom samodzielne poprowadzenie toku rozumowania: projektowanie rozwiązania, stawianie hipotez, formułowanie własnych opinii i wniosków.

Oto jedno z tych zadań – *Rozmowa przez Internet* (zadanie z badania PISA 2006)[43]:

Mark (z Sydney w Australii) i Hans (z Berlina w Niemczech) często porozumiewają się ze sobą przez Internet, za pomocą tzw. „czatu". Żeby móc tak ze sobą rozmawiać, muszą wchodzić do Internetu w tym samym momencie. Chcąc znaleźć odpowiednią porę na taką rozmowę, Mark doszukał się diagramów pokazujących czas w różnych miastach świata



Greenwich, 24:00 | Berlin 1:00 w nocy | Sydney, 10:00 rano

Pytanie 1.
Która godzina jest w Berlinie, kiedy w Sydney jest 19:00?

Pytanie 2.
Mark i Hans nie mogą „rozmawiać" w godzinach 9:00-16.30 czasu lokalnego, ponieważ są wtedy w szkole. Nie mogą też łączyć się między 23.00 a 7.00 rano czasu lokalnego, bo w tych godzinach powinni spać. Kiedy Mark i Hans mogą porozmawiać przez Internet? Wpisz do tabeli czasy lokalne.

Miasto	Czas
Sydney	
Berlin	

Według autorów tego zadania dotyczy ono umiejętności matematyzacji sytuacji praktycznej z użyciem przedziałów czasowych i jej wykorzystania do rozwiązania problemu.

Z rozkładu wyników tego zadania widać, że średnie wyniki polskich uczniów w porównaniu ze średnimi wynikami uczniów OECD w grupach VIII, IX i X (uczniowie najlepsi) są wyraźnie gorsze.

43 *Op. cit.* s. 36

Autorzy przytaczanej publikacji w ten sposób opisują podstawową słabość polskich uczniów: *Polska młodzież, niezależnie od działu matematyki, gorzej radzi sobie z zadaniami wymagającymi abstrakcyjnego myślenia: analizy lub uogólniania*. Znaczy to, że polscy gimnazjaliści z tego typu zadaniami radzą sobie gorzej niż przeciętny uczeń świata. Przykłady zadań świadczące o tej tezie nie są jeszcze ujawnione, a jedynie mogą zostać opisane. Do zwięzłych opisów czterech przykładów wiązek zadań dodane są omówienia, jak polscy uczniowie je rozwiązywali.

Wiązka 1:

W pierwszym zadaniu trzeba było wykonać obliczenia według prostego algorytmu, a następnie uogólnić wynik i odpowiedzieć na kilka pytań. Z tym zadaniem uczniowie polscy poradzili sobie znacznie gorzej niż z drugim zadaniem, w którym należało wykonać obliczenia według dużo bardziej skomplikowanego i dłuższego algorytmu oraz podać wynik.

Wiązka 2:

W dwóch zadaniach z tej wiązki (drugim i trzecim) należało odczytać dane z diagramów i na ich podstawie wykonać obliczenia. Pytanie czwarte wymagało zinterpretowania diagramu i udzielenia odpowiedzi na bardziej ogólne pytania. Z zadaniem drugim i trzecim polscy uczniowie poradzili sobie średnio dobrze, z czwartym znacznie gorzej niż średnia światowa.

Wiązka 3:

W zadaniu pierwszym należało wykonać obliczenia według podanego algorytmu, a w drugim przeanalizować i porównać dwa podane algorytmy. Uczniowie polscy pierwsze zadanie wykonali znakomicie, a w zadaniu drugim mieli większe trudności niż inni uczniowie biorący udział w badaniu.

Wiązka 4:

W pierwszym zadaniu należało obliczyć średnią arytmetyczną, a w drugim ocenić, co z niej wynika, a co nie. Polscy uczniowie pierwsze zadanie wykonali bardzo dobrze, drugie natomiast na poziomie średniej światowej. Oznacza to, że polscy gimnazjaliści radzą sobie dobrze z obliczaniem średniej arytmetycznej, ale nie bardzo rozumieją, co ona oznacza i jak ją interpretować.

Wyniki uczniów z kilku zadań sugerują również, że polscy gimnazjaliści nie potrafią opisać wzorem podanej zależności oraz przekształcać wzorów, co świadczy przede wszystkim o niskich umiejętnościach posługiwania się językiem symbolicznym.

W badaniu PISA 2003 zadanie *Kroki* sprawdzało umiejętność interpretacji zależności między kilkoma wielkościami wyrażonymi wzorem oraz wyznaczania jednej z tych wielkości w zależności od podanych wartości wielkości pozostałych. Oto treść tego zadania:

Na rysunku widać ślady stóp idącego mężczyzny. Długość kroku P to odległość pomiędzy końcami dwóch kolejnych śladów. Dla mężczyzn, wzór $^n/_P = 140$ podaje przybliżoną zależność miedzy n a P, gdzie
n = liczba kroków na minutę
P = długość kroku w metrach

Pytanie 1.
Zastosuj ten wzór do kroków Janka i oblicz, jaka jest długość jego kroku, jeśli Janek stawia 70 kroków na minutę. Przedstaw swoje obliczenia.

Pytanie 2.
Bernard wie, że długość jego kroku wynosi 0,8 metra. Zastosuj wzór do jego kroków. Oblicz, z jaką prędkością chodzi Bernard. Podaj odpowiedź w metrach na minutę oraz w kilometrach na godzinę. Przedstaw swoje obliczenia.

Schemat oceny pytania pierwszego podaje, że za całkowicie poprawne rozwiązanie można było zdobyć dwa, a za częściowo poprawne jeden punkt. Za częściowo poprawne uznawano rozwiązanie, w którym uczeń prawidłowo podstawił do wzoru podane wartości, ale źle wykonał obliczenia. Za odpowiedź na pytanie 2. można było zdobyć trzy, dwa lub jeden punkt. Uczeń otrzymywał trzy punkty, gdy prawidłowo obliczył liczbę kroków na minutę i podał tę odpowiedź jako prędkość w metrach na minutę, a potem prawidłowo zamienił ją na kilometry na godzinę. Dwa punkty przyznawane były wówczas, gdy uczeń zapomniał o zamianie liczby kroków na minutę na metry na minutę i resztę operacji wykonał właściwie, albo prawidłowo podał prędkość w metrach na minutę, ale nie zamienił jej poprawnie na kilometry na godzinę. Jeden punkt uczeń otrzymywał, gdy obliczył tylko liczbę kroków na minutę, a dalsze obliczenia były niepoprawne.

Wykres przedstawiający procent uczniów w każdej z dziesięciu grup, którzy uzyskali trzy punkty za odpowiedź do pytania 2. świadczy o tym, że tylko 30% polskich uczniów w grupie X (uczniowie najlepsi, decyl dziesiąty) rozwiązało zadanie całkowicie poprawnie, podczas gdy na świecie 40% uczniów z tej grupy uzyskało trzy punkty za to zadanie. W decylach I – VIII procent uczniów, którzy przedstawili w pełni poprawne rozwiązanie był bliski 0 i nieznacznie tylko różnił się od wyniku światowego.

W pozostałych zadaniach sprawdzających umiejętności posługiwania się wzorami nasi uczniowie osiągali wyniki na poziomie średniej światowej. Należy tu zwrócić uwagę, że w badaniu PISA 2003 brali udział uczniowi z krajów, które wypadły bardzo słabo i znacznie zaniżyły średnie światowe. Wynik na poziomie światowym nie stanowi więc specjalnego powodu do zachwytu.

Autorzy raportu PISA 2003 za mocne strony polskich uczniów uważają umiejętności:

- posługiwania się poznanymi ze szkoły lub podanymi *explicite* w treści zadania algorytmami, rozwiązywania zadań typowych, w których można wyodrębnić poszczególne kroki
- odczytywania, porównywania danych, obliczania średniej na podstawie różnego typu diagramów, wykresów, tabel i innych form graficznych

- orientacji i wyobraźni przestrzennej, posługiwania się modelami i siatkami brył
- szacowania odległości, obliczania długości łamanej
- rozwiązywania prostych problemów optymalizacyjnych typu: *czy wystarczy na …*, *którą opcje wybrać, aby było taniej*
- w kontekstach matematycznych posługiwania się intuicją prawdopodobieństwa, losowości i niezależności oraz rozwiązywania prostych zadań kombinatorycznych.

Badanie PISA 2003 wykazało również, że w porównaniu z uczniami z innych krajów:

- polscy najsłabsi uczniowie lepsi są od najsłabszych uczniów na świecie, ale najlepsi polscy uczniowie gorsi są od najlepszych na świecie (wspominany już problem górnej ćwiartki)
- wielu polskich uczniów potrafi rozwiązać zadanie częściowo, ale niewielu całkowicie poprawnie
- trudność stanowi samodzielne przeprowadzenie rozumowania, wyciąganie wniosków i stawianie hipotez oraz uogólnianie
- polska młodzież gorzej radzi sobie z zadaniami wymagającymi abstrakcyjnego myślenia: uogólniania i analizy.

W roku 2006 przeprowadzono kolejne badania, w których tym razem dziedziną dominującą było rozumowanie w naukach przyrodniczych. W dziedzinie matematyki wynik krajowy nieznacznie się poprawił (wyniósł 495 punktów) przy jednoczesnym pogorszeniu wyniku światowego o dwa punkty. W ten sposób Polska osiągnęła poziom średniej krajów OECD. Zauważono jednocześnie, że poprawiły się wyniki uczniów o najniższym poziomie umiejętności, a odsetek uczniów pozostających na wyższych poziomach pozostał taki sam lub nieznacznie się zmniejszył. Potwierdził się sformułowany po badaniu PISA 2003 „problem górnej ćwiartki". W teście 2006 umieszczono 48 zadań matematycznych nieujawnionych po badaniu w 2003 r.. Dzięki temu zaistniała możliwość porównania, jak uczniowie radzili sobie z tymi samymi zadaniami w latach 2003 i 2006. Sformułowano po raz kolejny wnioski dotyczące polskich uczniów, a – w efekcie – także polskiej edukacji.

Mocnymi stronami polskich uczniów w porównaniu z uczniami OECD – podobnie, jak w roku 2003 – są:

- umiejętność stosowania znanych algorytmów
- umiejętność odczytywania danych przedstawionych w formie graficznej: tabeli, wykresu, diagramu
- wyobraźnia geometryczna.

Polscy uczniowie mają natomiast wyraźne kłopoty z:

- samodzielnym opanowaniem wcześniej nieznanego algorytmu
- opracowaniem strategii rozwiązania zadania składającego się z kilku dobrze znanych kroków
- poprowadzeniem rozumowania polegającego na analizie działania pewnego systemu i sformułowanie wniosków.

Jak widać, także badania PISA pokazują, że polscy uczniowie mają trudności z zadaniami nietypowymi, nowymi, wymagającymi kreatywności i samodzielnego twórczego myślenia.

W badaniach PISA 2009 dziedziną dominującą było *czytanie i interpretacja*. Krajowy wynik ogólny w obszarze matematyki nie zmienił się w porównaniu do średniej krajów OECD. Daje się zauważyć natomiast wzrost wyniku dziewcząt przy jednoczesnym takim samym spadku wyniku chłopców. Zmiany te wzajemnie się znoszą powodując, że średni wynik polskiego ucznia w ciągu ostatnich trzech lat się nie zmienił. Dziewczęta, podobnie jak w całej OECD, stanowią mniejszość na wyższych poziomach umiejętności, ale jednocześnie, inaczej niż w OECD, na niższych poziomach jest więcej chłopców niż dziewcząt. Problem „górnej ćwiartki" nadal występuje.

W badaniu 2009 użyto 35 zadań, które wcześniej zastosowano na testach w 2003 i w 2006 r., co pozwoliło porównać wyniki uczniów na przestrzeni sześciu lat. W raporcie zamieszczono wykresy przedstawiające różnice w odsetku uczniów rozwiązujących poszczególne zadania w Polsce i średnio w OECD. Z wykresów wynika, że w 2003 r. wyniki dla większości zadań były słabsze niż w 2006, ale w 2009 nie uległy już dalszej zmianie. **Lepsze wyniki dotyczą głównie zadań polegających na stosowaniu algorytmów, a zadania wymagające samodzielnego przeprowadzenia rozumowania wypadają zdecydowanie słabiej.** Widać to szczególnie na podstawie wyników 11 zadań P-F (prawda – fałsz) wymagających przeprowadzenia rozumowania.

W krajowej części badania w roku 2006 i 2009 brali także udział uczniowie szkół ponadgimnazjalnych: liceów ogólnokształcących, techników, liceów profilowanych i szkół zawodowych. Zaobserwowano niewielkie (nieistotne statystycznie) pogorszenie poziomu umiejętności uczniów starszych w stosunku do roku 2006. Autorzy raportu tłumaczą to tym, że reforma programowa, która wkroczyła do szkół w 2009 r. nie dotarła jeszcze do tego poziomu edukacji. Obecnie przygotowywane jest badanie PISA 2012, którego podstawową domeną znowu będzie matematyka.

2.5. O umiejętnościach matematycznych uczniów na podstawie egzaminu gimnazjalnego
Elżbieta Jabłońska

Egzamin na zakończenie nauki w gimnazjum, podobnie jak sprawdzian, przeprowadzany jest w Polsce od 2002 r.. Do bieżącego roku składał się z dwóch części: humanistycznej i matematyczno-przyrodniczej. Do każdej z części zostały opracowane wymagania egzaminacyjne zwane „Standardami wymagań egzaminacyjnych”.[44] Zostały one zapisane nie w formie wymagań przedmiotowych, lecz jako zestaw umiejętności międzyprzedmiotowych.

Wymagania do części matematyczno-przyrodniczej zgrupowano w czterech obszarach:

I. Umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu;

II. Wyszukiwanie i stosowanie informacji;

III. Wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych;

IV. Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów.

W każdym z obszarów wymienione są umiejętności, których brzmienie czasem sugeruje jakiej dziedziny mogą dotyczyć, ale z reguły nie da się ich przypisać poszczególnych przedmiotom szkolnym. Raporty opracowywane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i Okręgowe Komisje Egzaminacyjne po przeprowadzeniu poszczególnych edycji egzaminu odnoszą się do zadań i umiejętności sprawdzanych za pomocą tych zadań, a nie do przedmiotów szkolnych. Nie otrzymujemy więc informacji, jak uczniowie radzą sobie z zadaniami z matematyki, fizyki, chemii, biologii i geografii. Jednak analiza zestawów egzaminacyjnych, sposobów punktowania rozwiązań zadań wraz z podanymi w raportach łatwościami lub poziomami wykonania zadań (stosunek liczby uzyskanych przez uczniów punktów do liczby punktów możliwych do uzyskania) pozwala przyjrzeć się prezentowanym przez uczniów umiejętnościom lub zauważyć ich brak. Niektóre z publikowanych przez CKE raportów zawierają rozdziały zatytułowane „Mocne i słabe strony wykształcenia matematyczno-przyrodniczego gimnazjalistów”**.** Autorzy raportów omawiają w nich wyniki egzaminu, odnosząc się do zadań najlepiej i najsłabiej wykonanych. W dalszej części tego opracowania postaramy się przeanalizować wyniki egzaminu gimnazjalnego, zwracając uwagę na niski poziom pewnych bardzo istotnych umiejętności matematycznych uczniów piszących egzamin gimnazjalny kolejno w latach 2009, 2010 i 2011.

W raporcie z **egzaminu gimnazjalnego w roku 2009**[45] przygotowanym przez CKE opisano słabe i mocne strony naszych gimnazjalistów. Wśród tych pierwszych wymieniono, m.in. braki w umiejętnościach matematycznych, takie jak popełnianie błędów rachunkowych polegających, np. na umieszczaniu przecinka w dowolnym miejscu liczby dziesiętnej, nierozumieniu, że liczbę podnosimy do kwadratu mnożąc ją przez siebie, a nie mnożąc przez 2, niezachowywanie kolejności wykonywania działań.

[44] *Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej i Sportu z dnia 10 sierpnia 2001 r. w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzania sprawdzianów i egzaminów,* Dz. U. nr 92, poz. 1020, z późn. zm.

[45] Ten i kolejne cytowane raporty CKE na stronie http://www.cke.edu.pl/index.php?option=content&task=view&id=141&Itemid=122

Uczniowie słabo również radzili sobie z obliczeniami procentowymi. Zastanawia bardzo wyraźny brak konfrontacji wyniku z warunkami zadania. Uczniowie z powodu błędów rachunkowych otrzymują wyniki, które już „na oko” powinny mocno niepokoić, a mimo to są wpisywane jako odpowiedź do zadania. Autorzy raportu podają następujące przykłady: *Masa białka zawartego w śniadaniu Michała wynosi 1323 kg*, podczas gdy masa całego śniadania była równa 320 g, czy też *Pojemność kosza w kształcie walca to 246 176 litrów*, przy wymiarach kosza całkiem zwyczajnych – średnica 28 cm, a wysokość 40 cm.

Słabo uczniowie poradzili sobie z opisywaniem sytuacji przedstawionych w zadaniu za pomocą równań lub układów równań, uzupełnianiem równań rekcji chemicznych i ich bilansowaniem.

W zadaniu zamkniętym mówiącym o zakupie czekolady aż 31% uczniów wybrało odpowiedź B, z której wynikało, że suma ceny czekolady pomnożonej przez 3 i 15 złotych daje razem 60 groszy[46]:

Hania, płacąc w sklepie za trzy tabliczki czekolady, podała kasjerce 15 zł i otrzymała 0,60 zł reszty. Które z równań odpowiada treści zadania, jeśli cenę tabliczki czekolady oznaczymy przez x?

A. $3x + 0,6 = 15$ B. $3x + 15 = 0,6$ C. $0,6x + 3 = 15$ D. $15x + 0,6 = 3$

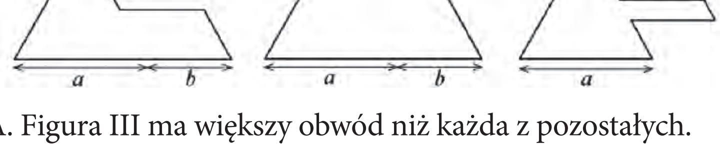
Okazało się, że gimnazjaliści nie radzą sobie z posługiwaniem się jednostkami i ich zamianą, trudności mają zarówno z jednostkami długości, objętości, masy oraz czasu, jak i jednostkami wielkości fizycznych: pracy, mocy, siły.

Uczniowie mieli kłopoty z odczytywaniem danych z wykresów, szczególnie wtedy, gdy osie układów współrzędnych opisane były inaczej niż x i y. Najgorzej jednak wypadło zadanie wymagające zaplanowania działań prowadzących do rozwiązania sytuacji problemowej.

Podczas **egzaminu gimnazjalnego w roku 2010** wśród zadań zamkniętych było niewiele zadań matematycznych. Najtrudniejsze z nich (zad. 24.) wymagało porównania obwodów trzech figur, które zbudowano poprzez dorysowanie równoległoboków do trójkątów równobocznych. Wymiary tych figur zapisane były literami.

Zadanie 24. (0-1)

Każda z figur przedstawionych na rysunkach powstała z trójkąta równobocznego o boku długości a i równoległoboku o jednej parze boków długości b. Porównaj obwody tych figur. Które zdanie jest prawdziwe?



A. Figura III ma większy obwód niż każda z pozostałych.
B. Figura III ma mniejszy obwód niż każda z pozostałych.
C. Wszystkie figury mają takie same obwody.
D. Za mało danych, by porównać obwody.

[46] Por. także uwagi o strategiach uczniowskich na s. 39-43

Najprostszym sposobem jego rozwiązania było przedstawienie każdego obwodu za pomocą wyrażenia algebraicznego lub porównanie, ile odcinków o długościach a i b wchodzi w skład obwodu każdej z figur. Z zadaniem poradziło sobie 40% uczniów. Niektórzy z nich zapewne udzielali odpowiedzi A lub B, co może świadczyć o pomyleniu pojęcia obwodu z pojęciem pola.

Zadania matematyczne 26. i 27. dotyczą informacji podanej w dłuższym tekście:

Informacje do zadań 25.-27.
Karat jubilerski to jednostka masy kamieni szlachetnych. Termin ten pochodzi od greckiego słowa *keration*, oznaczającego śródziemnomorską roślinę, która po polsku nazywa się szarańczyn. Jest to drzewo z rodziny motylkowatych o liściach złożonych, parzystopierzastych (o parzystej liczbie listków). Nasiona z jego dojrzałych strąków – drobne, twarde, o bardzo wyrównanej (197 miligramów) masie – stosowane były jako odważniki. Współcześnie do podawania masy kamieni szlachetnych i pereł służy karat metryczny (et) równy 0,2 g.
Największy z dotychczas znalezionych diamentów (noszący nazwę *Cullinan*) miał masę 3106 et. Wykonano z niego 105 brylantów, tracąc przy obróbce aż 65% pierwotnej masy kamienia.

Pierwsza część tej informacji służyła przede wszystkim rozwiązaniu biologicznego zadania 25., w którym należało rozpoznać opisaną roślinę. Kolejne zadanie: 26. wymagało obliczenia procentu z danej liczby. Warunkiem koniecznym było, oczywiście, zrozumienie przeczytanej informacji.

Zadanie 26. (0-3)
Ile karatów mają łącznie brylanty wykonane z *Cullinana*? Zapisz obliczenia.

Według klucza punktowania opublikowanego na stronie CKE uczeń otrzymuje 3 punkty za całkowicie prawidłowe rozwiązanie zadania, 2 punkty – gdy popełnił błąd rachunkowy, 1 punkt – gdy obliczył 65% liczby zamiast 35%, albo podał wynik w gramach, a nie w karatach, jak było w poleceniu. Zadziwia fakt, że uczniowie uzyskali za rozwiązanie tego zadania zaledwie 35% możliwych do uzyskania punktów.

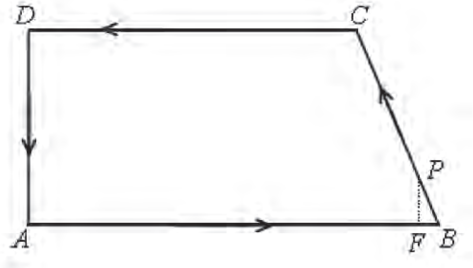
Kolejne zadanie dotyczące tego samego tekstu na pozór jest zadaniem z fizyki, bo uczeń musi wiedzieć, czym jest gęstość. Aby je rozwiązać należy masę diamentu wyrazić w gramach, po czym obliczyć objętość, korzystając z podanej gęstości. Takie zadania są obecne zarówno na lekcjach matematyki, jak i fizyki. Poziom wykonania tego zadania wyniósł tylko 29%.

Zadanie 27. (0-3)
Oblicz, jaką objętość miał *Cullinan* (największy znaleziony diament). Przyjmij, że gęstość diamentu wynosi 3,2 g/cm^3. Zapisz obliczenia. Wynik zaokrąglij do całości.

Za całkowicie poprawne rozwiązanie zadania uczeń otrzymywał 3 punkty, 2 punkty – gdy nie podał odpowiedzi z prawidłową jednostką, popełnił błąd rachunkowy lub źle zaokrąglił otrzymany wynik. Jeden punkt przyznawano, gdy uczeń zamienił tylko masę w karatach na gramy, lub w ogóle nie zauważył, że masa podana jest w karatach, a gęstość w g/cm^3. Nie mamy niestety informacji, ilu uczniów rozwiązało to zadanie bezbłędnie. Wydaje się, że trudnością – obok znajomości pojęcia gęstości i konieczności wyłowienia informacji z dość długiego tekstu – była także konieczność operowania różnymi jednostkami.

W egzaminie gimnazjalnym 2010 wśród zadań otwartych przeważały zadania matematyczne i one właśnie okazały się najtrudniejsze. Oto kilka z nich.

Informacje do zadań 29. i 30.
Pracownik ochrony chodzi wzdłuż ogrodzenia parkingu (w kształcie trapezu prostokątnego) ze stałą prędkością 1 m/s. Obchód zaczyna od wartowni *A*. Na rysunku przedstawiono plan jego trasy, a obok podano wymiary parkingu.



AB = **125 m**
BC = **65 m**
CD = **100 m**
AD = **60 m**

W pierwszym z zadań uczeń musi wskazać odcinek, na którym znajdzie się ochroniarz po 10 minutach od wyjścia z punktu A. Za to zadanie uczniowie uzyskali 59% możliwych punktów – a więc nie okazało się trudne. Więcej kłopotów sprawiało rozwiązanie kolejnego zadania do tego samego tekstu. Poziom wykonania zadania 30. wyniósł zaledwie 29%.

Zadanie 30. (0-3)
Pracownik doszedł do ⅕ odcinka *BC* (punkt *P*). Oblicz, w jakiej odległości jest on od odcinka *AB*, a w jakiej od punktu *B*. Zapisz obliczenia.

Nietrudno jest obliczyć, że punkt *P* znajduje się w odległości 13 m od punktu *B*, trudność mogła sprawiać pierwsza część zadania. Niełatwo było zauważyć, że odległość *PF* równa jest $^1/_5$ długości odcinka *AD*. Uczniowie rzadko korzystają w nietypowych sytuacjach praktycznych z podobieństwa trójkątów, tym bardziej, że na rysunku nie widać trójkąta podobnego do *FBP*. Z klucza punktowania wynika, że pojawiały się odpowiedzi, w których uczeń najpierw obliczał długość odcinka *FB*, a potem korzystając z twierdzenia Pitagorasa szukanego odcinka *PF*.

Następne zadanie też nie okazało się łatwe. Należało w nim tylko napisać układ równań ilustrujący sytuację przedstawioną w zadaniu.

Zdanie 31. (0-2)
Maksymalnie załadowane ciężarówki: jedna o nośności 8t, a druga 12t przewiozły 520 ton węgla, wykonując w sumie 60 kursów.
Ułóż układ równań, który pozwoli obliczyć, ile kursów wykonała każda z ciężarówek.

Poziom wykonania tego zadania wyniósł zaledwie 39% – mimo, że jest ono typowym zadaniem rozwiązywanym w szkole. Nie wiemy, ilu uczniów uzyskało 2, a ile 1 punkt za swoją odpowiedź. Uczeń otrzymywał 1 punkt, gdy tylko jedno zapisane równanie było poprawne.

W zadaniu 32., którego poziom wykonania również nie był zadowalający (37%) należało wypisać wszystkie możliwe odpowiedzi spełniające warunki zadania i wykazać, że tych możliwości nie może być więcej. Tego typu polecenia nie pojawiały się dotychczas na egzaminie gimnazjalnym. Stąd być może taka łatwość wydawałoby się prostego zadania. Trudność z jego poprawnym rozwiązaniem mógł mieć tylko taki uczeń, który nie rozumie treści zadania lub czyta ją nieuważnie.

Zadanie 32. (0-4)
Uczniowie klasy III wybierali przedstawiciela do samorządu szkolnego. Było troje kandydatów: Ola, Paweł i Romek. W klasie jest 32 uczniów i każdy z nich oddał jeden ważny głos. Zwyciężyła Ola, uzyskując mniej niż połowę głosów. Reszta głosów rozłożyła się równo między pozostałych kandydatów.
Ile głosów otrzymała Ola, a po ile pozostali kandydaci?
Znajdź i wypisz wszystkie możliwości. Uzasadnij, że nie ma więcej.

Zgodnie z opublikowanym kluczem punktowana była każda z dwóch możliwych odpowiedzi oraz uzasadnienia, że nie ma ich więcej. Wydaje się, że właśnie zapisanie sensownego uzasadnienia mogło stanowić dla uczniów największy problem.

W raporcie *Osiągnięcia uczniów kończących gimnazjum w roku 2011* omówione są zarówno te zadania, które okazały się dla uczniów łatwe, jak i te, z którymi mieli więcej kłopotów. Do zadań trudniejszych należały – tradycyjnie – otwarte zadania matematyczne oraz dwa zadania zamknięte.

Według autorów raportu zadanie 4. sprawdzało umiejętność posługiwania się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych, a zadanie 5. stosowania technik twórczego rozwiązywania problemów. Oba dotyczyły tekstu informującego o wynikach wyborów na przewodniczącego samorządu szkolnego.

Informacje do zadań 4. i 5.
W wyborach na przewodniczącego samorządu szkolnego kandydowało czworo uczniów. Każdy wyborca oddał jeden ważny głos. Ala otrzymała 25 głosów, a Basia 15 głosów. Na Michała głosowało $\frac{2}{5}$ pozostałych osób, a reszta głosów przypadła Oli.

Aby rozwiązać oba zadania uczeń przede wszystkim powinien zrozumieć treść tej informacji. Brak danych o liczbie osób głosujących lub liczbie osób, które głosowały na Olę nie pozwolił, co byłoby w tym zadaniu naturalne, obliczyć ile głosów otrzymał każdy z kandydatów, a więc, który z nich wybory wygrał. Zadanie 4. wymagało zapisania wyrażenia algebraicznego pozwalającego uzależnić liczbę głosów oddanych na Michała od liczby głosujących.

Zadanie 4. (0-1)
Które wyrażenie przedstawia liczbę osób głosujących na Michała, jeśli w głosowaniu brało udział *n* osób?

A. $\frac{2}{5}n$-16 B. $\frac{3}{5}n$-16 C. $\frac{2}{5}n$-40 D. $\frac{3}{5}n$-24

Wszystkie zaproponowane odpowiedzi zawierały wyrażenie algebraiczne bez nawiasów. Jeżeli więc, co bardzo prawdopodobne, uczeń zapisał wyrażenie zawierające nawias: $\frac{2}{5}(n$-40), to musiał jeszcze przekształcić je tak, aby nie było nawiasu – co mogło sprawić mu kolejną trudność. Ilu uczniów nie poradziło sobie z przekształceniem wyrażenia, a ilu nie umiało go nawet zapisać, nie dowiemy się z raportu, bo autorzy nie podają, jak rozkładały się wybierane odpowiedzi. Wiadomo tylko, że zaledwie 14% odpowiedzi było prawidłowych, co oznacza, że z rozwiązaniem tego zadania nie poradziło sobie aż 86% piszących egzamin.

Zadanie 5. dotyczyło stosowania technik twórczego rozwiązywania problemów. Podano w nim liczbę osób głosujących w wyborach, więc uczeń mógł nie odwołując się do zapisu symbolicznego odczytać zadanie i obliczyć liczbę głosów oddanych na poszczególnych kandydatów, operując liczbą głosujących. Dlatego pewnie to zadanie zostało prawidłowo wykonane przez większą niż poprzednie grupę osób piszących egzamin (około 45%).

Zadanie 5. (0-1)
Kto zajął trzecie miejsce w wyborach, jeśli w głosowaniu wzięło udział 120 osób?

A. Ala. B. Basia. C. Michał. D. Ola.

Kolejne trzy zadania matematyczne, z którymi trudno było uczniom sobie poradzić, są skupione wokół jednej informacji o różnych taryfach opłat telefonicznych. Taryfy różnią się opłatą abonamentową i opłatami za jedną minutę połączenia. Łatwo jest zauważyć, że przy wyższym koszcie abonamentu koszt jednej minuty jest niższy.

Informacje do zadań 28.-30.
Pewna firma telekomunikacyjna proponuje użytkownikom telefonów komórkowych cztery taryfy: A, B, C, D. Miesięczny rachunek telefoniczny jest sumą kwoty abonamentu i kosztu rozmów według podanych w tabeli stawek.

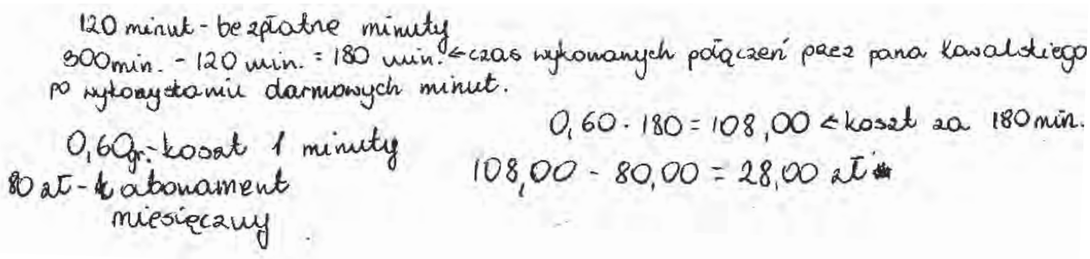
Taryfa	A	B	C	D
Abonament miesięczny w zł	20	40	80	120
Koszt jednej minuty połączenia w zł	1,10	0,75	0,60	0,40

W zadaniu 28. uczeń otrzymuje dodatkową informację o bezpłatnych minutach i ma obliczyć wysokość rachunku.

Zadanie 28. (0-2)
Pan Kowalski wybrał taryfę C. W marcu otrzymał w promocji 120 bezpłatnych minut. Jaka jest wysokość miesięcznego rachunku telefonicznego, jeśli łączny czas połączeń wykonanych przez pana Kowalskiego w marcu wyniósł 300 minut? Zapisz obliczenia.

W treści zadania podano z jakiej taryfy należy skorzystać. Zadanie nie wydaje się trudne, ale uczniowie otrzymali za nie tylko 38% możliwych do uzyskania punktów. Według dostępnego na stronie CKE sposobu punktowania zadań uczeń otrzymywał maksymalną liczbę punktów (2 punkty), gdy całkowicie prawidłowo rozwiązał zadanie, a 1 punkt, gdy przy prawidłowej metodzie rozwiązania popełnił błąd rachunkowy. Poziom wykonania tego zadania świadczy o tym, że nie tylko błędy rachunkowe są przyczyną otrzymania mniejszej liczby punktów.

Niżej zamieszczone odpowiedzi uczniowskie pokazują, jakiego rodzaju błędy w metodzie rozwiązania uczniowie popełniali.


120 minut - bezpłatne minuty
300min. - 120 min. = 180 min. ← czas wykonanych połączeń przez pana Kowalskiego po wykorzystaniu darmowych minut.
0,60 · 180 = 108,00 ← koszt za 180 min.
0,60zł - koszt 1 minuty
108,00 - 80,00 = 28,00 zł
80 zł - abonament miesięczny

Autor tego rozwiązania mimo, że prawidłowo odjął liczbę bezpłatnych minut od całego czasu połączeń, a następnie pomnożył otrzymany wynik przez koszt jednej minuty w odpowiednio wybranej taryfie, to nie był w stanie doprowadzić rozwiązania zadania do końca zgodnie z założonym planem. Zamiast dodać otrzymany iloczyn do kosztu abonamentu, nie wiedzieć czemu wykonał odejmowanie, odliczając od kosztu 180 minut abonamentu. Widać, że uczeń nie poradził sobie z przeprowadzeniem planu rozwiązania zadania, chociaż wyjaśnienia, które stosuje świadczą o tym, że pierwsze dwa kroki wykonał świadomie.

Kolejne zadania dotyczące tego samego tekstu okazały się jeszcze trudniejsze.

W zadaniu 29. należało porównać wysokość rachunku w dwóch taryfach przy liczbie minut nie mniejszej niż 200.

Zadanie 29. (0-2)
Która z taryf: C czy D jest korzystniejsza, jeżeli miesięczny czas połączeń jest <u>nie mniejszy</u> niż 200 minut? Zapisz obliczenia.

Autorzy zadania domagali się zapisania obliczeń, chociaż łatwo można sprawdzić (nawet pamięciowo), że przy 200 minutach koszty rachunku w obu taryfach będą jednakowe, a korzystniejsza przy większej liczbie minut będzie taryfa zakładająca mniejszy koszt jednej minuty połączenia. Uczeń mógł więc łatwo zauważyć – posługując się intuicją własności funkcji liniowej – że koszt rachunku w taryfie D rośnie wolniej niż koszt rachunku w taryfie C i odpowiedzieć, że korzystniejsza jest taryfa D.

Z opublikowanego przez CKE klucza ponownie nie dowiemy się, jak takie rozwiązanie byłoby punktowane. Wśród przykładowych rozwiązań są tylko takie, które zawierają obliczenia wysokości rachunku przy 200 minutach i dowolnie wybranej, większej niż 200 liczby minut. Nie ma tam przykładowego rozwiązania zawierającego schematyczny wykres zależności liniowych zawartych w obu taryfach. Klucz punktowania opracowywany jest na podstawie spotykanych uczniowskich rozwiązań. Należy zatem sądzić, że uczniowie rozwiązania ilustrowanego rysunkami nie przedstawiali, chociaż w programach nauczania matematyki w gimnazjum jest odczytywanie i sporządzanie prostych wykresów i diagramów.

Jeszcze gorzej uczniowie wykonali zadanie 30. Należało w nim obliczyć, przy jakiej liczbie minut korzystniejsza od B będzie taryfa A. Poziom wykonania tego zadania wyniósł zaledwie 20%.

Zadanie 30. (0-2)
Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

Przedstawione w kluczu punktowania przykłady rozwiązań zawierają ciąg działań prowadzących do wyliczenia przy jakiej liczbie minut rachunki w obu taryfach będą jednakowe lub nierówności, których rozwiązanie prowadzi do odpowiedzi, przy jakiej liczbie minut koszt rachunku w taryfie A będzie mniejszy niż w taryfie B.

Zgodnie z kluczem przy całkowicie prawidłowym rozwiązaniu uczeń otrzymuje 2 punkty, 1 punkt przyznawany jest wtedy, gdy uczeń prowadzi poprawne rozumowanie, ale popełnia błąd rachunkowy lub gdy jego obliczenia prowadzą do rozstrzygnięcia, przy jakiej liczbie minut taryfa A jest korzystniejsza, ale uczeń nie potrafi tego wyniku zinterpretować prawidłowo.

Analiza kilku prac uczniowskich pozwala stwierdzić, jak trudno było uczniom opracować strategię rozwiązania tego zadania.

Zacznijmy od sposobów rozwiązania, których sens trudno jest dostrzec.

Zadanie 30. (0-2)

Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

B - rachunek 40 zł, za 1 min 0,75 zł - 40 zł. 75 gr.

A - rachunek 20 zł, za 1 min 1,10 zł 21 zł 10 gr

$40,75 - 21,10 = 19,60$

$19,60 : 1,10 = 1960 : 110 = 17,8...$

-110, 860, -770, 900, -880, 20

Zadanie 30. (0-2)

Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

A

abonament - 20 zł

szt jednej minuty - 1,10 zł

B

abonament - 40 zł

szt jednej minuty - 0,75 zł

$1,10 \cdot 40 = 4,40$

$44 + 20 = \boxed{64}$

$0,75 \cdot 40 = 30$

$30 + 40 = \boxed{70}$

$75 \cdot 4 = 30,0$

Zadanie 30. (0-2)

Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

	A	B
opłata za 1 ms.	20	40
opłata za 1 zł	1,10	0,75

A - $20 \cdot 1,10 = 22,00$

B - $40 \cdot 0,75 = 30,00$

A - $22 - 20 = 2$

B - $40 - 30 = 10$

A - $2 \cdot 1,10 = 2,20$

B - $10 \cdot 0,75 = 7,50$

$7,50 - 2,20 = 5,30$

$5,30 \cdot 1,10 = \underline{5,83}$

Pora na przypadkowe działania, w których uczeń oblicza różnicę miedzy abonamentami w obu taryfach, a potem dzieli ją przez koszt minuty w taryfie A.

Zadanie 30. (0-2)
Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

abonament A - 20zł
minuta A - 1,10zł
abonament B - 40zł
minuta B - 0,75zł
40zł - 20zł = 20zł
20[redacted] : 1,10[redacted] ≈ 18
18 · 1,1 = 19,8
20zł - 19,80zł = 20gr

$\frac{20}{1} \cdot \frac{10}{11} = \frac{200}{11}$

$$\begin{array}{l} \ \ 18,18 \\ \overline{200:11} \\ -11 \\ \overline{\ \ 90} \\ -88 \\ \overline{\ \ \ 20} \\ \ -11 \\ \overline{\ \ \ \ 90} \\ \ \ \ \ 88 \end{array}$$

Zadanie 30. (0-2)
Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

Abonament „A” 20zł — Abonament „B” 40zł
1min 1,10zł — 1min 0,75

10min · 1,10 — 10min · 0,75
11zł + 20zł = 31zł — 7,50 + 40 = 47,50

15 · 1,10 — 15min + 3min = 18min
11zł + 5,50 — 1min – 1,10 (3min)
16,50 + 20 — 15min + Abonament = 36,50 + 3,30 = 39,80
36,50

Odpowiedź: Jeśli rachunek w taryfie „A” ma być mniejszy niż w taryfie „B” to można „wydzwonić” 18 min płacąc 39,80 zł

Niektórzy uczniowie próbują również metodą kolejnych prób dotrzeć do liczby minut połączenia, przy których taryfa A przestaje być korzystniejsza od taryfy B. Mogłoby to świadczyć o tym, że mają oni świadomość, że wyrażone poprzez przedstawione w tabelce dane koszty w obu taryfach nie rosną tak samo szybko przy wzroście liczby minut połączenia. Kolejny przykład rozwiązania wskazuje na taką metodę, niestety jest ona przeprowadzona niekonsekwentnie.

Jest również przykład rozwiązania, w którym uczeń oblicza różnice między abonamentami i kosztami jednej minuty połączenia w obu taryfach, ale nie wie, co dalej można z nimi zrobić.

Zadanie 30. (0-2)
Ile pełnych minut połączeń można maksymalnie wykonać w ciągu miesiąca, aby rachunek telefoniczny w taryfie A był niższy niż w taryfie B? Zapisz obliczenia.

Abonament

40zł - 20zł = 20zł (na plusie dla A)

Koszt

1,1zł - 0,75zł = 0,35 zł (na plusie dla B)

20 - 0,35 = 19,65 zł (na plusie dla A)

19,65zł · 1,1zł = 21,6 zł

Wtedy A = 41,6zł
B = 61,6zł } różnica wynosi 20zł

więc bierzemy przybliżoną liczbę

52 min

A	B
37,2zł	38zł

Odpowiedź: ... Można wykonać 52 min pełnych połączeń w ciągu miesiąca

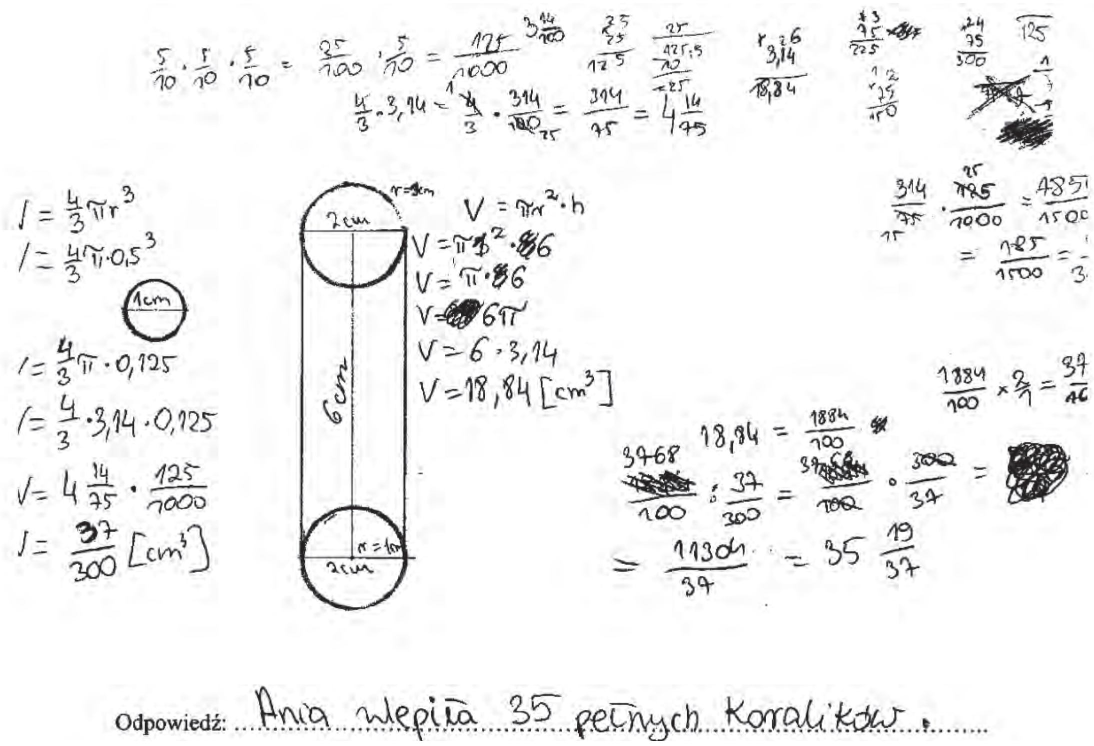
W egzaminie 2011 bardzo trudne okazało się również zadanie 35., które w zamierzeniu autorów testu miało sprawdzać tworzenie i realizację planu rozwiązania. Poziom wykonania tego zadania wyniósł 26%.

Zadanie 35. (0-4)
Ania ulepiła kuliste koraliki o średnicy 1 cm, wykorzystując całkowicie dwa kawałki modeliny. Każdy z kawałków modeliny miał kształ walca o średnicy 2 cm i wysokości 6 cm. Ile koralików ulepiła Ania? Zapisz obliczenia.

Sposób punktowania tego zadania był skomplikowany, ponieważ za prawidłowe i całkowite rozwiązanie uczeń otrzymywał aż 4 punkty. Z analizy sposobu punktowania można wywnioskować, że uczeń otrzymywał punkt, gdy obliczał objętość przynajmniej jednej z brył: kuli lub walca, 2 punkty, gdy mylił się używając zamiast długości promienia długość średnicy. Trzy punkty, gdy popełnił jedynie błąd rachunkowy. Błędy rachunkowe zdarzały się prawdopodobnie często, ponieważ uczniowie na ogół niechętnie używają w obliczeniach symbolu π, zastępując go przybliżeniem 3,14, co powoduje o wiele bardziej skomplikowane rachunki i stwarza większą możliwość popełnienie błędu. Uczniom o wiele łatwiej przychodzi zabranie się do żmudnych wyliczeń niż pomyślenie, jak można by ich uniknąć.

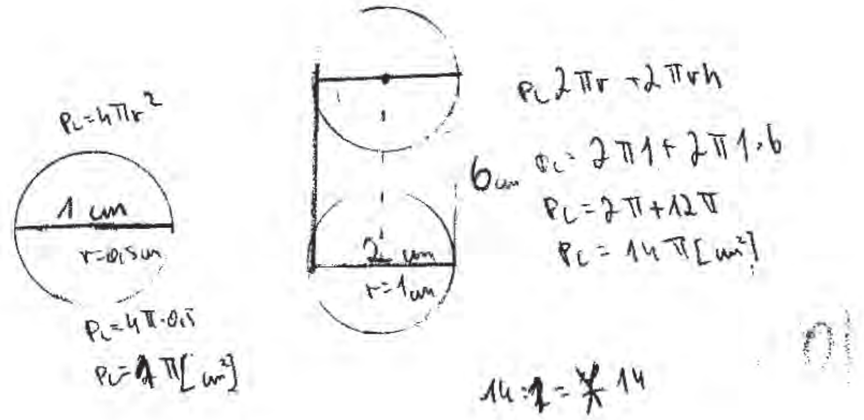
Zadanie 35. (0-4)

Ania ulepiła kuliste koraliki o średnicy 1 cm, wykorzystując całkowicie dwa kawałki modeliny. Każdy z kawałków modeliny miał kształt walca o średnicy 2 cm i wysokości 6 cm. Ile koralików ulepiła Ania? Zapisz obliczenia.



Dodatkową i chyba najważniejszą trudnością w tym zadaniu była matematyzacja przedstawionej sytuacji. Uczniowie powinni posłużyć się w zadaniu pojęciem objętości, która pozostawała niezmienna w czasie lepienia z plasteliny, podczas gdy zmieniał się kształt powstających brył. Rzadko w czasie nauki szkolnej uczniowie mają doczynienia z zadaniami, w których nie jest podane, o jaką wielkość chodzi, czy aby rozwiązać zadanie trzeba obliczyć pole powierzchni bryły albo jej objętość.

Uczniowie prezentowali rozwiązania, w których można dostrzec nieumiejętność dopasowania odpowiedniego modelu matematycznego do sytuacji przedstawionej w zadaniu.



Odpowiedź: Ania ulepiła 14 koralików.

Najtrudniejsze w egzaminie gimnazjalnym 2011 okazało się zadanie dotyczące chemii, w którym należało napisać równanie reakcji chemicznej w opisanym doświadczeniu. Symbole substancji wziętych do tego doświadczenia dane były w treści zadania. Sprawdzało ono – zgodnie z opisem w sprawozdaniu z wyników egzaminu i zapisami w standardach wymagań egzaminacyjnych – posługiwanie się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych. Symbole pierwiastków i związków chemicznych, a przede wszystkim odczytywanie, rozumienie i zapisywanie równań reakcji chemicznych jest dla polskich uczniów niezwykle trudne.

Z analizy raportów z egzaminów gimnazjalnych, zadań umieszczonych w arkuszach egzaminacyjnych i kluczy punktowania oraz przykładów prac uczniowskich wynika, że uczniowie gimnazjum wykazują znaczne braki w umiejętnościach matematycznych. **Na egzaminach najsłabiej wypadają zadania wymagające opracowania strategii rozwiązania i przeprowadzenia kolejnych jej kroków. Nieumiejętność operowania językiem symbolicznym objawia się trudnościami w zapisywaniu przedstawionych w zadaniu sytuacji za pomocą równań, nierówności i układów równań. Sporej grupie piszących egzamin gimnazjalny nie udaje się dobrać odpowiedniego modelu matematycznego do zależności zapisanych w treści zadania.** Częste błędy rachunkowe powodowane są nieumiejętnością szacowania wyniku i przewidywania jego rzędu wielkości oraz niestarannością w zapisie liczb. Gimnazjaliści mają kłopoty ze stosowaniem jednostek miar różnych wielkości oraz z zamianą jednostek. **Osobny i poważny problem stanowi bezkrytyczne podejście do otrzymanego wyniku i brak potrzeby skonfrontowania go z warunkami zadania[47].** Niski poziom tych umiejętności ma wpływ na trudności na dalszych etapach edukacji nie tylko matematycznej a także w życiu codziennym.

[47] Może to być efekt innego, niż byśmy chcieli, rozumienia przez część uczniów, co to znaczy rozwiązać zadanie, por. s. 71.

2.6. O umiejętnościach matematycznych polskich maturzystów
Elżbieta Jabłońska

W Polsce 80% absolwentów gimnazjów kontynuuje naukę w szkołach ponadgimnazjalnych, które kończą się maturą. Prawie wszyscy absolwenci liceów ogólnokształcących oraz profilowanych przystępują do tego egzaminu, rzadziej czynią to absolwenci techników. Matura pisemna od kilku lat jest egzaminem całkowicie zewnętrznym, przygotowywanym i organizowanym przez Centralną Komisję Egzaminacyjną i Okręgowe Komisje Egzaminacyjne. Prace uczniów sprawdzane są przez odpowiednio przygotowanych oraz przeszkolonych egzaminatorów z zastosowaniem obiektywnych sposobów punktowania. Świadectwo maturalne jest przepustką na studia wyższe, a wyniki z poszczególnych przedmiotów zastępują egzaminy wstępne na uczelnie. Matematyka jako przedmiot obowiązkowy na egzaminie maturalnym zaistniała – po raz pierwszy po 27 latach przerwy – w roku 2010. Uczniowie mogą zdawać ją na poziomie podstawowym i rozszerzonym. Poziom podstawowy piszą wszyscy przystępujący do egzaminu w czasie 170 minut, a po przerwie przez 180 minut poziom rozszerzony tylko ci, którzy złożą wcześniej taką deklarację. Poziom rozszerzony wymagany jest przy przyjęciu na uniwersyteckie kierunki ścisłe, uczelnie techniczne i niektóre ekonomiczne. Matematykę na poziomie rozszerzonym wybierają z reguły uczniowie, których program nauki w szkole ponadgimnazjalnej obejmował poziom rozszerzony z tego przedmiotu (większą liczbę godzin i szersze treści programowe).

Standardy wymagań egzaminacyjnych obejmują umiejętności matematyczne uczniów zgrupowane w pięciu obszarach:

1. Wykorzystywanie i tworzenie informacji;
2. Wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji;
3. Modelowanie matematyczne;
4. Użycie i tworzenie strategii;
5. Rozumowanie i argumentacja.

Szczegółowy opis standardów ilustrowany przykładami zadań znajduje się w *Informatorze o egzaminie maturalnym z matematyki od 2010 r.*[48]

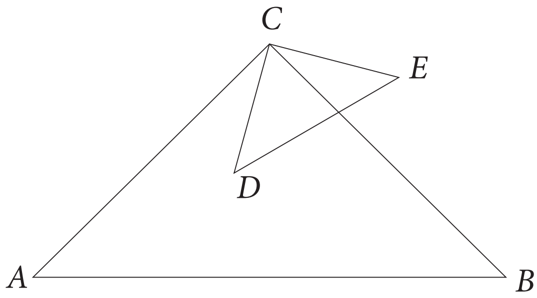
Do sprawdzania prac uczniowskich stosowany jest holistyczny klucz punktowania oparty na ocenie, jakiego postępu uczeń dokonał w drodze do całkowitego rozwiązania zadania. Egzamin uznaje się za zdany, gdy uczeń osiągnie próg przynajmniej 30% możliwych do zdobycia punktów. Wyniki egzaminu obowiązkowego z matematyki w latach 2010 i 2011 wskazały braki ważnych umiejętności matematycznych absolwentów polskich szkół ponadgimnazjalnych. W dalszej części tego opracowania znajdą się omówienia zadań z egzaminu maturalnego na poziomie podstawowym, które maturzystom sprawiły szczególne trudności.

Zewnętrzny **obowiązkowy egzamin maturalny z matematyki w roku 2010** zakończył się sukcesem dla 87% zdających. Arkusz egzaminacyjny składał się z 34 zadań, sprawdzających przede wszystkim

[48] Ten informator i kolejne cytowane raporty CKE oraz arkusze i klucze na stronie http://www.cke.edu.pl/index.php?option=content&task=view&id=10&Itemid=33

umiejętność interpretowania tekstu matematycznego, analizowania sytuacji problemowych, tworzenia ich opisu matematycznego, argumentowania i prowadzenia rozumowania. Zadania miały różną formę. Arkusz zawierał 25 zamkniętych i 9 otwartych zadań, z których sześć było dwupunktowych, dwa czteropunktowe i jedno pięciopunktowe. Łatwość zadań (stosunek liczby uzyskanych punktów do liczby możliwych do uzyskania) wahała się od 0,08 do 0,94. Najtrudniejszymi okazały się zadania otwarte 28. i 30. Obydwa sprawdzały umiejętności z obszaru *rozumowanie i argumentacja*. Za rozwiązanie zadania 28. uczniowie otrzymali jedynie 8% możliwych do uzyskania punktów.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***
Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD| = |BE|$.



Rozwiązanie zadania polegało na przeprowadzeniu krótkiego dowodu geometrycznego wykorzystującego cechę przystawania trójkątów bok-kąt-bok trójkątów *ADC* i *BCE*. Wymagano od uczniów prawidłowego uzasadnienia tej cechy, logicznego i konsekwentnego przedstawienia toku rozumowania. Z raportu o wynikach matury 2010 wynika, że błędy uczniowskie polegały głównie na wnioskowaniu o przystawaniu na podstawie równości boków, korzystaniu z tezy w trakcie prowadzenia dowodu oraz myleniu cech przystawania trójkątów z cechami podobieństwa. Akceptowane były jednak takie rozwiązania, w których uczeń prawidłowo przedstawiał wnioskowanie na podstawie cechy bok-kąt-bok, ale popełniał błąd nazywając przystawanie podobieństwem – traktowano to jako przejęzyczenie.

Bardzo trudne (łatwość 0,30) okazało się też zadanie 30.

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Wykaż, że jeśli a > 0, to $\dfrac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1} \geq \dfrac{\alpha + 1}{2}$

Zadanie wymagało przeprowadzenia krótkiego, nieskomplikowanego dowodu nierówności. Akceptowane były różne sposoby prowadzenia rozumowania. Dowód uznawano za przeprowadzony, jeżeli uczeń na przykład doprowadził nierówność do postaci $(\alpha - 1)^2 \geq 0$, nawet bez udzielania odpowiedzi, że ta nierówność spełniona jest dla każdego *a*. Nie wymagano komentarzy mówiących o równoważnym przekształcaniu nierówności oraz pisania, że obie strony można bez zmiany znaku nierówności na przeciwny pomnożyć, bo liczba $\alpha + 1$ jest dodatnia.

Trudne okazały się również cztery inne zadania otwarte. Jedno z nich, o łatwości 0,46, wymagało przeprowadzenia analizy prostej sytuacji geometrycznej oraz wyznaczenia długości odcinków potrzebnych do obliczenia obwodu czworokąta. Najwięcej kłopotu sprawił maturzystom właściwy podział tego czworokąta na trójkąty. Najczęstszym błędem było przyjęcie założenia, że jeden z tych trójkątów jest prostokątny i równoramienny.

Drugie zadanie (łatwość 0,47) dotyczyło obliczenia objętości ostrosłupa, którego krawędź boczna była jednocześnie wysokością ostrosłupa. Zasadniczą trudnością było obliczenie pola powierzchni podstawy. Aby maturzysta mógł rozwiązać zadanie, musiał zaplanować i przeprowadzić kilka kolejnych kroków. Celem zadania było więc sprawdzenie, jak uczeń radzi sobie z tworzeniem strategii rozwiązania zadania.

W trzecim zadaniu, które okazało się jeszcze trudniejsze (łatwość 0,34), należało obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przy dwukrotnym rzucie kostką sześcienną. Tym razem maturzyści mieli spory kłopot z zastosowaniem odpowiedniego modelu probabilistycznego, przedstawieniem zbioru zdarzeń elementarnych i zliczeniem, ile jest zdarzeń elementarnych sprzyjających rozważanemu zdarzeniu.

Czwarte zadanie (łatwość 0,44) dotyczyło również modelowania matematycznego. Sytuację przedstawioną w zadaniu należało przedstawić w postaci układu równań, po czym przekształcić ten układ doprowadzając do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, które następnie należało rozwiązać. Dodatkową trudność stanowiło tu istnienie dwóch różnych rozwiązań – zostało to zasygnalizowane w treści zadania poleceniem „podaj wszystkie możliwe odpowiedzi".

Autorzy części raportu poświęconej matematyce w podsumowaniu zwracają uwagę na to, że w arkuszu egzaminacyjnym na poziomie podstawowym oprócz zadań rutynowych, w których należało skorzystać z gotowych schematów i algorytmów znalazły się także zadania wymagające rozumowania i argumentacji. Ten obszar umiejętności stanowi kwintesencję matematyki, zasadne jest więc, aby w przyszłości zadania tego typu pojawiały się na maturze z matematyki na poziomie podstawowym.

Należy mieć nadzieję, że sprawi to, iż w nauczaniu matematyki akcenty zostaną przeniesione z opanowywania algorytmów, wzorów i schematów na umiejętność matematycznego myślenia.

Egzamin maturalny z matematyki na poziomie podstawowym w roku 2011 zdało 79% do niego przystępujących. Arkusz egzaminacyjny składał się z 33 zadań, z których 23 były zamknięte a 10 otwartych. Łatwości zadań mieściły się w przedziale od 0,07 do 0,91. Najtrudniejsze okazały się dwa zadania otwarte: 25. i 29. Podobnie jak w roku 2010 obydwa dotyczyły umiejętności z obszaru *rozumowanie i argumentacja*.

Za rozwiązanie zadania 25. uczniowie uzyskali 12% możliwych do uzyskania punktów.

Zadanie 25. ***(2 pkt)***
Uzasadnij, że jeżeli $a + b = 1$ i $a^2 + b^2 = 7$, to $a^4 + b4 = 31$.

Zadanie wymagało przeprowadzenia konsekwentnego i przemyślanego, choć raczej prostego rozumowania opartego na przekształcaniu wyrażeń algebraicznych.

Najtrudniejsze (łatwość 0,07) było zadanie 29., wymagające przeprowadzenia prostego dowodu geometrycznego.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***
Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB||CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

Rozwiązując je należało przeprowadzić rachunek na miarach kątów, stosując własności trapezu i trójkątów równoramiennych. Na uwagę zasługuje fakt, że w 91% prac zadanie to było opuszczone.

Autorzy części poświęconej matematyce w raporcie o wynikach matury w 2011 r. ze sporym zdziwieniem zauważają, że wśród zadań trudnych znalazło się zadanie zamknięte 19. (łatwość 0,40).

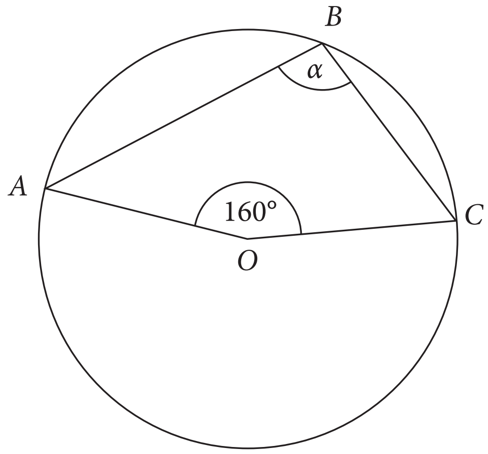
Zadanie 19. ***(1 pkt)***
Styczną do okręgu $(x - 1)^2 + y^2 - 4 = 0$ jest prosta o równaniu

A. $x = 1$ B. $x = 3$ C. $y = 0$ D. $y = 4$

Aby je rozwiązać należało znać pojęcie stycznej do okręgu i narysować określone wzorem figury: okrąg oraz proste lub przeprowadzić elementarne podstawienia.

Inne trudne zadanie zamknięte (łatwość 0,41) wymagało zastosowania twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym opartych na tym samym łuku.

Zadanie 16. ***(1 pkt)***
Punkt O jest środkiem okręgu. Kąt wpisany α ma miarę



A. 80 B. 100 C. 110 D. 120

Prawdopodobnie uczniowie nie zauważyli, że kąt wpisany *ABC* jest oparty na tym samym łuku, co środkowy kąt wklęsły *AOC*, a nie kąt wypukły *AOC* o mierze 160°.

Obydwa te zadania zamknięte dotyczyły umiejętności z obszaru *wykorzystywanie i interpretowanie reprezentacji*.

W podsumowaniu raportu z egzaminu maturalnego z matematyki czytamy, że polscy maturzyści dobrze radzą sobie z zadaniami typowymi o małym stopniu złożoności. W zadaniach niealgorytmicznych zdający egzamin na poziomie podstawowym mieli problemy z analizą i doborem właściwej metody rozwiązania. Zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym trudne okazały się zadania wymagające przeprowadzenia rozumowania i wnioskowania. Poziom umiejętności piszących maturę jest bardzo zróżnicowany, częstym mankamentem jest niedostateczna sprawność w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych i błędy rachunkowe przy rozwiązywaniu równań, a także brak krytycznego spojrzenia na otrzymane wyniki i konfrontacji ich z warunkami zadania.

Wyniki matury 2010 pokazały, a matury 2011 to potwierdziły, że absolwenci naszych szkół ponadgimnazjalnych dobrze radzą sobie z typowymi zadaniami, natomiast zadania niealgorytmiczne, wymagające przeprowadzenia rozumowania, opracowania i realizacji metody rozwiązania stwarzają im zdecydowanie większe trudności.

Rozdział 3.
W drodze do celu:
Dlaczego tu jesteśmy?

3. W drodze do celu: Dlaczego tu jesteśmy?
Mirosław Dąbrowski

Matematyki można się uczyć w dwojaki sposób[49]:

- na poziomie rozumienia instrumentalnego (algorytmicznego): *uczeń wie, jaki schemat w danej sytuacji należy zastosować*
- na poziomie rozumienia relacyjnego: *uczeń dostrzega związki między poznawanymi pojęciami i rozumie, dlaczego stosowane przez niego procedury funkcjonują w taki, a nie inny sposób.*

Ten pierwszy rodzaj rozumienia pozwala uczniom na mniej lub bardziej bezpieczne radzenie sobie z typowymi, raczej prostymi, zadaniami. Ten drugi pozwala budować dziecku strukturę jego wiedzy matematycznej.

Prowadzone badania: międzynarodowe i krajowe oraz egzaminy zewnętrzne na każdym z trzech poziomów: sprawdzianu, egzaminu gimnazjalnego i matury przekazują dokładnie taki sam komunikat o sposobie rozwijania umiejętności matematycznych uczniów w naszej szkole – na każdym jej szczeblu – i o jego skutkach:

polscy uczniowie, niezależnie od etapu kształcenia, opanowują, często do perfekcji, umiejętność rozwiązywania typowych zadań wedle utrwalonego schematu postępowania i mają ogromne trudności, gdy należy zastosować posiadaną wiedzę matematyczną w nowej, nietypowej z ich punktu widzenia, sytuacji.

Nasza szkoła uczy matematyki w sposób instrumentalny, na ogół zupełnie pomijając kwestie jej relacyjnego rozumienia. W efekcie, nasi uczniowie często nie rozumieją, co i dlaczego robią. Aby to ukryć, budują sobie własne strategie pokonywania trudności, które często nie mają żadnego związku z tym, czego chcieliśmy ich nauczyć. W nowych sytuacjach okazują się bezradni i wielu z nich rezygnuje z jakiejkolwiek próby znalezienia rozwiązania – wyuczona przez szkołę bezradność dochodzi do głosu.

Dlaczego tak się dzieje? Co decyduje o takiej szkolnej matematycznej rzeczywistości?

Żeby poszukać odpowiedzi na te pytania, „oddajmy głos” nauczycielom klas 1-3. W trzech edycjach badań umiejętności trzecioklasistów – w latach 2006, 2008 i 2010[50] badano opinie nauczycieli o celach edukacji językowej i edukacji matematycznej oraz sposobach ich realizacji. Nauczyciele ustosunkowywali się do kilkudziesięciu podanych stwierdzeń na czterostopniowej skali: *zdecydowanie tak*, *raczej tak*, *raczej nie*, *zdecydowanie nie*.

Zobaczmy, jakie przekonania kształtują pracę nauczycieli w trakcie rozwijania u dzieci umiejętności matematycznych. Skupmy się, np. na sztuce rozwiązywania zadań tekstowych, jednej z najistotniejszych umiejętności matematycznych:

---

[49] Np. Skemp R.R., *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, Mathematics Teaching *77,* 20-26, (1976).

[50] Por. Dąbrowski M., Żytko M. (red.), *Badanie umiejętności podstawowych uczniów trzecich klas szkoły podstawowej*, cz. I: *Raport z badań ilościowych*, CKE, Warszawa 2007, cz. II: *Konteksty szkolnych osiągnięć uczniów.* CKE, Warszawa 2008; Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista i jego nauczyciel. Raport z badań ilościowych 2008.* CKE, Warszawa 2009; Dąbrowski M. (red.), *Trzecioklasista 2010. Raport z badań ilościowych 2010.* CKE, Warszawa 2011.

- 55,3% badanych nauczycieli nauczania początkowego zgadzało się z tym, że: *Ucząc się matematyki dziecko powinno przede wszystkim uważnie słuchać nauczyciela i powtarzać jego czynności.*
- Nieco więcej, bo 64,2%, potwierdzało, że: *Przed rozwiązaniem zadania tekstowego dzieci muszą poznać metodę jego rozwiązania.*
- Z akceptacją aż 78,2% ankietowanych spotkało się stwierdzenie: *Podstawowym zadaniem nauczyciela jest staranne tłumaczenie dzieciom, w jaki sposób mają rozwiązywać zadania różnych typów.*
- Równie popularna wśród nauczycieli była także opinia, że: *Jeśli chcemy, aby uczniowie opanowali umiejętność rozwiązywania zadań tekstowych, musimy przerobić z nimi dużą liczbę typowych zadań* – zgodziło się z nią aż 78,9% badanych.

Jaki obraz lekcji matematyki wyłania się z tych przekonań?

Dokładnie taki, jaki znamy z codzienności polskiej szkoły: **to nauczyciel prezentuje gotowe metody postępowania, a podstawowym zadaniem uczniów jest przede wszystkim ich mechaniczne utrwalenie –** najczęściej dzięki wykonaniu serii podobnych, typowych zadań „pasujących" do utrwalanego schematu.

W przypadku zadań tekstowych można, oczywiście, wyróżnić kilkanaście podstawowych ich kategorii i podać uczniom metody ich rozwiązywania. Takie podejście ma nawet pewne „praktyczne" zalety – daje szansę, że część dzieci poradzi sobie z zadaniami „utrwalonych" typów, np. na popularnych w naszych szkołach testach kompetencji.

To podejście ma jednak przede wszystkim bardzo poważne wady:

- wzmacnia i utrwala jako podstawową czy nawet jedyną strategię intelektualną, strategię przypominania
- co, w efekcie, wypacza i degeneruje sens umiejętności rozwiązywania zadań tekstowych – i w ogóle nauczania matematyki.

Sam zwyczaj szukania „gotowca" w pamięci nie jest niczym nagannym. Szkodliwe się to staje dopiero wtedy, gdy ta strategia jest jedynym narzędziem intelektualnym stosowanym przez ucznia. Prowadzi to bowiem szybko do tego, że dziecko jest w stanie poradzić sobie tylko z tymi zadaniami, które poprawnie rozpozna: *Proszę Pani, czy to jest na mnożenie?* i do których „wzór" posiada w pamięci. Ale co wówczas, jeśli rozpozna typ zadania **źle, albo nie rozpozna wcale?** W tym drugim przypadku najczęściej albo stosuje różne, opisane wcześniej, strategie obronne, albo też nie podejmuje próby rozwiązania zadania.

Rozwiązanie serii typowych, podobnych zadań, wbrew powszechnym obiegowym opiniom, nie pomaga opanować umiejętności rozwiązywania zadań, ale wręcz uniemożliwia jej zdobycie! Jedynym efektem żmudnego powtarzania tych samych czynności podczas rozwiązywania serii podobnych zadań jest co najwyżej bezmyślne zapamiętanie sekwencji wykonywanych działań. Ale dlaczego je się wykonuje? Dlaczego wynik jest tym szukanym? Tego już uczeń, niestety, nie wie – **ani śladu relacyjnego rozumienia matematyki**. Zamiast rzeczywistych umiejętności, w ostatecznym rozrachunku udziałem dziecka staje się kilka schematów, brak wiary we własne siły i intelektualna bezradność[51].

---

[51] Por. np. Klus-Stańska D., Nowicka M., *Sensy i bezsensy edukacji wczesnoszkolnej*. WSiP, Warszawa 2005.

Wróćmy do wcześniej postawionych pytań. Wydaje się, że **najważniejszym czynnikiem, który w zdecydowany sposób wpływa na styl nauczania matematyki w polskich szkołach jest tradycja edukacyjna, zgodnie z którą uczeń wie tylko to, czego się dowiedział od dorosłych: nauczycieli i rodziców.** Wierząc w to, staramy się cały wysiłek intelektualny wykonać za ucznia, dostarczając mu gotowych wzorców do naśladowania, żeby „łatwiej mógł się nauczyć". Pozostaje pytanie: czego?

Każdy z nas, także przyszli nauczyciele i rodzice, spotyka się z tą tradycją najpierw jako uczeń podczas pobytu w szkole. Przygotowanie nauczyciela do zawodu jest na tyle krótkie[52], że nie zawsze może to już utrwalone nastawienie skutecznie zmienić. Na to wszystko nakładają się jeszcze bardzo tradycyjne podręczniki i inne materiały edukacyjne, tradycyjny – w swych przekonaniach i oczekiwaniach – nadzór, oraz rodzice, którzy znają tylko taką szkołę, do jakiej sami chodzili, czyli naprawdę bardzo tradycyjną. W efekcie, tylko najbardziej zdeterminowani nauczyciele potrafią wyrwać się z tego „zaklętego kręgu", szukając innych form pracy na lekcji, lepiej dopasowanych do rzeczywistych potrzeb i możliwości dzieci. Trzeba się zgodzić ze stwierdzeniem, że także sami nauczyciele są, podobnie jak ich uczniowie, ofiarami tej tradycji[53].

Aż 80,0% nauczycieli nauczania początkowego uważa, że ich uczniowie nie mają jeszcze na tyle rozwiniętej wyobraźni przestrzennej, aby móc na zajęciach zajmować się bryłami. Być może tylko te pozostałe 20,0% uświadomiło sobie, że klocki, pudełka, itp. to modele właśnie brył, z którymi dzieci obcują prawie od samych narodzin. Ponad połowa badanych (53,7%) jest przekonana, że najważniejszym celem edukacji matematycznej w klasach 1-3 jest zapoznanie dzieci z symbolami matematycznymi, a jeszcze więcej, bo aż 93,8% wierzy w to, że grafy i drzewka, które mają silnie symboliczny charakter, pomagają w rozumieniu matematyki. Kolejny przejaw naszej **matematycznej tradycji edukacyjnej**.

Każde zadanie, w tym także tekstowe, można rozwiązać na wiele sposobów i na różnych poziomach formalnej komplikacji. Można wykonać odpowiednią symulację, można pomóc sobie rysunkiem, można wreszcie sięgnąć po takie czy inne obliczenia. Każdy poprawny, tzn. prowadzący do podania właściwej odpowiedzi na postawione w zadaniu pytanie, sposób rozwiązania zadania jest – z matematycznego punktu widzenia – jednakowo dobry.

Rozwiązania „przez działanie" (enaktywne) oraz „przez rysunek" (ikoniczne) wynikają w naturalny sposób z treści zadania i doświadczeń dziecka. Rozwiązanie „przez obliczenie" (symboliczne) wymaga umiejętności dokonania matematyzacji sytuacji opisanej w zadaniu – wymaga zastąpienia czynności czy stanu opisanego w zadaniu odpowiednim działaniem czy serią działań. Wymaga także rozumienia używanych symboli i zasad posługiwania się nimi. Z punktu widzenia ucznia jest to zdecydowanie najtrudniejszy i najbardziej formalny sposób rozwiązania zadania, wymagający największej dojrzałości i najbardziej zaawansowanej wiedzy.

52 Por. także s. 11.

53 Klus-Stańska D., *Mentalne zniewolenie nauczycieli wczesnej edukacji – epizod czy prawidłowość*, w: Problemy Wczesnej Edukacji nr 1, 55-66, 2005. Klus-Stańska D., *Nauczycielska tożsamość zawodowa jako konstrukt negocjowany społecznie, czyli o pozorach podmiotowości nauczyciela wczesnej edukacji*, w: Waloszek D. (red.), *Edukacja szkolna i wczesnoszkolna. Obszary sporów, poszukiwań, wyzwań i doświadczeń w kontekście zmian oświatowych*, Kraków, Wydawnictwo Centrum Edukacyjne Bliżej Przedszkola, 43-60, 2010.

Posługiwanie się językiem symbolicznym to jedna z najtrudniejszych umiejętności matematycznych rozwijanych w całym procesie kształcenia. Stopniowo ją doskonaląc, musimy dbać o to, żeby dziecko przede wszystkim rozumiało, co i dlaczego robi. Tradycja uczenia matematyki, która o to wystarczająco nie dba, prowadzi wprost do zjawiska **zdegenerowanego formalizmu** – uczeń „żongluje" symbolami, zupełnie nie rozumiejąc ich sensu, a jego rozwój matematyczny jest skutecznie zastopowany.

Tradycja edukacyjna, tradycyjne systemy kształcenia i doskonalenia nauczycieli, niektóre uwarunkowania prawne i organizacyjne, większość podręczników i innych materiałów dydaktycznych wciąż trzymają polską szkołę w minionej epoce, gdzie jednym z głównych zadań edukacji było przygotowywanie robotników pracujących w fabrykach przy taśmie produkcyjnej – powtarzających proste, wyuczone czynności. Do polskiej szkoły z trudem dociera świadomość coraz szybszego tempa zmian w otaczającym świecie, przyrostu wiedzy – także dotyczącej procesu kształcenia[54]. Aby uczeń mógł w tym świecie funkcjonować musi zostać wyposażony – już od najwcześniejszych etapów swojej edukacji – nie tylko w pewien zasób wiadomości i schematów do odtwarzania, ale przede wszystkim w umiejętność wykorzystywania swojej wiedzy (wiadomości i umiejętności) w całkiem nowych sytuacjach; nie tylko w zasób informacji, ale przede wszystkim w umiejętność ich wyszukiwania, selekcjonowania, przetwarzania i wykorzystywania. Współczesna szkoła musi stwarzać warunki do rozwijania przez uczniów umiejętności komunikowania się w różnorodny sposób – także z wykorzystaniem języka symbolicznego. Musi stwarzać warunki do rozwijania umiejętności myślenia – także, a może przede wszystkim, na lekcjach matematyki. **Bez tego społeczeństwo wiedzy pozostanie mitem**.

---

[54] Patrz Cz.II Prognoza

Mirosław Dąbrowski – doktor nauk matematycznych, pracownik naukowy Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Dydaktyk matematyki, specjalista w zakresie nauczania matematyki w szkole podstawowej. W latach 2005-2011 koordynator merytoryczny projektu CKE-EFS *Badanie umiejętności podstawowych uczniów klas trzecich szkoły podstawowej.* Autor licznych publikacji o nauczaniu matematyki, współautor pakietów „Matematyka 2001" oraz „Przygoda z klasą".

Elżbieta Jabłońska – absolwentka Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, nauczycielka matematyki w Gimnazjum nr 42 z Oddziałami Dwujęzycznymi w Warszawie. W latach 1998-1999 członek zespołu opracowującego warianty sprawdzianu dla uczniów kończących naukę w sześcioletniej szkole podstawowej, a w latach 2007-2010 członek zespołu badawczego projektu *Nowa formuła sprawdzianu.*

Anna Pregler – absolwentka Wydziału Wzornictwa Przemysłowego Akademii Sztuk Pięknych w Krakowie, nauczycielka w Szkole Podstawowej nr 48 w Krakowie, pracownik Centralnej Komisji Egzaminacyjnej w Warszawie. Koordynator Ogólnopolskiego Badania Umiejętności Trzecioklasistów. Główne zainteresowania to szeroko rozumiana twórczość dzieci. Współautorka pakietu „Przygoda z klasą" i publikacji dotyczących edukacji wczesnoszkolnej.

Małgorzata Żytko – doktor habilitowany w dziedzinie nauk humanistycznych w zakresie pedagogiki, pracownik naukowy Wydziału Pedagogicznego Uniwersytetu Warszawskiego, kierownik Pracowni Pedagogiki Wczesnoszkolnej. Współkoordynatorka ogólnopolskich badań monitorujących umiejętności językowe i matematyczne trzecioklasistów oraz ich środowiskowy i szkolny kontekst. Autorka licznych publikacji dotyczących problematyki wspierania rozwoju dzieci, współpracy szkoły z rodzicami, kształcenia nauczycieli.

Anna Dereń – absolwentka Wydziału Pedagogiki Uniwersytetu Śląskiego w Cieszynie, dyrektor Centrum Inicjatyw Edukacyjnych w Kartuzach, autorka alternatywnego programu nauczania w klasach I-III oraz licznych publikacji o edukacji, wychowaniu, współautorka pakietu „Przygoda z klasą", realizatorka wielu projektów edukacyjnych o zasięgu regionalnym, ogólnopolskim oraz międzynarodowym.

Małgorzata Sieńczewska – doktor w dziedzinie nauk humanistycznych w zakresie pedagogiki, adiunkt w Katedrze Edukacji Początkowej Wydziału Pedagogicznego Uniwersytetu Warszawskiego. Autorka publikacji naukowych i edukacyjnych z zakresu wykorzystania dramy, metody projektów i nowoczesnych technologii informacyjno-komunikacyjnych w uczeniu się dzieci z klas I-III szkoły podstawowej, współautorka pakietów „Uczymy się z Psotką" i „Raz dwa trzy, teraz MY".