



PIKTOGRAFIA - Rozwijanie umiejętności posługiwania się językiem symbolicznym w edukacji z zakresu nauk matematycznych z zastosowaniem piktogramów Asylco

## **Scenariusz warsztatu 7**

### **CO Z TEGO WYNIKA**

### **CZYLI**

### **O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH NIERÓWNOŚCI**

#### **Cele:**

- wzbogacenie warsztatu zawodowego uczestników w obszarze rozwijania matematycznych umiejętności dzieci
- analiza możliwości jakie daje stosowanie podczas pracy z dziećmi różnorodnych form pracy
- zapoznanie uczestników ze sposobem pracy z pakietem *Gramy w piktogramy*, w szczególności z serią scenariuszy zajęć pt. *Co z tego wynika?*

#### **Pomoce:**

- piktogramy demonstracyjne dla prowadzącego
- wydrukowane wagi według wzoru z e-pakietu



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY

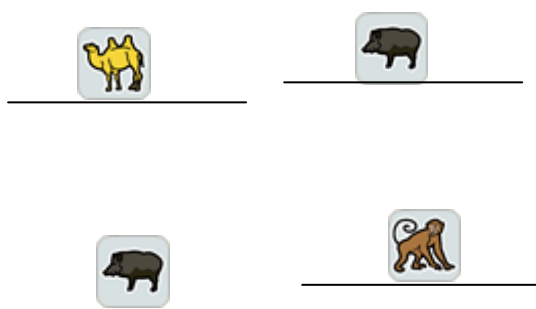


Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

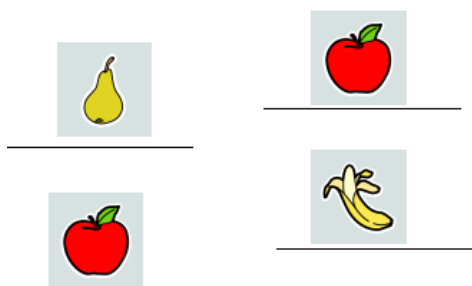
Człowiek - najlepsza inwestycja

### Przebieg warsztatu

1. Prowadzący na tablicy ustawia z pomocą wagi kilka nierówności, a uczestnicy je odczytują. Można wykorzystać slajdy z prezentacji.
2. Na tej wadze możemy porównywać nie tylko masy zwierząt, osób lub przedmiotów, ale także wiek, wysokość, szybkość i inne wielkości różnych obiektów, bo jest to waga umowna. Uczestnicy wybierają obrazki i porównują obiekty na nich przedstawione pod różnymi względami.
3. Prowadzący ustawia na tablicy dwie wagi, np.:



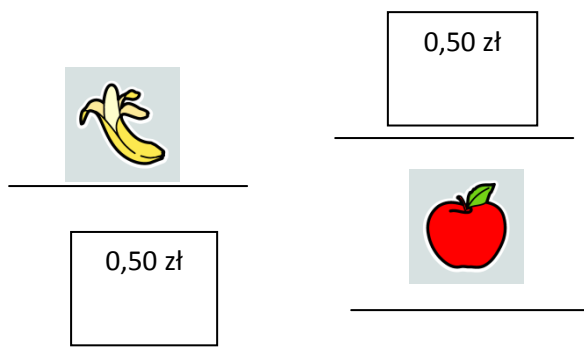
Uczestnicy ustalają, co wynika z tych nierówności: Czy wielbłąd jest cięższy, czy małpa?  
Kolejna podobna zagadka, dla niektórych może mniej oczywista, np.:



I kolejne pytanie: czy banan jest cięższy czy gruszka. Uczestnicy ustawiają w kolejności od najlżejszego do najcięższego jabłko, banana i gruszkę. Prowadzący zwraca uwagę na położenie jabłka na jednej i drugiej wadze.

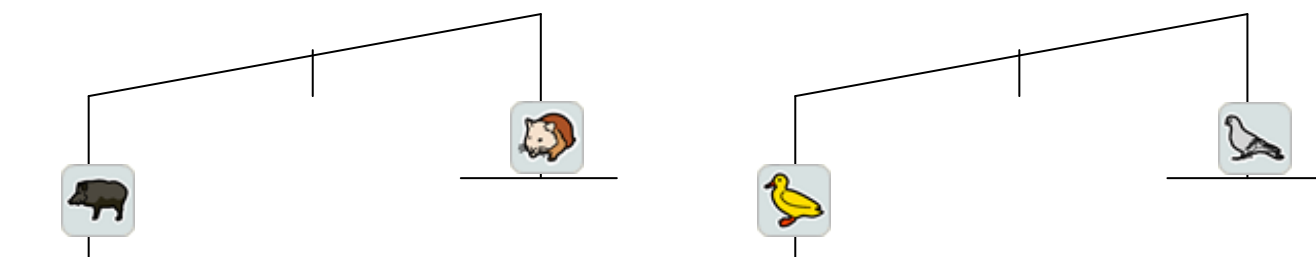
4. Uczestnicy układają zagadki i przekazują je innym do rozwiązania.
5. Jeżeli przy układaniu zagadek przez uczestników taki przykład się nie pojawi, dobrze byłoby sprowokować sytuację, w której nie zachodzi przechodniość nierówności. Na przykład:  
*Jabłko jest cięższe od gruszki, a winogrona są cięższe od cytryny. Czy z takich relacji coś wynika?*
  - ✓ Czy można te owoce ustawić w kolejności od najcięższego do najlżejszego?
  - ✓ Jakich jeszcze informacji potrzebujemy, aby wymienione owoce ustawić w kolejności od najcięższego do najlżejszego?
  - ✓ Które owoce należy jeszcze „zważyć”, aby było to możliwe?

6. Relacja większości może dotyczyć nie tylko wagi. Może być pytanie: *co jest większe?*, *co jest droższe?*, *co jest starsze?*, itp. Jeden z obrazków można zastąpić liczbą z mianem wyrażającą np. cenę, wiek, wagę, wielkość.



Pytanie: *Co z tego wynika?, co jest droższe: banan czy jabłko?*

7. Uczestnicy w grupach układają zagadki i je rozwiązują.
8. Uczestnicy rozwiązują kolejne zadania (można wykorzystać slajdy z prezentacji):
- 1) *Jastrząb jest szybszy od wróbla, papuga lata wolniej niż wróbel. Co lata szybciej: papuga czy jastrząb?*
  - 2) *Staś jest starszy od Jasia, a Małgosia młodsza od Jasia. Kto jest starszy: Małgosia, czy Staś?*
  - 3) *Kasia jest wyższa od Małgosi. Od Kasi wyższy jest Franek. Ustaw dzieci od najwyższego do najniższego.*
  - 4) *W sadzie jabłoni jest więcej niż grusz, śliw jest mniej niż grusz, a moreli jest mniej niż śliw. Których drzew jest najmniej w sadzie, a których najwięcej. Czy moreli jest więcej, czy grusz? Czy jabłoni jest więcej, czy śliw?*
  - 5) *Janek zebrał więcej kasztanów niż Wojtek, a Wojtek zebrał więcej niż Karol. Kto zebrał więcej kasztanów: Janek czy Karol?*
9. Podsumowanie części pierwszej. Jaką własność nierówności badaliśmy?
10. Teraz kolej na inne własności nierówności. Ustawiamy dwie wagi na tablicy:



Prowadzący zadaje pytanie:

- ✓ Czy kaczką z dzikiem ważą więcej czy mniej niż gołąb i chomik razem?
- ✓ Co jeszcze z tego wynika?

Uczestnicy układają inne nierówności wynikające z tych dwóch.

Warto, aby wśród nich pojawiły się również takie nierówności:

*Kaczka z dzikiem ważą więcej niż gołąb.*

*Kaczka z dzikiem ważą więcej niż chomik.*

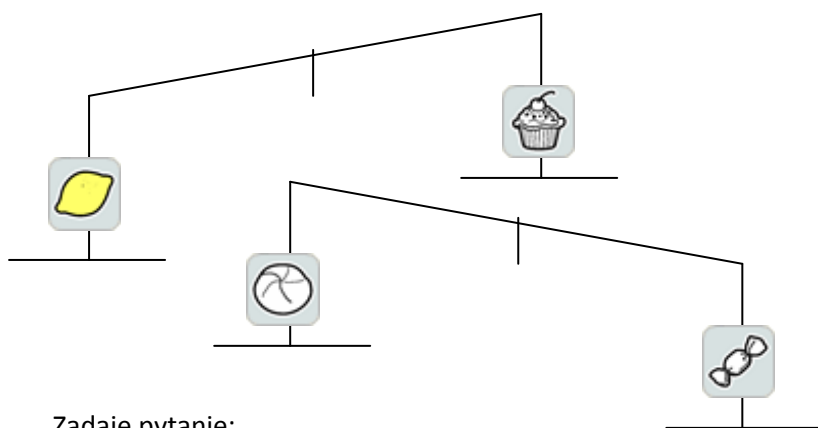
*Dzik z gołębiem ważą więcej niż chomik.*

*Kaczka z chomikiem ważą więcej niż chomik.*

*Kaczka z chomikiem ważą więcej niż gołąb.*

11. Uczestnicy powtarzają w grupach to ćwiczenie, umieszczając na szalkach obu wag inne przedmioty, które możemy porównać pod względem wagi lub ceny: np. owoce, warzywa.

12. Następnie prowadzący ustawia dwie takie wagi:



Zadaje pytanie:

- ✓ Co z tego wynika?
- ✓ Czy cytryna i bułka kosztują więcej niż ciastko i cukierki?

Uczestnicy wyjaśniają, dlaczego takiego wniosku nie możemy wyciągnąć.

Co w takim razie wynika z tych dwóch nierówności? Uczestnicy na swoich wagach ustawiają nierówności, które wynikają z tych dwóch przedstawionych. Odczytują je głośno i je weryfikują.

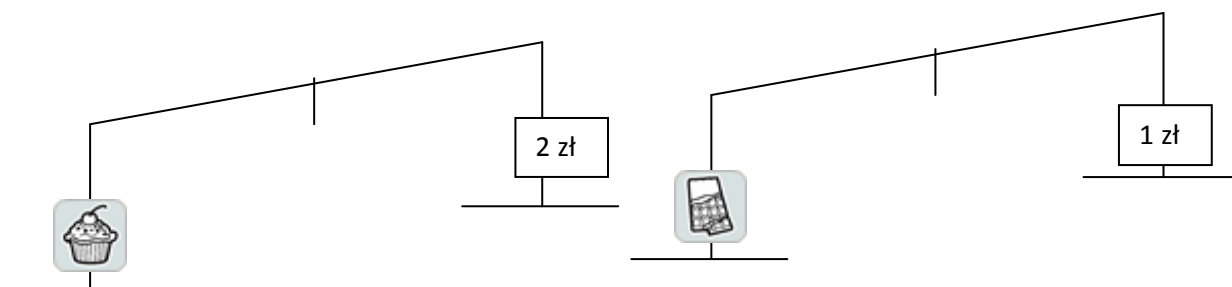
Wśród prawidłowych mogą się pojawić np. takie:

*Cukierki i cytryna razem kosztują więcej niż czereśnie i ciastko.*

*Cukierki i ciastko kosztują więcej niż bułka.*

*Cytryna i bułka kosztują więcej niż ciastko.*

13. Można niektóre obrazki zastąpić przez zapisy wielkości (np. wagi lub ceny)



Uczestnicy ustalają, co wynika z tych zależności. Prawidłowe odpowiedzi uczestnicy ilustrują na szalkach. Wśród prawidłowych mogą się pojawić:

*Ciastko i czekolada razem kosztują więcej niż 3 zł.*

*Ciastko z czekoladą kosztują więcej niż 1 zł.*

*Ciastko z czekoladą kosztują więcej niż 2 zł.*

*Ciastko kosztuje więcej niż 1 zł.*

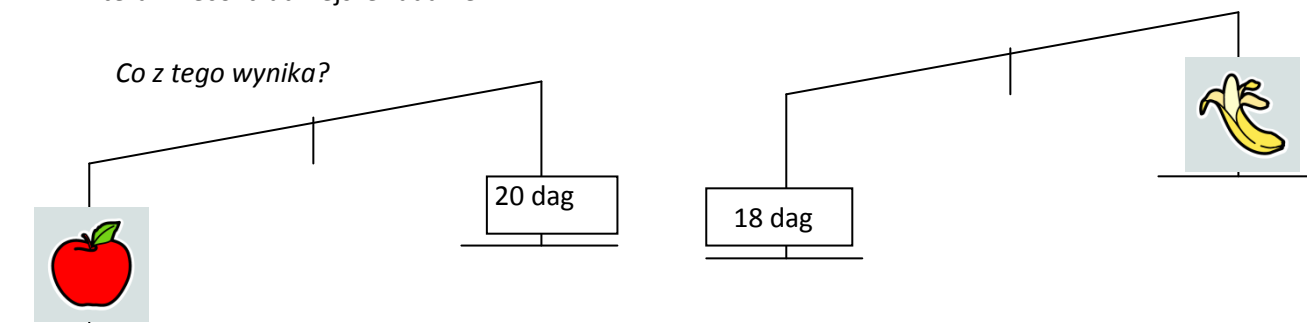
*Dwie czekolady kosztują więcej niż 2 zł.*

*Dwa ciastka kosztują więcej niż 4 zł.*

*Każde z tych zdań można zapisać używając znaku nierówności, np.*

*Ciastko + czekolada > 3 zł*

14. A teraz nieco trudniejsze zadanie.



I możliwe odpowiedzi:

*Jabłko jest cięższe od banana.*

*Jabłko i 18 dag jest cięższe niż banan i 20 dag.*

*Jabłko jest cięższe od banana o więcej niż 2 dag.*

*Banan < 18 dag < 20 dag < jabłko*

Uczestnicy pracują w grupach. Jeden członek grupy układa zagadkę z dwiema wagami – pozostali starają się wyciągnąć możliwie jak najwięcej wniosków. Uczestnicy zapisują swoje wnioski na kartkach, robiąc rysunki i używając symbolu wagi lub symbolu nierówności. Potem w grupie dyskutują, czy są to wnioski prawidłowe.

15. Jaka własność nierówności odkrywaliśmy w drugiej części zajęć?

Dodawanie nierówności stronami i mnożenie nierówności stronami przez liczbę dodatnią.  
Szacowanie z góry i szacowanie z dołu.

16. Te własności nierówności znakomicie przydają się do rozwiązywania zadań na różnych etapach edukacji. Możemy podać przykłady zadań wykorzystujących te własności oraz rachunek algebraiczny.

**Zadanie 1.** (matura 2012 poziom podstawowy)

**Zadanie 27. (2 pkt)**

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste  $a, b, c$  spełniają nierówność  $0 < a < b < c$ , to

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}.$$

Rozwiązanie:

Po pomnożeniu obustronnie nierówności z tezy przez 6 mamy . Zatem, aby uwodnić tezę, będziemy starali się udowodnić tę właśnie nierówność.

Skoro i , to dodając stronami nierówności otrzymujemy .

Do obu stron nierówności dodajemy otrzymujemy nierówność

**Zadanie 2.** (Henryk Pawłowski, *Olimpiady i konkursy matematyczne – zadania dla uczniów szkół podstawowych i gimnazjów*)

Z dwóch przystani A i B wypłynęły na jezioro kajaki. Z przystani B wypłynęło ich mniej niż dwa razy tyle, ile ich wypłynęło z przystani A. Gdyby z przystani A wypłynęło o dwa kajaki więcej, a z przystani B – o dwa kajaki mniej, to z B wypłynęłoby ich więcej niż z A. Ile kajaków wypłynęło z każdej przystani, jeżeli wiadomo, że wypłynęło ich mniej niż 18.

Rozwiązanie:

a – liczba kajaków, które wypłynęły z A

b – liczba kajaków, które wypłynęły z B

Zapisując razem pierwszą i drugą nierówność mamy . Z tego wynika, że , a po odjęciu od obu stron otrzymujemy .

Zapisując razem drugą i trzecią nierówność mamy . Z tego wynika, że . Po dodaniu do obu stron a, odjęciu 4 i podzieleniu obu stron nierówności przez 2 otrzymujemy

Wiemy więc, że , a więc lub .

Gdyby to podstawiając do nierówności pierwszej mamy , a do nierówności drugiej , co przy całkowitej liczbie stanowi sprzeczność.

Zatem , oraz , czyli i zgadza się trzecia nierówność bo

**Zadanie 3.** (Z. Bobiński, P.Nodzyński, M.Uscki, *Liga Zadaniowa – zbiór zadań dla uczniów zainteresowanych matematyką*)

Która z liczb jest większa czy

Rozwiązanie:

Teraz można to łatwo zestawić i mamy

Z czego wynika, że