Tytuł

Zastosowanie rachunku całkowego w obliczeniach praktycznych

Autor

Dariusz Kulma

Dział

Rachunek całkowy

Innowacyjne cele edukacyjne

Rozwijanie w uczniach świadomego korzystania z rachunku całkowego w obliczeniach praktycznych.

Czas

1-2 jednostki lekcyjne

Przebieg

Etap 1 - wprowadzenie

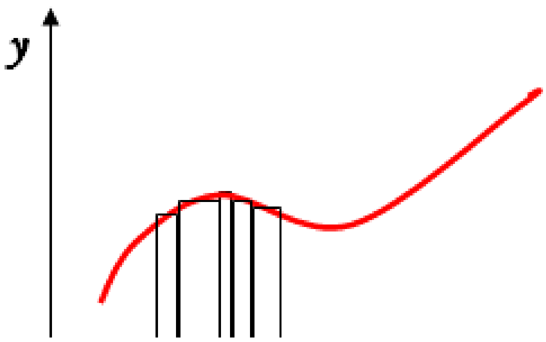
Nauczyciel wprowadza uczniów w temat i przypomina, że uczniowie wiedzą jak oblicza się całki nieoznaczone. Całki oznaczone stosuje się w bardzo wielu dziedzinach życia, np. do obliczania skomplikowanych pól powierzchni czy objętości, które bardzo trudno byłoby obliczyć za pomocą standardowych wzorów.

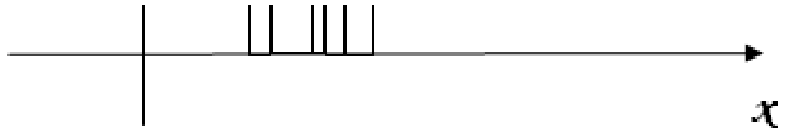
Początki obliczeń, które dzisiaj nazywamy całką oznaczoną pojawiały się już w starożytności, wtedy to całkowanie polegało na mierzeniu pól i przybliżaniu ich figurami o znanych polach. Metody te stosował też Archimedes w obliczaniu objętości brył.

Etap 2 - obserwacja nr 1

Nauczyciel pyta uczniów w jaki sposób mogliby policzyć pole w określonym przedziale pod dowolną krzywą stosując metodę Archimedesa. Jakimi figurami najłatwiej wypełnić tą powierzchnię. Najdokładniejsze przybliżenie można uzyskać przez podzielenie obszaru na wąskie prostokąty.

Rysunek poglądowy:





Otrzymana wartość pola zawsze jednak będzie obarczona jakimś błędem. Nauczyciel wyjaśnia, że całka oznaczona jest narzędziem pozwalającym na dokładne obliczenia, np. wartości pola czy innych wartości jak objętość, środek ciężkości, moment bezwładności, pracę, siłę itd.

Etap 3 - zapoznanie z pojęciem całki oznaczonej

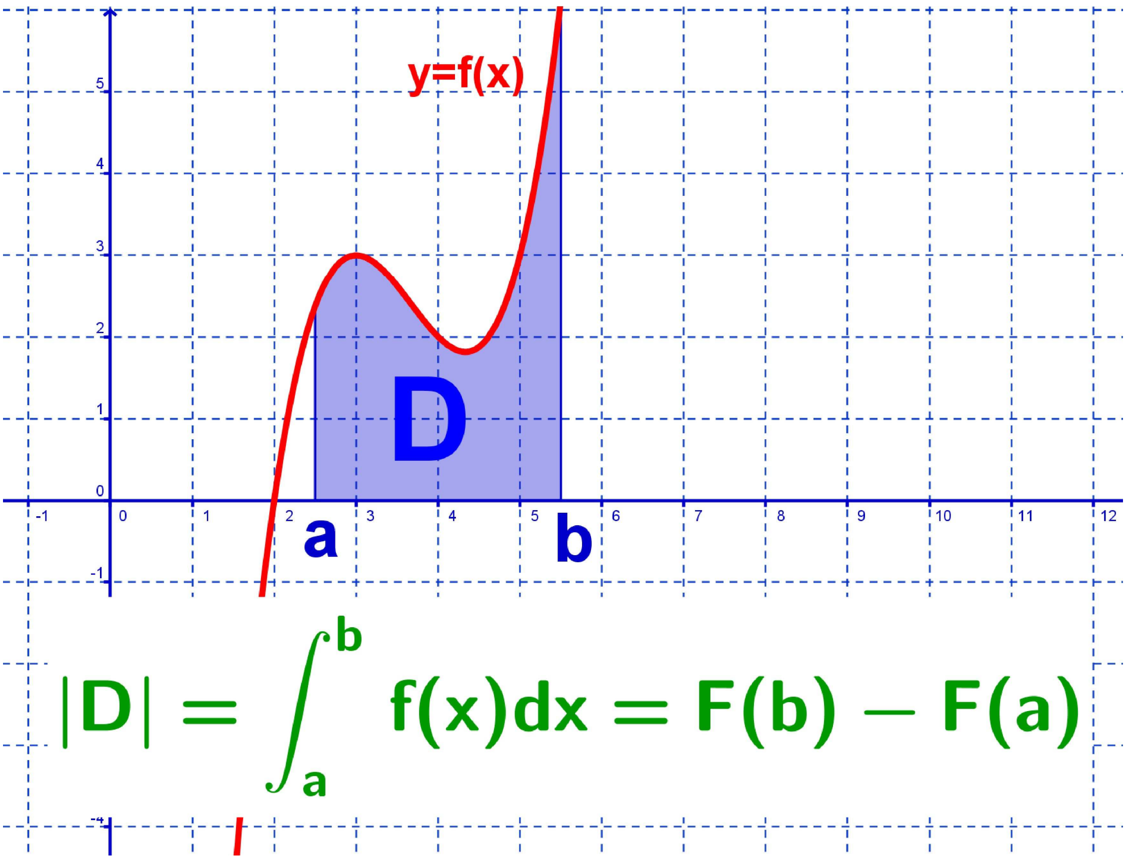
Nauczyciel omawia definicję całki oznaczonej korzystając z materiałów poniżej.

Definicja całki oznaczonej:

Całką oznaczoną funkcji f(x) w przedziale nazywamy różnicę F(a) - F(b) i oznaczamy symbolem:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Wartość całki oznaczonej to pole pod funkcją f(x) w pdziele od x=a do x=b. Mamy więc równość:



Wskazówka dla nauczyciela nr 1

Istotnym elementem jest zwrócenie uwagi na warunki, jakie muszą być spełnione, aby była możliwość skorzystania z całki oznaczonej.

Twierdzenie Newtona Leibniza.

Jeżeli funkcja f(x) jest ciągła i nieujemna w przedziale domkniętym to funkcja F(x) jest różniczkowalna w tym przedziale i jest funkcją pierwotną funkcji f(x) w przedziale tzn.

$$\forall_{x\in\langle a,b\rangle} F'(x) = f(x)$$

Nauczyciel prosi o obliczenie kilku przykładów całek oznaczonych:

a. $\int_{-2}^{3}(x^2+2)dx =$

b. $\int_{2}^{4}\sqrt{x}dx =$

c. $\int_{3}^{5}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx =$

Etap 4 - obliczanie pól powierzchni

Kolejny etap obliczania konkretnych powierzchni najlepiej, gdy nauczyciel omówi na konkretnych zadaniach.

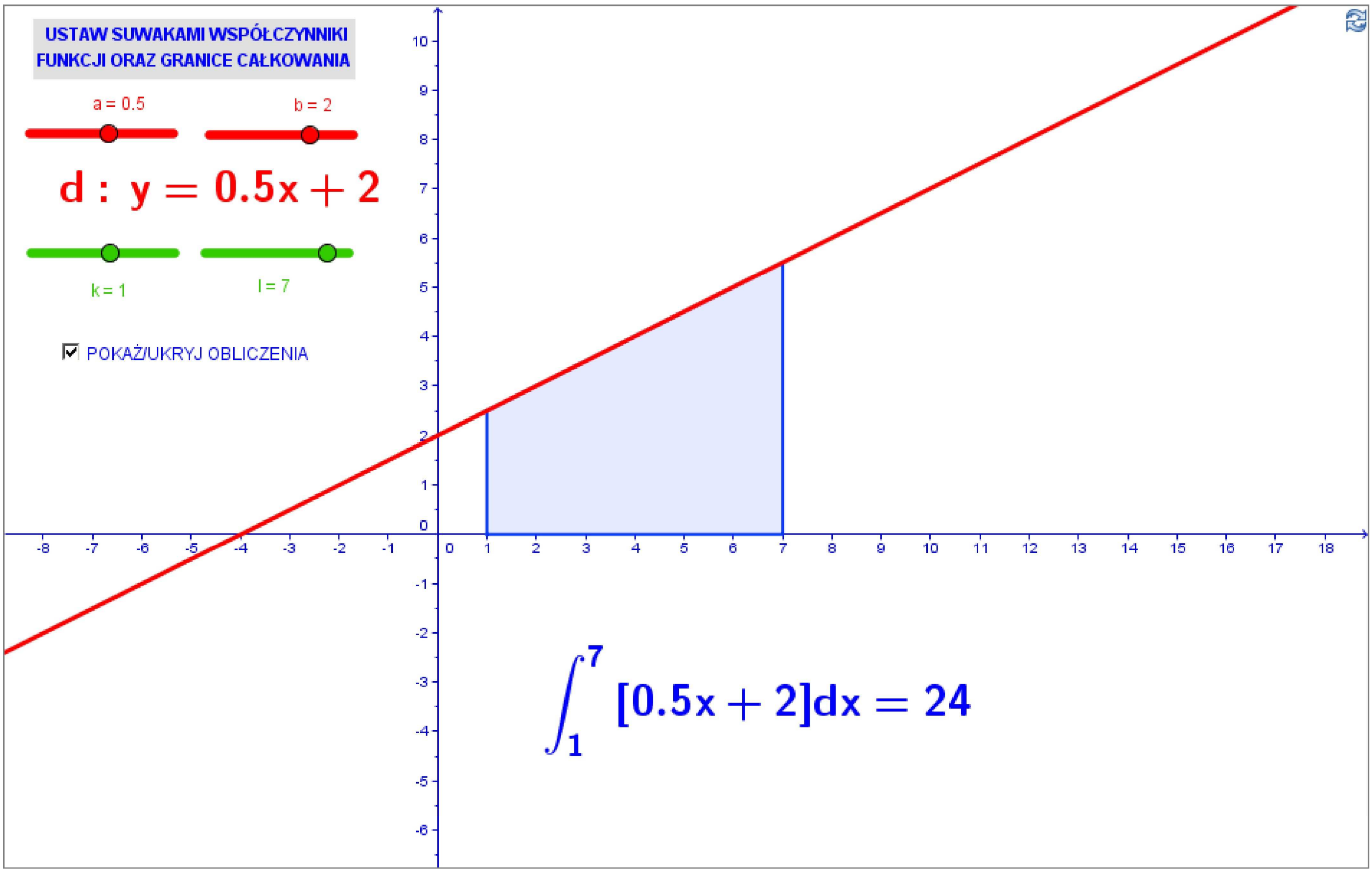
Zadanie 1.

Oblicz pole trójkąta ograniczonego prostą y=0,5x+2 oraz osiami układu współrzędnych. Zadanie wykonaj dwoma sposobami:

- korzystając ze wzoru na pole trójkąta
- korzystając z całki oznaczonej

Stosujemy do naszych obliczeń planszę interaktywną z całką oznaczoną z funkcji liniowej.

Całka oznaczona z funkcji liniowej



Nauczyciel podsumowuje, że oba sposoby są skuteczne i w tym przypadku nie jest korzystne obliczanie pola trójkąta za pomocą całki oznaczonej, ponieważ znamy wzór na pole trójkąta. W przypadku jednak funkcji np. kwadratowych jest to po prostu niezbędne.

Zadanie 2.

Obliczyć pole obszaru ograniczone parabolą $y=4-x^2$ i osiami układu współrzędnych.

Podsumowanie

Po sprawdzeniu wyniku nauczyciel podsumowuje temat i prosi, aby podjąć próbę obliczenia pola zawartego między dwoma parabolami: $y=4-x^2$ i $y=3x-x^2$.