Tytuł

Wyprowadzanie wzoru na Dwumian Newtona

Autor

Dariusz Kulma

Dział

Wyrażenia algebraiczne

Innowacyjne cele edukacyjne

Uczniowie zapoznają się z zagadnieniem trójkąta Pascala w korelacji do dwumianu i symbolu Newtona. Prowadzenie nauki przez obserwacje i wyciąganie wniosków jako najskuteczniejsze formy zapamiętywania.

Czas

1 jednostka lekcyjna

Przebieg

Etap 1 Wprowadzenie

Nauczyciel wprowadza uczniów w temat. Warto zapytać retorycznie czy uczniowie chcieliby wyprowadzać sami wzory skróconego mnożenia np. $(x-y)^7$. Na pewno uczniowie przyznają rację, że dobrze byłoby, żeby nie było konieczności zapamiętywania, a możliwość łatwego i szybkiego wyprowadzania potrzebnego wzoru. Nauczyciel przypomina, że postać $(x+y)^n$ nazywamy dwumianem Newtona. Nauczyciel może krótko przybliżyć postać Newtona.

Etap 2 Obserwacja nr 1

Łatwo wyprowadzić wzór $(x+y)^2$ przedstawiając go jako iloczyn dwóch sum. Nauczyciel prosi, by uczniowie wyprowadzili kilka wzorów za pomocą mnożenia sum i wypisali współczynniki liczbowe przy kolejnych jednomianach. Nauczyciel motywuje uczniów do pracy tłumacząc, że wykonana przez nich praca pozwoli znaleźć zależność, która potem będzie bardzo przydatna.

Karta obserwacji współczynników

WZÓR	KOLEJNE WSPÓŁCZYNNIKI				
$(x+y)^0$					
$(x+y)^1$					
$(x+y)^2$					
$(x+y)^3$					
$(x+y)^4$					

Wskazówka dla nauczyciela nr 1

Należy zwrócić uwagę, by uczniowie zapisali wielomiany w postaci uporządkowanej od najwyższej potęgi do najniższej oraz na dokładność rachunkową obliczeń. Warto wspólnie sprawdzić, jakie wyniki uczniowie otrzymali w karcie obserwacji.

Prawidłowo wypełniona tabela współczynników

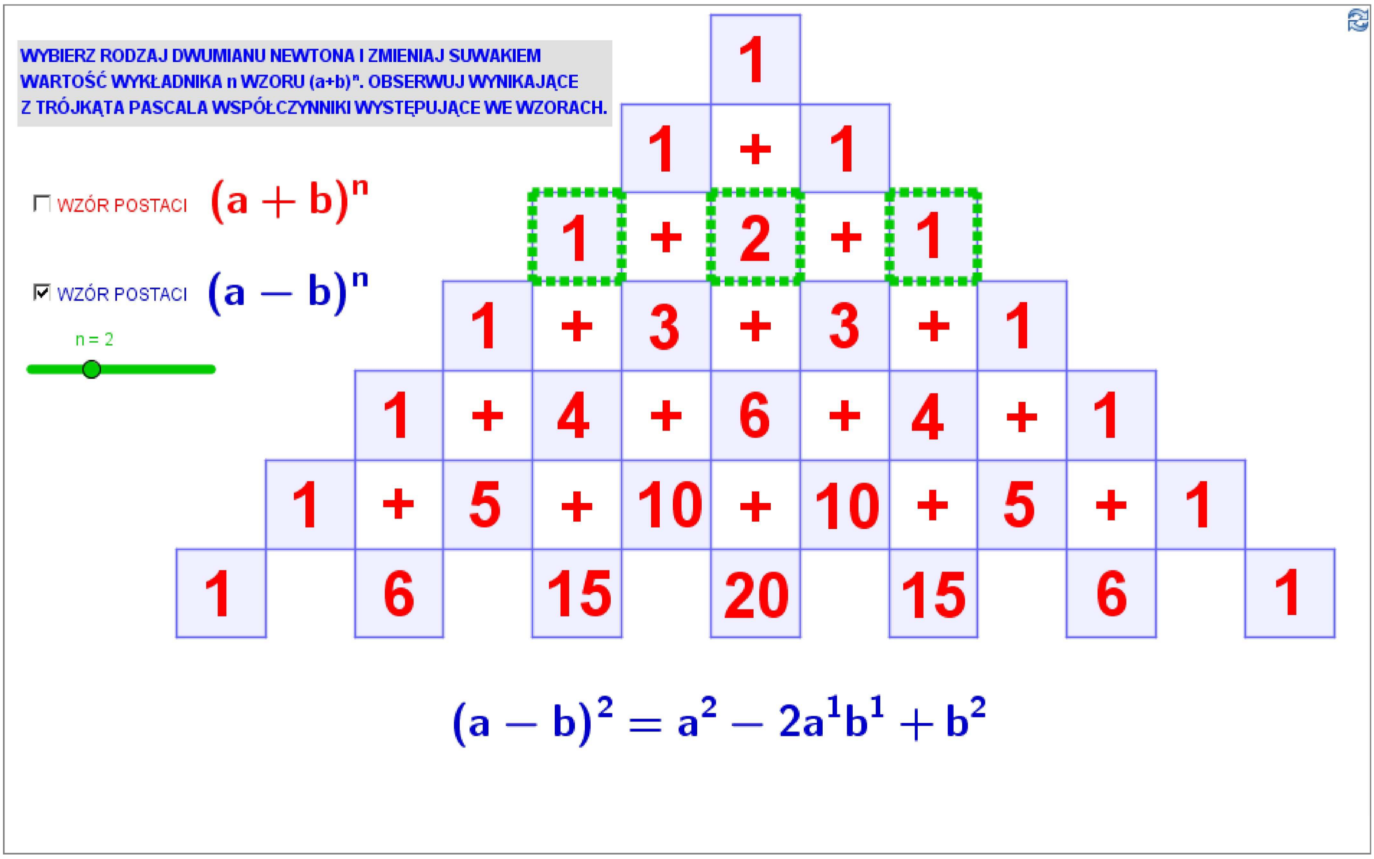
WZÓR	KOLEJNE WSPÓŁCZYNNIKI				
$(x+y)^0$	1				
$(x+y)^1$	1	1			
$(x+y)^2$	1	2	1		
$(x+y)^3$	1	3	3	1	
$(x+y)^4$	1	4	6	4	1

Nauczyciel prosi o wyciągnięcie wniosków na podstawie wypełnionej tabeli. Jeśli uczniowie nie zaobserwowali zależności, można dopisać im jeszcze jeden wiersz współczynników:

$(x+y)^5$	1	5	10	10	5	1

Na pewno uczniowie zaobserwują, że zawsze na początku i końcu znajduje się liczba jeden, a drugie liczby dla kolejnych dwumianów rosną o jeden w kolejnych cyklach, wskazując jak w prosty sposób uzyskiwać kolejne współczynniki.

Nauczyciel wyświetla i omawia planszę z trójkątem Pascala i jej liczbowymi zależnościami.



Dwumian Newtona, a trójkąt Pascala.

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, Utworzony z GeoGebra

Etap 3 Obserwacja nr 2

Po zależności współczynników nauczyciel przechodzi do zachęcenia uczniów, by zaobserwowali co dzieje się z wykładnikami potęg dla kolejnych wzorów w kolejnych jednomianach.

Wskazówka dla nauczyciela nr 2

Koniecznie należy zwrócić uwagę, że jeśli nie ma jednej ze zmiennych, to jej wykładnik jest równy 0.

Nauczyciel rozdaje kolejne karty obserwacji.

Karta obserwacji

<table>
<tr><td>WZÓR
$(x+y)^n$</td><td>n</td><td colspan="5">PARY WYKŁADNIKÓW W KOLEJNYCH JEDNOMIANACH</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(x+y)^2$</td><td rowspan="2">2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">JAKIE SĄ SUMY WYKŁADNIKÓW W POSZCZEGÓLNYCH PARACH?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(x+y)^3$</td><td rowspan="2">3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">JAKIE SĄ SUMY WYKŁADNIKÓW W POSZCZEGÓLNYCH PARACH?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(x+y)^4$</td><td rowspan="2">4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">JAKIE SĄ SUMY WYKŁADNIKÓW W POSZCZEGÓLNYCH PARACH?</td></tr>
</table>

Prawidłowo wypełniona karta obserwacji:

<table>
<tr><td>WZÓR
$(x+y)^n$</td><td>n</td><td colspan="5">PARY WYKŁADNIKÓW W KOLEJNYCH JEDNOMIANACH</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(x+y)^2$</td><td rowspan="2">2</td><td>2;0</td><td>1;1</td><td>0;2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">JAKIE SĄ SUMY WYKŁADNIKÓW W POSZCZEGÓLNYCH PARACH?
2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(x+y)^3$</td><td rowspan="2">3</td><td>3;0</td><td>2;1</td><td>1;2</td><td>0;3</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">JAKIE SĄ SUMY WYKŁADNIKÓW W POSZCZEGÓLNYCH PARACH?
3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$(x+y)^4$</td><td rowspan="2">4</td><td>4;0</td><td>3;1</td><td>2;2</td><td>1;3</td><td>0;4</td></tr>
<tr><td colspan="5">JAKIE SĄ SUMY WYKŁADNIKÓW W POSZCZEGÓLNYCH PARACH?
4</td></tr>
</table>

Uczniowie bez problemu powinni zauważyć zależność. Suma wykładników w każdym jednomianie jest stała dla danego wzoru i jest równa liczbie n.

Etap 4 Obserwacja nr 3

Zostało jeszcze ustalenie znaków poszczególnych jednomianów. Oczywiście formalnością jest zauważenie, że dwumiany ze znakiem dodawania rozłożą się tylko na jednomiany dodatnie.

Nauczyciel przypomina uczniom, co się dzieje z liczbą ujemną w zależności od parzystości wykładnika.

W wyrażeniu $(x-y)^n$ liczba y jest ujemna dla wykładników nieparzystych, a dodatnia dla parzystych:

$(x-y)^5=x^5-5x^4y^1+10x^3y^2-10x^2y^3+5x^1y^4-y^5$

Wynika z tego, że wartość kolejnych jednomianów zmienia się co drugi jednomian, a pierwszy jednomian jest zawsze dodatni.

Nauczyciel podsumowuje, że to wszystkie składowe elementy potrzebne do wyprowadzania wzorów skróconego mnożenia.

Etap 5 Ćwiczenia utrwalające

Nauczyciel prosi uczniów o wyprowadzenie wzoru, o którym mówił na początku lekcji

$(x-y)^7=$

Po sprawdzeniu poprawności nauczyciel zadaje kilka przykładów na konkretnych wartościach liczbowych.

$(x-4)^4=$

$(2x+3y)^5=$

$(\sqrt{2}+1)^6=$

Po przećwiczeniu umiejętności nauczyciel pokazuje, że można zależność uogólnić posługując się symbolem Newtona $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Wtedy wzór na dwumian Newtona można zapisać następująco:

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

Nauczyciel, jeśli jest taka konieczność, przypomina co oznacza znak silni oraz wartość 0!=1. Następnie omawia wzór na przykładzie

$$(x+y)^3=\frac{3!}{0!(3-0)!}x^0y^{3-0}+\frac{3!}{1!(3-1)!}x^1y^{3-1}+\frac{3!}{2!(3-2)!}x^2y^{3-2}+\frac{3!}{3!(3-3)!}x^3y^{3-3}$$

Więc otrzymamy

$$(x+y)^3=\frac{3!}{3!}y^3+\frac{3!}{1!2!}x^1y^2+\frac{3!}{2!1!}x^2y^1+\frac{3!}{3!}x^3=y^3+3x^1y^2+3x^2y^1+x^3$$

Nauczyciel prosi o zastosowanie symbolu Newtona na wzorze:

$(x+y)^4=$

Podsumowanie

Po sprawdzeniu wyniku nauczyciel podsumowuje temat i prosi, aby podjąć próbę wyznaczenia dziesiątego jednomianu wyrażenia $(x+y)^{20}=$