Tytuł

Wieże Hanoi

Autor

Tomasz Herud

Dział

Gry matematyczne

Czas

1 jednostka lekcyjna

Przebieg

Etap 1 Wprowadzenie

Nauczyciel zapoznaje uczniów z historią Wieży Hanoi.

- Autor: Édouard Lucas
- Data powstania: 1883 rok

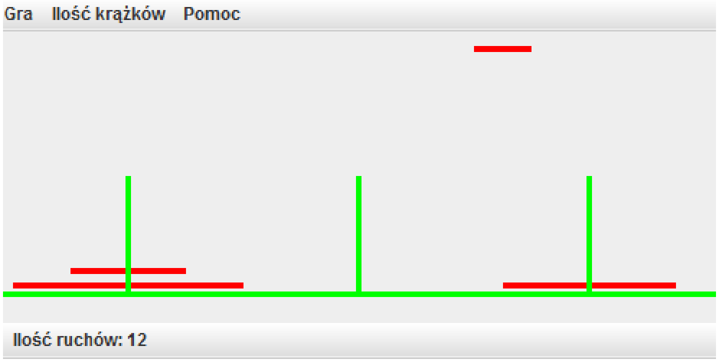
Nauczyciel na podstawie prezentacji multimedialnej* - [POBIERZ] zapoznaje uczniów z zasadami Wieży Hanoi.

- Trzy słupki:
  - Początkowy
  - Końcowy
  - Pomocniczy
- Można układać tylko mniejszy na większy
- Można przekładać tylko jeden krążek jednocześnie
- Można brać tylko krążek z samej góry

*Do otworzenia prezentacji niezbędny jest program Microsoft Office PowerPoint 2007 lub darmowy program Microsoft Office PowerPoint Viewer 2007(program wraz z opisem instalacji dostępny jest na stronie producenta: [POBIERZ])

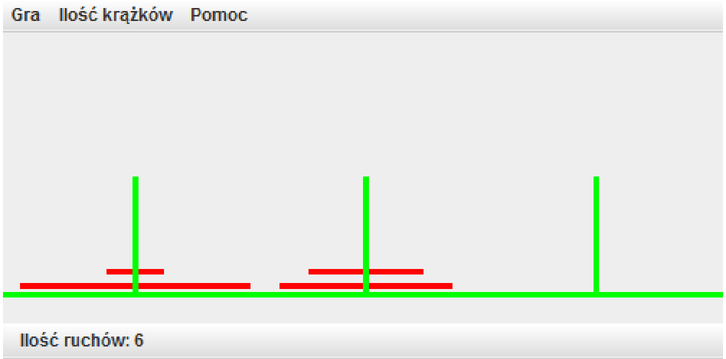
Etap 2 Pierwsze próby ułożenia wieży

Nauczyciel uruchamia uczniom program w trybie gry, aby uczniowie sami mogli spróbować ułożyć wieżę **(Gra>Rozpocznij grę) - PATRZ APLET**



Etap 3 Prezentacja algorytmu układania wieży

Nauczyciel uruchamia program w trybie symulacji i tłumaczy, dlaczego należy przekładać krążki w takiej kolejności **(Gra>Rozpocznij symulację)**



Etap 4 Wyprowadzenie wzoru matematycznego

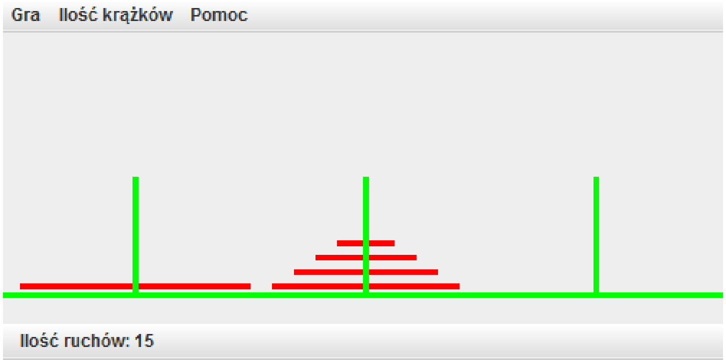
Nauczyciel pyta uczniów o wzór na ilość potrzebnych ruchów, w razie braku poprawnej odpowiedzi sam go podaje:

- **wzór rekurencyjny: f(n) = 2f(n-1)+1**

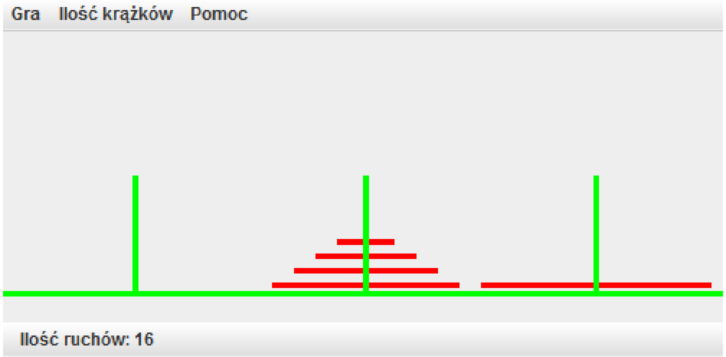
Nauczyciel ustnie uzasadnia podany wzór rekurencyjny i omawia pojęcia algorytmu i rekurencji.

Uzasadnienie wzoru rekurencyjnego: aby przenieść wieżę należy:

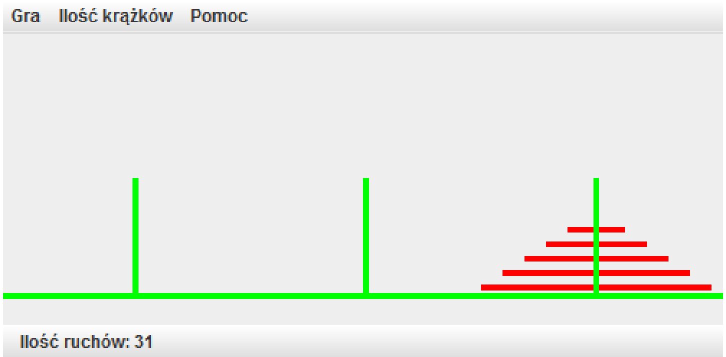
- Przenieść całą wieżę bez jednego dolnego krążka na pomocniczy słupek (bufor)



- Przenieść największy (dolny) krążek na docelowy słupek



- Przenieść pozostałą wieżę z pomocniczego słupka na docelowy



wzór ogólny: $f(n) = 2^n-1$

Nauczyciel lub wybrany uczeń przeprowadza dowód indukcyjny z wykorzystaniem wzoru rekurencyjnego na tablicy.

Twierdzenie:

$f(n) = 2^n-1$

Dowód:

Sprawdzenie dla n=1

- $f(1) = 2^1-1=1$

Istotnie tyle trzeba ruchów do przeniesienia jednopiętrowej wieży, zatem twierdzenie jest prawdziwe dla n=1

- Założenie indukcyjne. Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k

$f(k) = 2^k-1 \quad k \in N_+$

- Teza indukcyjna. Twierdzenie dla k+1

$f(k+1) = 2^{k+1}-1$

- Krok indukcyjny. Pokażemy, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla k, to jest prawdziwe także dla k+1

Przekształcając wzór rekurencyjny $f(n) = 2 \cdot f(n-1)+1$ dla $n=m+1$ otrzymujemy $f(m+1) = 2 \cdot f(m)+1$

Podstawiając na miejsce f(m) wzór z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$f(m+1) = 2 \cdot (2^m-1)+1 = 2^{m+1}-2+1 = 2^{m+1}-1$

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną, więc wzór jest poprawny.

Nauczyciel wyprowadza wzór ogólny na tablicy.

Wyprowadzenie:

$f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1 \quad |+1$

$f(n) + 1 = 2 \cdot f(n-1) + 2 = 2 \cdot (f(n-1) + 1)$

Niech $g(n) = f(n) + 1$

Wtedy
$g(n) = f(n) + 1 = 2 \cdot (f(n-1) + 1) = 2 \cdot g(n-1)$

$g(n) = 2 \cdot g(n-1)$

Czyli otrzymaliśmy równanie określające ciąg geometryczny.

Wiedząc, że $f(1) = 1$ to

$g(1) = f(1) + 1 = 1 + 1 = 2$
$g(2) = 2 \cdot g(1) = 2 \cdot 2 = 4$
$g(3) = 8$
...
$g(n) = 2^n$

Po powrocie do f(n) otrzymujemy

$f(n) = g(n) - 1 = 2^n - 1$

Legenda

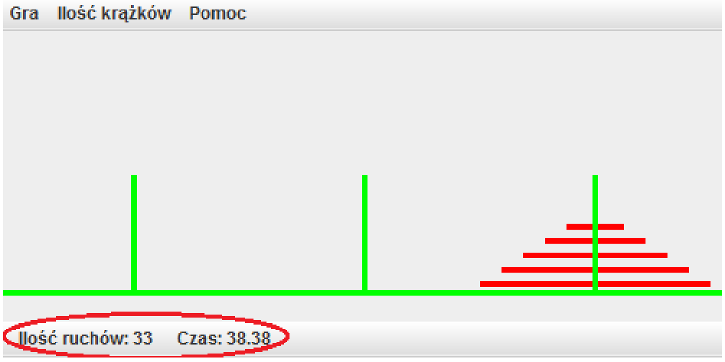
Jak głosi stara hinduska legenda, przy stworzeniu świata, w jego środku, pod dachem świątyni, umieszczone zostały trzy diamentowe pałeczki. Na jedną z nich nałożone były 64 złote krążki o zmniejszających się średnicach tworząc złoty stożek. Dzień i noc, zmieniając się bezustannie, mnisi przekładali krążki na trzecią pałeczkę.

Musieli jednak zachować pewne zasady. Mogli posiłkować się drugą pałeczką, jednakże nie wolno było im przenosić więcej niż jednego krążka i umieszczać większego na mniejszym. Gdy wykonają swoje zadanie - nastąpi koniec świata!

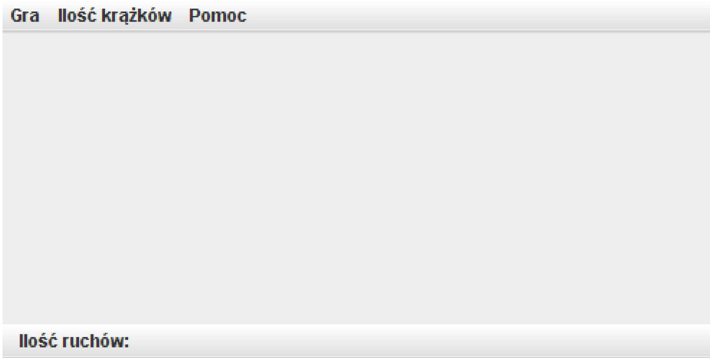
- Obliczenie daty końca świata
  - $2^{64}-1$ = 18 446 744 073 709 551 615 (blisko 18 i pół tryliona) sekund
  - Około 584 542 mld lat
  - Wszechświat ma około 13,7 mld lat
  - Dodatkowe obliczenie jak wysoką wieże zdążyli by mnisi przenieść od początku świata.

Etap 5 Zawody w układaniu wieży na czas

Uczniowie grają w grę i konkurują między sobą czasami ułożenia Wieży Hanoi



Aplet



Podsumowanie

- Uczniowie poznają, co to dowód rekurencyjny
- Uczniowie poznają kilka pojęć informatycznych
  - Algorytm
  - Rekurencja

- Uczniowie wyrabiają refleks i szybkie myślenie