



Tytuł

Sztuka szybkiego liczenia Cz. II

Autor

Dariusz Kułma

Dział

Liczby wymierne

Innowacyjne cele edukacyjne

Zapoznanie uczniów z technikami szybkiego liczenia w pamięci niestosowanymi na lekcjach matematyki:

- Algorytm mnożenia w pamięci liczb z zakresu 11-19, np. 11 razy 15.
- Algorytm szybkiego mnożenia liczb bliskich 100 i 1000, np. 98 razy 97 czy 1002 razy 1005.

Stosowanie aktywizujących gier dydaktycznych utrwalających techniki szybkiego liczenia.

Zmotywowanie uczniów do poznawania kolejnych sposobów szybkiego liczenia.

Pokazanie uczniom, że nawet bardziej skomplikowane obliczenia są możliwe do nauczenia się przez każdego.

Czas

2 jednostki lekcyjne

Przebieg

Etap 1 - wprowadzenie

Nauczyciel przypomina, że na poprzednich zajęciach uczniowie poznali elementy matematyki wedyjskiej z pierwszej sutry (części) tych algorytmów. Uczniowie razem z nauczycielem przypominają na czym polegały algorytmy. Nauczyciel jeszcze raz tłumaczy obie poznane techniki na przykładach np. mnożenia 66 razy 64 i obliczeniu 552. Warto odnieść się do pracy uczniów na platformie ELITMAT SPACE.

Etap 2 - algorytm 3

Mnożenie liczb naturalnych dwucyfrowych z przedziału od 11 do 19.

W celu pomnożenia wyżej wymienionego typu liczb należy do pierwszej liczby dodać cyfrę jedności drugiej liczby oraz dopisać iloczyn obu cyfr jedności.

Przykłady do zaprezentowania algorytmu:

$$\begin{array}{c}
 12 + 3 = 15 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 12 \times 13 = 156 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 2 \times 3 = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 11 + 5 = 16 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 11 \times 15 = 165 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 1 \times 5 = 5
 \end{array}$$

Nauczyciel prosi o rozwiązanie kilku analogicznych przykładów:

- $14 \cdot 12$
- $13 \cdot 11$

Po sprawdzeniu wyników nauczyciel rozszerza metodę o sytuację, gdy iloczyn cyfr jedności jest większy od dziesięciu. W takiej sytuacji cyfrę dziesiątek dodajemy do cyfry jedności sumy uzyskanej z dodawania jednej liczby i cyfry jedności drugiej np.

$$\begin{array}{c}
 16 + 6 = 22 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 16 \times 16 = 22 \\
 \quad \quad \quad + \\
 \quad \quad \quad 36 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 256
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 14 + 7 = 21 \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\
 14 \times 17 = 21 \\
 \quad \quad \quad + \\
 \quad \quad \quad 28 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 238
 \end{array}$$

Nauczyciel prosi o rozwiązanie kilku analogicznych przykładów takiego typu:

- $12 \cdot 19$
- $14 \cdot 15$
- $16 \cdot 13$
- $15 \cdot 16$

Nauczyciel przypomina, że sposób można również stosować na ułamkach dziesiętnych przesuując odpowiednio przecinek.

Etap 3 - gra dydaktyczna - utrwalająca algorytm 3

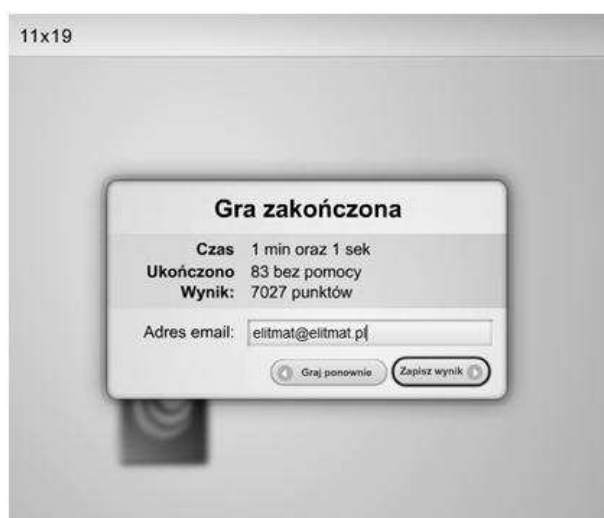
Nauczyciel w celu utrwalenia poznanych algorytmów stosuje grę dydaktyczną, wykorzystując komputer lub projektor, w której na czas uczniowie będą odkrywali karty z kolejnymi wynikami. W grę uczniowie grają indywidualnie. Liczy się najlepszy wynik, a przy równorzędnym wyniku liczy się jak najkrótszy czas. Można prowadzić ranking wyników.

W przypadku braku możliwości stosowania komputera z projektorem w czasie lekcji nauczyciel będzie miał możliwość wydrukowania kart z pliku PDF ze strony ELITMAT SPACE lub płyty multimedialnej z materiałami do prowadzenia zajęć ELITMAT TEAM.

Plansza gry z algorytmem na mnożenie:



Plansza gry z wynikiem, czasem, punktacją:



Plansza gry z rankingiem uczestników:

Tabela wyników 11x19

Ranking	Gracz	Punkty	Data
1	MarekPe	12340	16.02.2011
2	Magda89	11150	14.02.2011
3	CzarnyAlibaba	9870	17.02.2011
4	Dziuglak	7850	18.02.2011
5	Elitmatek	7777	15.02.2011
6	CoolWiesiek	6572	10.01.2011

Nauczyciel może przeprowadzić ranking najlepszych wyników. Ważne jest jednak, aby chwalić wszelkie zdobycze punktowe uczniów oraz motywować do niwelowania błędów. Warto zwrócić uwagę na to, by każdy uczeń z grupy wziął udział w grze. Oglądanie przez pozostałych uczniów przebiegu gry kolegi czy koleżanki jest jak najbardziej kształcące, gdyż uczniowie obserwując utralają poznane algorytmy oraz dobierają odpowiednią strategię.

Etap 4 - algorytm 4

- Zapoznanie z algorytmem szybkiego mnożenia liczb bliskich 100 i 1000 np. 98 razy 97 czy 1002 razy 1005.

Metoda polega na opieraniu się na różnicach czynników iloczynu w stosunku do bazy (100, 1000 czy większych).

Dobrze jest, gdy nauczyciel rozdzieli algorytm dla liczb z bazą 100 (bliskich 100) i z bazą 1000 (bliskich 1000), a także mniejszych i większych od bazy. Zasady algorytmu są podobne jednak wymagane jest usystematyzowanie na początku stosowaniu algorytmu na poszczególnych parach liczb.

- Nauczyciel zapoznaje z algorytmem na przykładzie liczb bliskich i mniejszych od 100.

W algorytmie tym liczby będące dopełnieniem do stu w każdej z czynników sumujemy i odejmujemy od bazy (w tym przypadku do 100). Wynik jest dwoma pierwszymi cyframi szukanej liczby. Pozostałe dwie cyfry otrzymujemy mnożąc liczby będące dopełnieniem do bazy i zapisujemy wynik w postaci

$$\begin{array}{r} 2 \times 3 = 6 \\ \overbrace{100-2} \quad \overbrace{100-3} \\ 98 \times 97 = 9506 \\ 100 - 2 - 3 = 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \times 3 = 15 \\ \overbrace{100-5} \quad \overbrace{100-3} \\ 95 \times 97 = 9215 \\ 100 - 5 - 3 = 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \times 5 = 20 \\ \overbrace{100-4} \quad \overbrace{100-5} \\ 96 \times 95 = 9120 \\ 100 - 4 - 5 = 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \times 5 = 35 \\ \overbrace{100-7} \quad \overbrace{100-5} \\ 93 \times 95 = 8835 \\ 100 - 7 - 5 = 88 \end{array}$$

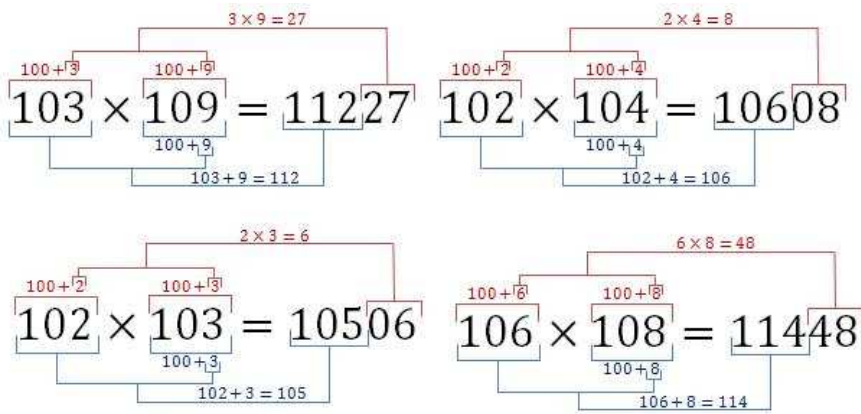
$$\begin{array}{r} 7 \times 3 = 21 \\ \overbrace{100-7} \quad \overbrace{100-3} \\ 93 \times 97 = 9021 \\ 100 - 7 - 3 = 90 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times 1 = 3 \\ \overbrace{100-3} \quad \overbrace{100-1} \\ 97 \times 99 = 9603 \\ 100 - 3 - 1 = 96 \end{array}$$

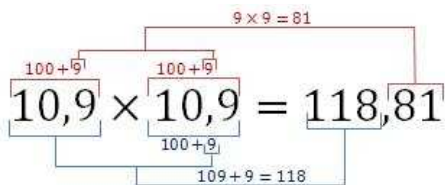
Nauczyciel podaje kilka przykładów do samodzielnego przećwiczenia:

- 92 · 94
- 93 · 98
- 88 · 96
- 89 · 91

- Nauczyciel zapoznaje z algorytmem na przykładzie liczb bliskich i większych od 100.



Warto pokazać odniesienie algorytmu do ułamków dziesiętnych:

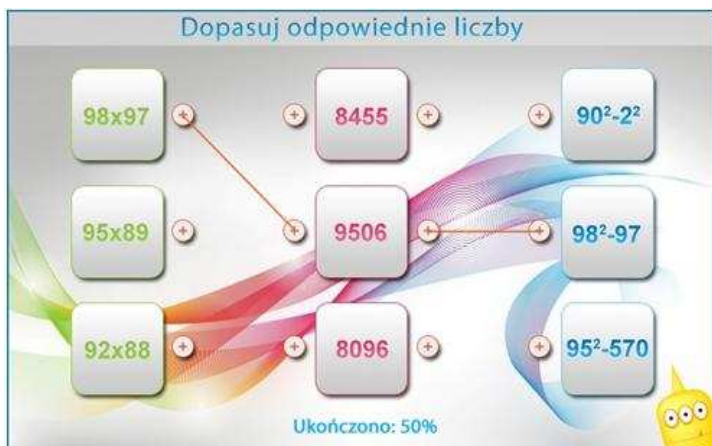


Nauczyciel podaje kilka przykładów do samodzielnego przećwiczenia:

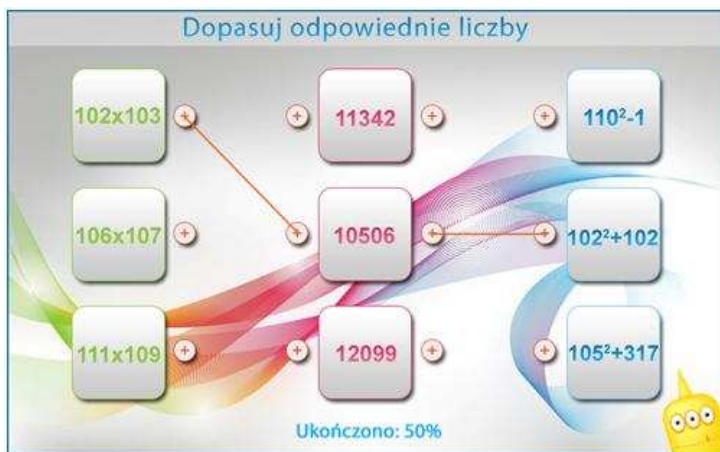
- $102 \cdot 107$
- $105 \cdot 111$
- $108 \cdot 109$
- $112 \cdot 106$

Dla utrwalenia tego algorytmu szybkiego mnożenia liczb bliskich 100, po dwóch typach można zastosować grę lub ćwiczenia interaktywne z łączeniem odpowiednich wyników, ale w odniesieniu również innych działań.

Przykładowa plansza ćwiczenia interaktywnego dotycząca algorytmu mnożenia liczb bliskich i mniejszych 100:



Przykładowa plansza ćwiczenia interaktywnego dotyczącego algorytmu liczb bliskich i większych 100:



Po utrwaleniu umiejętności stosowania algorytmu na liczbach bliskich 100 nauczyciel pokazuje, że metoda jest skuteczna również na liczbach bliskich tysiącom, ale również można metodę stosować na liczbach bliskich.

- Nauczyciel zapoznaje uczniów z działaniem poznanego wcześniej algorytmu na przykładzie liczb bliskich i mniejszych od 1000.

Zasada jest taka sama jak w przypadku liczb bliskich stu. Należy zwrócić uwagę, że dopisywany iloczyn dopełnień do bazy musi mieć postać trzycyfrową.

$$\begin{array}{r}
 1000 + 12 = 1012 \\
 \begin{array}{r}
 5 + 7 = 12 \\
 1000 + 5 \\
 1000 + 7 \\
 \hline
 1005 \times 1007 = 1012035 \\
 \hline
 5 \times 7 = 35
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1000 + 26 = 1026 \\
 \begin{array}{r}
 11 + 15 = 26 \\
 1000 + 11 \\
 1000 + 15 \\
 \hline
 1011 \times 1015 = 1026165 \\
 \hline
 11 \times 15 = 165
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1000 + 55 = 1055 \\
 \begin{array}{r}
 25 + 30 = 55 \\
 1000 + 25 \\
 1000 + 30 \\
 \hline
 1025 \times 1030 = 1055750 \\
 \hline
 25 \times 30 = 750
 \end{array}
 \end{array}$$

Można pokazać również przykład, który dzięki temu algorytmowi pozwala obliczać kwadraty liczb.

$$\begin{array}{r}
 1000 + 46 = 1046 \\
 \begin{array}{r}
 23 + 23 = 46 \\
 1000 + 23 \\
 1000 + 23 \\
 \hline
 1023^2 = 1023 \times 1023 = 1046529 \\
 \hline
 23 \times 23 = 529
 \end{array}
 \end{array}$$

Przykłady do ćwiczeń ostatniego typu:

- $1002 \cdot 1007$
- $1005 \cdot 1012$

• 1010 · 1009

• 1008 · 1011

Etap 5 - gra dydaktyczna - utrwalająca algorytmy

Do podsumowania i utrwalenia wszystkich algorytmów i ich typów nauczyciel może zastosować grę planszową Parkur Matematyczny. Dokładny opis gry znajduje się w załączniku Gry Dziugłaka. Grę można zastosować dla dowolnego działu matematyki do sprawdzania szybko i w efektywny sposób wiadomości lub umiejętności uczniów.

Gra zespołowa lub indywidualna

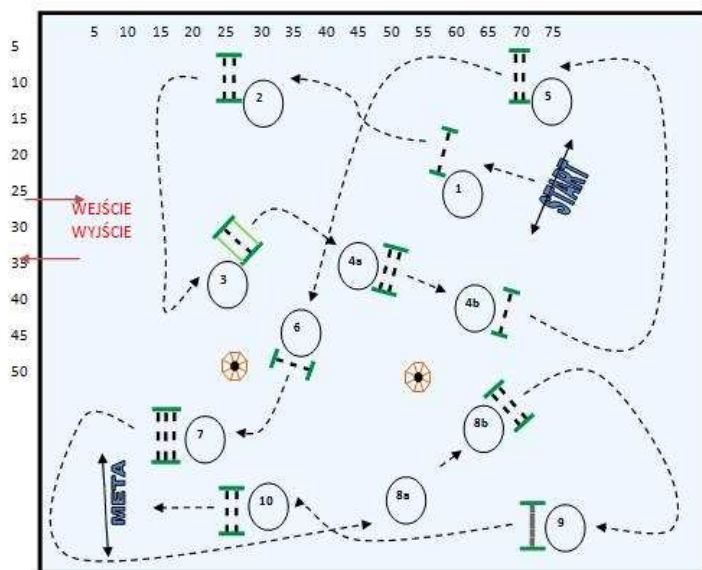


OGÓLNE ZASADY GRY

Parkur to ogrodzony plac z przeszkodami, które pokonuje jeździec na koniu. Gracz wciela się w postać takiego jeźdźca i punktuje dla swojej drużyny-stajni na jednej przeszkodzie, z tym że przeszkody pokonuje się zadaniami matematycznymi.

WIZUALIZACJA GRY

Tabela wyników pokonywania kolejnych przeszkód oraz ewentualnie rycina parkura dostępna na platformie ELITMAT SPACE z możliwością wyświetlenia za pomocą projektora lub wydrukowania z formatu PDF.



Poniżej plansza z gotową tabelą wyników po rozgrywce parkura pokazująca, które zadania czyli parkurowe przeszkody zostały zaliczone, a które stracone.

Zadania	1	2	3	4a	4b	5	6	7	8a	8b	9	10	pkt
Grupa													
I	X	X	X	X	X	O	X	X	X	O	O	O	32
II	O	O	X	X	O	O	X	O	O	O	O	O	54

PRZEBIEG GRY

- Każda drużyna-stajnia rozstawia swoich zawodników do poszczególnych przeszkód. Jest to o tyle ważne, że za zaliczenie przeszkód przyznawana jest różna liczba punktów.

- Numer przeszkody oznacza jednocześnie liczbę punktów za jej pokonanie. Nie ma wpływu na punktację to, że przeszkoda ma numer np. 4a. Na tej przeszkodzie można zdobyć 4 pkt.
- Następnie przystępujemy do zasadniczej fazy gry – pokonania przeszkody. W tym celu każdy gracz drogą losową otrzymuje zadanie i przystępuje samodzielnie do jego rozwiązywania. Jeśli rozwiąże je prawidłowo, to oznacza, że przeszkodę zaliczył i wtedy zyskuje dla swojej drużyny liczbę punktów równą numerowi pokonanej przeszkody. Popełniając błąd w rozwiązaniu, strąca przeszkodę i nie zdobywa punktów dla drużyny.

ZWYCIĘSTWO W GRZE

- Po podejściach do wszystkich przeszkód na parkurze, drużyny-stajnie porównują swój dorobek.
- Wygrywa ta drużyna, która zebrała największą liczbę punktów. W przypadku równej liczby punktów kilku drużyn, za zwycięską uznaje się tę, której gracze pokonali więcej przeszkód.

WSKAZÓWKI DLA NAUCZYCIELA DOTYCZĄCA GRY

Najlepiej grę stosować do porównywania poziomu przyswojenia bieżących tematów między uczniami. Wtedy gra jest korespondencyjna. W przypadku większej liczby uczniów niż przeszkód, czyli niż 12 osób, dozwolone jest wprowadzanie kolejnych przeszkód, jak to pokazano w tej wersji gry z przeszkodami nr 4 i nr 8 albo przydzielenie dwóch zawodników do tej samej przeszkody. Wówczas drużyna zdobywa punkty za tę przeszkodę, jeśli przynajmniej jeden z graczy ją pokonał. Nie można oczywiście przyznać podwójnej liczby punktów w przypadku, gdyby ci dwaj gracze prawidłowo rozwiązali zadania.

Zastosować można też wariant indywidualny tej gry. Wtedy każdy zawodnik ma do pokonania wszystkie przeszkody i rozwiązuje wszystkie potrzebne do tego zadania. Prowadzi się wtedy klasyfikację indywidualnie.

ZADANIA (PRZESZKODY) DO WYKORZYSTANIA W GRZE

NUMER PRZESZKODY (ZADANIA)	KONKRETNY PRZYKŁAD
1	11 · 12
2	12 · 13
3	42 · 48
4A	88 · 82
4B	1,4 · 1,7
5	101 · 102
6	103 · 111
7	95 · 92
8A	145 ²
8B	1035 ²
9	985 ²
10	1087 · 1083

Podsumowanie

Nauczyciel udziela pochwał i podsumowuje, że uczniowie nabyli kilka bardzo przydatnych umiejętności szybkiego liczenia. Zachęca do nauki kolejnych ciekawych algorytmów oraz może zaproponować zabawę grami w domu, gdyż każda gra jest zamieszczona na platformie ELITMAT SPACE, jak również będzie dostępna na płycie multimedialnej z materiałami edukacyjnymi dla ucznia.



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

