Tytuł

Układanki z patyczków

Autor

Agnieszka Rogalska

Dział

Łamigłówki matematyczne

Innowacyjne cele edukacyjne

Do przeprowadzenia zajęć można wykorzystać materiały multimedialne dostępne na portalu w Zadaniach interaktywnych. W sytuacji, gdy nie będzie możliwości dostępu do komputera, można skorzystać z patyczków lub zapałek.

Czas

2 jednostki lekcyjne

Przebieg

ŁAMIGŁÓWKA 1

Układanka z patyczków 1

Uczniowie szkoły podstawowej mogą mieć problem ze zrozumieniem słowa „rzut". Dlatego też wcześniej przygotowujemy ich do tego tematu, wskazując wielościan i jego rzut krawędziowy na wybraną płaszczyznę. Uczniowie mogą zmieniać zarówno położenie lampy jak też wierzchołków wielościanu. W ten sposób przemycamy wiedzę, o której być może uczniowie dowiedzą się dopiero w liceum.

Poprawne rozwiązanie łamigłówki widnieje w zadaniu. Warto w tym miejscu zapytać uczniów, ile wierzchołków ma sześcian, a dlaczego na rysunku jest ich tylko siedem? Może uczniowie zauważą, że dwa wierzchołki pokrywają się w rzucie ze sobą.

Jeśli dysponujemy modelem krawędziowym sześcianu i umieścimy go przed projektorem lub grafoskopem, to na ekranie uczniowie zobaczą dokładnie taki rzut, jaki przedstawiają patyczki.

ŁAMIGŁÓWKA 2

Układanka z patyczków 2

W tym zadaniu znów jest okazja, by uczniowie szkoły podstawowej przez zabawę utrwalili sobie pojęcie rombu. Oto rozwiązanie - wystarczy dwa sąsiednie patyczki obrócić do środka sześciokąta i dołożyć jeden i zadanie rozwiązane. Czy to jest jedyne rozwiązanie?

Wystarczy wybrać inne dwa sąsiednie patyczki. Warto zapytać uczniów, na ile sposobów można wybrać takie dwa sąsiednie patyczki z sześciu i obrócić. Wprawdzie to pytanie z kombinatoryki, ale uczniowie klas młodszych również mogą sobie z nim poradzić. Wystarczy, że uczeń policzy, ile razy można obrócić te dwa sąsiednie odcinki wokół środka sześciokąta, aby powrócić do stanu pierwotnego. Łatwo zauważyć, że takich obrotów jest dokładnie sześć.

A co z patyczkami nie sąsiednimi? Czy zadanie da się też wówczas rozwiązać?

ŁAMIGŁÓWKA 3

Układanka z patyczków 3

To zadanie ma na celu przybliżenie uczniom szkoły podstawowej pojęcie symetrii, aczkolwiek o tym przekształceniu nie wspomina się w zadaniu. Ciekawe, czy uczeń podejdzie w taki sposób do rozwiązania zadania.

Jeśli ryba ma płynąć w przeciwnym kierunku, to jej obraz powinien być odbiciem poprzedniej ryby względem pionowej osi. Taki może być pierwszy pomysł ucznia na rozwiązanie zadania.

Próbując więc za pomocą planszy w zadaniu odbić rybę względem tej osi, widać wówczas, że musielibyśmy przesunąć cztery patyczki.

Co zrobić więc, aby przesunąć tylko trzy patyczki?

Otóż spróbujmy przesunąć odbitą rybę w górę lub w dół. Odpowiedź w zadaniu wskaże możliwe rozwiązania, w których przesunięte zostały tylko trzy patyczki.

ŁAMIGŁÓWKA 4

Układanka z patyczków 4

To zadanie nie jest łatwe dla ucznia szkoły podstawowej. Trójkąty, jakie uczeń zna to najczęściej równoboczny, równoramienny lub prostokątne. Dysponując patyczkami tej samej długości ciężko jest uczniowi wpaść na pomysł dorysowywania trójkątów, które dadzą konfigurację prostokątną.

Uczeń gimnazjum mógł spotkać się z takim układem odcinków przy dowodzeniu twierdzenia Pitagorasa.

Ułatwieniem w rozwiązaniu zadania powinna być dla ucznia ilość patyczków. Osiem patyczków, jak wiadomo, jest wymaganych do skonstruowania dwóch kwadratów, chyba że kwadraty stykają się jednym bokiem. To może zasugerować uczniowi, że trójkąty mają boki zawarte zarówno w jednym jak i w drugim kwadracie.

ŁAMIGŁÓWKA 5

Układanka z patyczków 5

Rozwiązanie zamieszczone w odpowiedzi po lewej stronie jest łatwe do znalezienia. Jednak na rozwiązanie zamieszczone po prawej stronie nie jest tak łatwo wpaść, dlatego warto zachęcić uczniów do szukania różnych rozwiązań, a nie tylko jednego.

A być może znajdą jeszcze inne rozwiązanie tego zadania?

ŁAMIGŁÓWKA 6

Układanka z patyczków 6

To zadanie może rozwiązać dobry uczeń w gimnazjum bez układania patyczków.

Przyjmijmy, że podstawa każdego prostokąta wynosi 1. Wówczas zużylibyśmy cztery patyczki na cztery podstawy prostokątów. Pozostało 14 patyczków. Ale z nich mamy budować wysokości prostokątów: dwie długości „x” i dwie długości „2x”, czyli łącznie długości $2x+4x=6x$. Ponieważ równanie $14 = 6x$ nie ma rozwiązania wśród liczb naturalnych, więc w tym przypadku rozwiązania nie ma.

Załóżmy więc, że podstawy prostokątów mają długości 2. Wówczas na wszystkie podstawy wykorzystamy 8 patyczków. Pozostałe 10 powinno starczyć na boki obu prostokątów. I znowu mamy równanie $10=6x$, które w zbiorze liczb naturalnych nie ma rozwiązania.

Załóżmy więc, że podstawą każdego prostokąta są trzy patyczki. Zużyjemy więc ich 12. Pozostała liczba 6 patyczków spełnia równanie $6 = 6x$, które daje jedyne rozwiązanie zadania, czyli prostokąty o wymiarach:3×1 i 3×2.

ŁAMIGŁÓWKA 7

Po algebraicznym podejściu do powyższego zadania, można uczniom zaproponować kolejne zadanie, w którym zapewne chętnie będą chcieli skorzystać z poznanej metody rozwiązania.

Czy jest możliwe z tej samej ilości patyczków (18) zbudować takie dwa prostokąty, aby długość podstawy i pole jednego z nich były dwukrotnie większe niż długość podstawy i pole drugiego czworokąta.

To zadanie jest małym chwytem dydaktycznym. Bowiem, jeśli pole i podstawa jednego prostokąta ma być dwa razy większe niż drugiego, to oznacza to, że wysokości obu prostokątów muszą być takie same. Czy uczeń szkoły podstawowej zdaje sobie sprawę, że ta przesłanka wynika ze wzoru na pole prostokąta? Czy uczeń rozumie ten wzór i potrafi go zastosować?

Niech długość podstawy mniejszego prostokąta wynosi „x" patyczków, wówczas do budowy podstaw tych prostokątów potrzebne byłoby „6x" patyczków. Pozostaje więc „18 - 6x" patyczków.

Niech wysokości obu prostokątów wynoszą „y". To daje równanie:

$18 - 6x = 4y$

Dla $x = 1$ mamy $12 = 4y$ skąd $y = 3$

Dla $x = 2$ mamy $6 = 4y$ skąd $y \in \emptyset$

Dla $x = 3$ mamy $0 = 4y$ skąd $y = 0$

Tak więc zadanie ma znowu jedno rozwiązanie, czyli prostokąty o wymiarach 1×3 oraz 2×3 – tak samo jak w poprzednim zadaniu.

Do wizualizacji zadania można również wykorzystać planszę interaktywną z zadania powyżej.

ŁAMIGŁÓWKA 8

Kolejna układanka to dla ucznia kolejne wyzwanie algebraiczne. Może zanim zabierze się do układania patyczków, spróbuje ułatwić sobie zadanie rachunkowo.

Oto treść zadania:

Z 18 patyczków zbuduj dwa prostokąty, których pola są takie same, a podstawy jednego prostokąta są:

a/ dwa razy dłuższe

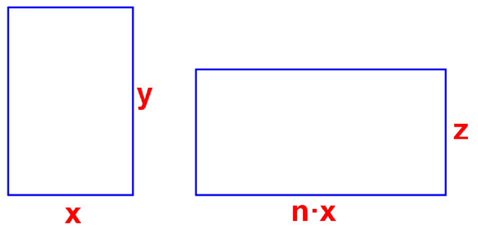
b/ trzy razy dłuższe

c/ cztery razy dłuższe

od podstawy drugiego prostokąta.

A jak zadanie rozwiązać, zastępując prostokąty równoległobokami?

Oznaczmy na odpowiednich bokach prostokątów ilość użytych patyczków, tak jak na rysunku poniżej.



a/ Niech $n=2$.

Suma obwodów obu prostokątów wynosi wówczas: $2x+4x+2y+2z = 18$.

Ponieważ $xy = 2xz$ (bo pola są równe), więc: $y = 2z$

Równanie 1 przyjmie postać $6x + 6z = 18$, czyli $z = 3-x$

Dla $x = 1$, $z = 2$, $y = 4$ mamy prostokąty: 1x4 oraz 2x2

Dla $x = 2$, $z = 1$, $y = 2$ mamy prostokąty: 2x2 oraz 4x1 (to poprzedni przypadek)

Dla $x = 3$, $z = 0$, $y = 0$ co oznacza, że nie ma prostokąta.

b/ Niech $n=3$

Suma obwodów obu prostokątów wynosi: $2x+6x+2y+2z=18$

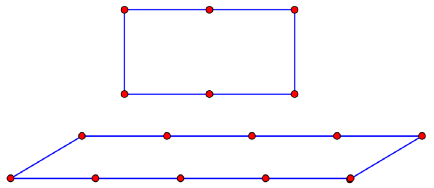
Ponieważ $xy = 3xz$, więc $y = 3z$

Zatem $8x+8z = 18$, czyli $z=\frac{1}{8}(18-x)$, a to nie jest liczba naturalna.

Zatem nie ma prostokąta o polu trzykrotnie większym od pola drugiego prostokąta.

c/ Dla $n=4$ też nie ma rozwiązania.

Nasuwa się pytanie, dla ilu zapałek zadanie ma rozwiązanie. Można też uczniom zaproponować, by zastąpili prostokąty równoległobokami. Wówczas wystarczy dobrać odpowiednio wysokość drugiego równoległoboku przez odpowiednie nachylenie jego boków. Na przykład gdy wysokość równoległoboku wynosi ½ długości patyczka, to jego pole będzie równe polu prostokąta, w którym podstawa jest dwukrotnie większa, a wysokość jest długości jednego patyczka. Dla 18-tu zapałek rozwiązanie przedstawia rysunek poniżej.



ŁAMIGŁÓWKA 9, 10, 11

W kolejnych trzech zadaniach należy zwrócić uwagę, że możliwych jest kilka odpowiedzi. Warto więc zachęcić uczniów do szukania różnych rozwiązań.

Układanka z patyczków 7

Układanka z patyczków 8

Układanka z patyczków 9

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA
ELITMAT
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY