



## Tytuł

Równanie zegara

## Autor

Anna Czarnocka

## Dział

Geometria

## Innowacyjne cele edukacyjne

Uczniowie poznają metodę wyprowadzenia wzoru umożliwiającego wyznaczenie:

- kąta, jaki tworzą o danej godzinie wskazówki zegara
- godziny, o której wskazówki zegara tworzą dany kąt

## Czas

1 jednostka lekcyjna

## Przebieg

### Etap 1

### Wprowadzenie

---

**Nauczyciel tłumaczy jak zapisujemy równanie zegara.**

Niech  $g$  oznacza godzinę, zaś  $m$  - minuty. Za pomocą tych symboli będziemy oznaczać wskazanie zegara w danym momencie.

I tak np. gdy zegar wskazuje godzinę 11<sup>45</sup>  $g = 11$ , a  $m = 45$ .

Duża wskazówka („minutowa”) robi pełen obrót w ciągu jednej godziny, zatem prędkość dużej wskazówki zegara wynosi:

$$\frac{360^\circ}{60 \text{ min}} = \frac{6^\circ}{\text{min}}$$

Zaś mała wskazówka („godzinowa”) pełen obrót robi w ciągu 12 godzin, zatem prędkość małej wskazówki wynosi:

$$\frac{360^\circ}{12 \text{ godz}} = \frac{30^\circ}{\text{godz}}$$

Z godziną 12<sup>00</sup> duża wskazówka tworzy kąt:

$$\alpha_1 = 6^\circ \cdot m$$

zaś mała z godziną  $12^{00}$  tworzy kąt:

$$\alpha_2 = 30^\circ \cdot \left(g + \frac{m}{60}\right)$$

Tak więc wskazówki zegara o godzinie  $g$  minut  $m$  tworzą kąt:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 6^\circ \cdot m - 30^\circ \cdot \left(g + \frac{m}{60}\right) = \frac{11^\circ}{2} \cdot m - 30^\circ \cdot g$$

To równanie nazwiemy równaniem zegara.

Kąt jest:

- dodatni, gdy duża wskazówka wyprzedza małą
- ujemny, gdy mała wskazówka wyprzedza dużą
- zerowy, gdy wskazówki pokrywają się

## Etap 2                      Rozwiązywanie zadań

---

### Zadanie 1.

Jaki kąt tworzą wskazówki o godzinie:

$$11^{45}$$

$$g = 11, m = 45$$

Wstawiając do równania zegara otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{11^\circ}{2} \cdot 45 - 30^\circ \cdot 11 = 247,5^\circ - 330^\circ = -82,5^\circ$$

$$8^{30}$$

$$g = 8, m = 30$$

Wstawiając do równania zegara otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{11^\circ}{2} \cdot 30 - 30^\circ \cdot 8 = 165^\circ - 240^\circ = -75^\circ$$

$$4^{28}$$

$$g = 4, m = 28$$

Wstawiając do równania zegara otrzymujemy  $\alpha = \frac{11^\circ}{2} \cdot 28 - 30^\circ \cdot 4 = 154^\circ - 120^\circ = 34^\circ$

$$3^{20}$$

$$g = 3, m = 20$$

Wstawiając do równania zegara otrzymujemy  $\alpha = \frac{11^\circ}{2} \cdot 20 - 30^\circ \cdot 3 = 110^\circ - 90^\circ = 20^\circ$

### Zadanie 2.

Kiedy wskazówki zegara pokrywają się?

Musi zachodzić równość  $\alpha = 0^\circ$ , tak więc mamy  $\frac{11^\circ}{2} \cdot m - 30^\circ \cdot g = 0^\circ$ .

$$\text{Zatem } m = \frac{60}{11}g.$$

Gdy  $g = 0$ , to  $m = 0$ , zatem otrzymujemy godzinę 0:00

Gdy  $g = 1$ , to  $m = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ , zatem otrzymujemy godzinę 1:05 $\frac{5}{11}$ .

⋮

Gdy  $g = 11$ , to  $m = 60$ , zatem otrzymujemy godzinę 12:00.

### Zadanie 3.

Kiedy wskazówki zegara utworzą kąt  $180^\circ$ ?

Musi zachodzić równość  $\alpha = 180^\circ$ , tak więc mamy  $\frac{11^\circ}{2} \cdot m - 30^\circ \cdot g = 180^\circ$ .

$$\text{Zatem } m = \frac{2}{11} \cdot (180 + 30g) = \frac{60}{11} \cdot (6 + g).$$

Gdy  $g = 0$ , to  $m = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ , zatem otrzymujemy godzinę 0: 32 $\frac{8}{11}$ .

⋮

Gdy  $g = 5$ , to  $m = 60$ , zatem otrzymujemy godzinę 6:00.

⋮

Gdy  $g = 8$ , to  $m = \frac{840}{11} = 76\frac{4}{11}$ , zatem otrzymujemy godzinę 9: 16 $\frac{4}{11}$ .

Gdy  $g = 11$ , to  $m = \frac{1020}{11} = 92\frac{8}{11}$ , zatem otrzymujemy godzinę 12: 32 $\frac{8}{11}$ .

### Zadanie 4.

Kiedy wskazówki zegara są do siebie prostopadłe? (tzn. tworzą kąt  $90^\circ$  lub  $-90^\circ$ )

## Podsumowanie

Uczniowie patrzą na zegarek i obliczają jaki kąt tworzą wskazówki zegara teraz, a jaki w momencie, gdy już obliczą ten kąt.