



Tytuł

Niedziesiątkowe systemy liczenia

Autor

Karolina Pokorska

Dział

Liczby naturalne

Innowacyjne cele edukacyjne

Uczniowie zapoznają się z innymi systemami liczenia niż używane w szkole. Zdobywają wiedzę na temat praktycznego zastosowania systemu dwójkowego: informatyka - komputer, kalkulator, telegraf, system Braille'a.

Czas

1 jednostka lekcyjna

Przebieg

Etap 1 - Wprowadzenie

Nauczyciel przedstawia różne systemy zapisywania liczb, historii i ich zastosowania.

W historii matematyki możemy odnaleźć wiele systemów zapisu liczb. Jednym z nich są systemy pozycyjne. Jeszcze zanim system dziesiętkowy stał się powszechnie używany, wiele plemion i narodów stosowało inne systemy. Pewien ślad układu piątkowego odnajdujemy w zapisie cyfr rzymskich, systemu dwunastkowego w podziale roku na dwanaście miesięcy, dnia i nocy po dwanaście godzin. Do dziś przetrwała również jednostka tuzin czyli 12 sztuk, czy system sześćdziesiątkowy pochodzący od Babilończyków w miarach czasu i kąta, zwany też systemem kopowym.

Aby nie pogubić się w tym, z którym systemem mamy do czynienia zapisując liczbę będziemy pisali np. 101_2 lub $A3D_{16}$ i będziemy to rozumieli jako jeden - zero - jeden w systemie dwójkowym, inaczej nazywanym binarnym lub A - trzy - D w systemie szesnastkowym.

Etap 2 - Omówienie systemów zapisywania liczb

Nauczyciel tłumaczy na czym polega zapisywanie liczb w systemie dwójkowym, trójkowym itd.

Na początku omówmy **system dziesiętkowy**, czyli ten, który stosujemy w życiu codziennym, ponieważ najłatwiej będzie nam na jego podstawie zrozumieć inne systemy.

Aby zapisać dowolną liczbę w tym systemie używamy dziesięciu cyfr $\{0,1,2,\dots,9\}$ i zapisujemy liczbę następująco:

liczba $= a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ gdzie a_k oznacza cyfrę systemu pozycyjnego.

Przykłady:

$$(325)_{10} = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

$$(2017)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Uogólniając powyższe rozważania możemy stworzyć dowolny system w następujący sposób:

liczba $= a_k \cdot p^k + a_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0$, gdzie: a_k - oznacza cyfrę systemu pozycyjnego, p oznacza podstawę systemu - dla systemu dwójkowego $p = 2$, siódmkowego $p = 7$, a dla szesnastkowego $p = 16$, gdyż oprócz dziesięciu cyfr mamy jeszcze litery od A do F.

Etap 3 - Ćwiczenia

Nauczyciel zadaje pytania i pokazuje jak na nie odpowiedzieć przedstawiając rozwiązania przykładów.

Ćwiczenie 1.

Jak odszyfrować wartość dowolnej liczby w dowolnym systemie, tzn. jak zapisać liczbę w systemie dziesiętkowym?

- dla systemu dwójkowego np.

$$1010_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 0 = 10$$

- dla systemu siódmkowego np.:

$$2314_7 = 2 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7^1 + 4 \cdot 7^0 = 686 + 147 + 7 + 4 = 844$$

- dla systemu dziewiątkowego np.:

$$45_9 = 4 \cdot 9^1 + 5 \cdot 9^0 = 36 + 5 = 41$$

Ćwiczenie 2.

Gdy już wiemy jak przejść z dowolnego systemu do systemu dziesiętnego nasuwa się kolejne pytanie: **Co będzie w sytuacji odwrotnej, gdy będziemy chcieli przejść z systemu dziesiętnego na inny?**

Nauczyciel tłumaczy jak należy wtedy postąpić.

Bierzemy daną liczbę i dzielimy ją przez podstawę systemu, na który chcemy przejść. Resztę z dzielenia zapisujemy obok, a następnie wynik znowu dzielimy przez podstawę systemu. Czynność taką powtarzamy aż do momentu uzyskania wyniku równego 0. Otrzymane reszty zapisujemy w kolejności od prawej do lewej, tj. ostatnia reszta jest pierwszą cyfrą z lewej strony.

Na przykład:

Przedstaw liczbę $(683)_3$ w systemie trójkowym.

Aby tego dokonać postępujemy zgodnie z powyższą instrukcją. Dzielimy liczbę przez 3 aż do momentu uzyskania wyniku 0:

$$683 : 3 = 227 \text{ r } 2$$

$$227 : 3 = 75 \text{ r } 2$$

$$75 : 3 = 25 \text{ r } 0$$

$$25 : 3 = 8 \text{ r } 1$$

$$8 : 3 = 2 \text{ r } 2$$

$$2 : 3 = 0 \text{ r } 2$$

i zapisujemy w odpowiedniej kolejności reszty 221022_3

Ćwiczenie 3.

Kolejne pytanie, na które sobie odpowiemy to: **Jak na przykład przejść z układu czwórkowego na piątkowy?**

Jak liczbę 1302_4 zapisać w systemie piątkowym?

Najpierw zapisujemy liczbę w systemie dziesiętkowym:

$$1302_4 = 1 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0 = 64 + 48 + 0 + 2 = 114$$

$$1302_4 = 114_{10}$$

A następnie stosujemy poznany sposób, by przejść do systemu piątkowego:

$$114 : 5 = 22 \text{ r } 4$$

$$22 : 5 = 4 \text{ r } 2$$

$$4 : 5 = 0 \text{ r } 4$$

Stąd $114_{10} = 424_5$ czyli $1302_4 = 424_5$

Ćwiczenie 4.

Jak zapisać liczbę ABC_{16} w systemie dziesiętkowym?

$$ABC_{16} = A \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 = 10 \cdot 256 + 11 \cdot 16 + 12 \cdot 1 = 2560 + 176 + 12 = 2748_{10}$$

Nauczyciel mówi uczniom (pyta czy ktoś może wie), gdzie w życiu codziennym wykorzystywany jest system dwójkowy.

Nauczyciel, jeżeli ma możliwość skorzystania w czasie lekcji z komputerów, prezentuje uczniom możliwość przeliczania liczb na różne systemy z wykorzystaniem kalkulatora naukowego.

Etap 4 - Karta pracy dla ucznia

Zadanie 1.

Przedstaw liczbę:

- 155_{10} w systemie dwójkowym
- 1562_{10} w systemie siódmkowym
- 17_{10} w systemie trzynastkowym

Zadanie 2.

Przedstaw liczby w systemie dziesiętkowym:

- $(234)_5$
- $(6B4)_{12}$
- $(5A71)_{11}$

Zadanie 3.

Filip chciał przekazać koledze informację za pomocą listu. Nie chciał, żeby jego młodsza siostra wiedziała, co to za informacja. Zastanawiał się jak ją zaszyfrować. Wtedy przypomniał sobie o poznanym na lekcji dodatkowej matematyki systemie zapisu liczb. Pomóż Filipowi zaszyfrować wiadomość wykorzystując dwójkowy system zapisu liczb.

„Spotkajmy się 25.10 b.r. o godzinie 16:30 przy bloku nr 7 na ulicy 11 listopada. Filip.”

Zadanie 4.

Rozszyfruj tekst z systemu dwójkowego zamieniając go na dziesiętny:

Nazywam się Marta. Mam 1011 lat. Moja data urodzenia to: 11101.111. 1111010000 roku. Mam 10 rodzeństwa. W sumie w moim domu jest 101 domowników. Moja ulubiona liczba to 1101.

Zadanie 5.

Napisz taką samą informację o sobie i daj koledze/koleżance do rozszyfrowania.

Podsumowanie

Po wykonaniu zadań z karty pracy uczniowie w parach nawzajem wymyślają sobie do zakodowania i rozkodowania liczby w różnych systemach.

Nauczyciel nadzoruje wykonywanie zadania, pomaga oraz udziela wskazówek.



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

