Tytuł

Kąt środkowy i wpisany cz. 8

Autor

Bronisław Pabich

Czas

1 jednostka lekcyjna

Przebieg

Etap 1 - Wprowadzenie

W poznawaniu dalszych własności trójkąta jest niezbędna wiedza o kątach w kole. Temat ten można zresztą realizować niezależnie od geometrii trójkąta.
Rzecz w tym, aby pojęcia kąta środkowego i wpisanego były poznane przez ucznia poprzez eksperyment a nie metodą podającą. Uczeń manipulując wierzchołkiem i punktami leżącymi na ramionach kąta lepiej zapamiętuje elementy kąta w kontekście koła, z którym jest związany.
Ważne jest, aby już teraz w gimnazjum uczniowie wiedzieli, że istnieje pojęcie kąta skierowanego i dwa jego zwroty dodatni i ujemny. Z pojęciami tymi mogą się spotkać na lekcjach fizyki lub kiedyś na studiach.

Celem lekcji jest odkrycie następujących twierdzeń:

1. **kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary**
2. **miara kąta środkowego jest dwukrotnością miary kąta wpisanego, opartego na tym samym łuku**
3. **dwa kąty wpisane oparte na przystających (niekoniecznie tych samych) łukach mają równe miary**

To ostatnie twierdzenie nie występuje w podręcznikach szkolnych, ale jest potem często stosowane. Jego dowód jest niezwykle prosty - fakt ten wynika z równości miar kątów środkowych utworzonych dla tych kątów wpisanych.
Dowody pozostałych twierdzeń są przeznaczone tylko dla uczniów, którzy widzą konieczność ich przeprowadzenia.

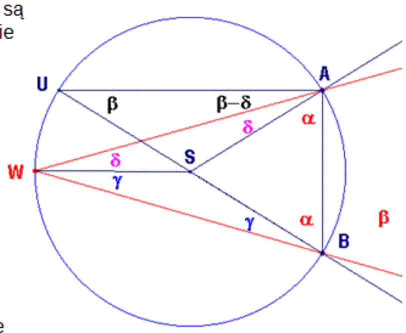
Oto dowód twierdzenia 1:

Trójkąty **AWS**, **WBS**, **AUS** i **ABS** są równoramienne, więc odpowiednie kąty są równe co zaznaczono na rysunku obok.

Dla trójkąta **WBA**:
$|\angle\delta|+2|\angle\gamma|+2|\angle\alpha|+|\angle\delta|=180^0$

Dla trójkąta **UBA**:
$|\angle\beta|+|\angle\beta|+2|\angle\alpha|=180^0$
Stąd:
$|\angle\beta|=|\angle\gamma|+|\angle\delta|$

To oznacza, że niezależnie od położenia punktu **W** kąty wpisane **BWA** i **BUA** są zawsze równe



Ważne jest, aby w tym dowodzie uczniowie zdawali sobie sprawę, że wierzchołek W był dowolnie wybranym punktem okręgu w przeciwieństwie do wierzchołka U, który jest tak dobrany, aby odcinek UB był średnicą koła.

A teraz dowód twierdzenia 2. Wykorzystujemy w nim twierdzenie o sumie miar kątów wewnętrznych trójkąta.

Kąt środkowy **ASB** i wpisany **AWB** są oparte na tym samym łuku.
Mamy wykazać, że:

$$|\angle BSA| = 2|\angle BWA|$$

Dorysujmy odcinek **AS**.

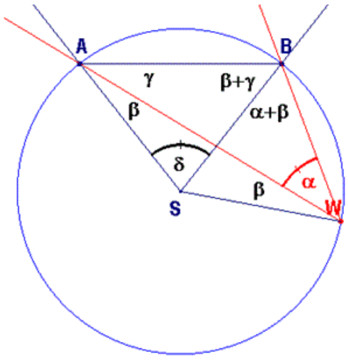
Trójkąty **BAS**, **WAS** i **WBS** są równoramienne, stąd równość kątów zaznaczonych na rysunku obok.

$|\angle \delta| = 180^0 - |\angle \beta| - |\angle \gamma| - |\angle \beta| - |\angle \gamma| =$

$= 180^0 - 2(|\angle \beta| + |\angle \gamma|)$

Ponieważ w trójkącie **AWB**
$2|\angle \alpha| + 2|\angle \beta| + 2|\angle \delta| = 180^0$, więc
$|\angle \beta| + |\angle \gamma| = 90^0 - |\angle \alpha|$

Stąd
$|\angle \delta| = 180^0 - 2(90^0 - |\angle \alpha|) \ = \ 2|\angle \alpha|$



Etap 2 - Praca z wykorzystaniem apletu

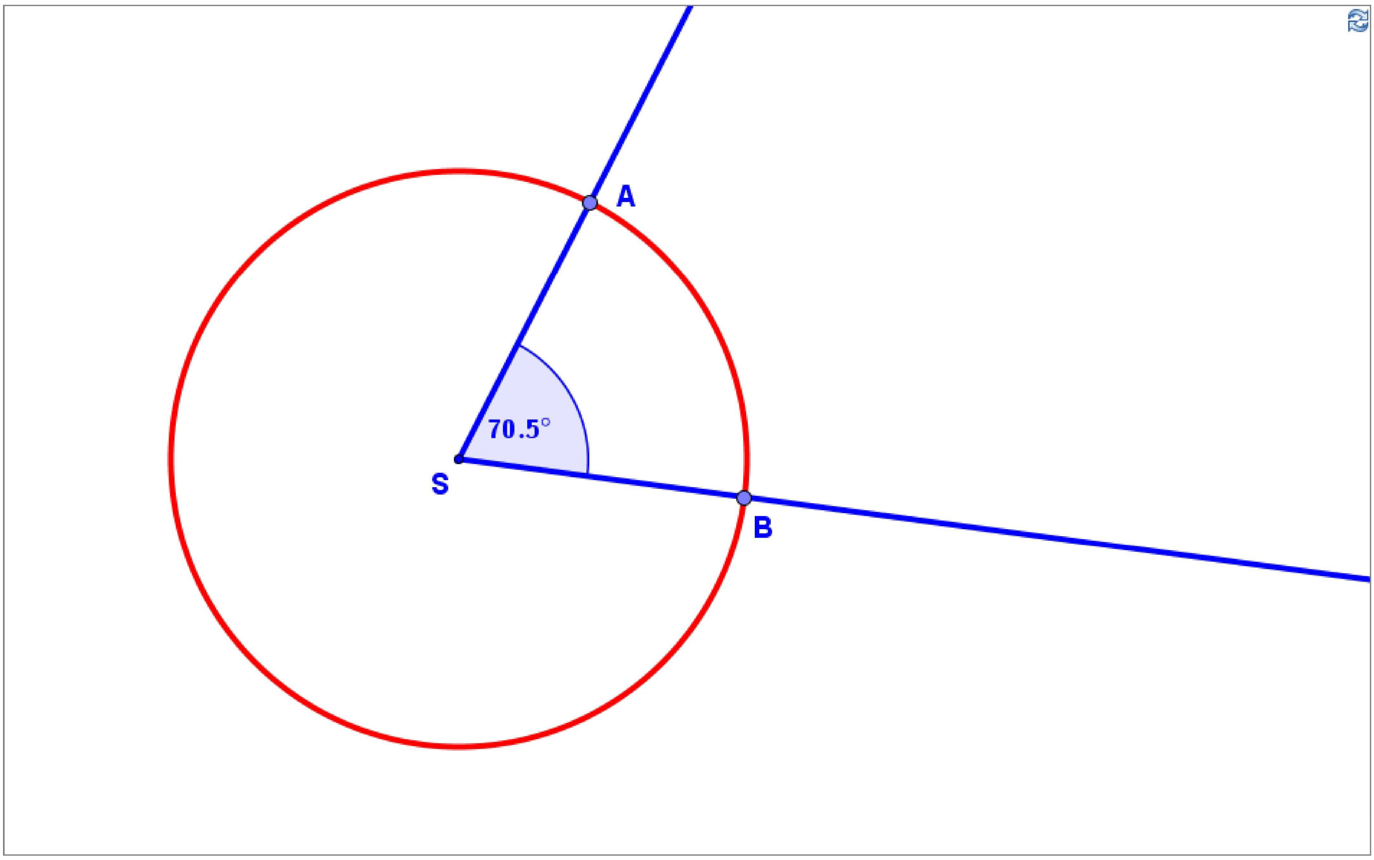
Aplet do przeprowadzenia zajęć dostępny jest poniżej.

Aplet

W szkole podstawowej i w gimnazjum poznałeś różne rodzaje kątów: wierzchołkowe, odpowiadające, przyległe i naprzemianległe.
W tej lekcji poznasz nowe pojęcia kątów - tym razem będą one związane z kołem i okręgiem.

Kąt, którego wierzchołek znajduje sie w środku koła nazywać będziemy **kątem środkowym**. Jest on widoczny na poniższym aplecie.
Niech jego ramiona przecinają okrąg w punktach **A** i **B**. Chwyć myszą za jeden z tych punktów i poruszaj nim po okręgu. Obserwuj miarę kąta środkowego.

Zauważ, że gdy miara tego kąta przekroczy 180°, wówczas kąt ten staje się wklęsły. Gdy zaś jego miara przekroczy 360°, wówczas jego miara liczy się ponownie od liczby 0°. Inaczej mówiąc miary kątów 360° i 0° są sobie równe.

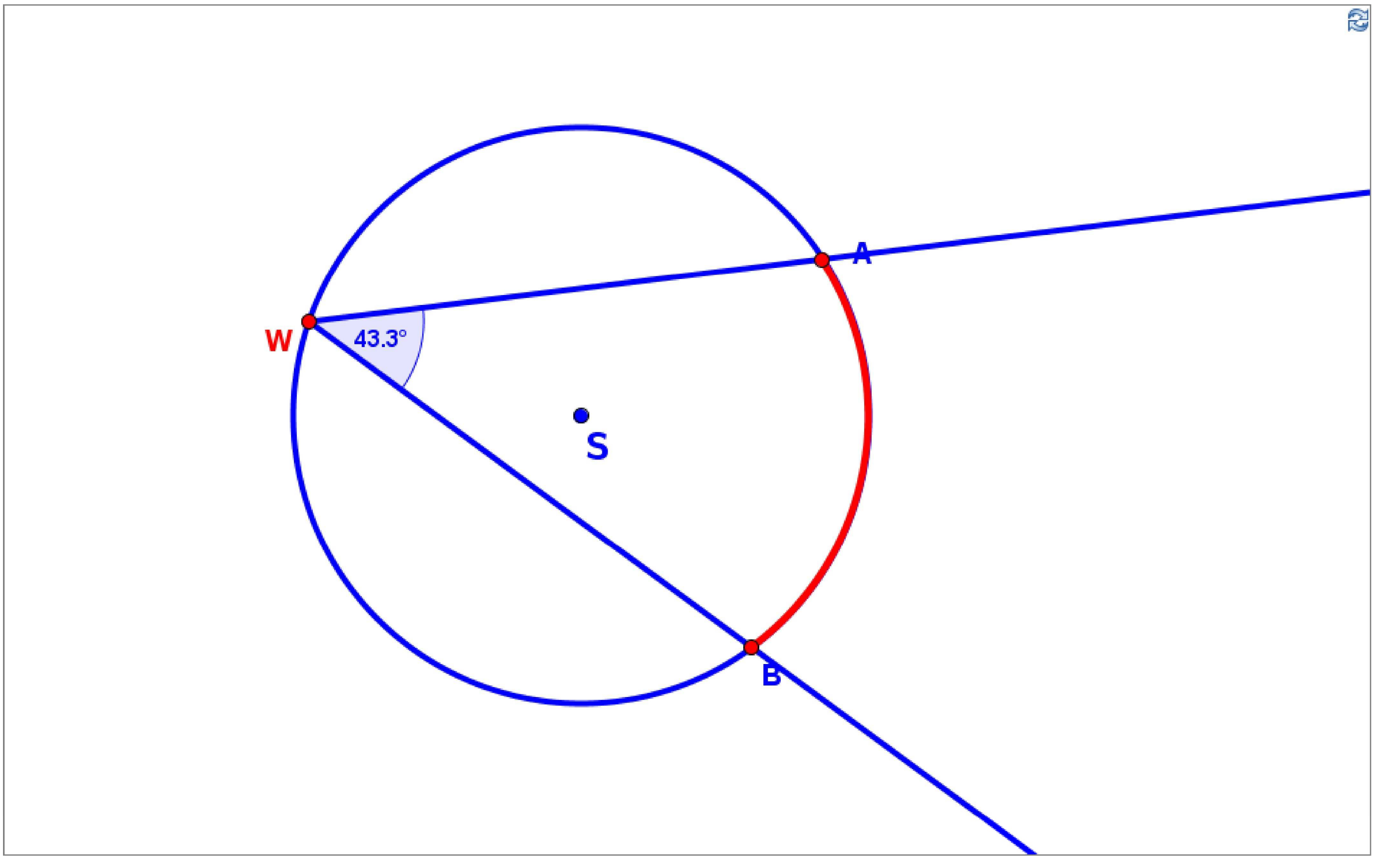


29 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

Gdy poruszasz punktem **A** lub **B** po okręgu, poruszasz również ramieniem **SA** lub **SB** tego kąta. W liceum dowiesz się, że ramię to nazywa się **końcowym**, a to, które pozostaje nieruchome - **początkowym ramieniem kąta**. Taki kąt, w których wyróżniliśmy ramię początkowe i końcowe będziesz w liceum nazywać **kątem skierowanym**.

Zauważ również, że ruch ramieniem końcowym kąta odbywa się albo **zgodnie z ruchem wskazówek zegara**, albo **niezgodnie**. Ten fakt jest bardzo ważny dla fizyków, którzy odróżniają dwa tzw. zwroty kąta. Matematycy i fizycy umówili się na całym świecie, że ruch niezgodny z ruchem wskazówek zegara tworzy **zwrot dodatni kąta**, a zgodny z ruchem wskazówek zegara **zwrot ujemny**.

Inny kąt w kole możemy utworzyć umieszczając jego wierzchołek na okręgu tego koła. Niech to będzie kąt **AWB** tak jak na aplecie poniżej. Nazywamy go w matematyce **kątem wpisanym w koło**.



29 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

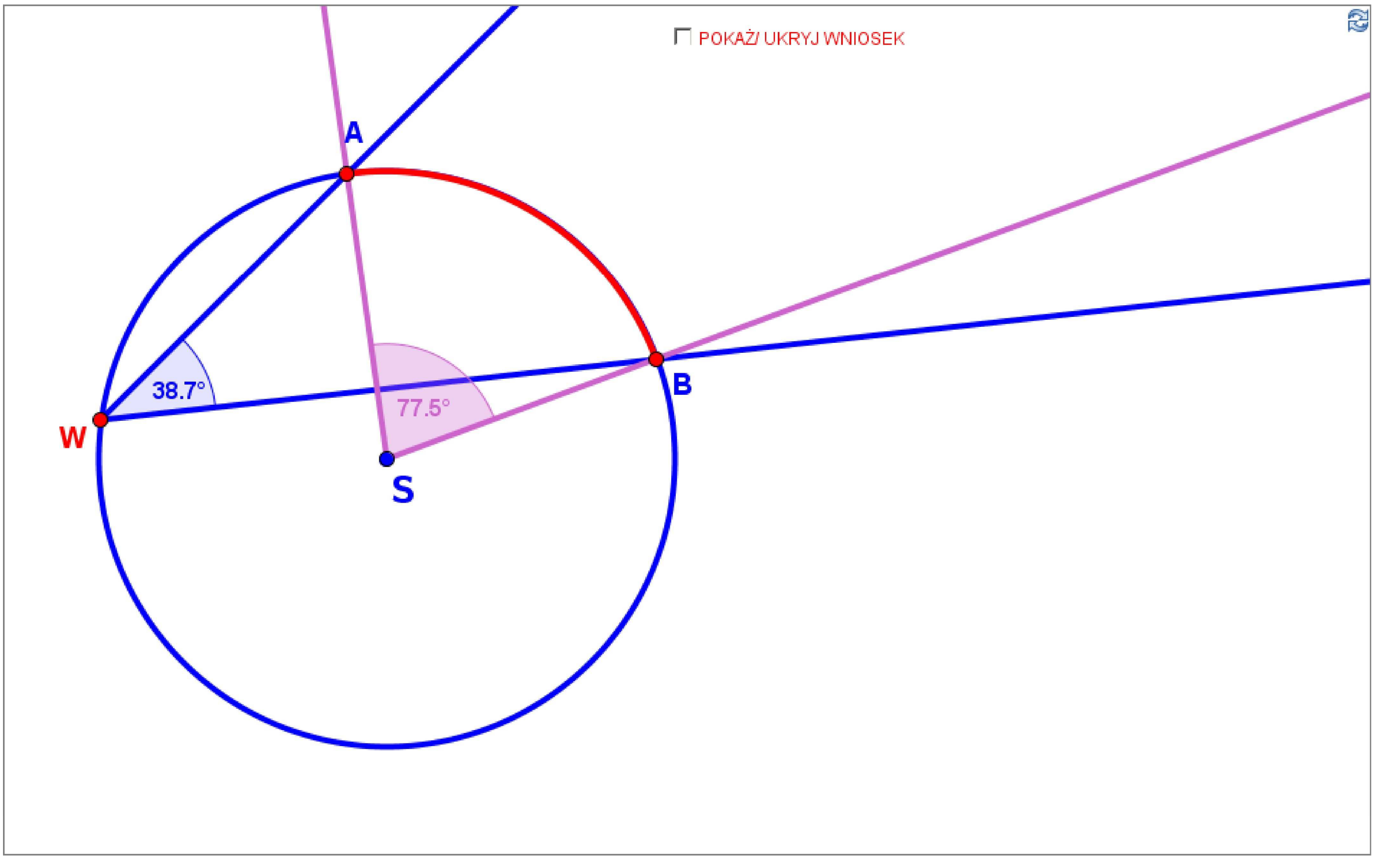
Punkty **A** i **B** w tym kącie leżą oczywiście na jego ramionach i są różne od punktu **W**. Natomiast obszar kąta wyciął z okręgu pewien łuk **AB**.
Nie zmieniaj teraz położenia punktów **A** i **B** a poruszaj jedynie wierzchołkiem **W** kąta wpisanego.

Zaobserwuj, w jakim położeniu wierzchołka **W** miara tego kąta jest najmniejsza a w jakim największa?
Uzupełnij zapis:

Miary wszystkich kątów wpisanych opartych na tym samym łuku są .... (46)

Trzeci aplet w tej lekcji przedstawia oba kąty w kole: środkowy i wpisany. **Mają one jednak pewną wspólną własność - jaką? (47).**

Odkryj tę własność poruszając wierzchołkiem **W** przy nieruchomych położeniach punktu **A** i **B**. Potem zmień polożenie punktów **A** i **B** na inne i nadal zmieniaj położenie punktu **W**.



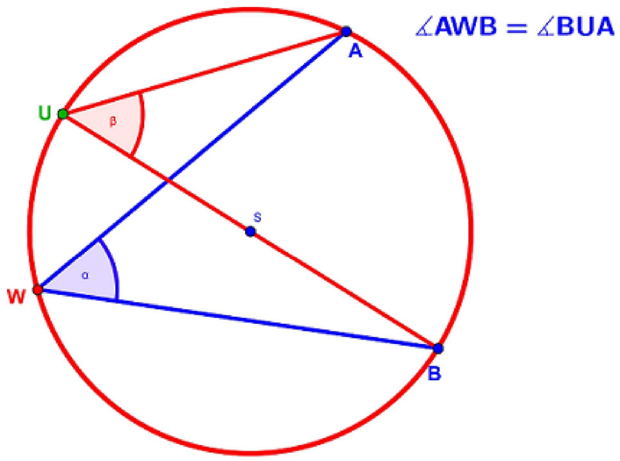
29 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

Na podstawie obserwacji dokonywanych przez Ciebie w tym eksperymencie powinieneś dostrzec ważną własność tych kątów.
Potwierdź swoje spostrzeżenie uzupełniajac poniższy zapis:

Miara kąta środkowego jest .... większa od miary kąta wpisanego, opartego na tym ...., co kąt środkowy. (48)

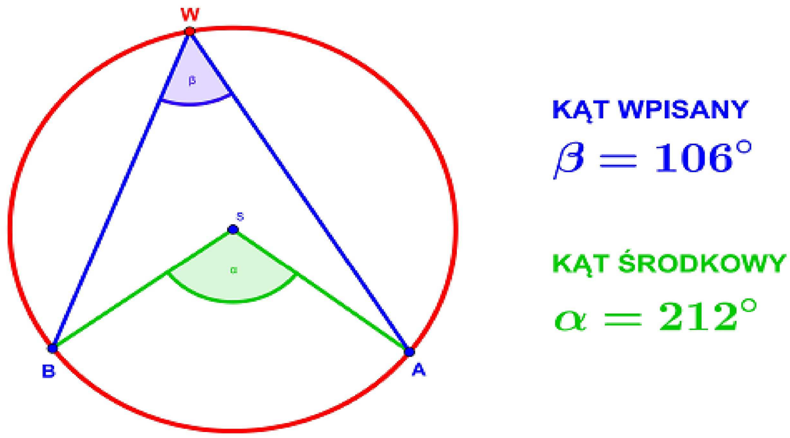
Znajdź oba twierdzenia w podręczniku, z którego korzystasz na lekcjach w szkole i poszukaj ich dowodów. Jeśli nie odnalazłeś ich - prześledź dowody zamieszczone poniżej:

Najpierw wykażemy, że dwa kąty wpisane oparte na tym samym łuku są przystające. Wybierzmy kąt wpisany o dowolnym wierzchołku **W** oraz kąt wpisany **BUA** kórego jedno z ramion przechodzi przez środek **S** koła.



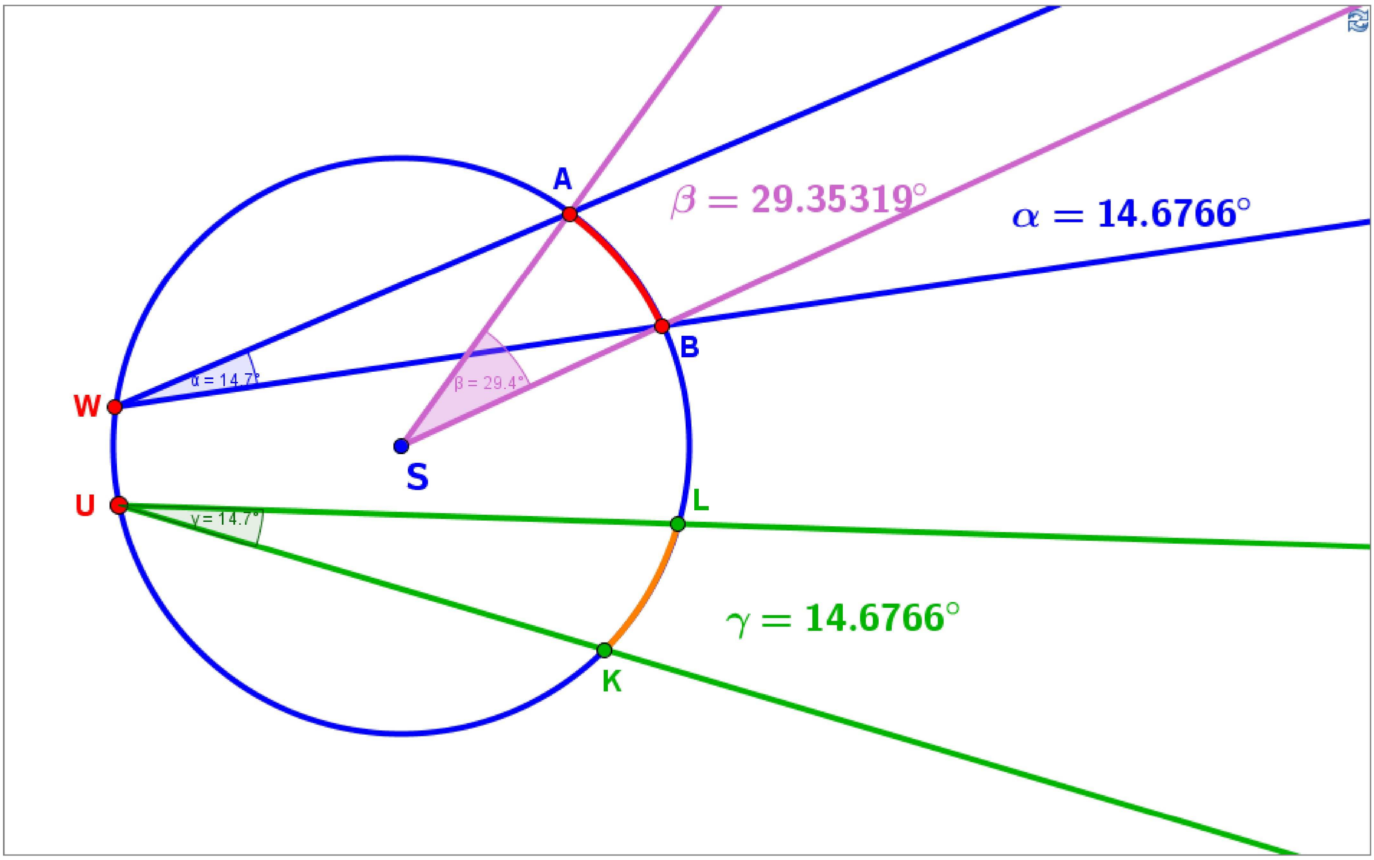
Zatem każdy inny kąt wpisany oparty na łuku **AB** o wierzcholku różnym od **W** też jest przystający do kata **BUA**, co kończy dowód.

Teraz kolej na dowód, że miara kąta środkowego jest dwukrotnością miary kąta wpisanego, opartego na tym samym łuku.



Ale to jeszcze nie koniec wszystkich własności kątów w kole.
Bardzo często wykorzystywana w róznych dowodach jest własność, którą możesz samodzielnie odkryć na ostatnim aplecie tej lekcji.

Obejrzyj poniższy aplet by lepiej przyswoić sobie to proste a jakże praktyczne twierdzenie.



29 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

Myślę, że udało Ci się je odkryć. Dla udokumentowania tego faktu uzupełnij poniższy zapis i prześlij go swojemu nauczycielowi.

Każde dwa kąty wpisane oparte .... są też .... (49)

Dowód tego faktu jest oczywisty z uwagi na przystawanie kątów środkowych zbudowanych na tych przystających łukach.

.

KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!
ELITMAT FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY