



Tytuł

Dwusieczne i symetralne trójkąta cz. 7

Autor

Bronisław Pabich

Czas

1 jednostka lekcyjna

Przebieg

Etap 1

Wprowadzenie

W tej lekcji uczniowie mogą się poczuć prawdziwymi odkrywcami, dostrzegając dzięki połączeniu dwóch obrazów – symetralnych i dwusiecznych tego samego trójkąta, że ich punkty przecięcia leżą na okręgu opisanym.

To właśnie komputer ukazał to twierdzenie nieznanne od 4.5 tysiąca lat istnienia matematyki dzięki geometrii dynamicznej.

Dowód tego faktu jest prostszy niż jego odkrycie. Proponujemy zatem, aby zdolniejszym uczniom go pokazać.

Wykażmy, że dwusieczna kąta CAB przecina się z symetralną boku CB w punkcie A' leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

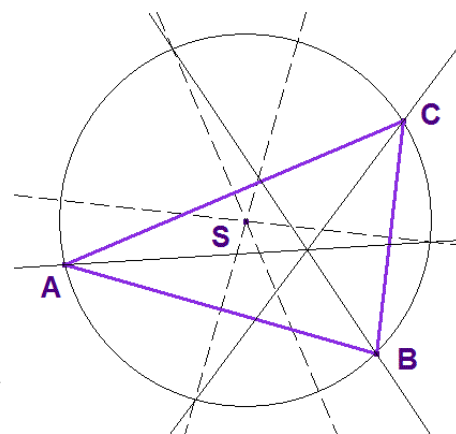
Kąty BAA' i CAA' powstały z podziału kąta BAC dwusieczną, więc są przystające. Ale są to kąty wpisane w kole o środku S i promieniu SA .

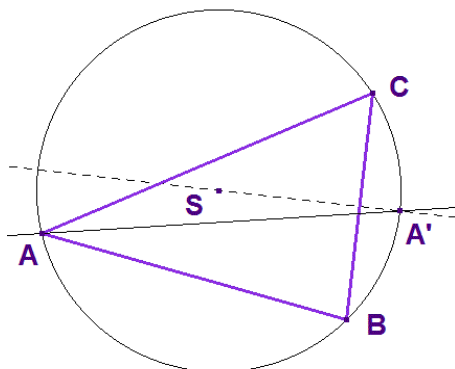
Na podstawie twierdzenia o przystających kątach wpisanych, łuki, na których są one oparte, są również przystające.

Istnieje więc izometria przekształcająca jeden z nich na drugi. Może nią być albo obrót wokół środka S albo symetria osiowa.

Jeśli byłaby to symetria osiowa, to jej osią symetrii musiałaby być symetralna punktów C, B , a więc symetralna boku BC trójkąta ABC .

Symetralna ta musi przechodzić przez punkt A' , gdyż jest on punktem stałym tej symetrii, co dowodzi, że A' jako punkt wspólny dwusiecznej i okręgu jest też punktem symetralnej. Tak więc symetralna z dwusieczną przecinają się w punkcie A' na okręgu opisanym na trójkącie.





Jak się później okaże, punkty przecięć dwusiecznych z symetralnymi są ważne jeszcze z innego powodu.

Etap 2

Praca z wykorzystaniem apletu

Aplet do przeprowadzenia zajęć dostępny jest poniżej.

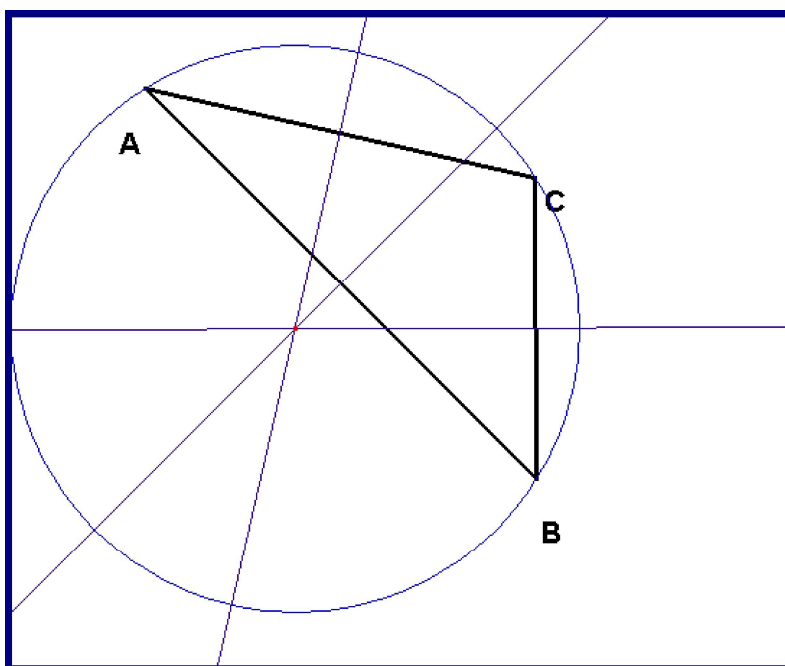
Aplet

Już wiesz, jak skonstruować okrąg przechodzący przez trzy dowolne punkty. Jeśli punkty te będą wierzchołkami trójkąta, wówczas okrąg ten nazywamy **okręgiem opisanym na trójkącie**, albo mówimy, że **trójkąt jest wpisany w okrąg**.

Nie sądzę, aby kiedykolwiek przyszło Ci do głowy narysować tak trójkąt, aby jego wierzchołki leżały na jednej prostej. Pewnie w Twoim odczuciu nie byłby to trójkąt.

W programie Cabri jest to jednak możliwe, gdyż nie ma żadnych ograniczeń co do położenia obiektów na ekranie.

Spróbuj zatem w poniższym aplecie przemieścić myszą tak wierzchołek C trójkąta, aby chociaż w przybliżeniu leżał on na odcinku AB , lub na jego przedłużeniu.



Jak zachowują się wówczas symetralne boków trójkąta? (42)

Co stało się z okręgiem? (43)

Czy to możliwe by uległ on "wyprostowaniu" .?

A gdzie według Ciebie znajduje się wówczas jego środek? (44)

Zauważ, że zbliżając się punktem C do prostej AB symetralne par punktów AB , AC i BC stają się równoległe. Zatem nie przecinają się.

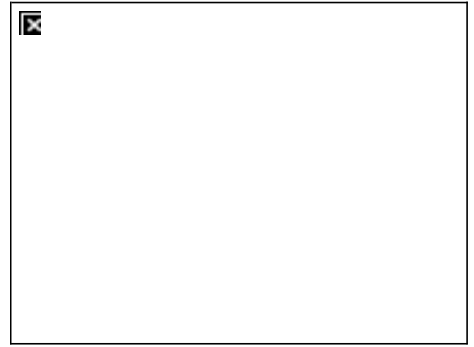
Dlatego też środek okręgu, który jest zawsze punktem przecięcia symetralnych też oddala się w nieskończoność, a jego promień wydłuża się do nieskończoności.

Taka sytuacja przypomina nam widok równoległych szyn pewnego toru kolejowego, na które kolejowego na które patrzymy stojąc na tym torze. Niby nie powinny się zetknąć, bo odległość między nimi jest zawsze taka sama a jednak widzimy, że się przecinają.

Każdy malarz narysuje je na obrazie jako proste stykające się. Punkt ich przecięcia malarze nazywają środkiem perspektywy.

Matematycy na bazie tego założenia, że dwie proste w nieskończoności przecinają się zbudowali cały dział matematyki, nazywany geometrią rzutową. Punkt ich przecięcia nazwali

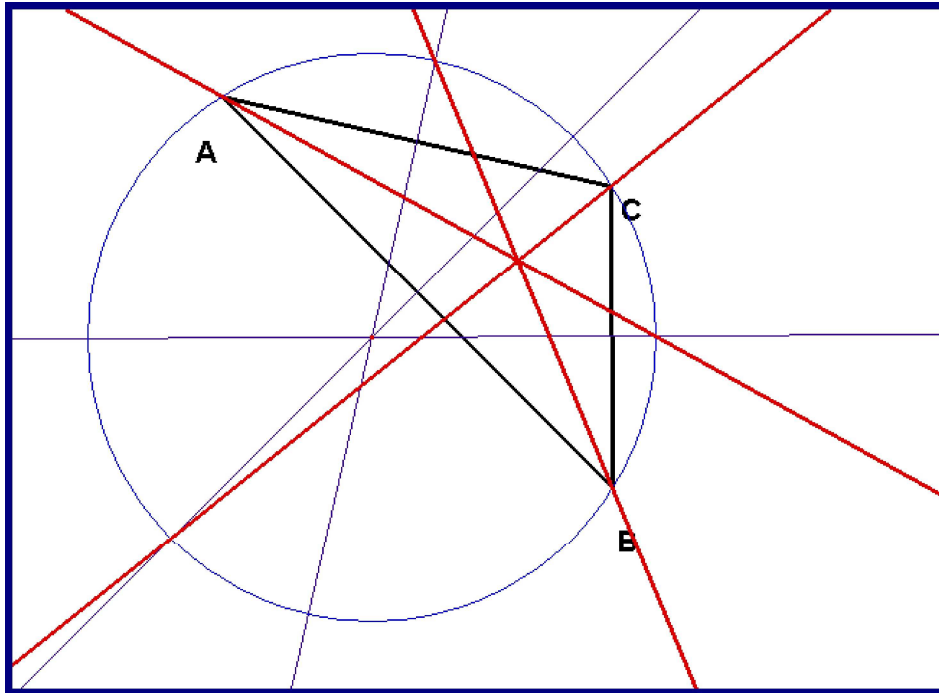
"punktem niewłaściwym" i oznaczyli symbolem ∞ .



Wróćmy do trójkąta ABC , którego wierzchołki nie są współliniowe. Narysujmy w nim symetralne par punktów AB , AC i BC oraz dwusieczne jego kątów wewnętrznych - patrz kolejny aplet.

Gdzie przecinają się te dwusieczne z symetralnymi boków przeciwległych do ich kątów? (45)

Czy tak jest zawsze? Poruszaj wierzchołkami trójkąta by się o tym przekonać.



Pewnie dziwisz się, dlaczego tak dzieje. Formalny dowód tego faktu przeprowadzimy w jednej z kolejnych lekcji.



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

