



Tytuł

Ciąg Fibonacciego i Transformata Z

Autor

TOMASZ HERUD

Dział

ANALIZA

Innowacyjne cele edukacyjne

Uczniowie uczą się nie tylko na temat ciągu Fibonacciego, ale również korzystać z jego właściwości. Przykład znalezienia wzoru ogólnego ciągu Lucasa na podstawie sposobu na znalezienie wzoru ogólnego ciągu Fibonacciego uczy rozwiązywania zadań na analogię.

CELE EDUKACYJNE

Uczniowie poznają ciąg Fibonacciego

- 2 interpretacje geometryczne
- Właściwości
- Interpretacje macierzową
- Sposób na wyznaczenie wzoru ogólnego

Uczniowie poznają wzór na sumę (Σ)

Uczniowie poznają inne podobne ciągi

- Ciąg Lucasa
- Ciąg Tribonacciego
- Ciąg Tetranacciego

Uczniowie poznają Transformatę Z

Uczniowie poznają sposób na rozbitcie wyrażenia algebraicznego na ułamki proste

Czas

1-2 JEDNOSTKI LEKCYJNE

Przebieg

Etap 1 - prezentacja

Nauczyciel, korzystając z [prezentacji multimedialnej* - \[POBIERZ\]](#), zapoznaje uczniów z ciągiem Fibonacciego i Transformatą Z

- Co to ciąg Fibonacciego
- Wzór rekurencyjny
- 2 interpretacje geometryczne
- Wzór na sumę (Σ)
- Właściwości ciągu Fibonacciego
- Interpretacja macierzowa

Inne ciągi:

- Ciąg Lucasa
- Ciąg Tribonacciego
- Ciąg Tetranacciego

Słabość wzoru rekurencyjnego przy wyznaczaniu dalszych wyrazów

Transformata Z (Lauretna)

- Tabela Transformaty Z, należy zwrócić uwagę na:
 - Co jest stałą - C
 - Co jest zmienną - x,z
 - Co jest funkcją f(x),g(x),F(x),G(x)
 - Różnice pomiędzy f(x), a F(x)
 - Transformata 1 jako szczególny przypadek transformaty C^x (C=1)
 - Wzór na sumę
 - Analogia do pochodnych
 - Wzór na mnożenie przez stałą
 - Analogia do pochodnych
 - Analogiczność kolejnych wzorów na f(x+C)

Przykład zastosowanie do wyprowadzenia wzoru ogólnego

*Do otworzenia prezentacji niezbędny jest program Microsoft Office PowerPoint 2007 lub darmowy program Microsoft Office PowerPoint Viewer 2007(program wraz z opisem instalacji dostępny jest na stronie producenta: [\[POBIERZ\]](#))

Etap 2 - zadania do rozwiązania

Zad 1-4: Oblicz kolejne wyrazy ciągu

- Zadania służące do przeciwiczenia wzorów rekurencyjnych

Zad 5: Zapisz w postaci sumy (Σ)

Zad 6: Znajdź wzór ogólny ciągu Lucasa

• odp: $\frac{-2\sqrt{5}+5}{5} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^x + \frac{2\sqrt{5}+5}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x$

Zad 7: Znajdź wzór ogólny ciągu

• odp: $\frac{1}{9} (7 \cdot (-2)^x + 2 + 3x)$

Karta pracy ucznia

Zad 1: Oblicz kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego

$f_0 = 0$

$f_4 =$

$f_1 = 1$

$f_5 =$

$f_2 =$

$f_6 =$

$f_3 =$

$f_7 =$

Zad 2: Oblicz kolejne wyrazy ciągu Lucasa

$f_0 = 2$

$f_4 =$

$f_1 = 1$

$f_5 =$

$f_2 =$

$f_6 =$

$f_3 =$

$f_7 =$

Zad 3: Oblicz kolejne wyrazy ciągu Tribonacciego

$f_0 = 0$

$f_5 =$

$f_1 = 0$

$f_6 =$

$f_2 = 1$

$f_7 =$

$f_3 =$

$f_8 =$

$f_4 =$

$f_9 =$

Zad 4: Oblicz kolejne wyrazy ciągu Tetranacciego

$f_0 = 0$

$f_5 =$

$f_1 = 0$

$f_6 =$

$f_2 = 0$

$f_7 =$

$f_3 = 1$

$f_8 =$

$f_4 =$

$f_9 =$

Zad 5: Oblicz korzystając z właściwości ciąg Fibonacciego

$f_{14} = 377 \quad f_{15} = 610$

$f_{30} =$

$f_{17} = 1597 \quad f_{19} = 4184$

$f_{35} =$

Zad 6: Zapisz w postaci sumy (Σ)

$$11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 =$$

$$-8 - 10 - 12 - 14 - 16 - 18 =$$

$$5! + 10! + 15! + \dots + 105! =$$

$$9 + 14 + 19 + \dots + 119 =$$

$$7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10 + \dots + 17 \cdot 18 =$$

Zad 6: Znajdź wzór ogólny ciągu Lucasa

$$f_n = \begin{cases} 2 & \text{dla } n = 0 \\ 1 & \text{dla } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \end{cases}$$

Zad 7: Znajdź wzór ogólny ciągu

$$\begin{cases} f(x+1) + 2f(x) = 1 + x \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Wzory

Ciąg Fibonacciego - wybrane właściwości

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 = f_n \cdot f_{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1$$

$$f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

$$f_{2n-1} = f_n^2 + f_{n-1}^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i+1} = F_{2n}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

Transformata Z (Laurenta)

$f(x)$ (przed transformacją)	$F(z)$ (po transformacji)
1	$\frac{z}{z-1}$
x	$\frac{z}{(z-1)^2}$
C^x	$\frac{z}{z-c}$
x^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(x)$	$F(z)$
$f(x+1)$	$zF(z) - zf(0)$
$f(x+2)$	$z^2F(z) - z^2f(0) - zf(1)$
$f(x+3)$	$z^3F(z) - z^3f(0) - z^2f(1) - zf(2)$

$C \cdot f(x)$	$C \cdot F(z)$
$f(x) + g(x)$	$F(z) + G(z)$

Podsumowanie

Uczniowie poznali ciąg Fibonacciego

- 2 interpretacje geometryczne
- Właściwości
- Interpretacje macierzową
- Sposób na wyznaczenie wzoru ogólnego

Uczniowie poznali wzór na sumę (Σ)

Uczniowie poznali inne podobne ciągi

- Ciąg Lucasa
- Ciąg Tribonacciego
- Ciąg Tetranacciego

Uczniowie poznali Transformację Z

Uczniowie poznali sposób na rozbić wyrażenia algebraicznego na ułamki proste

Materiały do druku

- [WZORY](#)
- [KARTA PRACY](#)