



Tytuł

A gdyby można pierwiastkować liczby ujemne? - Liczby zespolone cz. 1

Autor

Tomasz Herud

Dział

Algebra

Innowacyjne cele edukacyjne

Liczby zespolone to logiczne rozszerzenie zbioru liczb rzeczywistych i jest szeroko wykorzystywane w zastosowaniach fizycznych, elektrotechnicznych, elektrycznych, teorii fraktali i innych.

Uczniowie poznają liczby zespolone i podstawowe działania na nich:

- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie
- Dzielenie
- Sprzężenie
- Wartość bezwzględna

Uczniowie poznają relacje zbioru liczb zespolonych i zbioru liczb urojonych z innymi zbiorami liczb

Uczniowie poznają przestrzeń zespoloną

Prezentacja tematu w formie wykładu przerywanego ćwiczeniami pozwala oswoić się uczniom z formą prowadzenia zajęć dydaktycznych na uczelniach wyższych, jednakże dzięki przerwom na wykonanie kilku ćwiczeń jest łatwiejsza w zrozumieniu.

Czas

1 jednostka lekcyjna

Przebieg

Etap 1 - Prezentacja o liczbach zespolonych

Nauczyciel, korzystając z [prezentacji multimedialnej*](#) - [POBIERZ], zapoznaje uczniów z liczbami zespolonymi.

- Prezentacja potrzeby istnienia liczb zespolonych
- Przykład rozwiązania równania kwadratowego z ujemnym wyznacznikiem
- Postać algebraiczna
- Relacje z innymi zbiorami liczb
- Podstawowe działania
 - Dodawanie
 - Odejmowanie
 - Mnożenie
 - Dzielenie
 - Sprzężenie

- Wartość bezwzględna
- Funkcje związane z liczbami zespolonymi

*Do otworzenia prezentacji niezbędny jest program Microsoft Office PowerPoint 2007 lub darmowy program Microsoft Office PowerPoint Viewer 2007(program wraz z opisem instalacji dostępny jest na stronie producenta: [\[POBIERZ\]](#))

Etap 2 - Zadania do rozwiązania

Uczniowie rozwiązują zadania sprawdzające znajomość:

- Dodawanie
- Odejmowanie
- Mnożenie
- Dzielenie

Uczniowie udowadniają proste zależności związane z liczbami zespolonymi

- *Podpowiedź:* do udowodnienia większości zależności wystarczy rozpisanie z jako: $a+bi$.

Uczniowie obliczają:

- Kolejne potęgi i oraz znajdują ogólny wzór na ik
- Wartości bezwzględne
- Ogólne zależności sprzężenia

Uczniowie rozwiązują równania zespolone

- *Podpowiedź:* Należy skorzystać z rozpisania z jako: $a+bi$ oraz stworzyć dwa równania (jedno na część rzeczywistą, a drugie na część zespoloną)

Uczniowie zaznaczają na płaszczyźnie zespolonej wszystkie liczby spełniające podane warunki:

- | | |
|--|---|
| $Re(z) = 5$ | prosta $x=5$ |
| $Im(z) = -3$ | prosta $y=-3$ |
| $Re(z) < 5 \wedge -5 \leq Im(z) \leq 5$ | obszar ograniczony trzema prostymi |
| $Re(z - 2) = 2$ | prosta $x=4$ |
| $Im(z + 2) = -3$ | prosta $y=-3$ |
| $Re(z + 1 - i) = 5 \wedge Im(z - i) = 5$ | punkt $(4, 6)$ |
| $Im\left(\frac{z}{z}\right) = 1$ | prosta $y=x$ bez punktu $(0, 0)$ |
| $Re\left(\frac{z}{z}\right) = 1$ | prosta $x=0$ bez punktu $(0, 0)$ |
| $ z + 2 < 3$ | wnętrze okręgu o $r=3$ i środku w $(-2, 0)$ |
| $ z - 2 + i \geq 2$ | zewnątrze okręgu o $r=2$ i środku w $(2, -1)$ |

Etap 3 - Karta pracy dla uczniów

Zadanie 1.

Oblicz:

$$3 + 5i + 8,9 + 2i =$$

$$\pi + 4i - 8,7 + 2i =$$

$$(3 + 4i) \cdot (2i) =$$

$$(3 + 7i) \cdot (3 + 2i) =$$

$$(4 + 6i) \cdot (2 + 3i) \cdot (1 + 4i) =$$

$$(1 + 2i)^3 =$$

$$\frac{2 + 5,7i}{4i} =$$

$$\frac{8 - 2,5i}{1 - i} =$$

$$\frac{18 + 2i}{(1 - i)^2} =$$

Zadanie 2.

Udowodnij:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z + \bar{z} = 2a = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2ib = 2 \cdot i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

Zadanie 3.

Oblicz:

$$i^0 =$$

$$i^6 =$$

$$i^1 =$$

$$i^7 =$$

$$i^2 =$$

$$i^8 =$$

$$i^3 =$$

$$i^9 =$$

$$i^4 =$$

$$i^k =$$

$$i^5 =$$

$$|3 + 4i| =$$

$$|-3 - 4i| =$$

$$|8 - 6i| =$$

$$|z| - \sqrt{z \cdot \bar{z}} =$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} =$$

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 =$$

Zadanie 4.

Rozwiąż równanie:

$$|z|^2 - z = 164 - 12i$$

$$|z| - z = 7 - 7i$$

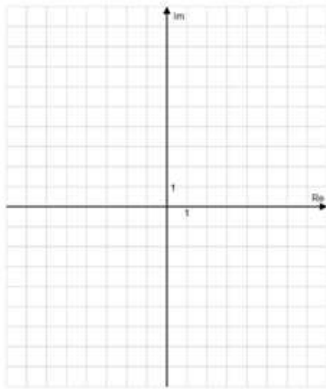
$$|z| - \bar{z} = 0$$

$$\bar{z} \cdot \bar{z} + |z|^2 + \bar{z} = 28 + 3i$$

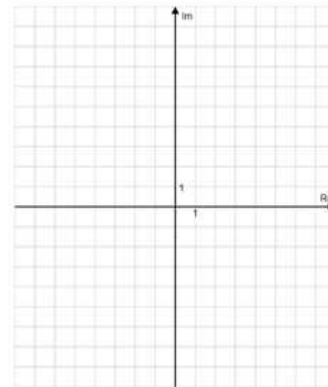
Zadanie 5.

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej:

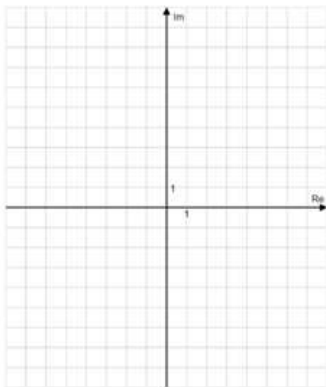
$$\operatorname{Re}(z) = 5 \quad \operatorname{Im}(z) = -3$$



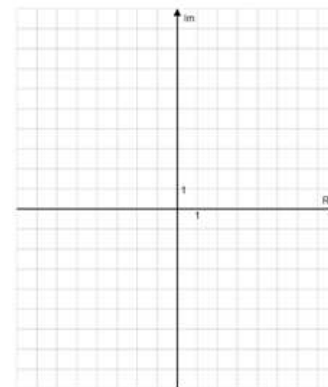
$$\operatorname{Re}(z) < 5 \wedge -5 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 5$$



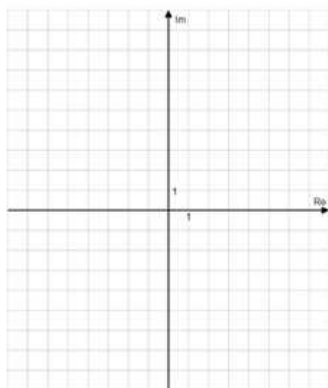
$$\operatorname{Re}(z - 2) = 2 \quad \operatorname{Im}(z + 2) = -3$$



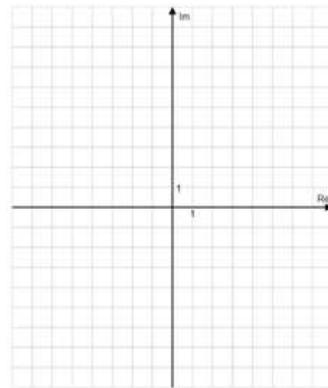
$$\operatorname{Re}(z + 1 - i) = 5 \wedge \operatorname{Im}(z - i) = 5$$



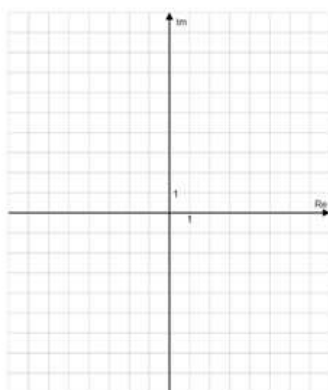
$$\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 1$$



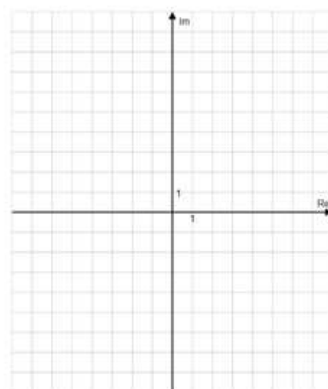
$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = 1$$



$$|z + 2| < 3$$



$$|z - 2 + i| \geq 2$$



Podsumowanie

- Uczniowie poznali liczby zespolone i podstawowe działania na nich.
- Uczniowie poznali inny sposób prowadzenia zajęć (przypominający wykład akademicki).