Wieża Hanoi

WSTĘP

Wieżę Hanoi wymyślił francuski matematyk **Édouard Lucas** dla zabawy w **1883 roku**. Édouard Lucas jest również autorem wzoru na n-ty wyraz ciągu Fibonacciego.

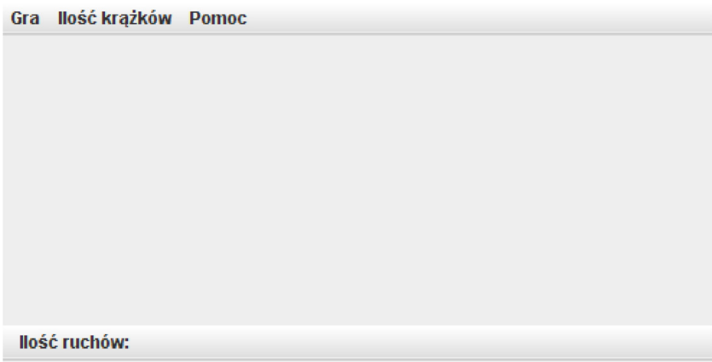
ZASADY GRY

Wieża składa się z trzech słupków: początkowy, końcowy, pomocniczy (tzw.bufor). Naszym zadaniem jest przenieść wszystkie krążki z początkowego słupka na końcowy z zachowaniem tego samego kształtu wieży, pomagając sobie słupkiem pomocniczym i stosując następujące zasady:

- Można układać tylko mniejszy na większy krążek
- Można przekładać tylko jeden krążek jednocześnie
- Można brać tylko krążek z samej góry

Na początek spróbuj rozwiązać łamigłówkę samodzielnie, wybierając różną ilość krążków.

GRA - WIEŻA HANOI

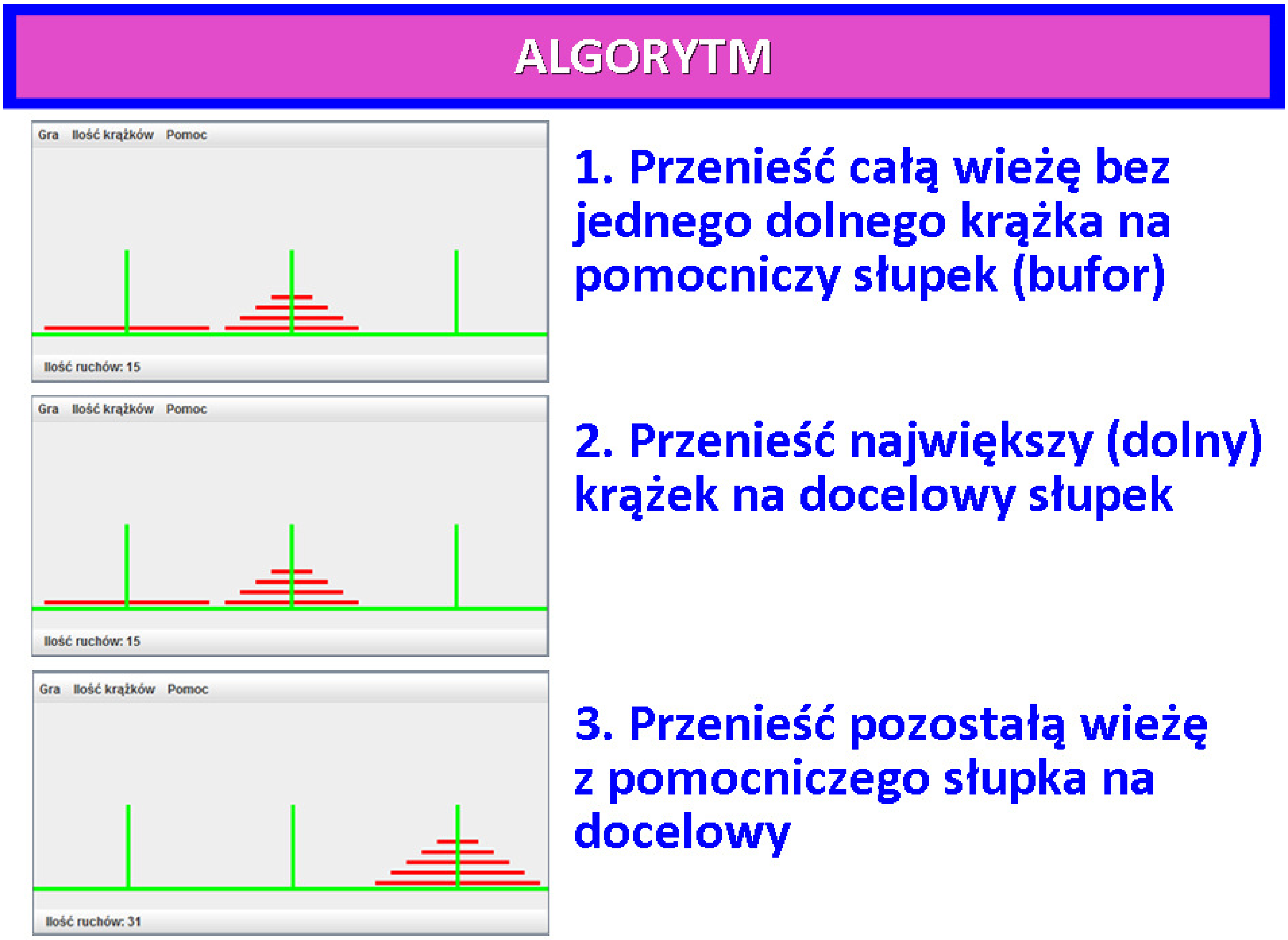


Jeżeli masz problem z ułożeniem krążków, możesz obejrzeć symulację rozwiązania dla poszczególnych ilości krążków, wybierając odpowiednią opcję w grze.

WZÓR REKURENCYJNY

WZÓR REKURENCYJNY na obliczenie ilości potrzebnych ruchów w zależności od ilości krążków: $f(n)=2f(n-1)+1$

Uzasadnienie wzoru rekurencyjnego:



WZÓR OGÓLNY: $f(n)=2^n-1$

Dowód indukcyjny z wykorzystaniem wzoru rekurencyjnego.

Twierdzenie: $f(n)=2^n-1$

Dowód:

Sprawdzenie dla $n=1$ $f(1)=2^1-1=1$

Istotnie tyle trzeba ruchów do przeniesienia jednopiętrowej wieży, zatem twierdzenie jest prawdziwe dla $n=1$

- **Założenie indukcyjne.** Zakładamy, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej dodatniej liczby naturalnej k

$f(k)=2^k-1 \quad k\in N_+$

- **Teza indukcyjna.** Twierdzenie dla $k+1$

$f(k+1)=2^{(k+1)}-1$

- **Krok indukcyjny.** Pokażemy, że jeśli twierdzenie jest prawdziwe dla k, to jest prawdziwe także dla k+1

Przekształcając wzór rekurencyjny $f(n)=2f(n-1)+1$ dla $n=m+1$ otrzymujemy $f(m+1)=2f(m)+1$

Podstawiając na miejsce $f(m)$ wzór z założenia indukcyjnego otrzymujemy:

$f(m+1)=2(2^m-1)+1=2^{m+1}-2+1=2^{m+1}-1$

Otrzymaliśmy tezę indukcyjną, więc wzór jest poprawny.

Wyprowadzenie wzoru ogólnego:

$f(n)=2f(n-1)+1 \quad |+1$

$f(n)+1=2f(n-1)+2=2(f(n-1)+1)$

Niech: $g(n)=f(n)+1$

Wtedy: $g(n)=f(n)+1=2(f(n-1)+1)=2g(n-1)$

$g(n)=2g(n-1)$

Czyli otrzymaliśmy równanie określające ciąg geometryczny.

Wiedząc, że $f(1)=1$, to $g(1)=f(1)+1=1+1=2$
$g(2)=2g(1)=2\cdot 2=4$
$g(3)=8$
...
$g(n)=2^n$

Po powrocie do $f(n)$ otrzymujemy: $f(n)=g(n)-1=2^n-1$

LEGENDA

Jak głosi stara hinduska legenda, przy stworzeniu świata, w jego środku, pod dachem świątyni, umieszczone zostały trzy diamentowe pałeczki. Na jedną z nich nałożonych było 64 złotych krążków o zmniejszających się średnicach tworząc złoty stożek. Dzień i noc, zmieniając się bezustannie, mnisi przekładali krążki na trzecią pałeczkę. Musieli jednak zachować pewne zasady. Mogli posiłkować się drugą pałeczką, jednakże nie wolno było im przenosić więcej niż jeden krążek i umieszczać większego na mniejszym. Gdy wykonają swoje zadanie - nastąpi koniec świata!

OBLICZMY WIĘC DATĘ KOŃCA ŚWIATA ZGODNIE Z LEGENDĄ

Podstawiając do wzoru otrzymujemy: $2^{64}-1=18446744073709551615$ (blisko 18 i pół tryliona) sekund, co daje około 584 542 mld lat, a wszechświat ma około 13,7 mld lat.