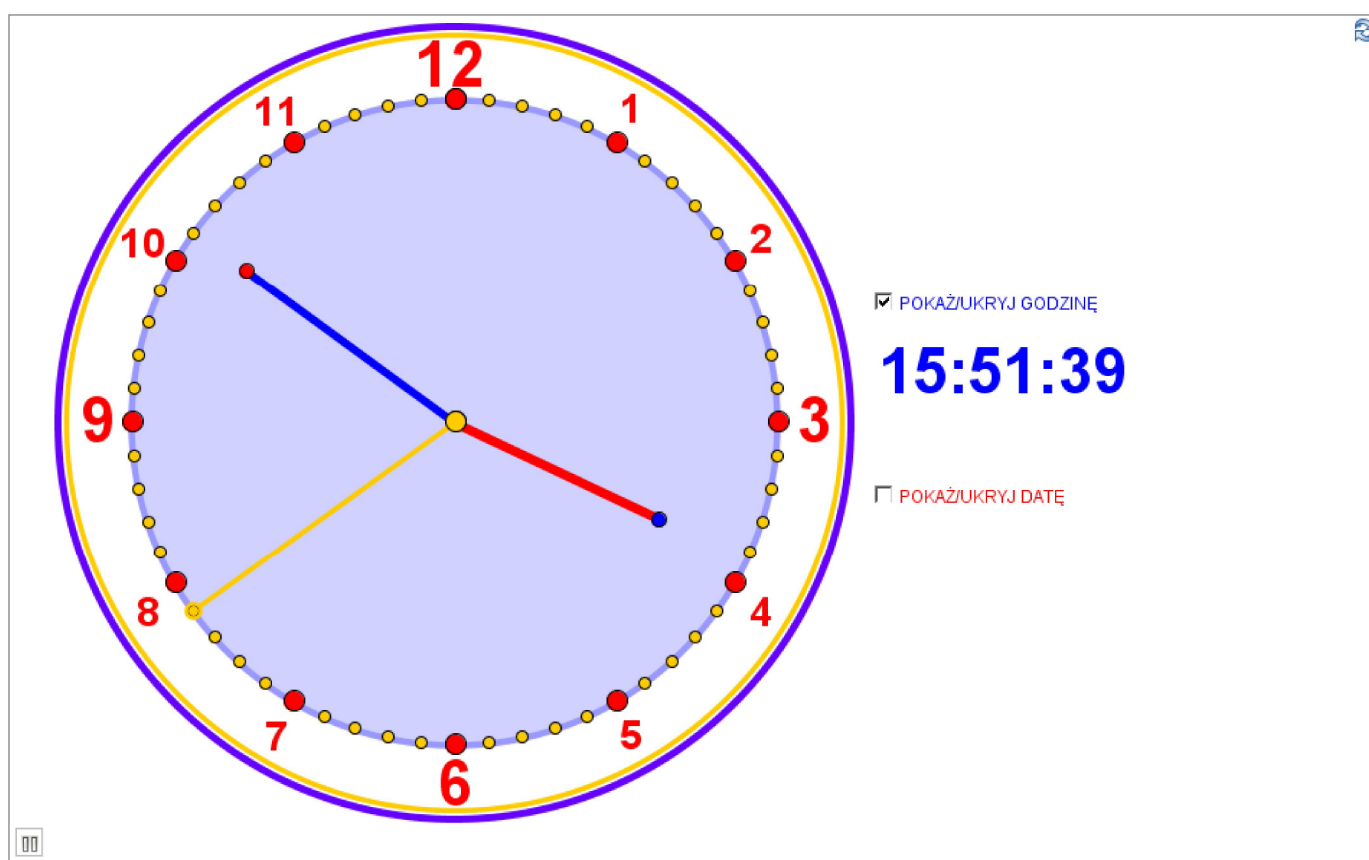




## Równanie zegara

### Zegar z czasem rzeczywistym



Zegar z czasem rzeczywistym.

Dariusz Kułma - Matematyka innego wymiaru, Utworzony z [GeoGebra](#)

## Wstęp

Lekcja będzie dotyczyła równania zegara, co brzmi zapewne dość zagadkowo. Pod tą tajemniczą nazwą kryje się obliczenie jaki kąt tworzą wskazówki (godzinowa i minutowa) o określonej godzinie.

Można by było spróbować to zrobić przy pomocy kątomierza, ale obawiam się, że nie byłoby to wcale łatwe, a poza tym wyniki nie byłyby dokładne.

Wymyślono więc pewien wzór, za pomocą którego znając godzinę będziemy mogli obliczyć jaki dokładnie kąt jest pomiędzy wskazówkami.

Spójrz na planszę poniżej i zobacz, w jaki sposób powstał ten bardzo pomocny wzór.

# RÓWNANIE ZEGARA

Duża wskazówka („minutowa”) robi pełen obrót w ciągu jednej godziny, więc jej prędkość wynosi:  $\frac{360^\circ}{60 \text{ min}} = \frac{6^\circ}{\text{min}}$

Mała wskazówka („godzinowa”) robi pełen obrót w ciągu 12 godzin, więc jej prędkość wynosi:  $\frac{360^\circ}{12 \text{ godz}} = \frac{30^\circ}{\text{godz}}$

Duża wskazówka z godziną 12:00 tworzy kąt:  $\alpha_1 = 6^\circ \cdot m$

Mała wskazówka z godziną 12:00 tworzy kąt:  $\alpha_2 = 30^\circ \cdot \left(g + \frac{m}{60}\right)$

Tak więc wskazówki zegara o godzinie  $g$  minut  $m$  tworzą kąt:

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{11^\circ}{2} \cdot m - 30^\circ \cdot g$$

$g$  - godziny  $m$  - minuty np. gdy jest godzina 10:30  $g = 10$ ,  $m = 30$



Ze wzoru wynikają następujące zależności:

Kąt jest:

- dodatni, gdy duża wskazówka wyprzedza małą
- ujemny, gdy mała wskazówka wyprzedza dużą
- zerowy, gdy wskazówki pokrywają się

## Rozwiązywanie zadań

Wykorzystajmy więc poznany wzór w praktyce i obliczmy, jaki kąt utworzą wskazówki o godzinie 11:45.

Jeżeli nasza godzina to 11:45, oznacza to, że  $m = 45$ ,  $g = 11$

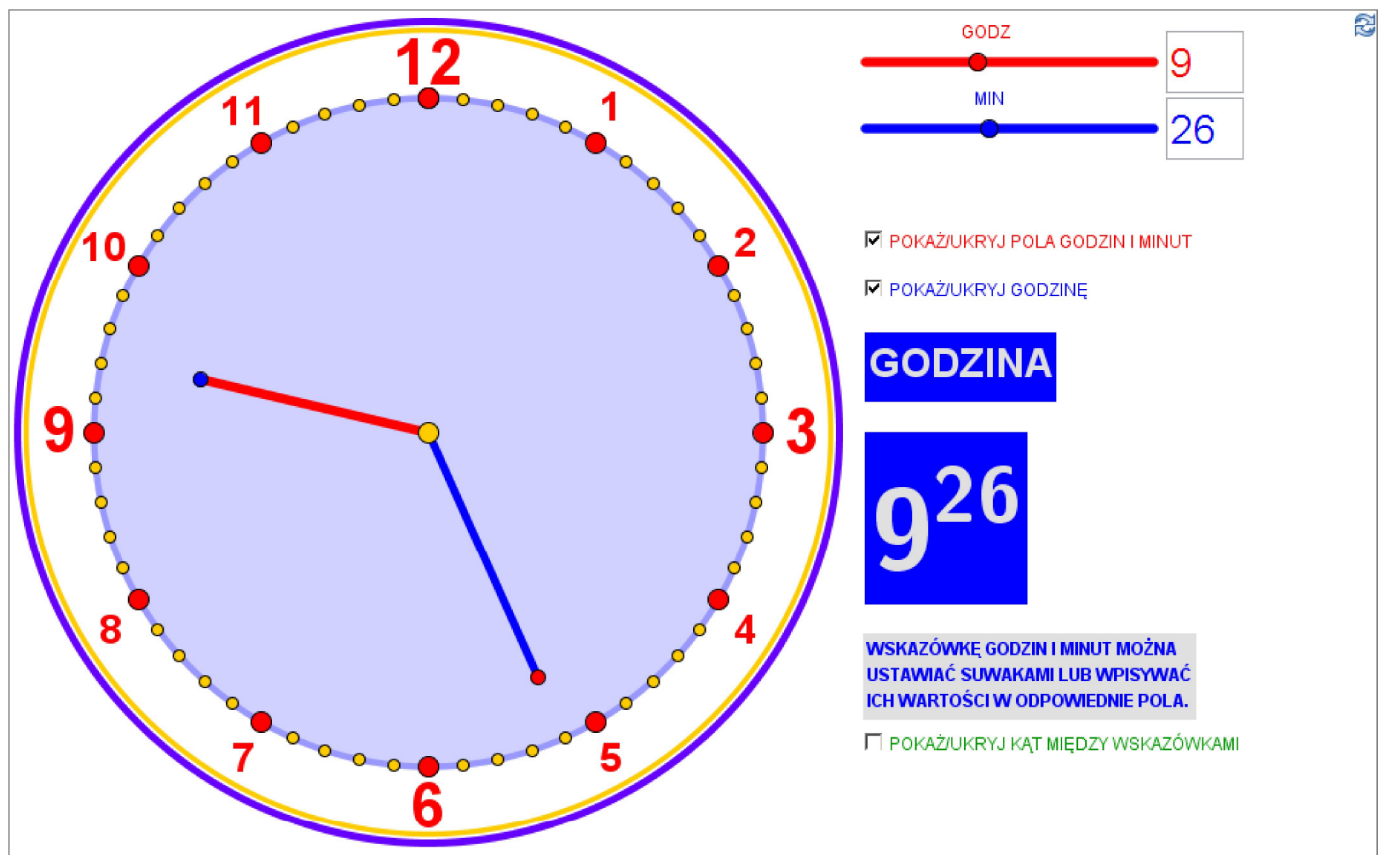
Podstawiając te wielkości do wzoru i po wykonaniu obliczeń otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{11^\circ}{2} \cdot 45 - 30^\circ \cdot 11 = 247,5^\circ - 330^\circ = -82,5^\circ$$

Z tego wynika, że kąt pomiędzy wskazówkami wynosi  $82,5^\circ$  i mała wskazówka (czyli godzinowa) wyprzedza dużą wskazówkę (minutową).

Żeby sprawdzić czy wykonaliśmy poprawne obliczenia skorzystamy z planszy, w której należy na zegarze ustawić poprawną godzinę i zaznaczyć pole wyboru "pokaż kąt między wskazówkami".

## Zegar



Zegar.

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, Utworzony z [GeoGebra](#)

Teraz samodzielnie rozwiąż jeszcze kilka przykładów obliczając jaki kąt między wskazówkami będzie o godzinie:

8:08, 10:20, 4:14

Możesz również wymyślać swoje własne przykłady, ustawiając godziny na zegarze. Pamiętaj jednak, by najpierw samodzielnie spróbować rozwiązać zadanie, a następnie sprawdzić swój wynik

### Kiedy wskazówki zegara będą w linii prostej ?

Żeby wskazówki zegara były w linii prostej, kąt między nimi musi być równy  $180^\circ$ , co zapiszemy równaniem:

$$\frac{11}{2} \cdot m - 30 \cdot g = 180^\circ$$

Przekształcamy równanie, by wyliczyć "m":

$$\frac{11}{2} \cdot m = 180 + 30 \cdot g$$

$$11 \cdot m = 2(180 + 30 \cdot g)$$

$$m = \frac{2(180 + 30 \cdot g)}{11}$$

$$\text{Ostatecznie: } m = \frac{60(6 + g)}{11}$$

Gdy mamy już taką postać równania, możemy za "g" podstawiać różne liczby oznaczające godziny i obliczymy w ten sposób, ile dokładnie powinno być wtedy minut, żeby wskazówki były w linii prostej.

Np.

Gdy  $g = 0$ , to  $m = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ , więc otrzymujemy godzinę  $0:32\frac{8}{11}$ , co oznacza, że wskazówki będą w linii prostej, gdy miną  $32$  pełne minuty i jeszcze  $\frac{8}{11}$  kolejnej minuty po północy lub po 12:00.

Sprawdźmy inne wybrane przykłady:

Gdy  $g = 5$ , to  $m = 60$ , więc otrzymujemy godzinę 6:00, co oznacza, że wskazówki będą w linii prostej dokładnie o tej godzinie.

Gdy  $g = 8$ , to  $m = \frac{840}{11} = 76\frac{4}{11}$ , więc otrzymujemy godzinę 9:16 $\frac{4}{11}$ , ponieważ 76 $\frac{4}{11}$  dają nam jedną pełną godzinę oraz 16 $\frac{4}{11}$  minuty.

Gdy  $g = 11$ , to  $m = \frac{1020}{11} = 92\frac{8}{11}$ , więc otrzymujemy godzinę 12:32 $\frac{8}{11}$ , ponieważ 92 $\frac{8}{11}$  dają nam jedną pełną godzinę oraz 32 $\frac{8}{11}$  minuty.

**Jeśli przeprowadzilibyśmy nasze obliczenia dla wszystkich godzin, to okazałoby się, że wskazówki tworzą linię prostą bez ułamków w minutach tylko o godzinie 6:00.**

Możesz to sprawdzić korzystając z planszy z zegarem, jak w poprzednich zadaniach.

### A teraz zastanówmy się kiedy wskazówki zegara się pokryją ?

Żeby wskazówki zegara się pokryły, kąt między nimi musi być równy  $0^\circ$ , co znów zapiszemy równaniem:

$$\frac{11}{2} \cdot m - 30 \cdot g = 0^\circ$$

Przekształcamy równanie jak poprzednio, by wyliczyć "m":

$$\frac{11}{2} \cdot m = 30 \cdot g$$

$$11 \cdot m = 60 \cdot g$$

$$\text{Ostatecznie: } m = \frac{60 \cdot g}{11}$$

Gdy mamy już taką postać równania, rozpatrzmy różne przypadki dla dowolnych wartości "g".

Np.

Gdy  $g = 0$ , to  $m = 0$ , więc otrzymujemy godzinę 0:00, co oznacza, że wskazówki pokryją się dokładnie o tej godzinie.

Gdy  $g = 1$ , to  $m = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ , więc otrzymujemy godzinę 1:05 $\frac{5}{11}$ , co oznacza, że wskazówki pokryją się, gdy minie pięć pełnych minut jeszcze  $\frac{5}{11}$  minuty po godzinie 1:00.

Gdy  $g = 11$ , to  $m = 60$ , więc otrzymujemy godzinę 12:00.

**Jeśli przeprowadzilibyśmy nasze obliczenia dla wszystkich godzin, to okazałoby się, że wskazówki tworzą linię prostą bez ułamków w minutach tylko o godzinie 0:00 oraz 12:00, które wiemy, że na zegarze są przedstawione przez taki sam układ wskazówek.**

W tym przypadku również możesz to sprawdzić korzystając z planszy z zegarem, jak w poprzednich zadaniach.

**Na koniec rozwiążmy jeszcze kilka zadań z portalu.** Już teraz nie powinieneś/powinnaś mieć żadnych problemów. Powodzenia!



[Zadanie 98](#) - W matwieży jedne drzwi mają niesamowitą własność. Można przez nie prze...



[Zadanie 362](#) - Król Pierwiastkus Wielki chciał zaprosić najsławniejszych matematyków ...



[Zadanie 905](#) - Główne wiadomości informacyjne telewizji TV MAT zaczynają się o 19<sup>20</sup>...



[Zadanie 66](#) - Na ratuszowej wieży Deltoigrodu zawsze, gdy wskazówki zegara (minutowa...