MATEMATYKA
INNEGO WYMIARU

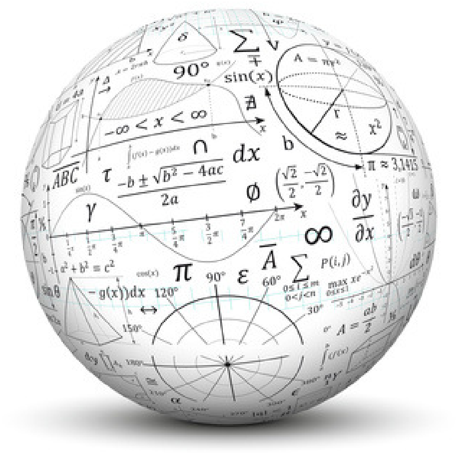
Przebieg zmienności funkcji - monotoniczność, ekstrema, punkty przegięcia

Autor

Dariusz Kulma

Wstęp

Badanie przebiegu zmienności funkcji, a w szczególności określenie monotoniczności i znajdowanie wartości ekstremalnych oraz punktów przegięcia to obszar matematyki, w którym szczególne zastosowanie ma rachunek pochodnych. Spróbujmy na przykładzie omówić te pojęcia.



Przykład

Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ określając monotoniczność, ekstrema i punkty przegięcia. Sporządź wykres tej funkcji.

1. Obliczamy pierwszą pochodną funkcji

$$f'(x)=3x^2-12x+9$$

2. Przyrównujemy pierwszą pochodną do zera.

$$f'(x)=0 <=> 3x^2-12x+9=0 \quad |:3$$

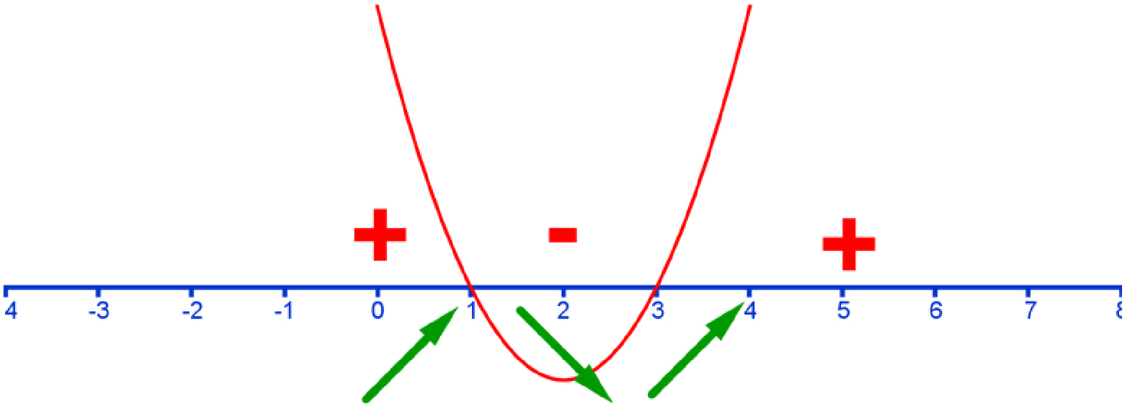
$$x^2-4x+3=0$$

czyli:

$$x_1=1 \;\; i \;\; x_2=3$$

3. Rysujemy szkic pochodnej

Po narysowaniu szkicu pochodnej, która w tym przypadku jest parabolą, określamy, gdzie pochodna jest dodatnia, a gdzie ujemna.



4. Własności wynikające z pierwszej pochodnej

Zgodnie z twierdzeniem - jeśli pochodna ma miejsca zerowe, to znaczy, że funkcja może mieć wartosci ekstremalne dla tych właśnie miejsc zerowych. W tym przypadku funkcja może mieć dwa ekstrema lokalne dla x=1 i dla x=3.

Jeśli pochodna ma wartość dodatnią w określonym przedziale, to znaczy, że funkcja jest w tym przedziale rosnąca, a jeśli ma wartość ujemną w określonym przedziale, to funkcja w tym przedziale jest malejąca.

Oznaczmy strzałkami monotoniczność funkcji.

Jeśli funkcja jest przed miejscem zerowym rosnąca, a potem malejąca to znaczy, że w miejscu zerowym pochodnej znajduje sie MAKSIMUM czyli:

$$f_{max}(1)=2$$

Jeśli funkcja jest przed miejscem zerowym malejąca, a potem rosnąca, to znaczy, że w miejscu zerowym pochodnej znajduje się MINIMUM czyli:

$$f_{min}(3)=-2$$

5. Obliczamy drugą pochodną

Drugą pochodną otrzymamy, jeśli obliczymy pochodną z pierwszej pochodnej

$$f(x)''=(3x^2-12x+9)'=6x-12$$

6. Przyrównujemy drugą pochodną do zera

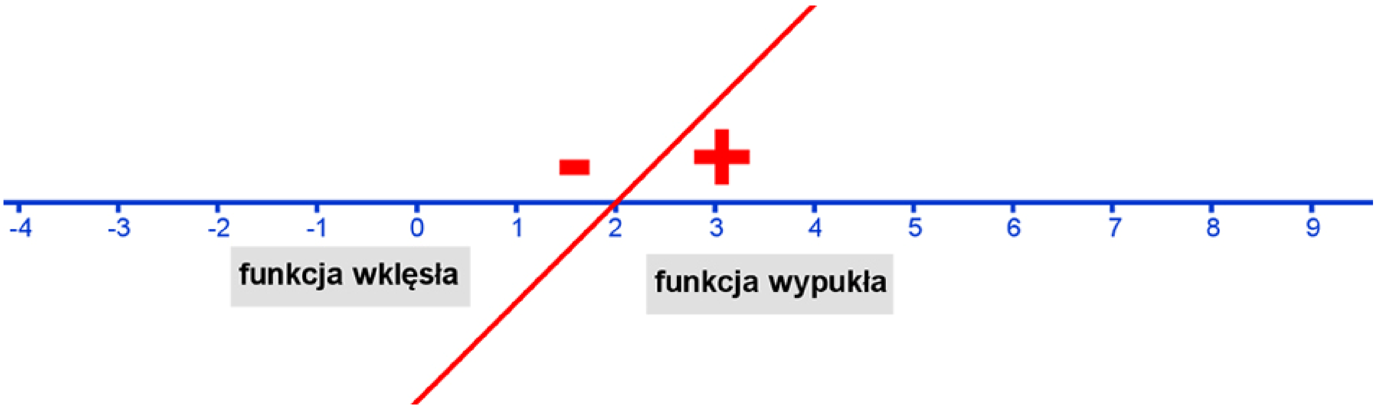
$$f''(x)=0 <=> 6x-12=0$$

czyli:

$$x=2$$

7. Rysujemy szkic drugiej pochodnej

Po narysowaniu szkicu drugiej pochodnej, która w tym przypadku jest funkcją liniową, określamy, gdzie pochodna jest dodatnia, a gdzie ujemna.



9. Własności wynikające z drugiej pochodnej

Zgodnie z twierdzeniem - jeśli druga pochodna ma miejsca zerowe, to znaczy, że funkcja może mieć punkty przegięcia dla tych właśnie miejsc zerowych. W tym przypadku dla x=2 funkcja może mieć punkt przegięcia czyli:

$$f_{pp}(2) = 0$$

Jeśli druga pochodna ma wartość dodatnią w określonym przedziale, to znaczy, że funkcja jest w tym przedziale wypukła, a jeśli ma wartość ujemną w określonym przedziale, to funkcja w tym przedziale jest wklęsła.

10. Zebranie informacji o funkcji w tabeli

Uzupełniamy tabelę na podstawie szkiców pierwszej i drugiej pochodnej. Strzałka skierowana w górę oznacza funkcję rosnącą, strzałka w dół - funkcję malejącą. Wygięcie strzałki w odpowiednią stronę opisuje czy funkcja jest wklęsła czy wypukła.

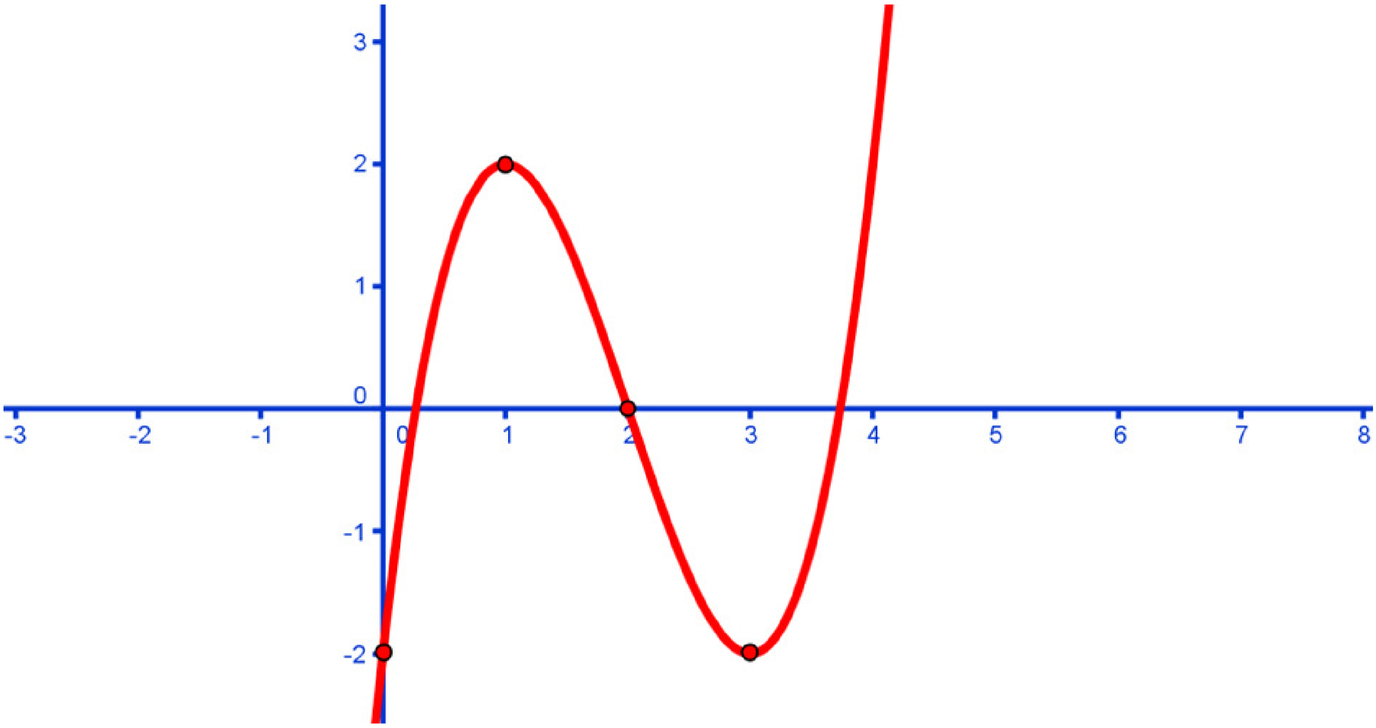
x	...	1	...	2	...	3	...
f'(x)	+	0	-	-	-	0	+
f''(x)	-	-	-	0	+	+	+
f(x)		MAX 2		PP 0		MIN -2	

11. Wykonanie rysunku funkcji

Najpierw liczymy przecięcie z osią OY.

$$f(0) = -2$$

Zaznaczamy ten punkt oraz punkty ekstremalne (1,2), (3,-2) oraz punkt przegięcia (2,0). Linie funkcji prowadzimy zgodnie z kierunkiem i kształtem strzałek znajdujących się w tabeli.


3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8