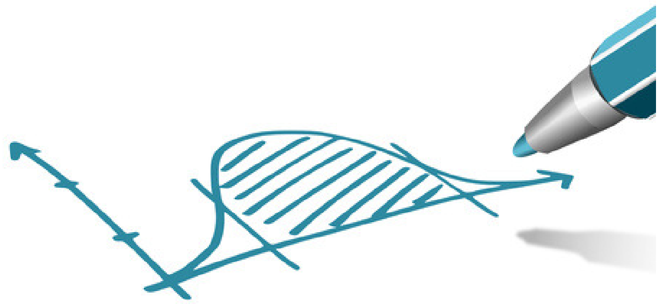
Po co nam całki?

Autor

Dariusz Kulma



Całka, co to takiego?

Nie jest łatwo w kilku słowach zdefiniować całkę. Najprościej można powiedzieć, że jest to pojęcie odwrotne do liczenia pochodnych, Mówimy czasami o całce, że jest to funkcja pierwotna czyli, że jeśli najpierw z jakiejś funkcji policzymy pochodną, a potem obliczymy całkę, to powinniśmy uzyskać dokładnie to samo wyrażenie.

Sprawdźmy.

Weźmy wyrażenie $f(x)=3x^2+4x-7$. Pochodna tej funkcji wyniesie: $f'(x)=6x+4$. Teraz spróbujmy wrócić.

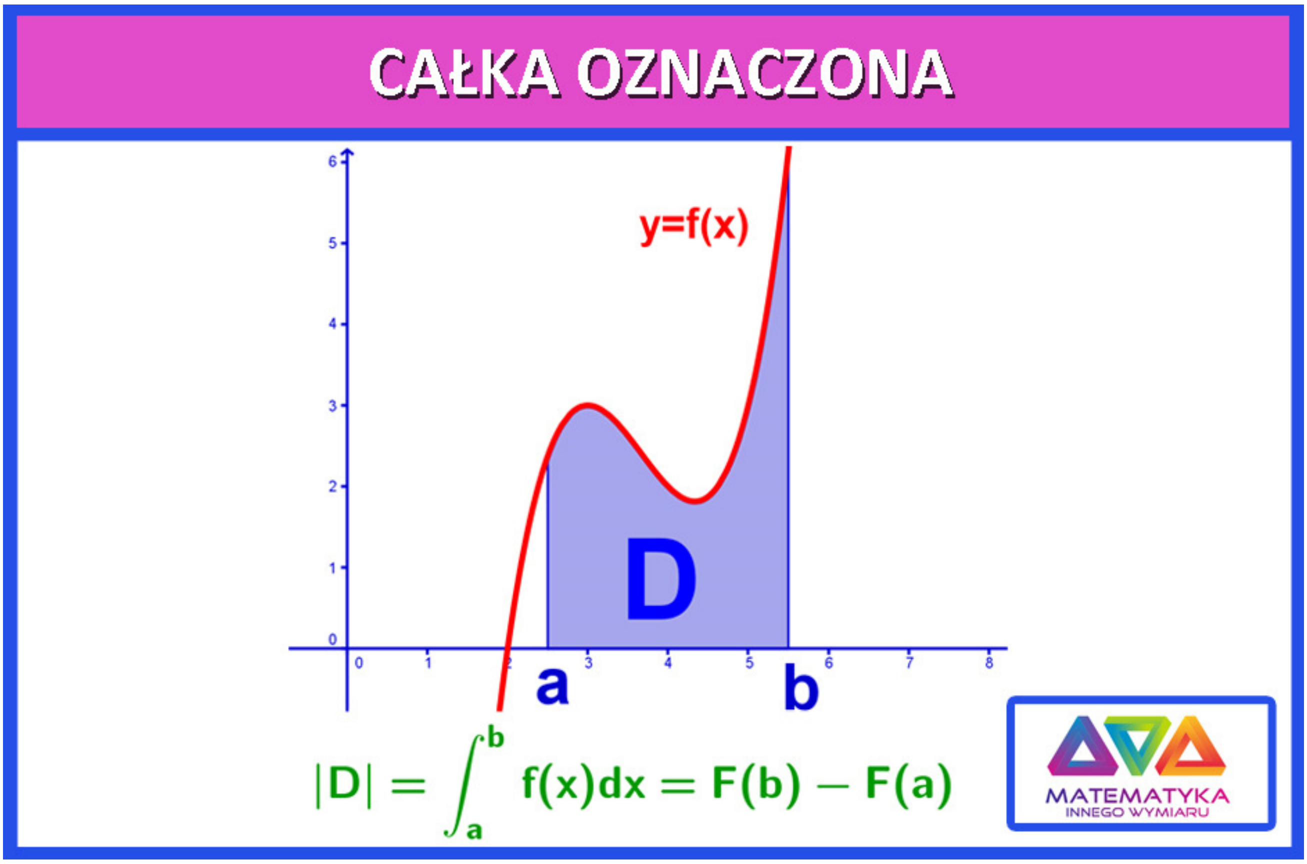
Korzystając z wzoru $\int ax^n dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}$

$\int 6x+4dx=3x^2+4x+C$ Jak widać nie wiadomo co wstawić jako stałą. Wcześniej było -7, a teraz musieliśmy napisać w sposób symboliczny C. Funkcja jest jednak taką samą funkcją dla C=-7.

Całki mają bardzo szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach: fizyce, chemii i wielu innych. Jedno z podstawowych zastosowań całki to liczenie pól powierzchni, długości łuków czy objętości kształtów nieregularnych czyli takich, które ciężko jest wyliczyć z podstawowych wzorów.

Popatrzmy na planszę z całką oznaczoną czyli taką, która jest określona między jakimiś dwoma argumentami. Całka oznaczona jest równa wartości między funkcją a osią OX w tym przedziale.

Całka oznaczona

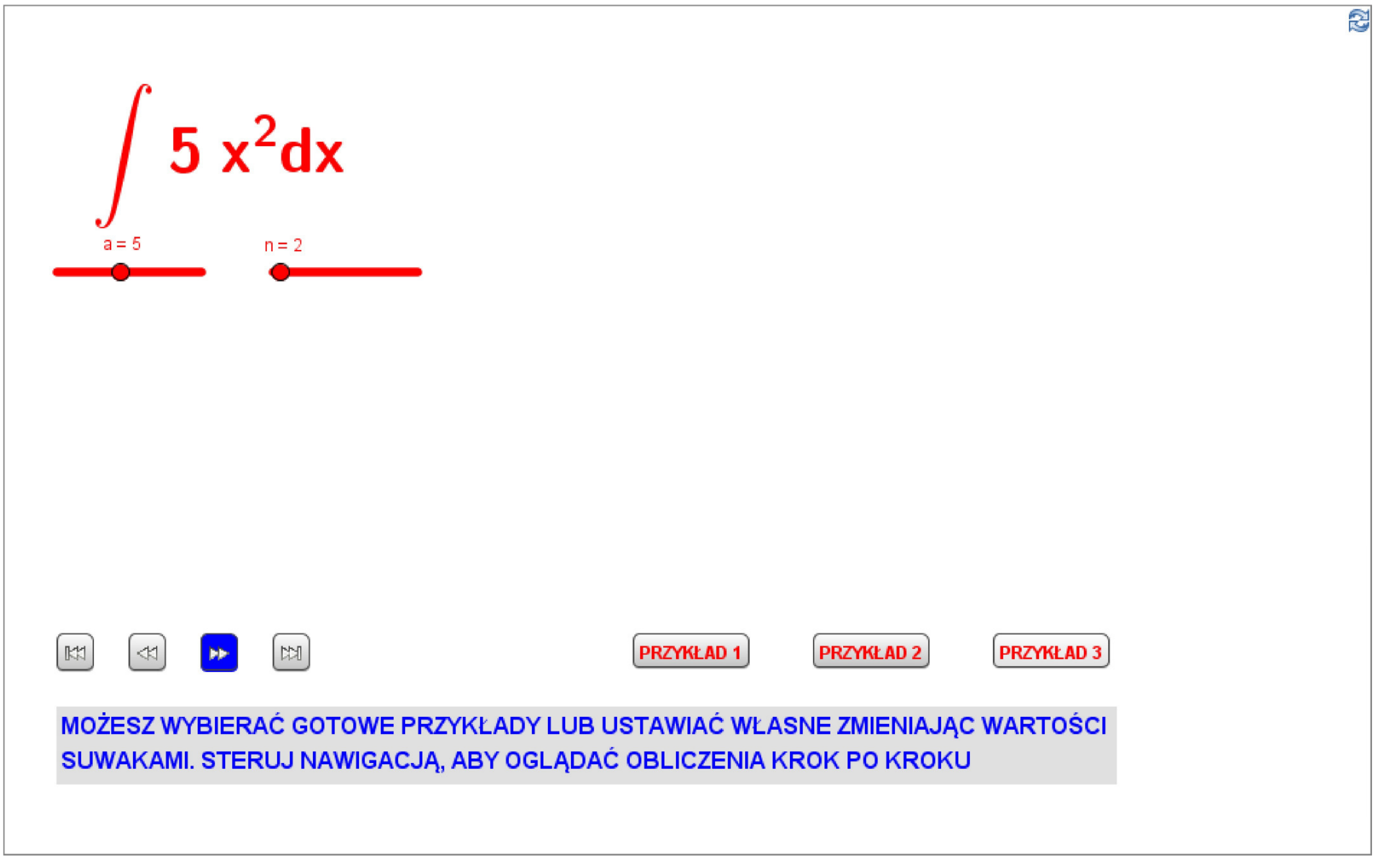


Jak widać, aby policzyć powierzchnię między między funkcją a osią OX, należy policzyć całkę funkcji (F(x)), a następnie obliczyć różnicę tej funkcji pierwotnej dla argumentów, które ograniczają to pole.

Całka nieoznaczona

By mówić jednak o całce oznaczonej i obliczać pola powierzchni, musimy nauczyć się obliczać całki nieoznaczone. Wzorów jest bardzo dużo. Na poniższych planszach znajdziesz wszystkie najważniejsze. W planszy interaktwnej zmieniaj podstawę i wykładnik potęgi, by zobaczyć jak się zmienia wartość całki.

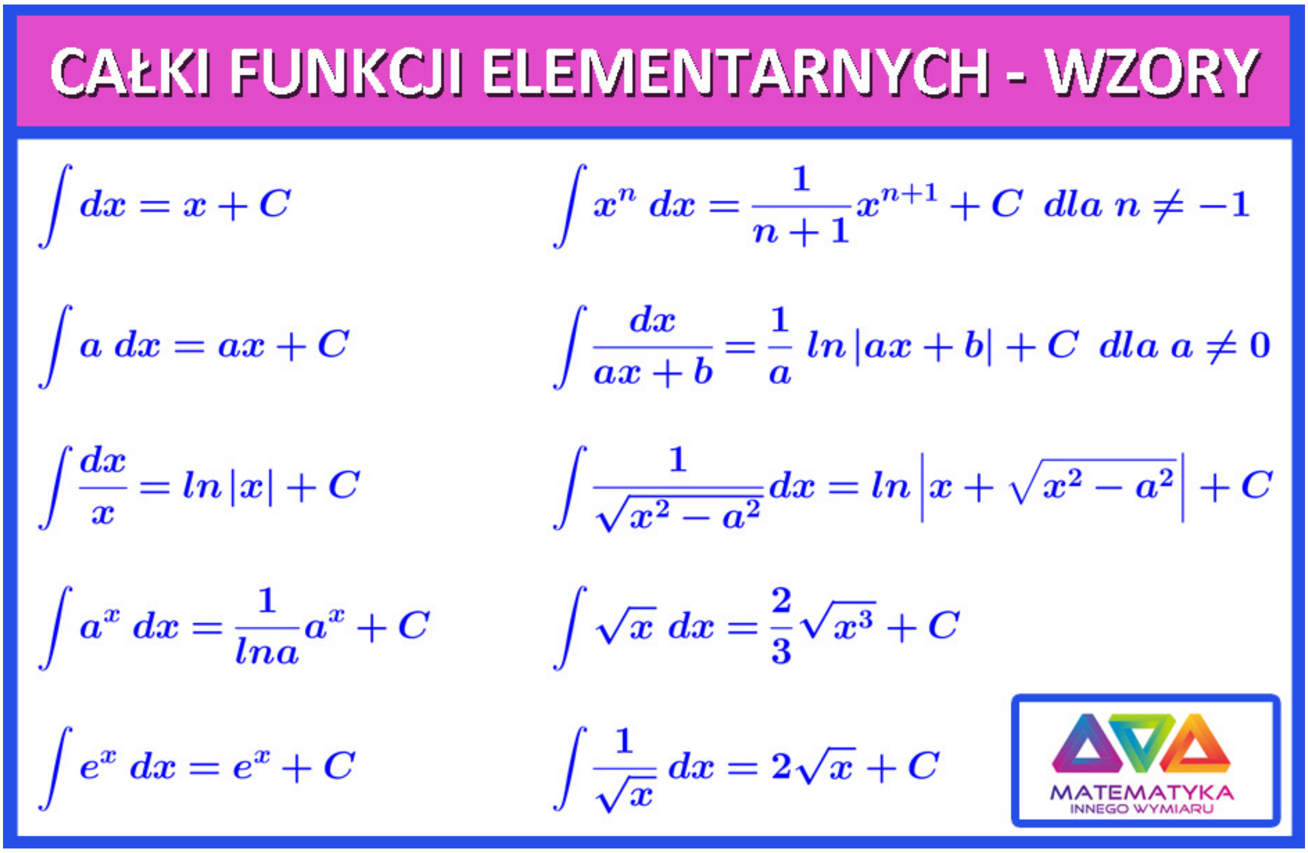
Całka nieoznaczona



Całka oznaczona.

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, Utworzony z GeoGebra

Całki funkcji elementarnych, cz.1



CAŁKI FUNKCJI ELEMENTARNYCH - WZORY

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad dla\ n \neq -1$$

$$\int a\,dx = ax + C$$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\,ln\,|ax+b| + C \quad dla\ a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln\,|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

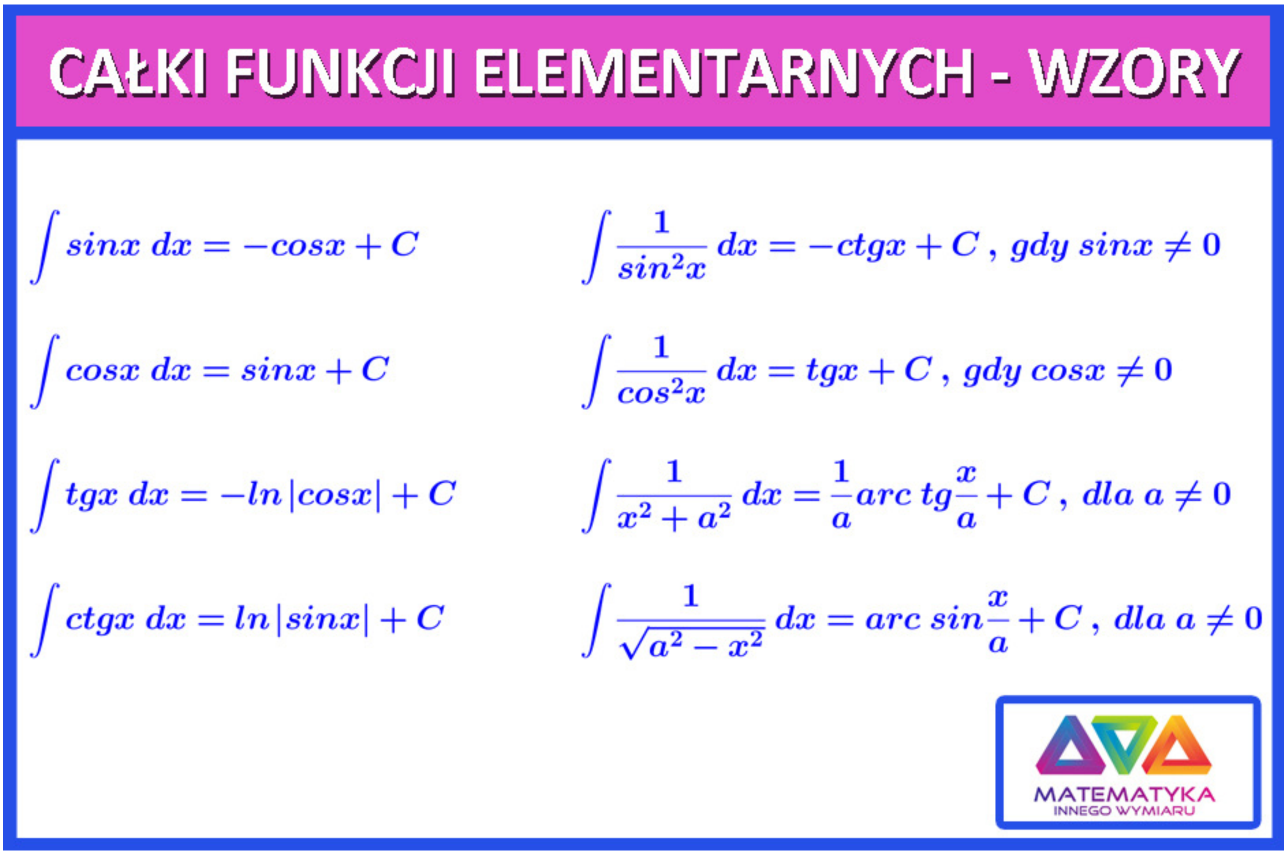
$$\int a^x\,dx = \frac{1}{lna}a^x + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C$$

Całki funkcji elementarnyh, cz.2



Całkowanie przez podstawienie

Jest to sposób całkowania, w którym podstawiamy zmienną za jakiś fragment naszego wyrażenia znajdującego się pod całką. Obliczamy ją posługując się zmienną i wracamy znowu do wcześniejszego wyrażenia. Poniżej kilka przykładów dotyczących podstawienia, które możesz oglądać krok po kroku.

Obliczanie całek metodą podstawiania

Całkowanie przez części

Metoda, w której trudno jest obliczyć zadaną całkę, a po zastosowaniu wzoru:

$\int uv' = uv - \int vu'$, gdzie u' i v' oznaczają pochodne funkcji u i v, obliczenie staje się dużo łatwiejsze. Obejrzyj kilka przykładów na poniższej planszy.

Obliczanie całek metodą całkowania przez części

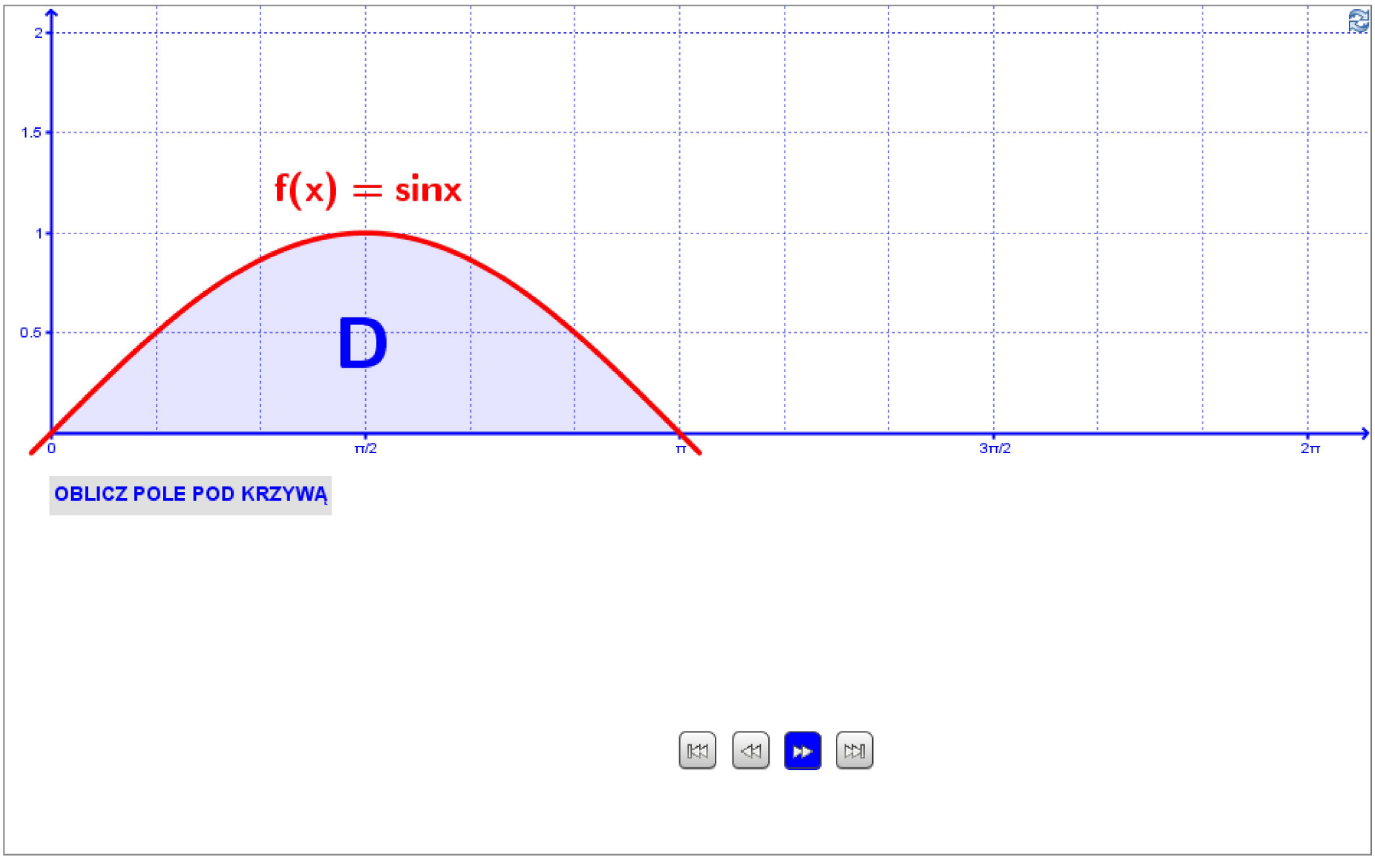
Obliczanie pola pod funkcją

Na początek spróbujmy obliczyć pole pod funkcją liniową w określonych granicach. Obejrzyj poniższą planszę.

Całka oznaczona funkcji liniowej

A teraz trochę trudniejszy przykład - policzymy pole pod funkcją sinus w przedziale od zera do pi. Obejrzyj planszę krok po kroku.

Obliczanie pola za pomocą całki

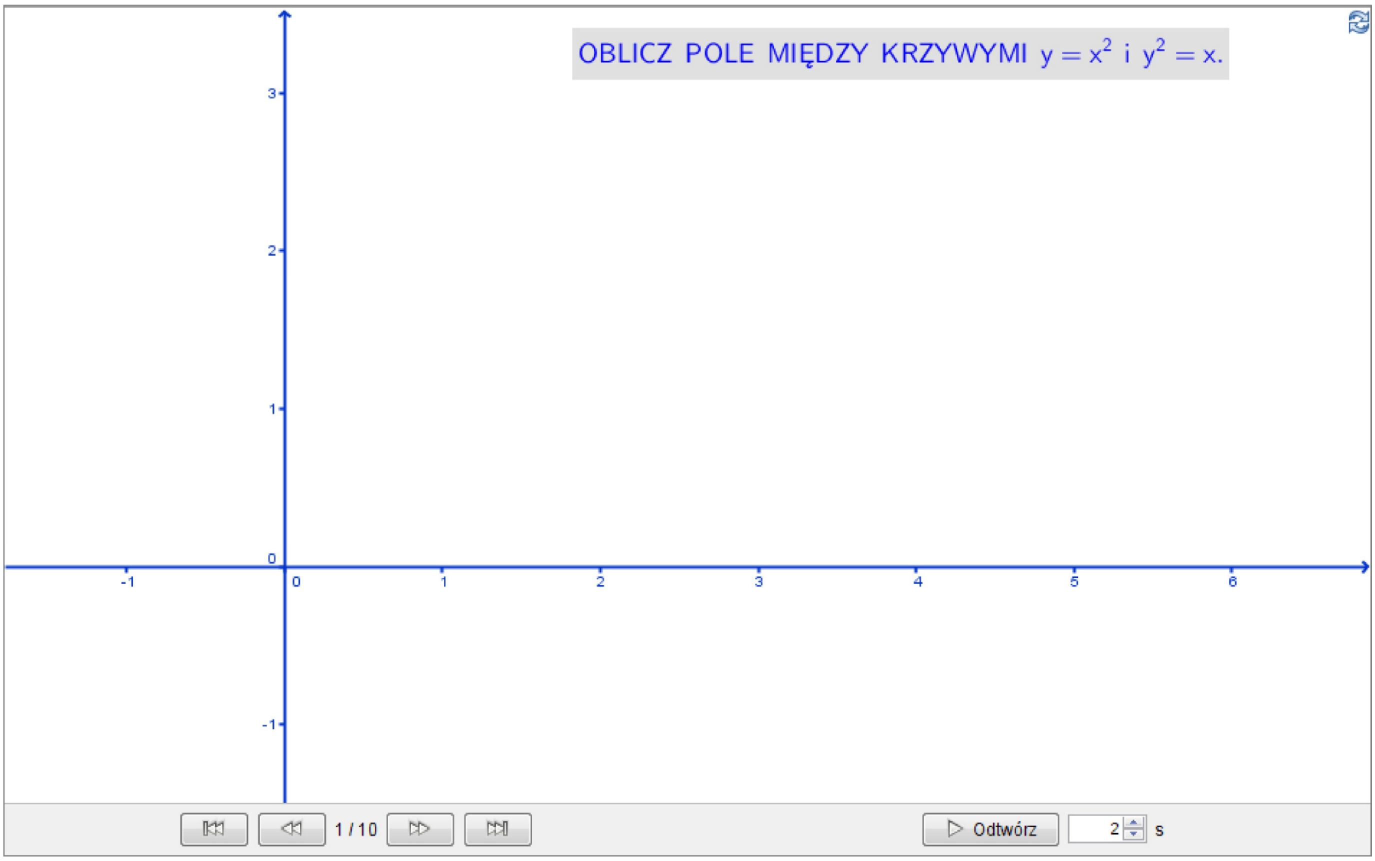


Obliczanie pola za pomocą całki .

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, 28 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

A teraz pole trochę między dwoma funkcjami. Należy od pola pod jedną funkcją odjąć pole pod drugą funkcją. W praktyce od funkcji z wyższymi wartościami odejmujemy funkcję z niższymi. Obejrzyj przykład w zadaniu interaktywnym.

Obliczanie pola między funkcjami



Obliczanie pola między funkcjami za pomocą całki. Steruj przyciskami, aby zapoznać się z kolejnymi krokami przekształcenia.

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, 28 Styczeń 2013, Utworzony z GeoGebra

Jak już wspominaliśmy, całki można wykorzystywać do obliczenia wielu wartości np. pola powierzchni bocznej brył obrotowych. Obejrzyj planszę statyczną.

Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej

Zadania

Na koniec kilka zadań z portalu MIW.

- Zadanie 995 - Pole zawarte między wykresem funkcji $y = \sin x$ a osią Ox...
- Zadanie 1173 - Pochodna wyrażenia $f(x) = x^x$ wynosi:...
- Zadanie 1186 - Całka $n \int x^n \, dx$ ma postać:...
- Zadanie 1187 - Pole obszaru między parabolą $y = x^2 + x$ a osią Ox wynosi:...
- Zadanie 1188 - Pole między prostą $y = -x + 2$ i parabolą $y = -x^2 + 4$...
- Zadanie 1189 - Wartość całki $\int \frac{a}{bx+d} \, dx$ przyjmuje postać:...
- Zadanie 1190 - Wartość całki $\int e^{ex} \, dx$ wynosi:...
- Zadanie 1191 - Pole między osią Ox a funkcją sin x w przedziale od π ...

[Zadanie 1192](#) - Pochodna całki ze stałej:...

[Zadanie 1193](#) - Wartość całki $\int_{2p}^{2t} \cos x \ dx$ wynosi:...

[Zadanie 1194](#) - Funkcję homograficzną $y=\frac{1}{x}$...

[Zadanie 1197](#) - Wartość $\int (3x^4+2x) \ dx$ jest równe:...

[Zadanie 1198](#) - Pole obszaru ograniczonego funkcjami $y=x^3$ i $y=x$ ...