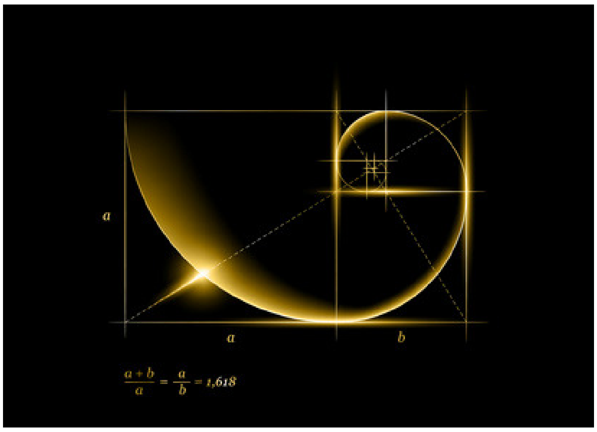
Ciąg Fibonacciego czyli jeszcze o złotej proporcji

Autor

Dariusz Kulma

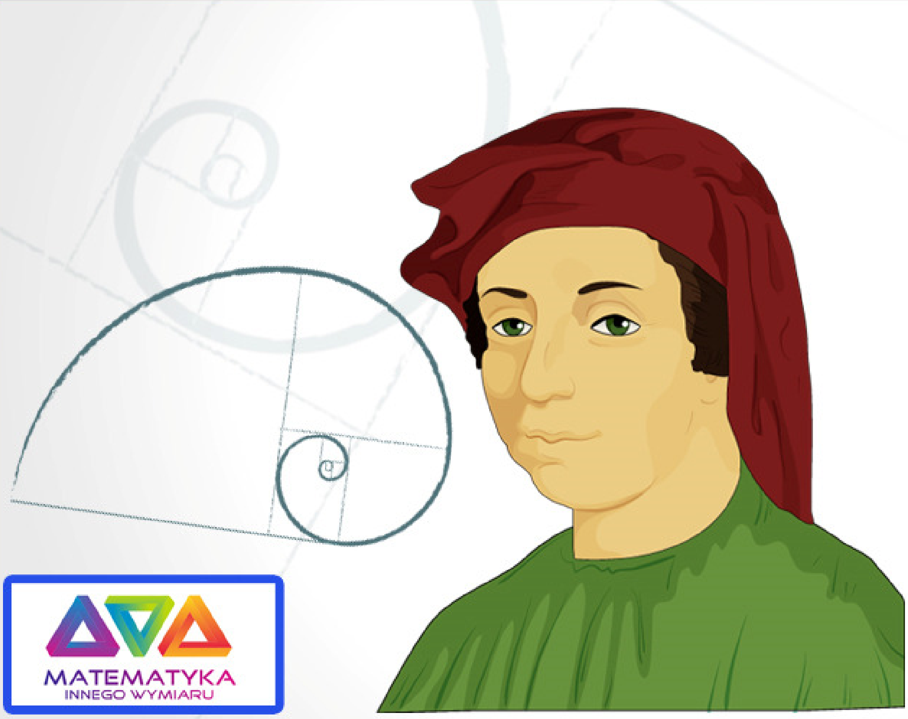


Wstęp

Historia matematyki bywa nieprzewidywalna. Wieki obserwacji i odkryć dotyczących złotej liczby zdawałoby się wyczerpały temat. A jednak nie! A wszystko za sprawą Leonardo Pisano Fibonacciego, który żył w latach ok. 1175 - 1250 n.e. Co ciekawe, nazwisko jest tak naprawdę przydomkiem ,ponieważ Fibonacci znaczy po prosty "syn Bonacciego". Warto dodać, że Fibonacci był gorącym zwolennikiem wprowadzenia arabskiego zapisu liczbowego.

Fibonacci

FIBONACCI



Urodził się ok. 1175r. w Pizie. Mieszkając w Bugii (dzisiejszej Algierii) uczył się matematyki u nauczycieli arabskich. Później studia matematyki wzbogacił o liczne podróże. Znany jest przede wszystkim z pewnego ciągu rekurencyjnego liczb całkowitych, nazwanego ciągiem Fibonacciego przez Edwarda Lucasa, francuskiego matematyka, dopiero w XIX wieku. Nazwę tę ciąg zawdzięcza rozważaniom Fibonacciego nad ... królikami, kóry zastanawiał się ile w klatce będzie królików po roku, jeżeli zamknięta para królików co miesiąc rodzi parę królików, a te mogą się rozmnażać po miesiącu.

Wpływ królików na odkrycia matematyczne

Fibonacci w 1202 roku wydał książkę **Liber Abaci** (Księga Abaku). Ironiczny tytuł, ponieważ w książce Fibonacci wykazuje korzyści stosowania arabskiego zapisu liczbowego nad metodami opartymi na systemie abaku i cyfrach rzymskich. W książce poruszone są tematy podzielności, teorii liczb, symbolika matematyczna, ale również zasady księgowania, reguły zysków i strat czy wymiany pieniędzy. Jednak najsłynniejszym zadaniem stało się zadanie o królikach. Oto ono:

Ile par królików będziemy mieli na końcu roku, jeśli zaczniemy w styczniu z jedną parą królików, ta w każdym następnym miesiącu, poczynając od marca, wyda na świat kolejną parę królików i z każdej pary urodzą się kolejne pary po dwóch miesiącach od narodzin?

Jako przesiębiorca i finansista, zamieścił swoje obliczenia w tabeli. Okazało się, że łączna liczba królików w poszczególnych miesiącach tworzyła zadziwiający ciąg liczb. Kolejne liczby były sumą dwóch poprzednich! Zobacz poniższą tabelę z danymi.

MIESIĄC	POKOLENIE 1	POKOLENIE 2	POKOLENIE 3	POKOLENIE 4	POKOLENIE 5	POKOLENIE 6	RAZEM
STYCZEŃ	1	...	...	...	...	...	1
LUTY	1	...	...	...	...	...	1
MARZEC	1	1	...	...	...	...	2
KWIECIEŃ	1	2	...	...	...	...	3
MAJ	1	3	1	...	...	...	5
CZERWIEC	1	4	3	...	...	...	8
LIPIEC	1	5	6	1	...	...	13
SIERPIEŃ	1	6	10	4	...	...	21
WRZESIEŃ	1	7	15	10	1	...	34
PAŹDZIERNIK	1	8	21	20	5	...	55
LISTOPAD	1	9	28	35	15	1	89
GRUDZIEŃ	1	10	36	56	35	6	144

Liczby **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144**,...można tworzyć w nieskończoność. Taki ciąg nazywamy ciągiem rekurencyjnym, gdzie każdy kolejny wyraz zależny jest od poprzednich. Ale gdzie jest tu związek ze złotą liczbą?

Nieskończenie złoty ciąg

Okazuje się, że związek ciągu Fibonacciego ze złotą liczbą jest wręcz niebywały. Dzieląc kolejne wyrazy tego ciągu przez wyraz poprzedni otrzymujemy liczby coraz bliższe liczbie zlotej φ (patrz tabela poniżej). Już dzieląc wyraz trzynasty przez dwunasty mamy błąd rzędu 0.00002. Granicą ciągu Fibonacciego jest więc złota liczba.

WYRAZ CIĄGU	a_n + 1/a_n	RÓŻNICA MIĘDZY LICZBĄ φ
1	1	0.6180339887
1	2	0.3819660113
2	1.5	0.1180339887
3	1.6666666667	0.0486326779
5	1.6	0.0180339887
8	1.625	0.0069660113
13	1.6153846154	0.0026493734
21	1.619047619	0.0010136303
34	1.6176470588	0.0003869299
55	1.6181818182	0.0001478294
89	1.6179775281	0.0000564607
144	1.6180555556	0.0000215668

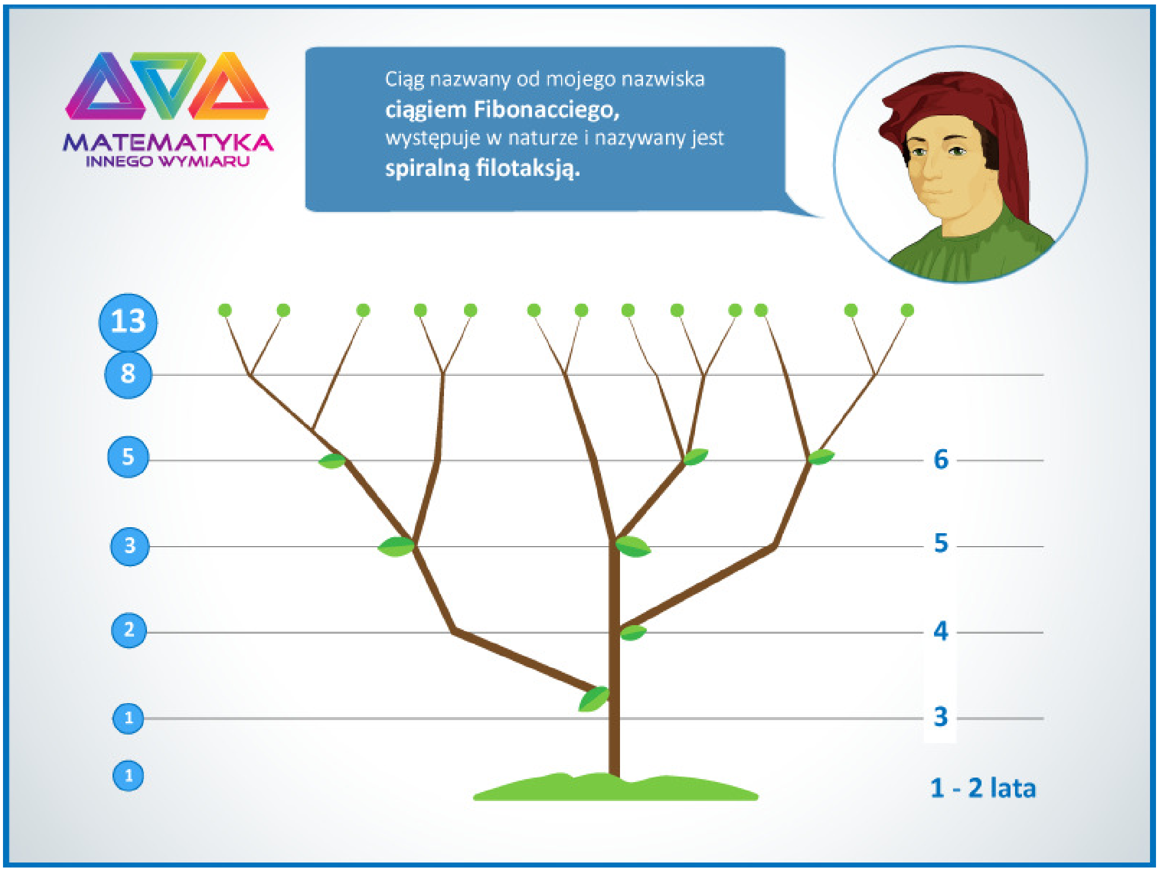
Wzór ciągu Fibonacciego

Ciąg określony jest rekurencyjnie. Są dwa poglądy na to czy ciąg powinien zaczynać się od 0 czy od 1. Biorąc jednak fakt, że ciągi opieramy o liczby naturalne n>0, częściej obserwujemy ciągi zaczynające się od liczby 1. Wzór rekurencyjny może również zawierać wyraz zerowy. Oto wzór:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0; \\ 1 & \text{dla } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{dla } n > 1. \end{cases}$$

Ciąg Fibonacciego w przyrodzie

Okazuje się, że zależność można odnaleźć w przyrodzie. Chociażby ilość kolejnych pędów czy gałęzi drzew albo płatków liścia tworzy ciąg Fibonacciego.



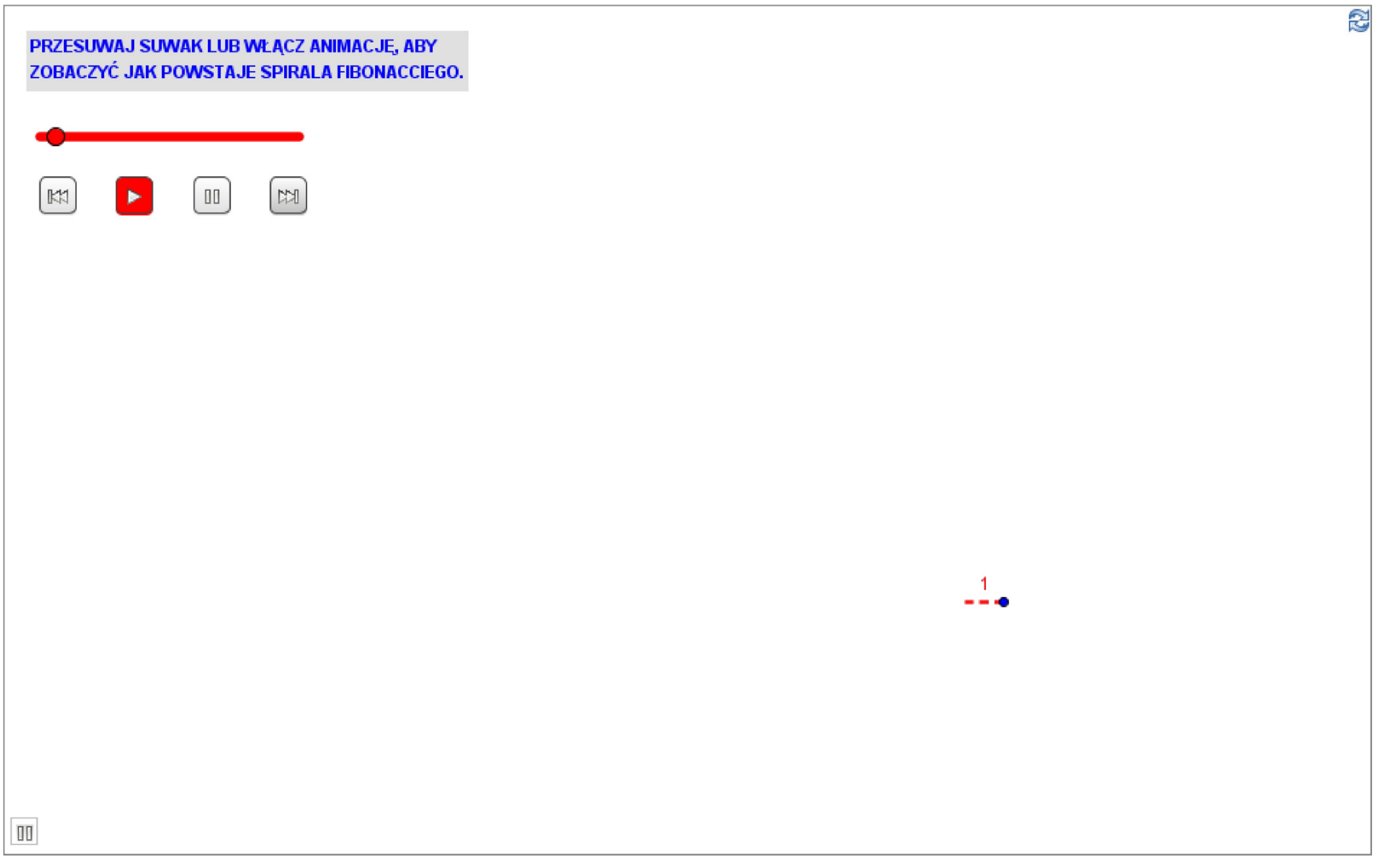
Złoty prostokąt a spirala Fibonacciego

Bardzo ciekawą zależnością jest spirala Fibonacciego, która ma bezpośredni związek ze złotym postokątem, czyli takim, którego stosunek długości do szerokości jest w złotym podziale. Przypomnijmy konstrukcję złotego prostokąta.

[Konstrukcja złotego prostokąta]

Jak już mamy złoty prostokąt, to okazuje się, że gdy zaczniemy rysować łuki o długości promienia, który jest kolejnym wyrazem ciągu Fibonacciego, to otrzymamy spiralę. Obejrzyj animację posługując się planszą interaktywną.

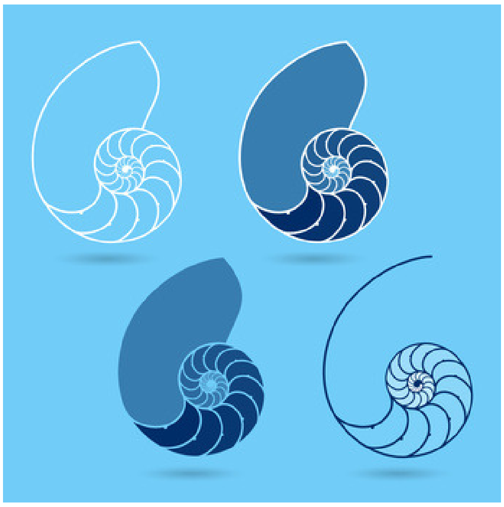
Spirala Fibonacciego



Spirala Fibonacciego

Dariusz Kulma - Matematyka innego wymiaru, Utworzony z [GeoGebra]

A oto bezpośrednie odniesienie spirali do przyrody. Większość spiralnych muszli opiera się na ciągu Fibonacciego.



KAPITAŁ LUDZKI
CZŁOWIEK – NAJLEPSZA INWESTYCJA!

ELITMAT
FIRMA EDUKACYJNO-WYDAWNICZA

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY